

Auxiliar 4C

Prof. Diego Mardones

Aux: Pablo Barrios, Priscilla Nowajewsky, Ulises Soto

Problema 1

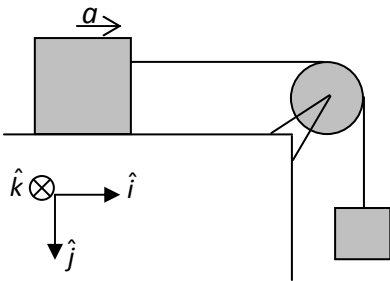
Se tiene un bloque de masa M que está apoyado sobre una superficie horizontal sin roce. La masa está sujeta por una cuerda, la cual pasa por una polea de radio R y momento de inercia I , y cuyo otro extremo sujeta una masa m que cuelga bajo la acción de la gravedad.

Determine la aceleración de la masa que cuelga.

Sol:

Sobre el bloque M actúa la tensión de la cuerda T_1 , el peso de éste Mg y la normal a la superficie N .

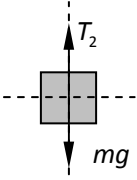
DCL_M



$$\sum F_M : \hat{i}) T_1 = Ma$$

$$\hat{j}) Mg - N = 0$$

DCL_m

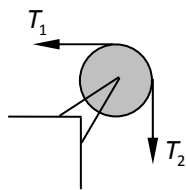


$$\sum F_m : \hat{j}) mg - T_2 = ma$$

$$\Rightarrow T_2 = m(g - a)$$

Sobre el bloque m sólo actúa la tensión T_2 y su peso mg

Ahora que se tienen las tensiones se realiza la sumatoria de torques sobre la polea DCL₀



$$\sum \tau : \hat{k}) \tau_{T_1} + \tau_{T_2} = I\alpha$$

$$\vec{\tau}_{T_1} = \vec{r}_{T_1} \times \vec{T}_1 = -RMa \hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{T_2} = \vec{r}_{T_2} \times \vec{T}_2 = Rm(g - a) \hat{k}$$

$$I\alpha = Rm(g - a) - RMa$$

$$I\alpha = R[mg - (M + m)a]$$

$$\frac{Ia}{R} = R[mg - (M + m)a] \Rightarrow a = \frac{R^2 mg}{R^2 (M + m) + I}$$

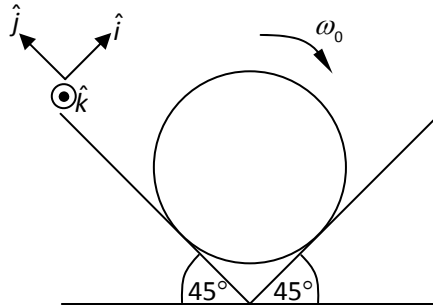
$$\bar{\alpha} = \alpha \hat{k} \Rightarrow a = \alpha R$$

Relación
cinemática

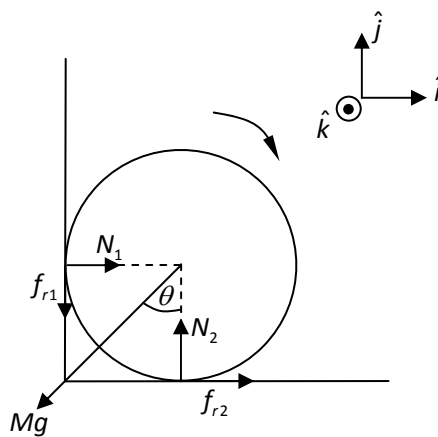
Problema 2

Una esfera de radio R , masa M y momento de inercia $I = 2MR^2/5$ está apoyada sobre una cuña recta rugosa, caracterizada por un coeficiente de roce dinámico μ_d . En el instante inicial, a la esfera se le da una velocidad angular ω_0 en la dirección que indica la figura.

1. Determine la magnitud de todas las fuerzas externas que actúan sobre la esfera.
2. Calcule cuánto tiempo tarda en detenerse la esfera debido al roce.



DCL:



Se efectúa la sumatoria de fuerzas

$$\sum F_M : \hat{i}) f_{r2} + N_1 - Mg \sin(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow N_1 = Mg \sin(\theta) - f_{r2}$$

$$\hat{j}) N_2 - f_{r1} - Mg \cos(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = Mg \cos(\theta) + f_{r1}$$

Como $f_{r1} = \mu_d N_1$ y $f_{r2} = \mu_d N_2$

$$N_1 = Mg \sin(\theta) - \mu_d [Mg \cos(\theta) + \mu_d N_1]$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{Mg [\sin(\theta) - \mu_d^2 \cos(\theta)]}{(1 + \mu_d^2)}$$

Luego $N_2 = \frac{Mg [\cos(\theta) + \mu_d \sin(\theta)]}{(1 + \mu_d^2)}$ $\therefore$ $N_1 = \frac{Mg(1 - \mu_d) \sqrt{2}}{(1 + \mu_d^2) 2}$

$$N_2 = \frac{Mg(1 + \mu_d) \sqrt{2}}{(1 + \mu_d^2) 2}$$

Finalmente $f_{r1} = \frac{\mu_d Mg(1 - \mu_d) \sqrt{2}}{(1 + \mu_d^2) 2}$ y $f_{r2} = \frac{\mu_d Mg(1 + \mu_d) \sqrt{2}}{(1 + \mu_d^2) 2}$

Con las magnitudes de las fuerzas determinadas se procede a efectuar la sumatoria de torques

$$\sum \tau : \vec{\tau}_{f_{r1}} + \vec{\tau}_{f_{r2}} = I\vec{\alpha}$$

$$\vec{\tau}_{f_{r1}} = \vec{r}_{f_{r1}} \times \vec{f}_{r1} = Rf_{r1} \hat{k} = \frac{R\mu_d Mg(1-\mu_d)}{(1+\mu_d^2)} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{f_{r2}} = \vec{r}_{f_{r2}} \times \vec{f}_{r2} = Rf_{r2} \hat{k} = \frac{R\mu_d Mg(1+\mu_d)}{(1+\mu_d^2)} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{k}$$

Luego

$$I\alpha = \frac{R\mu_d Mg(1-\mu_d)}{(1+\mu_d^2)} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{R\mu_d Mg(1+\mu_d)}{(1+\mu_d^2)} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow I\alpha = \frac{R\mu_d Mg}{(1+\mu_d^2)} \sqrt{2} \quad \text{como } I = \frac{2MR^2}{5}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{\mu_d g}{R(1+\mu_d^2)}$$

La ecuación de velocidad angular es de la siguiente forma:

$$\omega(t) = -\omega_0 + \alpha t$$

Luego sea t' el tiempo que demora en detenerse entonces: $\omega(t') = 0$

Entonces

$$\omega(t') = -\omega_0 + \alpha t' = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \alpha t'$$

Finalmente

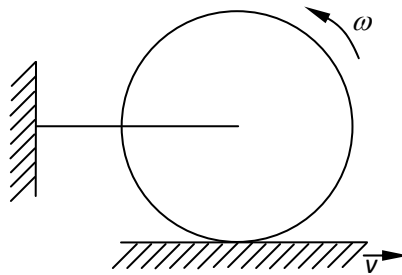
$$\frac{\omega_0}{\alpha} = t' \Rightarrow t' = \omega_0 \frac{\sqrt{2} R(1+\mu_d^2)}{5 \mu_d g}$$

Problema 3

Una rueda de masa M , radio R y momento de inercia I está en contacto con una superficie horizontal rugosa, caracterizada por un coeficiente de roce estático μ_e y dinámico μ_d . El centro de la rueda está unido a una cuerda ideal cuyo otro extremo está unido a una pared fija a la misma altura del centro de la rueda.

Inicialmente el sistema está en reposo y súbitamente la superficie horizontal empieza a moverse con velocidad constante V hacia la derecha.

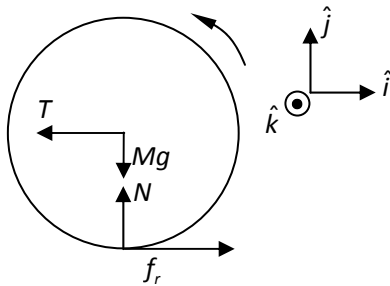
1. Encuentre y resuelva la ecuación de movimiento para la velocidad angular de la rueda.
2. ¿Qué pasa cuando $\omega = V/R$? ¿Qué pasa luego de ese instante?



Sol: Inicialmente debido a que la superficie comienza a moverse súbitamente, existe deslizamiento entre ésta y la rueda, es decir $\omega \neq \frac{V}{R} \Rightarrow \alpha \neq \frac{a}{R}$

Debido a que $\alpha \neq \frac{a}{R} = 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 \therefore \exists$ fza. de roce.

DCL:



Se efectúa la sumatoria de fuerzas

$$\sum F: \begin{aligned} \hat{i}) \quad f_r - T &= 0 \Rightarrow f_r = T \\ \hat{j}) \quad N - Mg &= 0 \Rightarrow N = Mg \end{aligned}$$

Como la rueda se desliza $\Rightarrow f_r = \mu_d N$

luego

$$f_r = \mu_d Mg$$

Como ya tenemos determinadas las magnitudes de las fuerzas, se procede a calcular la sumatoria de torques

$$\sum \tau: \bar{\tau}_{f_r} = I\bar{\alpha}$$

$$\bar{\tau}_{f_r} = \bar{r}_{f_r} \times \bar{f}_r = R\mu_d Mg \hat{k}$$

$$\Rightarrow I\alpha = R\mu_d Mg \Rightarrow \alpha = \frac{R\mu_d Mg}{I}$$

La tensión no efectúa torque debido a que se encuentra en el centro de giro

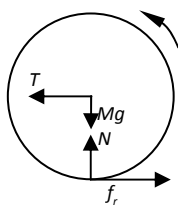
Como la velocidad angular de la rueda queda descrita por la siguiente ecuación:

$$\omega(t) = \omega_i + \alpha t$$

Y además la velocidad angular inicial es 0

$$\omega_i = 0 \quad \therefore \quad \omega(t) = \frac{R\mu_d Mg}{I} t \quad \forall t \mid \omega(t) < \frac{v}{R}$$

$$\text{Ahora si } \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \text{No hay deslizamiento} \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$$



$$\sum F: \quad \hat{i}) \quad f_r - T = 0 \Rightarrow f_r = T$$

$$\quad \quad \quad \hat{j}) \quad N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg$$

Luego como la rueda no se desliza con respecto a la superficie $\Rightarrow f_r \leq \mu_e N$

$$\sum \tau: \quad \vec{\tau}_{f_r} = I \vec{\alpha}$$

$$\vec{\tau}_{f_r} = \vec{r}_{f_r} \times \vec{f}_r = R f_r \hat{k}$$

$$\Rightarrow I \alpha = R f_r \quad \text{pero como} \quad \alpha = \frac{a}{R} \quad \text{y} \quad a = 0$$

$$\Rightarrow f_r = 0$$

Finalmente

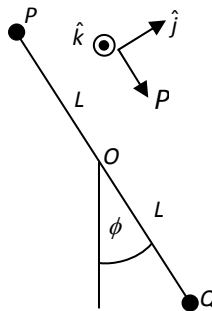
$$T = 0$$

Problema 4

Considere el sistema de la figura, compuesto por dos masas unidas por una barra rígida de largo $2L$ y masa M . La barra puede girar libremente en torno al punto medio de ella en O . En el extremo P de la barra se encuentra una masa m y en el extremo Q una masa $2m$. Todo el sistema se mueve bajo la acción de la gravedad.

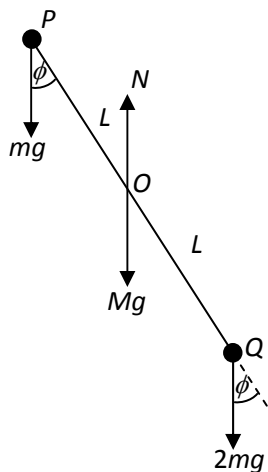
1. Encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ .
2. ¿Qué sucede con la aceleración angular si $M \gg m$? ¿y si $M \ll m$? ¿Por qué son tan diferentes estos dos límites?

Nota: El momento de inercia de una barra de masa M y largo L , respecto a su centro es $I = ML^2/12$.



Sol: La resolución de este ejercicio se puede llevar a cabo de dos maneras distintas que se mostrarán a continuación, una es considerando los torques de cada masa independientes y la otra forma es considerar el sistema en su conjunto, sometido solo al torque del centro de masa

Torques independientes

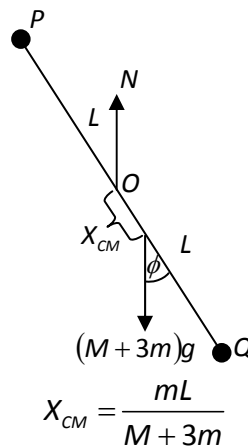


$$\sum \tau: \bar{\tau}_P + \bar{\tau}_Q = I\bar{\alpha}$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_P &= \bar{r}_P \times \bar{F}_P = Lmg \sin(\phi) \hat{k} \\ \bar{\tau}_Q &= \bar{r}_Q \times \bar{F}_Q = -L2mg \sin(\phi) \hat{k} \\ \Rightarrow I\alpha &= -Lmg \sin(\phi)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{Lmg \sin(\phi)}{I}$$

Torque del centro de masa



$$x_{CM} = \frac{mL}{M+3m}$$

$$\sum \tau: \bar{\tau}_{CM} = I\bar{\alpha}$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_P &= \bar{r}_P \times \bar{F}_P = -\frac{mL}{(M+3m)}(M+3m)g \sin(\phi) \hat{k} \\ \Rightarrow I\alpha &= -Lmg \sin(\phi)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{Lmg \sin(\phi)}{I}$$

Ahora se calcula $I_{tot} = I_{barra} + I_p + I_Q$

Entonces
$$I_{tot} = \frac{M(2L)^2}{12} + mL^2 + 2mL^2 \Rightarrow I_{tot} = \frac{L^2(M+9m)}{3}$$

Luego
$$\alpha = -\frac{3mg \sin(\phi)}{L(M+9m)}$$

Finalmente se obtiene que

$$\ddot{\phi} = -\frac{3mg \sin(\phi)}{L(M+9m)}$$

Si $M \gg m$

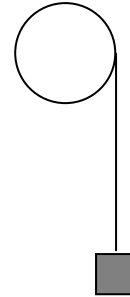
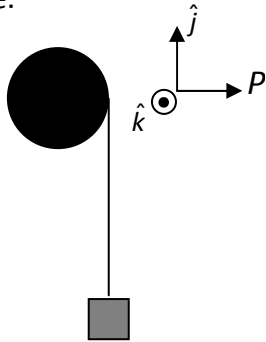
$$\ddot{\phi} = -\frac{3mg \sin(\phi)}{L(M+9m)} \approx -\frac{3mg \sin(\phi)}{LM} \approx 0 \Rightarrow \text{la barra no se mueve}$$

Si $m \gg M$

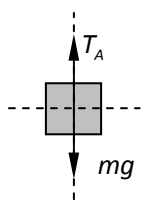
$$\ddot{\phi} = -\frac{3mg \sin(\phi)}{L(M+9m)} = -\frac{3mg \sin(\phi)}{Lm\left(\frac{M}{m}+9\right)} \approx -\frac{3mg \sin(\phi)}{9mL} = -\frac{g \sin(\phi)}{3L} \Rightarrow \text{resultado si la barra no tuviese masa}$$

Problema 5

Se tienen dos poleas de igual radio R y masa M . La polea A tiene la masa distribuida uniformemente en su interior mientras que la polea B tiene la masa distribuida sólo en el perímetro. Si se enrolla un hilo de la polea, del cual cuelga un cuerpo de masa m , determine el cociente α_A/α_B entre las aceleraciones angulares de ambas poleas. Comente.

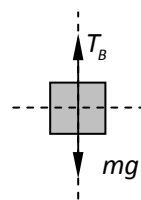


DCL_m



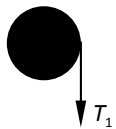
$$\sum F_m : \hat{j}) \quad mg - T_A = ma$$

$$\Rightarrow T_A = m(g - a)$$



$$\sum F_m : \hat{j}) \quad mg - T_B = ma$$

$$\Rightarrow T_B = m(g - a)$$



$$\sum \tau : \hat{k}) \quad \tau_{T_A} = I_A \alpha_A$$

$$\vec{\tau}_{T_A} = \vec{r}_{T_A} \times \vec{T}_A = -T_A R \hat{k}$$

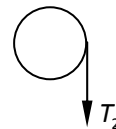
$$I_A \alpha_A = -m(a_A + g)R$$

$$\frac{I_A \alpha_A}{R} = -ma_A - mg$$

$$\Rightarrow \alpha_A \left(\frac{I_A}{R} + mR \right) = -mg$$

$$\alpha_A = \frac{-mgR}{\left(\frac{I_A}{R} + mR \right)}$$

$$\alpha_A = \frac{-mg}{\left(\frac{I_A}{R} + mR \right)}$$



$$\sum \tau : \hat{k}) \quad \tau_{T_B} = I_B \alpha_B$$

$$\vec{\tau}_{T_B} = \vec{r}_{T_B} \times \vec{T}_B = -T_B R \hat{k}$$

$$I_B \alpha_B = -m(a_B + g)R$$

$$\frac{I_B \alpha_B}{R} = -ma_B - mg$$

$$\Rightarrow \alpha_B \left(\frac{I_B}{R} + mR \right) = -mg$$

$$\alpha_B = \frac{-mgR}{\left(\frac{I_B}{R} + mR \right)}$$

$$\alpha_B = \frac{-mg}{\left(\frac{I_B}{R} + mR \right)}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha \hat{k}$$

$$\Rightarrow a = \alpha R$$

Luego
$$\frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{\left(\frac{I_B}{R} + mR \right)}{\left(\frac{I_A}{R} + mR \right)} = \frac{(MR + mR)}{\left(\frac{MR}{2} + mR \right)} = \frac{(M + m)}{\left(\frac{M}{2} + m \right)}$$