Problemas - Auxiliar

Priscilla Nowajewski B.

3 de septiembre de 2010

Momento de Inercia y Energia de rotacion

Problem 1. Se considera una molecula de Oxígeno (O_2) rotando en el plano x-y alrededor del eje z. El eje de rotación pasa a través del centro de la molécula, perpendicular a su largo. La masa de cada átomo de oxígeno es m y la separación promedio entre dos átomos es d.

- **Calcular el momento de inercia de la molécula alrededor del eje z.**

  Acá se aplica directamente la definición del momento de inercia, como cada atomo está a una distancia $d/2$ del eje z, el momento de inercia es:

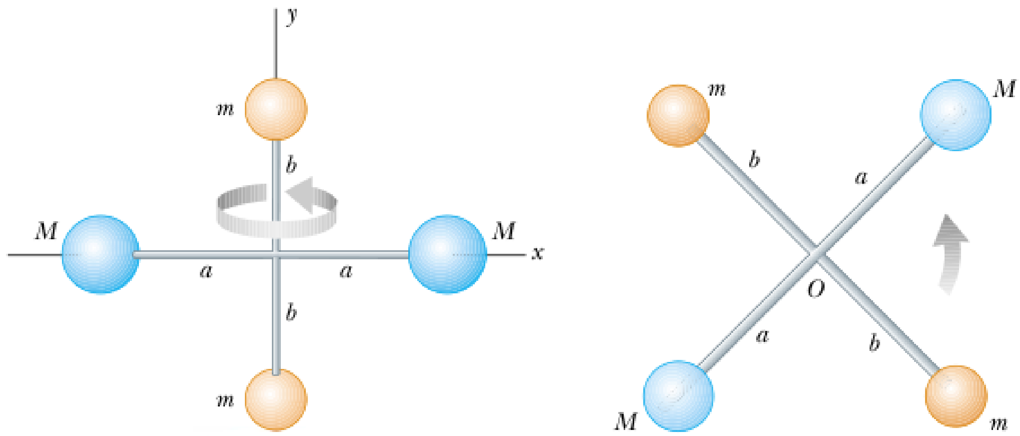
$$\begin{aligned} I =& \sum_i m_i\, r_i^2 \\ =& m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ =& \frac{md^2}{2} \end{aligned}$$

- **Si la velocidad angular de la mólecula alrededor del eje z es ω, cual es el valor de la energía cinética de rotación?**

  Acá simplemente se usa la ecuación para la energía de rotación:

$$\begin{aligned} K_R =& \frac{1}{2} I\omega^2 \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{md^2}{2}\right)\omega^2 \\ K_R =& \frac{md^2}{4}\omega^2 \end{aligned}$$

Problem 2. Cuatro esferas pequeñas se adhieren a los extremos de dos varillas de masa despreciable, que yace en el plano x-y. Se asume que el radio de las esferas es pequeño comparado con las dimensiones de las varillas.



- **Si el sistema rota alrededor del eje y (fig a) con una velocidad angular ω, encontrar el momento de inercia y la energia cinética de rotación alrededor de este eje.**

  Hay que notar que en este caso, las unicas masas que contribuyen a la rotación son las que permanecen en el eje x, las que están en y no contribuyen a la rotación ya que se encuentran en el eje de rotación, luego:

$$
\begin{aligned}
I_y =& \sum_i m_i r_i^2 \\
=& Ma^2 + Ma^2 \\
=& 2Ma^2
\end{aligned}
$$

  La energia rotacional es:

$$
\begin{aligned}
K_R =& \frac{1}{2} I_y \omega^2 \\
=& Ma^2 \omega^2
\end{aligned}
$$

- **Suponga que el sistema rota en el plano x-y alrededor del eje z a traves de O. Calcular el momento de inercia y la energia rotacional.**

  En este caso todas las masas contribuyen a a rotacion, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
I_z =& \sum_i m_i r_i^2 \\
=& Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 \\
=& 2Ma^2 + 2mb^2
\end{aligned}
$$

La energia es:

$$
\begin{aligned}
K_R =& \frac{1}{2} I_z \omega^2 \\
&= \left(Ma^2 + mb^2\right) \omega^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el momento de inercia depende del eje de rotacion.

Problem 3. Consideremos una vara rígida uniforme de masa M y largo L.

Encontrar el momento de inercia de la vara alrededor del eje perpendicular a ella a traves de uno de los extremos.

Para esto se usa el teorema de Steiner:

$$
I = I_{CM} + MD^2
$$

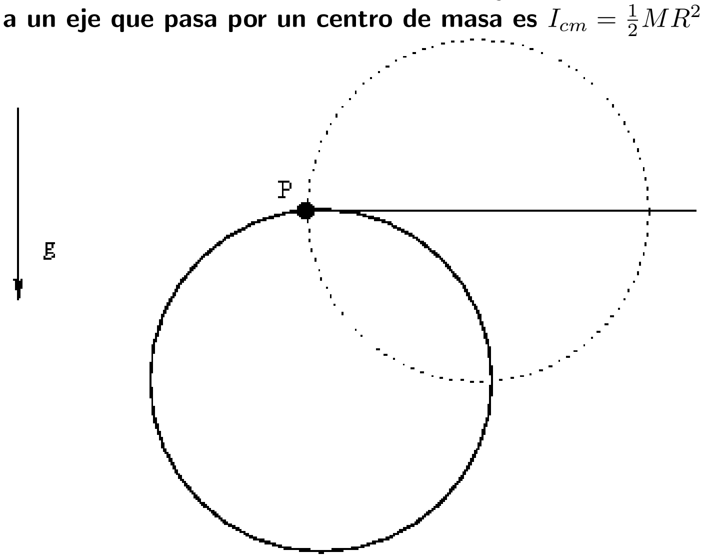
Donde I_{CM} es el momento de inercia conocido, desde el centro de masas y D es la distancia entre el centro de masas y el nuevo eje de rotación.

Entonces si el nuevo eje de rotación se encuentra a la mitad del largo de la vara, el nuevo momento de inercia será:

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\
=& \frac{1}{3} ML^2
\end{aligned}
$$

Aplicación usando conservación de energía

Problem 4. Un disco uniforme de masa M y radio R puede girar libremente en torno a un eje sin fricción que pasa por un punto en su borde (P). Inicialmente el disco está con su centro de masa en su posición mas baja y se le golpea de manera que su centro adquiere instantáneamente una rapidez v_0 . Determine el valor de v_0 para que el centro del disco alcance el nivel horizontal, es decir, en línea con el eje de rotación. Recuerde que el momento de inercia de un disco respecto a un eje que pasa por un centro de masa es $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$



Por conservación de energía, en este caso se tiene:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 - Mg\frac{R}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2 = 0$$

Usando $\omega = \frac{v_0}{R}$ se tiene:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 - Mg\frac{R}{2} + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = 0$$

Aplicamos el teorema de Steiner:

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \\ I =& \frac{3}{4}MR^2 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 - Mg\frac{R}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}MR^2\right)\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = 0$$

Despejando v_0 se obtiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{7}gR}$$

Lo cual corresponde al valor de la velocidad para que el anillo logre quedar horizontal, tal como se ve en la figura.

Momentos de Inercia más usados

Table 10.2

Moments of Inertia of Homogeneous Rigid Objects with Different Geometries