SISTEMAS NEWTONIANOS
SOLUCIÓN CLASE AUXILIAR #1
UNIDAD 1: MÉTODOS NUMÉRICOS

Profesor Auxiliar: Ignacio Abarca Mesa
Sección 7
17 de Agosto de 2010

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Llamaremos todos las magnitudes relacionadas con el resorte superior, es decir el que está a una distancia L de la argolla, con el numero 1, mientras que las magnitudes relacionadas con el resorte inferior se denominaran con el numero 2.

De esta manera las elongaciones, que se identificaran con la letra "y", dependientes de la posición del resorte "x" son las siguientes:

$$y_1 = \sqrt{L^2 + x^2}$$

$$y_2 = \sqrt{4 \cdot L^2 + x^2}$$

Con esto las fuerzas que ejerce el resorte son:

$$F_1 = -K \cdot \sqrt{L^2 + x^2}$$

$$F_2 = -K \cdot \sqrt{4 \cdot L^2 + x^2}$$

Las componentes horizontales de estas fuerzas son:

$$F_{1x} = -K \cdot \sqrt{L^2 + x^2} \cdot cos(\varphi_1) = -K \cdot \sqrt{L^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}} = -K \cdot x$$

$$F_{2x} = -K \cdot \sqrt{4 \cdot L^2 + x^2} \cdot cos(\varphi_2) = -K \cdot \sqrt{4 \cdot L^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{4 \cdot L^2 + x^2}} = -K \cdot x$$

Luego aplicando la ley de newton se obtiene:

$$F_{1x} + F_{2x} = m \cdot \ddot{x}$$

$$-K \cdot x - K \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$

$$-2 \cdot K \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN

$$\ddot{x} = \frac{-2 \cdot K \cdot x}{m}$$

$$\frac{x_{i+1} - 2 \cdot x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} = \frac{-2 \cdot K}{m} \cdot x_i$$

$$x_{i+1} = \frac{-2 \cdot K}{m} \cdot \Delta t^2 \cdot x_i + 2 \cdot x_i - x_{i-1}$$

$$x_i = \frac{-2 \cdot K}{m} \cdot \Delta t^2 \cdot x_{i-1} + 2 \cdot x_{i-1} - x_{i-2}$$

$$x_i = \frac{-2 \cdot 2}{0.1} \cdot \Delta t^2 \cdot x_{i-1} + 2 \cdot x_{i-1} - x_{i-2}$$

$$x_i = -40 \cdot \Delta t^2 \cdot x_{i-1} + 2 \cdot x_{i-1} - x_{i-2}$$

DETERMINACIÓN DE CONDICIONES INICIALES

Como en el enunciado no se dice nada sobre las condiciones iniciales, ni para el caso experimental ni para la resolución numérica, se deben determinar usando algún criterio arbitrario y por simplicidad lo mas intuitivo posible.

A pesar de lo anterior hay que tener presente que para tener coherencia entre los resultados experimentales y numéricos, la solución debe obtenerse con las condiciones iniciales reales que se usarán en el experimento.

Para la posición inicial pensemos que el resorte puede estirarse magnitudes del orden del estiramiento que provocaría el anillo colgando de este, esto sería:

$$x_o = \frac{m \cdot g}{K} = \frac{0.1[Kg] \cdot 10[{}^{m}/_{S}]}{2[{}^{N}/_{m}]} = 0.5\ [m]$$

Para la velocidad lo más cómodo experimentalmente es hacer partir el anillo del reposo, es decir $v_o = 0$.

De lo anterior obtenemos la posición x_1 como:

$$x_1 = 2 \cdot v_o + x_o = 2 \cdot 0 + 0.5 = 0.5\ [m]$$

Hay que tener presente que estas condiciones iniciales fueron impuestas de manera absolutamente arbitraria y se podrían haber impuesto otras, pero consideré estas pues creo que sería lo más adecuado para realizar un experimento.

Analicemos el paso. Es claro que nunca se puede sobrepasar la velocidad máxima que se obtiene a partir de igualar energías.

$$\frac{1}{2} \cdot K \cdot {x_o}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_{max}}^2$$

Se tiene que existe una unidad de tiempo que es:

$$\frac{x_o}{v_{max}} = \sqrt{\frac{m}{K}} = \sqrt{\frac{0.1}{2}}[s] \approx 0.2236[s]$$

Con esto se tiene una idea del orden de tiempo con el que estamos trabajando, y que más adelante en el curso se verá que efectivamente corresponde al periodo de una masa oscilando con un solo resorte, pero no es el objetivo en este caso.

Consideremos entonces un paso un orden de magnitud a este: $\Delta t = 0.045\ [s]$ y con 100 puntos iteramos hasta 0.45 $[s]$

ITERACIÓN

La ecuación a iterar es la siguiente:

$$x_i = -40 \cdot 0.045^2 \cdot x_{i-1} + 2 \cdot x_{i-1} - x_{i-2}$$

$$x_i = -0.081 \cdot x_{i-1} + 2 \cdot x_{i-1} - x_{i-2}$$

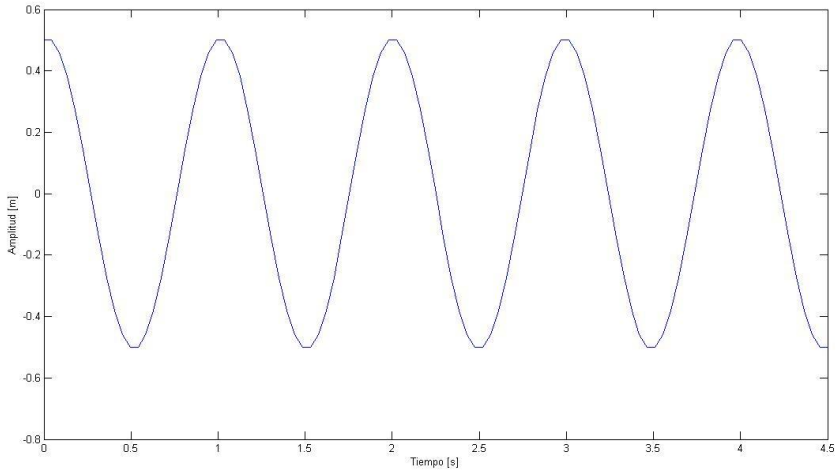
$$x_i = 1.919 \cdot x_{i-1} - x_{i-2}$$

Y la iteración en MATLAB es:

```
x(1)=.5;
x(2)=.5;

for i=3:101
    x(i)=1.919*x(i-1)-x(i-2);
end

t=0:0.045:4.5;
plot(t,x);
```



SOLUCIÓN PROBLEMA 2

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para obtener la ecuación de movimiento se debe obtener la componente tangencial del peso y se iguala a la aceleración, que corresponde al producto entre la aceleración angular y el largo del péndulo.

$$-m \cdot g \cdot sen(\theta) = m \cdot l \cdot \ddot{\theta}$$

SOLUCIÓN ECUACIÓN

Se debe reemplazar las variables por sus equivalentes discretos y se obtiene la siguiente ecuación:

$$-m \cdot g \cdot sen(\theta_i) = m \cdot l \cdot \left(\frac{\theta_{i+1} - 2 \cdot \theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta t^2}\right)$$

Reordenando para poder iterar se obtiene:

$$\theta_i = -\Delta t^2 \cdot \frac{g}{l} \cdot sen(\theta_{i-1}) + 2 \cdot \theta_{i-1} - \theta_{i-2}$$

ITERACIÓN

De manera análoga al problema 1 obtengamos una unidad de tiempo para tener un orden de magnitud del paso:

$$\sqrt{\frac{l}{g}} = 0.316\ [s]$$

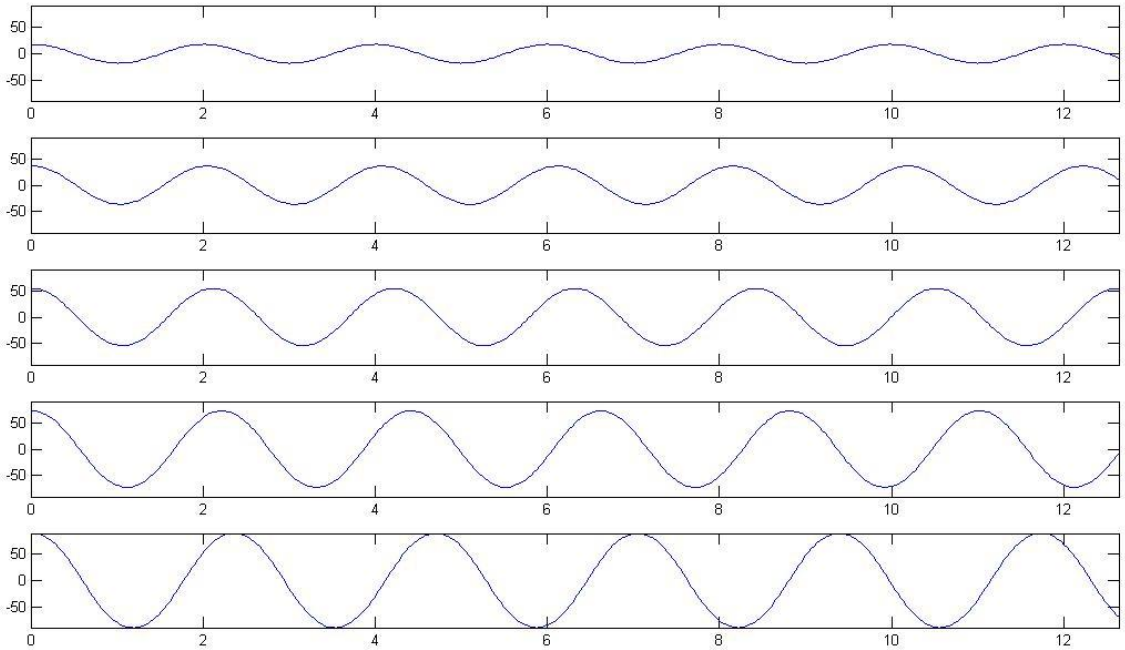
En unidades posteriores se verá que el valor anterior equivale al periodo para un péndulo simple con amplitudes pequeñas. Busquemos un paso que sea un orden de magnitud menor que lo anterior.

$$\Delta t = 0.0316\ [s]$$

$$\theta_i = -0.0316^2 \cdot \frac{10}{1} \cdot sen(\theta_{i-1}) + 2 \cdot \theta_{i-1} - \theta_{i-2}$$

Finalmente la ecuación a iterar es la siguiente:

$$\theta_i = -(0.01) \cdot sen(\theta_{i-1}) + 2 \cdot \theta_{i-1} - \theta_{i-2}$$

El código MATLAB para realizar esto es:

```
clear
t=0:0.0316:3.16*4;
for j=1:5

x(1,j)=(j/5)*(pi/2);
x(2,j)=(j/5)*(pi/2);

for i=3:(100*4)+1
    x(i,j)=-(.01)*sin(x(i-1,j))+2*x(i-1,j)-x(i-2,j);
end

subplot(5,1,j)

plot(t,x(:,j)*(180/pi));
ylim([-90 90])
xlim([0 3.16*4])

end
```