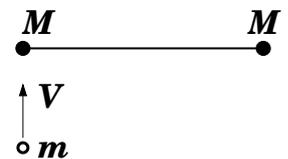


Sección 4

Dinámica de muchos cuerpos

4.1. Centro de Masa

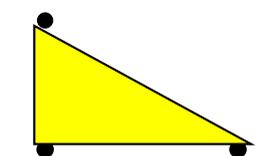
1. Dos piedrecillas idénticas de masa M se unen mediante una cuerda ideal de longitud L . El conjunto posa en reposo sobre una superficie horizontal jabonosa. Súbitamente una de las piedrecillas es impactada por un pedazo de goma que se aproxima con rapidez V en dirección transversal a la cuerda. La goma queda completamente adherida a la piedrecilla. Determine la trayectoria del centro de masas de los tres cuerpos. Calcule la tensión de la cuerda después del choque. hfa[β]



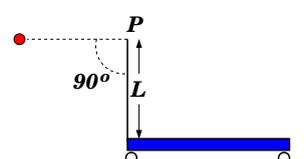
2. Sobre la parte trasera de una balsa descansa Mr. Pingüi de masa m . La balsa —de masa M y longitud L — se encuentra detenida sobre una laguna quieta. Mr. Pingüi se desplaza hacia la parte delantera de la balsa y se detiene. Determine el desplazamiento de la balsa a consecuencia del desplazamiento del pingüino. Suponga que la resistencia del agua al desplazamiento de la balsa es ínfima. cl[α]



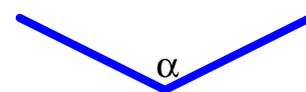
3. Sobre una cuña móvil (provista de rodamientos) de masa \underline{M} y extensión \underline{L} posa (sin fricción) una bolita de masa \underline{m} . El ángulo entre la superficie de la cuña y la horizontal es $\underline{\alpha}$. La bolita es soltada desde la parte más alta de la cuña. Con ésto la bolita descende mientras la cuña se mueve hacia la izquierda. Determine el desplazamiento y velocidad de la cuña al momento en que la bolita pierde contacto con ésta. $cl[\beta\gamma]$



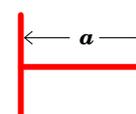
4. En la figura se muestra una bola de masa \underline{m} colgando desde P mediante una cuerda ideal de masa nula y longitud \underline{L} . El carro que soporta la cuerda en P es de masa \underline{M} y posa sobre una superficie sin roce. La bola es soltada como se muestra y choca elásticamente con el carro. Calcule las rapidezces de la bola y del carro justo antes y después del impacto entre ellos. Calcule el impulso de la bola sobre el carro en el primer impacto y el trabajo realizado por la tensión sobre la bola hasta ese instante. $hfa[\beta]$



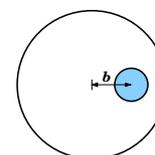
5. Determine el centro de masas de una barra de longitud L homogénea y doblada en 'V' al centro. El ángulo de doblado de la barra es α (ver figura). Verifique casos límites $\alpha = 0^\circ$, 90° y 180° . $hfa[\alpha]$



6. Determine el centro de masas de una barra en forma de 'T', cuya altura es \underline{a} y longitud de barra es \underline{b} . Verifique su resultado para los casos extremos $a \sim 0$ y $b \sim 0$. $hfa[\alpha]$

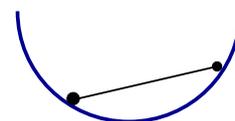


7. Determine el centro de masas de una esfera maciza uniforme de radio \underline{R} la cual tiene en su interior una burbuja de radio \underline{r} y cuyo centro dista en \underline{b} del centro del cascarón exterior. $cl[\beta]$

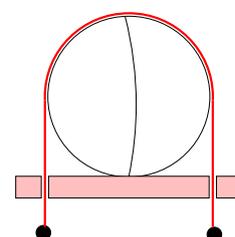


4.2. Estática de Sólidos

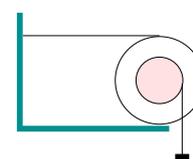
1. En los extremos de una barra de masa despreciable se adhieren bolas de masa \underline{m} y $2m$ respectivamente. El sistema posa sobre un tiesto de fondo esférico resbaloso de radio igual al la longitud de la barra. Calcule el ángulo que forma la barra con la vertical. hfa[α]



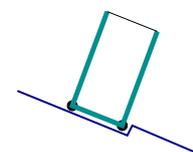
2. Una naranja de masa \underline{M} y radio \underline{R} se ha cortado en dos mitades. El centro de masas de cada mitad se ubica a una distancia de $3R/8$ de la superficie de corte. El sistema se dispone con las mitades cara a cara y con la superficie de corte vertical. A fin de que las mitades no se separen, una cuerda sin roce y con masas iguales en sus extremos es dispuesta como se indica en la figura. Determine las masas mínimas a atar en los extremos de la cuerda para que las mitades permanezcan con sus caras en contacto. hm[β]



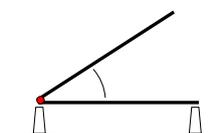
3. En la figura se muestra un cilindro de masa \underline{M} y radio \underline{R} el cual se ata horizontalmente a la muralla mediante una cuerda. Un calado se ha hecho sobre el cilindro y se enrolla una cuerda ideal de la cual pende una carga de masa m por determinar. Si el coeficiente de roce entre el suelo y el cilindro es $\underline{\mu}$, determine la masa máxima a colgar para que el cilindro no rote. hfa[α]



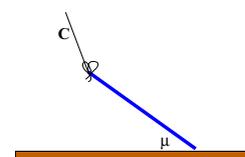
4. Demuestre que el centro de masas de un vaso de forma cilíndrica de radio \underline{a} y altura \underline{b} se ubica a una distancia $b^2/(a + 2b)$ de la base y por su eje. El vaso posa sobre un plano inclinado y no resbala gracias a un tope fijo en el plano. Suponga que los puntos de contacto del vaso con la superficie son aquellos ennegrecidos en la figura. Para cada contacto determine la fuerza normal en función del ángulo de inclinación $\underline{\beta}$ del plano. Determine el ángulo de inclinación máximo del plano de modo que el vaso no vuelque. hfa[α]



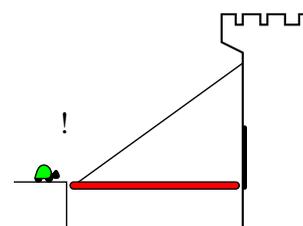
5. Un brazo articulado consta de dos barra uniformes de igual masa \underline{M} y longitud \underline{L} . Una de las barras posa sobre un piso horizontal para lo cual se vale de dos patas verticales de masa despreciable como se indica. Determine y grafique la fuerza sobre cada pata como función del ángulo entre las barras. hfa[α]



6. Un lápiz de masa uniforme es sostenido desde un extremo por una cuerda mientras su otro extremo posa sobre una superficie rugosa (μ). El lápiz forma un ángulo θ con el piso y se encuentra a punto de resbalar. Determine los ángulos posibles entre la cuerda y el lápiz. Determine la tensión en cada caso. Analice el caso $\mu = 0$ e interprete. hfa[β]



7. Un puente colgante se apoya (sin la ayuda de bisagras) contra la pared vertical. El puente es de masa \underline{M} y longitud \underline{L} , y la cuerda que lo mantiene horizontalmente forma un ángulo θ con la vertical. Una tortuga distraída de masa \underline{m} camina hacia el castillo. Determine y grafique la fuerzas de roce y normal del muro sobre el puente como función de la posición de la tortuga. Cuando la tortuga está a punto de entrar al puente éste resbala y cae. Determine el coeficiente de roce entre el muro y el puente. hfa[β]



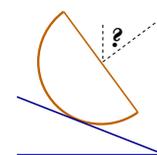
8. Una regla 'T' de masa \underline{M} , altura \underline{a} y barra de extensión \underline{b} posa sobre un plano horizontal pulido como se indica. La regla está formada por barras del mismo material y espesor despreciable. Calcule las reacciones normales en cada punto de contacto con el suelo. hfa[α]



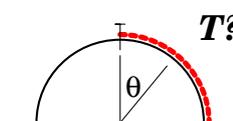
9. Una tabla de masa \underline{M} y longitud \underline{L} se apoya sobre un cilindro fijo al piso. Calcule el ángulo máximo $\underline{\beta}$ de equilibrio para los casos: a) Cilindro rugoso (μ) y piso liso, y b) cilindro liso y piso rugoso (μ). hfa[$\beta\gamma$]



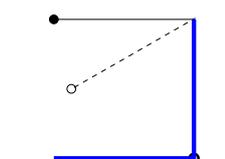
10. Una media naranja (semiesfera maciza uniforme) posa sin resbalar sobre un plano rugoso inclinado en un ángulo α con respecto a la horizontal. Calcule el ángulo que la normal a su cara plana forma con la vertical. Determine la inclinación máxima que puede tener el plano de modo que la naranja no vuelque. hfa[27][$\beta\gamma$]



11. Uno de los extremos de una cadena de masa M se clava en el punto más alto de una cúpula semiesférica lisa de radio R . La longitud de la cadena es $\pi R/2$. Determine la tensión de la cadena en función del ángulo θ indicado. hfa[$\beta\gamma$]

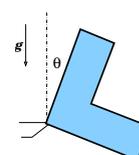


12. Una escuadra muy delgada de lados de longitud L y masa m puede rotar libremente en torno al vértice fijo P . En su extremo superior se ata una cuerda ideal de longitud L con una bolita de masa m en su extremo. La bolita es soltada con la cuerda extendida y horizontal, en el plano de la escuadra. Determine el ángulo a partir del cual la escuadra comienza a volcarse por efecto de la carga que cae. hfa[β]

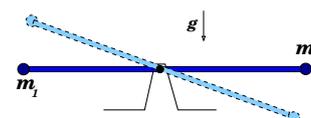


4.3. Rotación de Sólidos

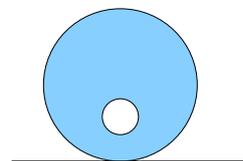
1. Una placa en forma de 'L' de masa M , con lados de longitud b y ancho a , se dispone inicialmente en forma recta. La placa puede rotar sin fricción en torno a un eje perpendicular al plano que pasa por su esquina. Determine la aceleración del centro de masas de la placa luego de que ésta ha caído un ángulo θ . hfa[β]



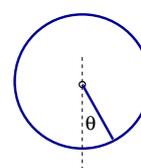
2. Una barra de masa M y longitud L puede rotar sin roce en torno a un eje perpendicular que pasa por su centro. A ambos extremos de la barra se adhieren partículas de masas m_1 y m_2 respectivamente. Estando la barra en forma horizontal, ésta es soltada. Determine la velocidad angular del sistema luego de que éste ha rotado un ángulo θ . Determine para tal caso la aceleración centrípeta del centro de masas. cl[β]



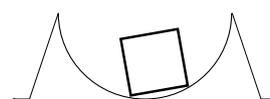
3. Una esfera maciza de masa \underline{M} y radio \underline{R} tiene un hueco esférico de radio \underline{r} cuyo centro dista en \underline{b} del centro del cascarón exterior. La esfera se dispone en reposo sobre un plano horizontal rugoso y con el hueco en su punto más bajo. Calcule la velocidad angular de la esfera cuando la burbuja pasa por su punto más alto con respecto al suelo. hfa[β]



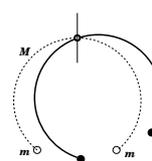
4. Un aro homogéneo de radio \underline{R} lleva adherido radialmente y hacia su centro un trozo recto del mismo material. La masa del conjunto es \underline{M} y experimenta oscilaciones armónicas cuando pende del eje fijo en P . Calcule el período de las oscilaciones. hfa[β]



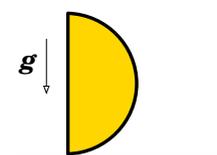
5. Un marco cuadrado formado por cuatro barras uniformes idénticas de longitud \underline{b} posa sobre un fondo cilíndrico pulido de radio \underline{R} . El marco experimenta pequeñas oscilaciones debido a la gravedad terrestre \underline{g} . Determine la frecuencia de las oscilaciones. éstas y examine su resultado en el caso $b \ll R$. hfa[28][β]



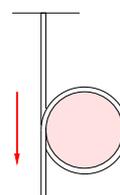
6. Una pulsera mágica de la figura está formada por un arco de circunferencia de radio \underline{R} , extensión angular $\underline{\beta}$ y masa \underline{M} con dos cargas idénticas de masa \underline{m} en sus extremos. La pulsera puede oscilar en torno al punto medio P del arco. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones de la pulsera. hfa[29][β]



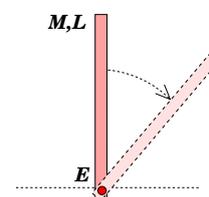
7. Media naranja de masa \underline{M} y radio \underline{R} se dispone sobre una superficie horizontal rugosa con su cara plana en forma vertical. La naranja es soltada y comienza a rotar sin resbalar con el piso. Determine la velocidad angular de la ésta cuando la normal a su cara plana forma un ángulo $\underline{\theta}$ con la vertical. hfa[β]



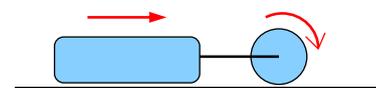
8. Una lata de gaseosa de masa despreciable es envuelta a una espira sin nudo por un cordel de masa uniforme y de grosor ínfimo. Uno de los extremos del cordel se fija al techo y el otro cuelga libremente. Por efecto de la gravedad \underline{g} la lata cae girando por efecto del cordel. Calcule la aceleración con que baja el centro de la lata. Suponiendo el cordel de masa \underline{M} y longitud \underline{L} , y la lata de radio \underline{r} , determine fuerza necesaria para sostener el cordel en su extremo superior. rtr[β]



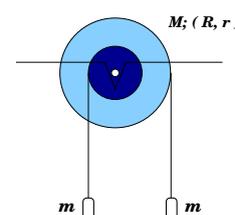
9. En la figura se muestra una barra homogénea de masa \underline{M} y longitud \underline{L} . La barra puede rotar sin fricción en torno a un eje horizontal E en el extremo inferior de ésta. Partiendo del reposo, ésta cae hacia la derecha. Calcule la aceleración (vectorial) del CM de la barra en función del ángulo de caída. Calcule la componente axial y transversal de la fuerza que ejerce el eje sobre la barra. cl[β]



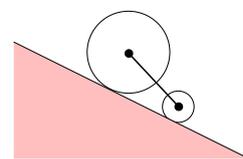
10. Un bloque sólido se une mediante una cuerda a una rueda cilíndrica de radio \underline{R} y masa $\lambda \underline{M}$, con \underline{M} la masa del conjunto. Inicialmente el conjunto se mueve con rapidez \underline{u} : el bloque resbala y la rueda rota sin resbalar. Determine el tramo recorrido por el sistema hasta detenerse. Analice su resultado en términos de λ . hfa[$\alpha\beta$]



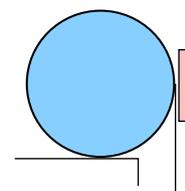
11. Una polea a dos cantos (radio externo R e interno r) puede rotar sin fricción en torno a su eje. En sus cantos se han enrollado cuerdas ideales como se indica en la figura. Cargas de igual masa \underline{m} cuelgan de los extremos de las cuerdas. El momento de inercia de la polea con respecto a su eje es $\underline{MR}^2/2$. Determine la razón entre las tensiones de las cuerdas cuando el sistema rota por efecto de la gravedad \underline{g} . Determine el torque necesario sobre la polea para impedir que ésta rote. cl[β]



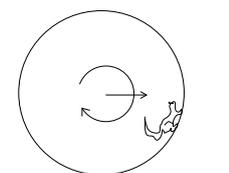
12. Dos cilindros de masa \underline{M} pero distintos radios, \underline{R} y \underline{r} respectivamente, se unen mediante una cuerda ideal de longitud \underline{L} ($L > R + r$). El par posa sobre una superficie rugosa e inclinada en β con respecto a la horizontal. El cilindro de radio menor va delante del de radio mayor. Calcule la tensión de la cuerda y la aceleración del sistema.

cl[β]

13. Una cuerda se enrolla en torno a un cilindro. El cilindro se ubica sobre un plano horizontal rugoso ($\underline{\mu}$) y en contacto con una pared vertical del mismo material del piso. La cuerda, enrollada en una pequeña ranura que impide su contacto con el piso o la pared, es tirada hacia abajo con una fuerza \underline{F} . Calcular la razón entre las fuerzas normales experimentadas en el suelo y la pared mientras gira el cilindro.

hfa[β]

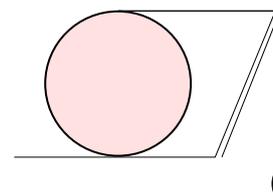
14. Una ardilla de masa \underline{m} corre aceleradamente dentro de un cilindro hueco de radio \underline{R} y masa \underline{M} . La ardilla en ningún momento resbala y el cilindro posa sobre un plano rugoso horizontal. A consecuencia de su movimiento acelerado la ardilla se mantiene siempre a una altura \underline{h} del suelo. Determine la aceleración con que se traslada el cilindro.

hfa[γ]

15. Una rueda de masa \underline{M} , radio \underline{R} y momento de inercia con respecto a su eje \underline{I} es lanzada horizontalmente sin rotar sobre una superficie horizontal. La rueda entra a un tramo horizontal rugoso con rapidez \underline{v}_0 , cuyo coeficiente de roce mutuo es $\underline{\mu}$. Determine la longitud del tramo de resbalamiento de la rueda.

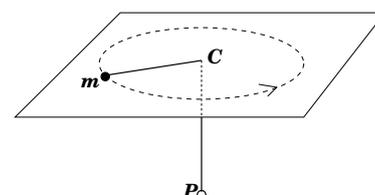


16. Una cuerda ideal se enrolla alrededor de un cilindro homogéneo de radio \underline{R} y masa \underline{M} . El cilindro posa sobre una superficie horizontal rugosa. En el extremo de la cuerda pende verticalmente una carga de masa \underline{m} . No hay roce entre la cuerda y el soporte fijo S. Calcule la aceleración de la carga que cuelga y la tensión de la cuerda mientras el cilindro rueda.

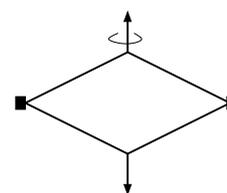
cl[β]

4.4. Leyes de conservación

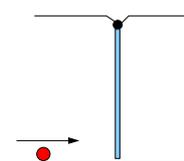
1. Sobre una mesa horizontal sin roce una bolita mantiene un movimiento circunferencial de radio R por acción de un elástico ideal de longitud natural L y constante elástica k . El elástico es pasado por el orificio C y sostenido en su extremo P . El extremo P es tirado hacia abajo una distancia δ de forma tal que la bolita retoma una órbita circunferencial. Determine el cambio del radio de la órbita de la bolita sobre la mesa. hfa[β]



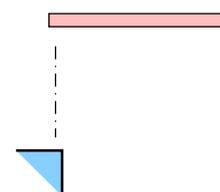
2. Un rombo articulado está formado por varillas de longitud L y masa m . Dos de las articulaciones opuestas del rombo llevan adheridas cubos pequeños idénticos de masa M . En ausencia de gravedad el sistema rota libremente con velocidad angular ω_0 . En cierto instante las otras dos articulaciones son separadas mediante fuerzas externas opuestas de dirección perpendicular al plano de órbita hasta lograr mantener el sistema rotando como se indica. La magnitud de las fuerzas opuestas es F_0 , constante. Determine la separación entre los cubos. hfa[31][β]



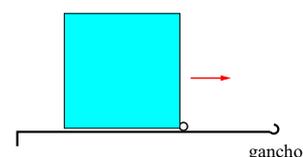
3. Una varilla de masa M y longitud L cuelga en reposo de uno de sus extremos. La varilla puede rotar libremente en torno a este punto. Sobre el piso horizontal un pequeño cuerpo –de masa m y con rapidez v_0 – choca elásticamente con el extremo inferior de la varilla. Determine la velocidad angular de la varilla inmediatamente después del choque. Determine la masa de la varilla si a consecuencia del choque la masa incidente queda detenida. hfa[β]



4. Una barra de longitud L y masa M es soltada desde una altura h con respecto al borde de una mesa. La barra se dispone con uno de sus extremos justo sobre el borde de la mesa. Calcule la velocidad angular de la barra inmediatamente después de que ésta impacta elásticamente el borde superior de la mesa. Determine el impulso debido a la mesa y compárelo con el de un rebote elástico de una bolita de masa M . cl[β]

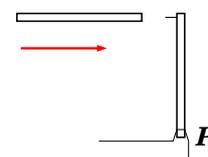


5. Una placa cuadrada de masa \underline{m} y lados \underline{a} desliza sobre un plano horizontal pulido con rapidez \underline{V}_o . En el extremo de la superficie hay un gancho que atrapa la parte delantera de la placa pero le permite rotar libremente. Determine la velocidad angular de la placa inmediatamente después del enganche, el cambio de momentum lineal (impulso) de la placa a consecuencia del enganche y la rapidez mínima necesaria para que la placa vuelque completamente.



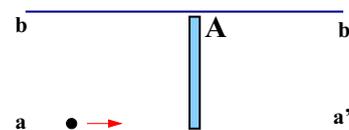
hfa[β]

6. Una varilla uniforme de masa \underline{M} y longitud \underline{L} se incrusta perpendicularmente en el extremo superior de otra varilla idéntica en reposo y vertical libre de rotar sin fricción en torno al soporte P . La rapidez con que se incrusta la varilla es \underline{v} . Determine la velocidad angular del sistema después del impacto y el impulso del soporte en P sobre la varilla.



hfa[β]

7. Sobre una mesa horizontal pulida descansa una barra de masa \underline{m} y longitud $\underline{\ell}$. La barra se ubica en forma transversal con respecto a dos bordes rectos paralelos ($\underline{aa'}$ y $\underline{bb'}$). Una partícula de masa \underline{m} se propaga con rapidez \underline{v}_o paralelamente a los bordes –casi en contacto con el eje $\underline{aa'}$ – y se adhiere a la barra. Determine el tiempo que tarda el extremo A de la barra en golpear el borde $\underline{aa'}$.



cl[β]