



En una playa hay demasiados granos de arena para contarlos uno por uno, pero se puede obtener el número aproximado por medio de hipótesis razonables y cálculos sencillos.

¿Cuántos granos de arena hay en su playa favorita? (Véase el ejemplo 1.6.)

- 1.1 Unidades
- 1.2 Conversión de unidades
- 1.3 Dimensiones de las magnitudes físicas
- 1.4 Notación científica
- 1.5 Cifras significativas y órdenes de magnitud

*E*l hombre siempre ha sentido curiosidad por el mundo que le rodea. Como demuestran los primeros documentos gráficos, el hombre siempre ha buscado el modo de imponer orden en la enmarañada diversidad de los sucesos observados. La ciencia es un método de búsqueda de los principios fundamentales y universales que gobiernan las causas y los efectos en el universo. El método científico consiste en construir, probar y relacionar modelos con el objetivo de describir, explicar y predecir la realidad. Esta metodología comporta establecer hipótesis, realizar experimentos que se puedan repetir y observar y formular nuevas hipótesis. El criterio esencial que determina el valor de un modelo científico es su simplicidad y su utilidad para elaborar predicciones o para explicar observaciones referidas a un amplio espectro de fenómenos.

Generalmente consideramos la ciencia como dividida en diversos campos separados, aunque esta división sólo tuvo lugar a partir del siglo XIX. La separación de sistemas complejos en categorías más simples que pueden estudiarse más fácilmente, constituye uno de los mayores éxitos de la ciencia. La biología, por ejemplo, estudia los organismos vivos. La química trata de las interacciones de los elementos y compuestos. La geología es el estudio de la Tierra. La astronomía estudia el sistema solar, las estrellas y las galaxias, y el universo en su conjunto. La física es la ciencia que trata de la materia y de la energía, del espacio y del tiempo. Incluye los principios que gobiernan el movimiento de las partículas y las ondas, las interacciones de las partículas y las propiedades de las moléculas, los átomos y los núcleos atómicos, así como los sistemas de mayor escala, como los gases, los líquidos y los sólidos. Algunos consideran que la física es la más fundamental de las ciencias porque sus principios son la base de los otros campos científicos.



Figura 1.1 El camino del método científico se puede representar de modo que la descripción del fenómeno al cual se aplica el método científico sea el punto de partida y el resultado sea el punto de llegada.

La física es la ciencia de lo exótico y la ciencia de la vida cotidiana. En el extremo de lo exótico, los agujeros negros ponen retos a la imaginación. En la vida diaria, ingenieros, músicos, arquitectos, químicos, biólogos, médicos, etc., controlan temas tales como transmisión del calor, flujo de fluidos, ondas sonoras, radiactividad y fuerzas de tensión en edificios o en huesos para realizar su trabajo diario. Innumerables cuestiones respecto a nuestro mundo pueden responderse con un conocimiento básico de la física. ¿Por qué un helicóptero tiene dos rotores? ¿Por qué los astronautas flotan en el espacio? ¿Por qué los relojes que se mueven van más lentos? ¿Por qué el sonido se propaga alrededor de las esquinas, mientras la luz se propaga en línea recta? ¿Por qué un oboe suena distinto de una flauta? ¿Cómo funcionan los lectores de discos compactos (CD)? ¿Por qué no hay hidrógeno en la atmósfera? ¿Por qué los objetos metálicos parecen más fríos que los objetos de madera a igual temperatura? ¿Por qué el cobre es un conductor eléctrico mientras que la madera es un aislante? ¿Por qué el litio, con sus tres electrones, es enormemente reactivo, mientras que el helio, con dos electrones, es químicamente inerte?

➤ En este capítulo empezaremos a prepararnos para contestar a algunas de estas preguntas examinando las unidades y sus dimensiones. Cada vez que se realiza una medida, debe saberse con qué precisión se ha hecho. Si un indicador del contenido de combustible de un depósito indica que hay 100 litros, ello no significa que haya exactamente 100 litros. Por lo tanto, ¿qué significa en realidad este dato, y cómo tenemos que expresarlo?

## Física clásica y moderna

Los primeros esfuerzos registrados por el ser humano para reunir sistemáticamente el conocimiento sobre el movimiento de los cuerpos proceden de la antigua Grecia. En la filosofía natural establecida por Aristóteles (384–322 a.C.) las explicaciones de los fenómenos físicos se deducían de hipótesis sobre el mundo y no de la experimentación. Por ejemplo, una hipótesis fundamental afirmaba que toda sustancia tenía un “lugar natural” en el universo. Se estableció que el movimiento era el resultado del intento de una sustancia de alcanzar su lugar natural. El acuerdo entre las deducciones de la física aristotélica y los movimientos observados en el universo físico, y la falta de una tradición experimental que derrocara la física antigua, hizo que el punto de vista de los griegos fuera aceptado durante casi dos mil años. Fue el científico italiano Galileo Galilei (1564–1642), quien con sus brillantes experimentos sobre el movimiento estableció para siempre la absoluta necesidad de la experimentación en la física e inició la desintegración de la física de Aristóteles. Unos cien años después, Isaac Newton generalizó los resultados experimentales de Galileo en sus tres leyes fundamentales del movimiento, y el reino de la filosofía natural de Aristóteles se extinguió.

Durante los siguientes doscientos años la experimentación aportó innumerables descubrimientos que inspiraron el desarrollo de las teorías físicas para su explicación. A finales del siglo XIX, las leyes de Newton referentes a los movimientos de los sistemas mecánicos se asociaron a las igualmente impresionantes leyes de James Maxwell, James Joule, Sadi Carnot y otros para describir el electromagnetismo y la termodinámica. Los temas que ocuparon a los físicos durante la última parte del siglo XIX —mecánica, luz, calor, sonido, electricidad y magnetismo— constituyen lo que se denomina *física clásica*. Como lo que necesitamos para comprender el mundo macroscópico donde vivimos es la física clásica, ésta domina en las partes I a V de este texto.

El notable éxito alcanzado por la física clásica llevó a muchos científicos al convencimiento de que la descripción del universo físico se había completado. Sin embargo, el descubrimiento de los rayos X realizado por Wilhelm Roentgen en 1895 y el de la radiactividad por Antoine Becquerel y Marie y Pierre Curie los años siguientes parecían estar fuera del marco de la física clásica. La teoría de la relatividad especial propuesta por Albert Einstein en 1905 contradecía las ideas de espacio y tiempo de Galileo y Newton. En el mismo año, Einstein sugirió que la energía luminosa estaba cuantizada; es decir, que la luz se propaga en paquetes discretos y no en forma ondulatoria y continua como suponía la física clásica. La generalización de esta idea a la cuantización de todos los tipos de energía es un concepto fundamental de la mecánica cuántica, con sorprendentes e importantes consecuencias. La aplicación de la relatividad espe-

cial y, particularmente, la teoría cuántica a sistemas microscópicos tales como átomos, moléculas y núcleos, ha conducido a una comprensión detallada de sólidos, líquidos y gases y constituye lo que generalmente se denomina *física moderna*. A ésta se dedica la parte VI de este texto.

Comenzaremos nuestro estudio de la física con los temas clásicos. Sin embargo, de vez en cuando elevaremos nuestra mirada para analizar la relación entre la física clásica y la física moderna. Así, por ejemplo, en el capítulo 2 dedicaremos un espacio a las velocidades próximas a la de la luz, atravesando brevemente el universo relativista imaginado primeramente por Einstein. Igualmente, después de abordar la conservación de la energía en el capítulo 7, trataremos de la cuantización de la energía y de la famosa relación de Einstein entre la masa y la energía,  $E = mc^2$ . Unos capítulos más adelante, en el capítulo R, estudiaremos la naturaleza del espacio y del tiempo tal como los reveló Einstein en 1903.

## 1.1 Unidades

Sabemos bien que no todas las cosas pueden medirse, por ejemplo, la belleza de una flor o de una fuga de Bach. Cualquiera que sea el conocimiento que tengamos de estas cosas, comprendemos fácilmente que este conocimiento no pertenece al campo de la ciencia. La capacidad no sólo de definir, sino también de medir, es un requisito de la ciencia, y en física, más que en cualquier otro campo del conocimiento, la definición precisa de los términos y la medida exacta de las magnitudes ha conducido a grandes descubrimientos. Comenzaremos nuestro estudio de la física estableciendo unas pocas definiciones básicas, introduciendo las unidades y mostrando cómo estas unidades se tratan en las ecuaciones. La “diversión” vendrá más adelante.

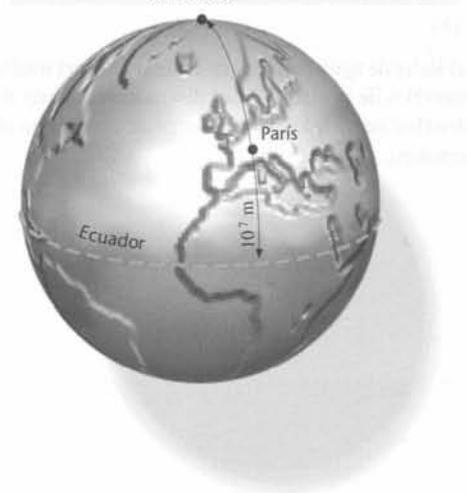
La medida de toda magnitud física exige compararla con cierto valor unitario de la misma. Así, para medir la distancia entre dos puntos, la comparamos con una unidad estándar de distancia tal como el metro. La afirmación de que una cierta distancia es de 25 metros significa que equivale a 25 veces la longitud de la unidad metro; es decir, una regla métrica patrón se ajusta 25 veces en dicha distancia. Es importante añadir la unidad metros junto con el número 25 al expresar una distancia debido a que existen otras unidades de longitud de uso común. Decir que una distancia es 25 carece de significado. Toda magnitud física debe expresarse con una cifra y una unidad.

### El sistema internacional de unidades

Todas las magnitudes físicas pueden expresarse en función de un pequeño número de unidades fundamentales. Muchas de las magnitudes que se estudiarán, tales como velocidad, fuerza, ímpetu o momento lineal, trabajo, energía y potencia, pueden expresarse en función de tres unidades fundamentales: longitud, tiempo y masa. La selección de las unidades patrón o estándar para estas magnitudes fundamentales determina un sistema de unidades. El sistema utilizado universalmente en la comunidad científica es el *Sistema Internacional (SI)*. En el SI la unidad patrón de longitud es el metro, la unidad patrón del tiempo es el segundo y la unidad patrón de la masa es el kilogramo. Las definiciones completas de las unidades del SI se dan en el Apéndice B.

**Longitud** La unidad patrón de longitud, el **metro** (símbolo m), estaba definida originalmente por la distancia comprendida entre dos rayas grabadas sobre una barra de una aleación de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Sèvres, Francia. Se escogió esta longitud de modo que la distancia entre el Ecuador y el Polo Norte a lo largo del meridiano que pasa por París fuese igual a diez millones de metros (figura 1.1). El metro patrón se define hoy como la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de  $1/299\,792\,458$  segundos. (Esto supone que la velocidad de la luz es exactamente  $299\,792\,458$  m/s.)

**Ejercicio** ¿Cuál es la circunferencia de la tierra en metros? (Respuesta Unos  $4 \times 10^7$  m.)



**Figura 1.1** El patrón de longitud, el metro, se escogió originalmente de modo que la distancia del Ecuador al Polo Norte a lo largo del meridiano que pasa por París fuese  $10^7$  m.



(a)



(b)

(a) Reloj de agua utilizado en el siglo XIII para medir intervalos de tiempo. (b) Los diseñadores Jefferts & Meekhof de un reloj de una fuente de cesio junto al prototipo.

**Tiempo** La unidad de tiempo, el **segundo** (s), se definió originalmente en función de la rotación de la Tierra, de modo que correspondía a  $(1/60)(1/60)(1/24)$  del día solar medio. Actualmente se define en función de una frecuencia característica asociada con el átomo de cesio. Todos los átomos, después de absorber energía, emiten luz con longitudes de onda y frecuencias características del elemento considerado. Existe una frecuencia y una longitud de onda particulares asociadas a cada transición energética dentro del átomo de un elemento y todas las experiencias manifiestan que estas magnitudes son constantes. El segundo se define de modo que la frecuencia de la luz emitida en una determinada transición del cesio es de 9 192 631 770 ciclos por segundo. Con estas definiciones, las unidades fundamentales de longitud y de tiempo son accesibles a cualquier laboratorio del mundo.

**Masa** La unidad de masa, el **kilogramo** (kg), igual a 1000 gramos (g), se define de modo que corresponde a la masa de un cuerpo patrón concreto, también conservado en Sèvres. Un duplicado del patrón de masa 1 kg se guarda en el National Bureau of Standards (NIST) de Gaithersburg, Maryland (EE.UU.). Estudiaremos con más detalle el concepto de masa en el capítulo 4. Como veremos, el peso de un objeto en un punto determinado de la Tierra es proporcional a su masa. Así, las masas de tamaño ordinario pueden compararse a partir de su peso.

Al estudiar termodinámica y electricidad necesitaremos tres unidades físicas fundamentales más, la unidad de temperatura, el kelvin (K) (inicialmente llamado grado kelvin); la unidad de cantidad de sustancia, el mol (mol); y la unidad de corriente eléctrica, el amperio (A). Existe otra unidad fundamental, la candela (cd), unidad de intensidad luminosa, que no tendremos ocasión de utilizar en este libro. Estas siete unidades fundamentales, el metro (m), el segundo (s), el kilogramo (kg), el kelvin (K), el amperio (A), el mol (mol) y la candela (cd), constituyen el sistema internacional de unidades (SI).

La unidad de cualquier magnitud física puede expresarse en función de estas unidades del SI fundamentales. Algunas combinaciones importantes reciben nombres especiales. Por ejemplo, la unidad SI de fuerza,  $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ , se denomina newton (N). Análogamente, la unidad del SI de potencia,  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3 = \text{N} \cdot \text{m}/\text{s}$  se denomina vatio (W). Cuando una unidad como el newton o el vatio corresponde al nombre de una persona, se escribe en minúsculas. En cambio, las abreviaturas de estas unidades se escriben en mayúsculas.

En la tabla 1.1 se relacionan los prefijos de los múltiplos y submúltiplos más corrientes de las unidades del SI. Estos múltiplos son todas potencias de 10 y un sistema así se denomina sistema decimal; el sistema decimal basado en el metro se llama sistema métrico. Los prefijos pueden aplicarse a cualquier unidad del SI; por ejemplo, 0,001 segundos es un milisegundo (ms); 1 000 000 vatios es un megavatio (MW).

TABLA 1.1 Prefijos de las potencias de  $10^\dagger$

Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
$10^{18}$	exa	E
$10^{15}$	peta	P
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	hecto	h
$10^1$	deca	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a

<sup>†</sup> Los prefijos hecto (h), deca (da) y deci (d) no son múltiplos de  $10^3$  ó  $10^{-3}$  y se utilizan con poca frecuencia. El otro prefijo que no es múltiplo de  $10^3$  ó  $10^{-3}$  es centi (c). Los prefijos que se usan con más frecuencia en este libro se escriben en rojo. Nótese que todas las abreviaturas de prefijos múltiplos de  $10^6$  y superiores se escriben en mayúsculas; todos los otros se abrevian con minúsculas.

## Otros sistemas de unidades

Otro sistema decimal que aún se utiliza, pero que está siendo reemplazado gradualmente por el sistema del SI, es el sistema cgs, basado en el centímetro, el gramo y el segundo. El centímetro se define ahora como 0,01 m y el gramo como 0,001 kg. Originalmente el gramo se definió como la masa de 1 cm<sup>3</sup> de agua a 4 °C. (Según esta definición un kilogramo es la masa de 1000 centímetros cúbicos o un litro de agua.)

Existen otros sistemas de unidades como el sistema técnico inglés utilizado en los EE.UU. y otros países de habla inglesa, en el que se toma la libra como unidad fundamental de fuerza. La libra se define en función de la atracción gravitatoria de la Tierra en un lugar determinado sobre un cuerpo patrón. La unidad de masa se define entonces en función de la libra. La unidad fundamental de longitud en este sistema es el pie (ft) y la unidad de tiempo es el segundo con la misma definición que la unidad del SI. El pie se define como un tercio de una yarda (yd), y ésta se define ahora en función del metro como:

$$1 \text{ yd} = 0,9144 \text{ m} \quad (1.1)$$

$$1 \text{ pie} = \frac{1}{3} \text{ yd} = 0,3048 \text{ m} \quad (1.2)$$

Esto hace que la pulgada sea exactamente 2,54 cm. Este sistema no es decimal y es menos conveniente que el SI o cualquier otro sistema decimal, pues los múltiplos comunes de sus unidades no son potencias de 10. Por ejemplo 1 yarda = 3 pies y 1 pie = 12 pulgadas. En el capítulo 4 veremos que la masa es una elección mejor que la fuerza como unidad fundamental, por tratarse de una propiedad intrínseca de un objeto que es independiente de su localización. En el Apéndice A se dan las relaciones entre el sistema técnico inglés y el SI.

## 1.2 Conversión de unidades

Todas las magnitudes físicas contienen un número y una unidad. Cuando estas magnitudes se suman, se multiplican o se dividen en una ecuación algebraica, la unidad puede tratarse como cualquier otra magnitud algebraica. Por ejemplo, supóngase que deseamos hallar la distancia recorrida en 3 horas (h) por un coche que se mueve con una velocidad constante de 80 kilómetros por hora (km/h). La distancia  $x$  es precisamente la velocidad  $v$  multiplicada por el tiempo  $t$ :

$$x = vt = \frac{80 \text{ km}}{\text{h}} \times 3 \text{ h} = 240 \text{ km}$$

Eliminamos la unidad de tiempo, la hora, igual que haríamos con cualquier otra magnitud algebraica para obtener la distancia en la unidad de longitud correspondiente, el kilómetro. Este método permite fácilmente pasar de una unidad de distancia a otra. Supóngase que quisiéramos convertir nuestra respuesta de 240 km en millas (mi). Teniendo en cuenta que 1 mi = 1,61 km, si dividimos los dos miembros de esta igualdad por 1,61 km se obtiene

$$\frac{1 \text{ mi}}{1,61 \text{ km}} = 1$$

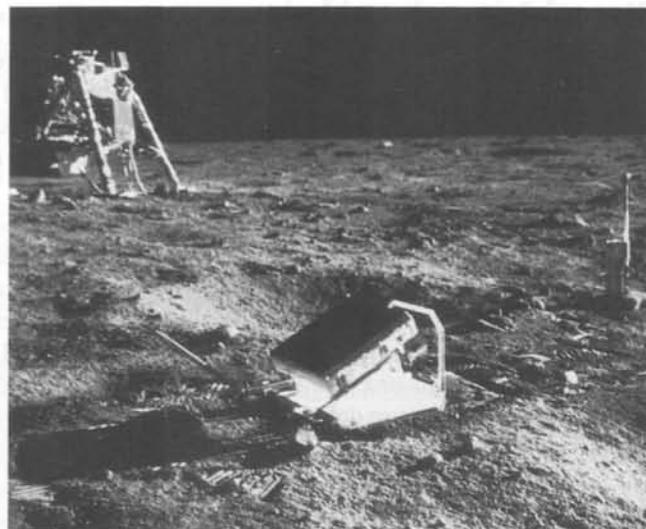
Como toda magnitud puede multiplicarse por 1 sin modificar su valor, podemos cambiar 240 km en millas multiplicando por el factor (1 mi)/(1,61 km):

$$240 \text{ km} = 240 \text{ km} \times \frac{1 \text{ mi}}{1,61 \text{ km}} = 149 \text{ mi}$$

El factor (1 mi)/(1,61 km) se denomina **factor de conversión**. Todos los factores de conversión tienen el valor de 1 y se utilizan para pasar una magnitud expresada en una unidad de medida a su equivalente en otra unidad de medida. Escribiendo explícitamente las unidades, no es necesario pensar si hay que multiplicar o dividir por 1,61 para pasar de kilómetros a millas, ya que las unidades indican si hemos escogido el factor correcto o el incorrecto.



(a)



(b)

(a) Haces de láser emitidos desde el Observatorio Macdonald para medir la distancia hasta la Luna. Esta distancia se mide con un error de pocos centímetros midiendo el tiempo transcurrido en el viaje de ida y vuelta del rayo láser a la Luna después de reflejarse en un espejo (b) allí emplazado por los astronautas del Apolo 14.

### EJEMPLO 1.1 | Uso de los factores de conversión

Un empleado de una empresa con sede en Estados Unidos ha de viajar, por encargo de su empresa, a un país donde las señales de tráfico muestran la distancia en kilómetros y los velocímetros de los coches están calibrados en kilómetros por hora. Si con su vehículo viaja a 90 km por hora, ¿a cuánto equivale su velocidad expresada en metros por segundo y en millas por hora?

**Planteamiento del problema** Utilizaremos el hecho de que  $1000 \text{ m} = 1 \text{ km}$ ,  $60 \text{ s} = 1 \text{ min}$  y  $60 \text{ min} = 1 \text{ h}$  para convertir los kilómetros por hora en metros por segundo. Se multiplica la magnitud  $90 \text{ km/h}$  por una serie de factores de conversión de valor 1 de modo que el valor de la velocidad no varía. Para convertir la velocidad en millas por hora, se utiliza el factor de conversión  $(1 \text{ mi})/(1,61 \text{ km}) = 1$ .

- Multiplicar  $90 \text{ km/h}$  por una serie de factores de conversión que transforman los kilómetros en metros y las horas en segundos:
 
$$\frac{90 \text{ km}}{\text{h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \boxed{25 \text{ m/s}}$$
- Multiplicar  $90 \text{ km/h}$  por  $1 \text{ mi}/1,61 \text{ km}$ :
 
$$\frac{90 \text{ km}}{\text{h}} \times \frac{1 \text{ mi}}{1,61 \text{ km}} = \boxed{55,9 \text{ mi/h}}$$

**Ejercicio** ¿Cuál es el equivalente de  $65 \text{ mi/h}$  en metros por segundo? (Respuesta  $29,1 \text{ m/s}$ .)



## 1.3 Dimensiones de las magnitudes físicas

El área de una figura plana se encuentra multiplicando una longitud por otra. Por ejemplo, el área de un rectángulo de lados  $2 \text{ m}$  y  $3 \text{ m}$  es  $A = (2 \text{ m})(3 \text{ m}) = 6 \text{ m}^2$ . La unidad de esta área es el metro cuadrado. Puesto que el área es el producto de dos longitudes, se dice que tiene dimensiones de longitud por longitud, o longitud al cuadrado, que suele escribirse  $L^2$ . La idea de dimensiones se amplía fácilmente a otras magnitudes no geométricas. Por ejemplo, la velocidad tiene dimensiones de longitud dividida por tiempo o  $L/T$ . Las dimensiones de otras magnitudes, tales como fuerza o energía, se escriben en función de las magnitudes fundamentales longitud, tiempo y masa. La suma de dos magnitudes físicas sólo tiene sentido si ambas tienen las mismas dimensiones. Por ejemplo, no podemos sumar un área a una velocidad y obtener una suma que signifique algo. Si tenemos una ecuación como

$$A = B + C$$



las magnitudes  $A$ ,  $B$  y  $C$  deben tener las tres las mismas dimensiones. La suma de  $B$  y  $C$  exige que las dos magnitudes estén además expresadas en las mismas unidades. Por ejemplo, si  $B$  es un área de  $500 \text{ cm}^2$  y  $C$  es  $4 \text{ m}^2$ , debemos convertir  $B$  en  $\text{m}^2$  o  $C$  en  $\text{cm}^2$  para hallar la suma de las dos áreas.

A veces pueden detectarse errores en un cálculo comprobando las dimensiones y unidades de las magnitudes que intervienen en él. Supóngase, por ejemplo, que estamos utilizando erróneamente la fórmula  $A = 2\pi r$  para el área de un círculo. Veremos inmediatamente que esto no puede ser correcto, ya que  $2\pi r$  tiene dimensiones de longitud, mientras que el área tiene dimensiones de longitud al cuadrado. La coherencia dimensional es una condición necesaria, pero no suficiente para que una ecuación sea correcta. Una ecuación puede tener las dimensiones correctas en cada término, pero no describir una situación física. La tabla 1.2 relaciona las dimensiones de algunas magnitudes corrientes en física.

TABLA 1.2 Dimensiones de las magnitudes físicas

Magnitud	Símbolo	Dimensión
Área	$A$	$L^2$
Volumen	$V$	$L^3$
Velocidad	$v$	$L/T$
Aceleración	$a$	$L/T^2$
Fuerza	$F$	$ML/T^2$
Presión ( $F/A$ )	$p$	$M/LT^2$
Densidad ( $M/V$ )	$\rho$	$M/L^3$
Energía	$E$	$ML^2/T^2$
Potencia ( $E/T$ )	$P$	$ML^2/T^3$

### EJEMPLO 1.2 | Las dimensiones físicas de la presión

La presión de un fluido en movimiento depende de su densidad  $\rho$  y su velocidad  $v$ . Determinar una combinación sencilla de densidad y velocidad que nos dé las dimensiones correctas de la presión.

**Planteamiento del problema** En la tabla 1.2 se observa que tanto la presión como la densidad tienen unidades de masa en el numerador, mientras que la velocidad no contiene la dimensión  $M$ . Dividamos las unidades de presión por las de densidad e inspeccionemos el resultado.

1. Se dividen las unidades de presión por las de densidad:

$$\frac{[p]}{[\rho]} = \frac{M/LT^2}{M/L^3} = \frac{L^2}{T^2}$$

2. El resultado tiene dimensiones de  $v^2$ . Las dimensiones de la presión son las mismas que las de densidad multiplicadas por las de velocidad al cuadrado:

$$[p] = [\rho][v^2] = \frac{M}{L^3} \left(\frac{L}{T}\right)^2 = \boxed{\frac{M}{LT^2}}$$

**Observación** Cuando estudiemos los fluidos en el capítulo 13, veremos que según la ley de Bernoulli aplicada a un fluido que se mueve a una altura constante,  $p + \frac{1}{2}\rho v^2$  es constante, en donde  $p$  es la presión del fluido. Esto también se conoce como el efecto Venturi.

## 1.4 Notación científica

El manejo de números muy grandes o muy pequeños se simplifica utilizando la notación científica. En esta notación, el número se escribe como el producto de un número comprendido entre 1 y 10 y una potencia de 10, por ejemplo  $10^2$  (= 100) ó  $10^3$  (= 1000), etc. Por ejemplo, el número 12 000 000 se escribe  $1,2 \times 10^7$ ; la distancia entre la Tierra y el Sol, 150 000 000 000 m aproximadamente, se escribe  $1,5 \times 10^{11}$  m. El número 11 en  $10^{11}$  se llama **exponente**. Cuando los números son menores que 1 el exponente es negativo. Por ejemplo,  $0,1 = 10^{-1}$  y  $0,0001 = 10^{-4}$ . Por ejemplo, el diámetro de un virus es aproximadamente igual a  $0,00000001 \text{ m} = 1 \times 10^{-8} \text{ m}$ .

Al multiplicar dos números con notación científica, los exponentes se suman; en la división se restan. Estas reglas pueden comprobarse fácilmente en los siguientes ejemplos:

$$10^2 \times 10^3 = 100 \times 1000 = 100\,000 = 10^5$$

De igual forma,

$$\frac{10^2}{10^3} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10} = 10^{2-3} = 10^{-1}$$

En la notación científica,  $10^0$  se define como 1. En efecto, dividamos por ejemplo 1000 por sí mismo. Resulta

$$\frac{1000}{1000} = \frac{10^3}{10^3} = 10^{3-3} = 10^0 = 1$$

## EJEMPLO 1.3 | Recuento de átomos

En 12 g de carbono existen  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$  átomos de esta sustancia (número de Avogadro). Si contáramos un átomo por segundo, ¿cuánto tiempo tardaríamos en contar los átomos de 1 g de carbono? Expresar el resultado en años.

**Planteamiento del problema** Necesitamos determinar el número total de átomos,  $N$ , que hemos de contar y tener en cuenta que el número contado es igual a la tasa de recuento  $R$  multiplicada por el tiempo  $t$ .

1. El tiempo es igual al número total de átomos  $N$  dividido por la tasa de recuento  $R = 1$  átomo/s:

$$t = \frac{N}{R}$$

2. Determinar el número de átomos de carbono en 1 g:

$$N = \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ átomos}}{12 \text{ g}} \times 1 \text{ g} = 5,02 \times 10^{22} \text{ átomos}$$

3. Calcular el número de segundos necesarios para contar los átomos a 1 por segundo:

$$t = \frac{N}{R} = \frac{5,02 \times 10^{22} \text{ átomos}}{1 \text{ átomo/s}} = 5,02 \times 10^{22} \text{ s}$$

4. Calcular el número de segundos que contiene un año:

$$n = \frac{365 \text{ d}}{1 \text{ a}} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 3,15 \times 10^7 \text{ s/a}$$

5. Utilizar el factor de conversión  $3,15 \times 10^7$  s/a (una magnitud que conviene recordar) y convertir la respuesta del paso 3 en años:

$$t = 5,02 \times 10^{22} \text{ s} \times \frac{1 \text{ a}}{3,15 \times 10^7 \text{ s/a}} \\ = \frac{5,02}{3,15} \times 10^{22-7} \text{ a} = \boxed{1,59 \times 10^{15} \text{ a}}$$

**Observación** El tiempo requerido es aproximadamente 100 000 veces la edad del universo.

**Ejercicio** Si dividiéramos esta tarea de modo que cada persona contase átomos diferentes, ¿cuántos años tardaría un equipo formado por 5000 millones ( $5 \times 10^9$ ) de personas para contar los átomos que contiene 1 g de carbono? (Respuesta  $3,19 \times 10^5$  años.)

## EJEMPLO 1.4 | ¿Cuánta agua?

Un litro (L) es el volumen de un cubo de  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ . Si una persona bebe 1 L de agua, ¿qué volumen en centímetros cúbicos y en metros cúbicos ocupará este líquido en su estómago?

**Planteamiento del problema** El volumen de un cubo de lado  $\ell$  es  $V = \ell^3$ . El volumen en  $\text{cm}^3$  se determina directamente a partir de  $\ell = 10 \text{ cm}$ . Para determinar el volumen en  $\text{m}^3$ , hay que convertir  $\text{cm}^3$  en  $\text{m}^3$  utilizando el factor de conversión  $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ .

1. Calcular el volumen en  $\text{cm}^3$ :

$$V = \ell^3 = (10 \text{ cm})^3 = 10^3 \text{ cm}^3$$

2. Convertir a  $\text{m}^3$ :

$$10^3 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3 \times \left(\frac{10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ cm}}\right)^3 = 10^3 \text{ cm}^3 \times \left(\frac{10^{-6} \text{ m}^3}{1 \text{ cm}^3}\right) = \boxed{10^{-3} \text{ m}^3}$$

**Observación** El factor de conversión (igual a 1) puede elevarse a la tercera potencia sin modificar su valor, permitiéndonos cancelar las unidades implicadas.

La suma o resta de dos números escritos en notación científica cuando los exponentes no coinciden es ligeramente más delicada. Consideremos, por ejemplo,

$$(1,200 \times 10^2) + (8 \times 10^{-1}) = 120,0 + 0,8 = 120,8$$

Para calcular esta suma sin expresar ambos números en su forma decimal ordinaria, basta con volver a escribirlos de forma que la potencia de 10 sea la misma en ambos. En este caso se puede calcular la suma escribiendo, por ejemplo,  $1,200 \times 10^2 = 1200 \times 10^{-1}$  y luego sumando:

$$(1200 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-1}) = 1208 \times 10^{-1} = 120,8$$

Si los exponentes son muy diferentes, uno de los números es mucho menor que el otro y frecuentemente puede despreciarse en las operaciones de suma o resta. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(2 \times 10^6) + (9 \times 10^{-3}) &= 2\,000\,000 + 0,009 \\ &= 2\,000\,000,009 \approx 2 \times 10^6\end{aligned}$$

en donde el símbolo  $\approx$  significa "aproximadamente igual a".

Al elevar una potencia a otra potencia, los exponentes, se multiplican. Por ejemplo,

$$(10^2)^4 = 10^2 \times 10^2 \times 10^2 \times 10^2 = 10^8$$

## 1.5 Cifras significativas y órdenes de magnitud

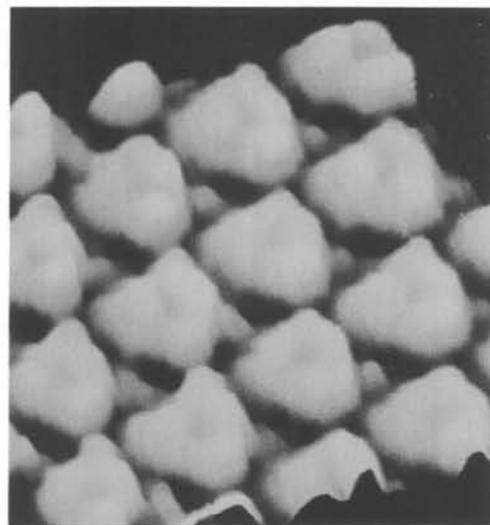
Muchos de los números que se manejan en la ciencia son el resultado de una medida y por lo tanto sólo se conocen con cierta incertidumbre experimental. La magnitud de esta incertidumbre depende de la habilidad del experimentador y del aparato utilizado, y frecuentemente sólo puede estimarse. Se suele dar una indicación aproximada de la incertidumbre de una medida mediante el número de dígitos que se utilizan. Por ejemplo, si decimos que la longitud de una mesa es 2,50 m, queremos indicar que probablemente su longitud se encuentra entre 2,495 m y 2,505 m; es decir, conocemos su longitud con una exactitud aproximada de  $\pm 0,005$  m =  $\pm 0,5$  cm de la longitud establecida. Si utilizamos un metro en el que se puede apreciar el milímetro y medimos esta misma longitud de la mesa cuidadosamente, podemos estimar que hemos medido la longitud con una precisión de  $\pm 0,5$  mm, en lugar de  $\pm 0,5$  cm. Indicamos esta precisión utilizando cuatro dígitos, como por ejemplo, 2,503 m, para expresar la longitud. Recibe el nombre de **cifra significativa** todo dígito (exceptuando el cero cuando se utiliza para situar el punto decimal) cuyo valor se conoce con seguridad. El número 2,50 tiene tres cifras significativas; 2,503 tiene cuatro. El número 0,00103 tiene tres cifras significativas. (Los tres primeros ceros no son cifras significativas ya que simplemente sitúan la coma decimal.) En notación científica, este número se escribiría como  $1,03 \times 10^{-3}$ . Un error muy común en los estudiantes, particularmente desde que se ha generalizado el uso de calculadoras de bolsillo, es arrastrar en el cálculo muchos más dígitos de los que en realidad se requieren. Supongamos, por ejemplo, que medimos el área de un campo de juego circular midiendo el radio en pasos y utilizando la fórmula del área  $A = \pi r^2$ . Si estimamos que la longitud del radio es 8 m y utilizamos una calculadora de 10 dígitos para determinar el valor del área, obtenemos  $\pi(8 \text{ m})^2 = 201,0619298 \text{ m}^2$ . Los dígitos situados detrás del punto decimal no sólo dificultan el cálculo sino que inducen a confusión respecto a la exactitud con la que conocemos el área. Si se ha calculado el radio mediante pasos, la exactitud de la medida será tan sólo de 0,5 m. Es decir, la longitud del radio tendrá como máximo un valor de 8,5 m y como mínimo un valor de 7,5 m. Si la longitud del radio es 8,5 m, el valor del área es  $\pi(8,5 \text{ m})^2 = 226,9800692 \text{ m}^2$ , mientras que si es 7,5 m, el área vale  $\pi(7,5 \text{ m})^2 = 176,714587 \text{ m}^2$ . Una regla general válida cuando se manejan diferentes números en una operación de multiplicación o división es:

El número de cifras significativas del resultado de una multiplicación o división no debe ser mayor que el menor número de cifras significativas de cualesquiera de los factores.

En el ejemplo anterior sólo se conoce una cifra significativa del radio; por lo tanto, sólo se conoce una cifra significativa del área. Ésta se debe expresar como  $2 \times 10^2 \text{ m}^2$ , lo que implica que el área está comprendida entre  $150 \text{ m}^2$  y  $250 \text{ m}^2$ .

La precisión de la suma o resta de dos medidas depende de la precisión menor de estas medidas. Una regla general es:

El resultado de la suma o resta de dos números carece de cifras significativas más allá de la última cifra decimal en que ambos números originales tienen cifras significativas.



Moléculas de benceno del orden de  $10^{-10}$  m de diámetro, vistas mediante un microscopio electrónico de barrido.



Cromosomas del orden de  $10^{-6}$  m vistos mediante un microscopio electrónico de barrido.

**EJEMPLO 1.5** | Cifras significativas

Determinar la suma  $1,040 + 0,21342$ .

**Planteamiento del problema** El primer número, 1,040, tiene sólo tres cifras significativas después de la coma decimal, mientras que el segundo, 0,21342, tiene cinco. De acuerdo con la regla anterior, la suma sólo puede tener tres cifras significativas después de la coma decimal.

Sumar los números manteniendo sólo 3 dígitos más allá de la coma decimal:  $1,040 + 0,21342 = 1,253$

**Ejercicio** Aplicar la regla apropiada para determinar el número de cifras significativas en las siguientes operaciones: (a)  $1,58 \times 0,03$ ; (b)  $1,4 + 2,53$ ; y (c)  $2,34 \times 10^2 + 4,93$ . (Respuestas (a) 0,05, (b) 3,9; (c)  $2,39 \times 10^2$ .)



Distancias familiares en nuestro mundo cotidiano. La altura de la muchacha es del orden de  $10^0$  m y la de la montaña de  $10^4$  m.

Los datos de la mayor parte de los ejemplos y ejercicios de este texto se dan con tres (y en algunas ocasiones cuatro) cifras significativas, pero en ciertos casos éstas no se han especificado y se dice, por ejemplo, que las dimensiones del tablero de una mesa son de 1 y 3 m en lugar de expresar las longitudes como 1,00 m y 3,00 m. A no ser que se indique lo contrario, puede suponerse que cualquier dato que se utilice en un problema o ejercicio se conoce con tres cifras significativas. Esta misma suposición vale para los datos de los problemas de final de capítulo. Cuando se realizan cálculos aproximados o comparaciones se suele redondear un número hasta la potencia de 10 más próxima. Tal número recibe el nombre de **orden de magnitud**. Por ejemplo, la altura de un pequeño insecto, digamos un hormiga, puede ser  $8 \times 10^{-4}$  m  $\approx 10^{-3}$  m. Diremos que el orden de magnitud de la altura de una hormiga es de  $10^{-3}$  m. De igual modo, como la altura de la mayoría de las personas se encuentra próxima a 2 m, podemos redondear este número y decir que el orden de magnitud de la altura de una persona es de  $10^0$  m. Esto no quiere decir que la altura típica de una persona sea realmente de 1 m, sino que está más próxima a 1 m que a 10 m ó  $10^{-1} = 0,1$  m. Podemos decir que una persona típica es tres órdenes de magnitud más alta que una hormiga típica, queriendo decir con esto que el cociente entre las alturas es aproximadamente igual a  $10^3$  (relación 1000 a 1). Un orden de magnitud no proporciona cifras que se conozcan con precisión. Debe pensarse que no tiene cifras significativas. La tabla 1.3 especifica los valores de los órdenes de magnitud de algunas longitudes, masas y tiempos relacionados con la física.

En muchos casos el orden de magnitud de una cantidad puede estimarse mediante hipótesis razonables y cálculos simples. El físico Enrico Fermi era un maestro en el cálculo de respuestas aproximadas a cuestiones ingeniosas que parecían a primera vista imposibles de resolver por la limitada información disponible. El siguiente es un ejemplo de **problema de Fermi**.

**EXPLORANDO**

¿Cuántos afinadores de piano hay en Chicago? Averigüe esto, y más, en [www.whfreeman.com/tipler5e](http://www.whfreeman.com/tipler5e).



La Tierra, con un diámetro del orden de  $10^7$  m, vista desde el espacio.



El diámetro de la galaxia Andrómeda es del orden de  $10^{21}$  m.

TABLA 1.3 El universo por órdenes de magnitud

Tamaño o distancia	(m)	Masa	(kg)	Intervalo de tiempo	(s)
Protón	$10^{-15}$	Electrón	$10^{-30}$	Tiempo invertido por la luz en atravesar un núcleo	$10^{-23}$
Átomo	$10^{-10}$	Protón	$10^{-27}$	Periodo de la radiación de luz visible	$10^{-15}$
Virus	$10^{-7}$	Aminoácido	$10^{-25}$	Periodo de las microondas	$10^{-10}$
Ameba gigante	$10^{-4}$	Hemoglobina	$10^{-22}$	Periodo de semidesintegración de un muón	$10^{-6}$
Nuez	$10^{-2}$	Virus de la gripe	$10^{-19}$	Periodo del sonido audible más alto	$10^{-4}$
Ser humano	$10^0$	Ameba gigante	$10^{-8}$	Periodo de las pulsaciones del corazón humano	$10^0$
Montaña más alta	$10^4$	Gota de lluvia	$10^{-6}$	Periodo de semidesintegración de un neutrón libre	$10^3$
Tierra	$10^7$	Hormiga	$10^{-4}$	Periodo de rotación terrestre	$10^5$
Sol	$10^9$	Ser humano	$10^2$	Periodo de revolución terrestre	$10^7$
Distancia Tierra-Sol	$10^{11}$	Cohete espacial Saturno 5	$10^6$	Vida media de un ser humano	$10^9$
Sistema solar	$10^{13}$	Pirámide	$10^{10}$	Periodo de semidesintegración del plutonio 239	$10^{12}$
Distancia de la estrella más cercana	$10^{16}$	Tierra	$10^{24}$	Vida media de una cordillera	$10^{15}$
Galaxia Vía Láctea	$10^{21}$	Sol	$10^{30}$	Edad de la Tierra	$10^{17}$
Universo visible	$10^{26}$	Galaxia Vía Láctea	$10^{41}$	Edad del universo	$10^{18}$
		Universo	$10^{52}$		

### EJEMPLO 1.6 | Desgaste de los neumáticos

¿Qué espesor de la banda de caucho de un neumático de automóvil se ha desgastado en un recorrido de 1 km?

**Planteamiento del problema** Supongamos que el espesor de la banda de un neumático nuevo es de 1 cm. Quizás varíe en un factor de 2, pero desde luego no es 1 mm, ni tampoco 10 cm. Como los neumáticos deben reemplazarse cada 60 000 km, podemos admitir que la banda está gastada completamente después de recorrer esta distancia, es decir, que su espesor disminuye a razón de 1 cm cada 60 000 km.

Utilizar la estimación de desgaste de 1 cm por cada 60 000 km de recorrido para calcular la disminución de espesor en 1 km:

$$\frac{\text{Desgaste de 1 cm}}{60\,000 \text{ km recorridos}} = \frac{\text{Desgaste de } 1,7 \times 10^{-5} \text{ cm}}{1 \text{ km recorrido}}$$

$\approx 0,2 \mu\text{m}$  de desgaste por km recorrido

**Ejercicio** ¿Cuántos granos de arena hay en un tramo de playa de 0,50 km de largo por 100 m de ancho? *Sugerencia: supóngase que hay arena hasta una profundidad de 3 m. El diámetro de un grano de arena es del orden de 1,00 mm. (Respuesta  $\approx 2 \times 10^{14}$ .)*

## Resumen

Las unidades fundamentales del SI son el metro (m), el segundo (s), el kilogramo (kg), el kelvin (K), el amperio (A), el mol (mol) y la candela (cd). La unidad (o las unidades) de cualquier magnitud física siempre puede(n) expresarse en función de estas unidades fundamentales.

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

<b>1. Unidades</b>	La magnitud de una cantidad física (por ejemplo, longitud, tiempo, fuerza y energía) se expresa mediante un número y una unidad.
Unidades fundamentales	Las unidades fundamentales del <i>Sistema Internacional</i> (SI) son el (m), el segundo (s), el kilogramo (kg), el kelvin (K), el amperio (A), el mol (mol) y la candela (cd). La unidad (o las unidades) de toda magnitud física puede(n) expresarse en función de estas unidades fundamentales.
Las unidades en las ecuaciones	Las unidades en las ecuaciones se tratan de igual modo que cualquier otra magnitud algebraica.
Conversión	Los factores de conversión, que son siempre igual a 1, proporcionan un método conveniente para convertir un tipo de unidad en otra.

2. Dimensiones	Los dos miembros de una ecuación deben tener las mismas dimensiones.
3. Notación científica	Por conveniencia, los números muy grandes y muy pequeños se escriben por medio de un factor que multiplica a una potencia de 10.
4. Exponentes	
Multiplicación	Al multiplicar dos números, los exponentes se suman.
División	Al dividir dos números, los exponentes se restan.
Potencia	Cuando un número que contiene un exponente se eleva a otro exponente, los exponentes se multiplican.
5. Cifras significativas	
Multiplicación y división	El número de cifras significativas en el resultado de una multiplicación o división nunca será mayor que el menor número de cifras significativas de cualquiera de los factores.
Adición y sustracción	El resultado de la suma o resta de dos números no tiene cifras significativas más allá de la última cifra decimal en que ambos números originales tienen cifras significativas.
6. Orden de magnitud	Un número redondeado a la potencia más próxima de 10 se denomina orden de magnitud. El orden de magnitud puede estimarse mediante hipótesis razonables y cálculos simples.

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

### Problemas conceptuales

1 ● SSM iSOLVE ¿Cuál de las siguientes magnitudes físicas *no* es una de las fundamentales del Sistema Internacional? (a) Masa. (b) Longitud. (c) Fuerza. (d) Tiempo. (e) Todas ellas son magnitudes físicas fundamentales.

2 ● iSOLVE Al hacer un cálculo, el resultado final tiene las dimensiones m/s en el numerador y m/s<sup>2</sup> en el denominador. ¿Cuáles son las unidades finales? (a) m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>. (b) 1/s. (c) s<sup>3</sup>/m<sup>2</sup>. (d) s. (e) m/s.

3 ● iSOLVE El prefijo giga significa (a) 10<sup>3</sup>, (b) 10<sup>6</sup>, (c) 10<sup>9</sup>, (d) 10<sup>12</sup>, (e) 10<sup>15</sup>.

4 ● iSOLVE El prefijo mega significa (a) 10<sup>-9</sup>, (b) 10<sup>-6</sup>, (c) 10<sup>-3</sup>, (d) 10<sup>6</sup>, (e) 10<sup>9</sup>.

5 ● SSM iSOLVE El prefijo pico significa (a) 10<sup>-12</sup>, (b) 10<sup>-6</sup>, (c) 10<sup>-3</sup>, (d) 10<sup>6</sup>, (e) 10<sup>9</sup>.

6 ● iSOLVE El número 0,0005130 tiene \_\_\_\_ cifras significativas. (a) una, (b) tres, (c) cuatro, (d) siete, (e) ocho.

7 ● iSOLVE El número 23,0040 tiene \_\_\_\_ cifras significativas (a) dos, (b) tres, (c) cuatro, (d) cinco, (e) seis.

8 ● ¿Cuáles son las ventajas e inconvenientes de utilizar la longitud de un brazo como unidad estándar de longitud?

9 ● Verdadero o falso:

(a) Para sumar dos magnitudes es condición necesaria que tengan las mismas dimensiones.

(b) Para multiplicar dos magnitudes es condición necesaria que tengan las mismas dimensiones.

(c) Todos los factores de conversión tienen el valor 1.

### Cálculo y aproximaciones

10 ●● SSM El ángulo subtendido por el diámetro de la Luna en un punto de la Tierra es aproximadamente 0,524° (figura 1.2). Con este dato y sabiendo que la Luna dista 384 Mm de la Tierra, hallar su diámetro. (El ángulo

$\theta$  subtendido por la Luna es aproximadamente igual a  $D/r_1$ , donde  $D$  es el diámetro de la Luna y  $r_1$  es la distancia a la misma.)

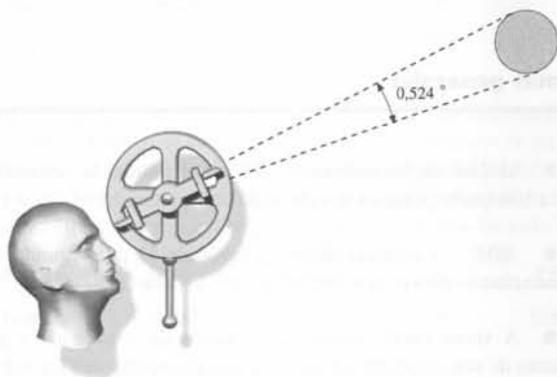


Figura 1.2 Problema 10

**11** ●● **SSM** **ISOLVE** ✓ El Sol posee una masa de  $1,99 \times 10^{30}$  kg. Fundamentalmente el Sol está compuesto de hidrógeno, con sólo una pequeña cantidad de elementos más pesados. El átomo de hidrógeno tiene una masa de  $1,67 \times 10^{-27}$  kg. Estimar el número de átomos de hidrógeno del Sol.

**12** ●● Muchas bebidas refrescantes se venden utilizando como envase latas de aluminio. Una lata contiene aproximadamente unos 0,018 kg de aluminio. (a) Estimar cuántas latas se consumen durante un año en los Estados Unidos de Norteamérica. (b) Calcular la masa total de aluminio atribuible al consumo de latas de bebidas refrescantes. (c) Si por cada kilogramo de aluminio, en un centro de reciclaje se obtiene 1 \$, ¿cuál es el valor económico del aluminio acumulado durante un año de las latas usadas?

**13** ●● Richard Feynman en su ensayo "Hay mucho sitio libre en todas partes" propuso escribir la *Enciclopedia Británica* completa en la cabeza de un alfiler. (a) Estimar el tamaño que deberían tener las letras si suponemos, al igual que Richard Feynman, que el diámetro de la cabeza del alfiler mide 1,5875 mm. (b) Si en un metal el espacio entre átomos es de 0,5 nm ( $5 \times 10^{-10}$  m), ¿cuántos átomos abarca el grosor de cada letra?

**14** ●● **SSM** (a) Estimar cuántos litros de gasolina usan los automóviles cada día en los Estados Unidos de Norteamérica y el coste asociado. (b) Si de un barril de crudo se obtienen 73,45 L de gasolina, calcular cuántos barriles de petróleo deben importarse en un año en los Estados Unidos de Norteamérica para fabricar la gasolina necesaria para la automoción. ¿Cuántos barriles por día supone esta cifra?

**15** ●● Se ha debatido públicamente con frecuencia cuáles son las consecuencias ambientales de usar pañales desechables o pañales reutilizables de tela. (a) Supóngase que un bebé, desde que nace y hasta los 2,5 años, usa tres pañales al día. Estimar cuántos pañales desechables se usan cada año en los Estados Unidos de Norteamérica. (b) Calcular el volumen de vertedero ocupado por los pañales, suponiendo que 1000 kg de estos residuos ocupan  $1 \text{ m}^3$ . (c) Calcular la superficie que ocuparían anualmente estos residuos si se supone que necesitan una profundidad media en el vertedero de 10 m.

**16** ●●● A cada dígito binario lo denominamos *bit*. Una serie de bits agrupados se denomina *palabra* y una palabra compuesta por ocho bits se denomina *byte*. Supongamos que el disco duro de un ordenador tiene una capacidad de 20 gigabytes. (a) ¿Cuántos bits pueden almacenarse en el disco? (b) Estimar cuántos libros típicos podrían almacenarse en el disco duro suponiendo que cada carácter requiere un byte.

**17** ●● **SSM** Estimar cuánto se recauda anualmente en el peaje del puente George Washington en Nueva York. El peaje cuesta 6 \$ en el recorrido de Nueva York a Nueva Jersey y es gratis en el sentido contrario. Los vehículos circulan en un total de 14 carriles.

## Unidades

**18** ● Expresar las siguientes magnitudes usando los prefijos que se listan en la tabla 1.1 y las abreviaturas de la página EP-1; por ejemplo, 10 000 metros = 10 km. (a) 1 000 000 vatios, (b) 0,002 gramos, (c)  $3 \times 10^{-6}$  metros, (d) 30 000 segundos.

**19** ● Escribir cada una de las siguientes magnitudes sin usar prefijos: (a)  $40 \mu\text{W}$ , (b) 4 ns, (c) 3 MW, (d) 25 km.

**20** ● **SSM** Escribir las siguientes magnitudes (que no se expresan en unidades del SI) sin usar abreviaturas. Por ejemplo,  $10^3$  metros = 1 kilómetro: (a)  $10^{-12}$  abucheos, (b)  $10^9$  mugidos, (c)  $10^{-6}$  teléfonos, (d)  $10^{-18}$  chicos, (e)  $10^6$  teléfonos, (f)  $10^{-9}$  cabras, (g)  $10^{12}$  toros.

**21** ●● **ISOLVE** En las ecuaciones siguientes, la distancia  $x$  está en metros, el tiempo  $t$  en segundos y la velocidad  $v$  en metros por segundo. ¿Cuáles son las unidades del SI de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ ? (a)  $x = C_1 + C_2 t$ . (b)  $x = \frac{1}{2} C_1 t^2$ . (c)  $v^2 = 2C_1 x$ . (d)  $x = C_1 \cos C_2 t$ . (e)  $v^2 = 2C_1 - (C_2 x)^2$ .

**22** ●● **ISOLVE** Si en el problema 21 se expresa  $x$  en pies,  $t$  en segundos y  $v$  en pies por segundos, ¿cuáles son las dimensiones de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ ?

## Conversión de unidades

**23** ● A partir de la definición original de metro en función de la distancia del Ecuador al Polo Norte hallar en metros (a) la circunferencia de la Tierra. (b) el radio de la Tierra. (c) Convertir las respuestas dadas en (a) y (b) de metros a millas.

**24** ● **ISOLVE** La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s. ¿Cuál es la velocidad de un avión supersónico que se mueve con una velocidad doble a la del sonido? Dar la respuesta en kilómetros por hora y millas por hora.

**25** ● **SSM** **ISOLVE** Un jugador de baloncesto tiene una altura de 6 pies y 10,5 pulgadas. ¿Cuál es su altura en centímetros?

**26** ● Completar las siguientes igualdades: (a)  $100 \text{ km/h} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mi/h}$ . (b)  $60 \text{ cm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ in}$ . (c)  $100 \text{ yd} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$ .

**27** ● La mayor separación entre dos soportes del puente *Golden Gate* es de 4200 pies. Expresar esta distancia en km.

**28** ● **SSM** Hallar el factor de conversión para convertir millas por hora en kilómetros por hora.

**29** ● Completar las siguientes expresiones: (a)  $1,296 \times 10^5 \text{ km/h}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ km/h} \cdot \text{s}$ . (b)  $1,296 \times 10^5 \text{ km/h}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m/s}^2$ . (c)  $60 \text{ mi/h} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ pies/s}$ . (d)  $60 \text{ mi/h} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m/s}$ .

**30** ● En un litro hay 1,057 cuartos y 4 cuartos en un galón. (a) ¿Cuántos litros hay en un galón? (b) Un barril equivale a 42 galones. ¿Cuántos metros cúbicos hay en un barril?

**31** ● **ISOLVE** Una milla cuadrada tiene 640 acres. ¿Cuántos metros cuadrados tiene un acre?

**32** ●● **ISOLVE** Un cilindro circular recto tiene un diámetro de 6,8 pulgadas y una altura de 2 pies. ¿Cuál es el volumen del cilindro en (a) pies cúbicos, (b) metros cúbicos, (c) litros?

**33** ●● **SSM** En las siguientes expresiones,  $x$  está en metros,  $t$  en segundos,  $v$  en metros por segundo y la aceleración  $a$  en metros por segundo cuadrado. Determinar las unidades del SI de cada combinación: (a)  $v^2/x$  (b)  $\sqrt{x}/a$  (c)  $\frac{1}{2} at^2$ .

## Dimensiones de las magnitudes físicas

34 ● ¿Cuáles son las dimensiones de las constantes que aparecen en cada uno de los apartados del problema 21?

35 ●● La ley de desintegración radiactiva es  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ , en donde  $N_0$  es el número de núcleos radiactivos en el instante  $t = 0$ ;  $N(t)$  es el número que permanece sin desintegrar en el tiempo  $t$  y  $\lambda$  es la llamada constante de desintegración. ¿Qué dimensiones tiene  $\lambda$ ?

36 ●● SSM La unidad del SI de fuerza, el kilogramo-metro por segundo cuadrado ( $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ ), se denomina newton (N). Hallar las dimensiones y las unidades del SI de la constante  $G$  en la ley de Newton de la gravitación  $F = Gm_1m_2/r^2$ .

37 ●● Un objeto situado en el extremo de una cuerda se mueve según un círculo. La fuerza ejercida por la cuerda tiene unidades de  $MLT^{-2}$  y depende de la masa del objeto, de su velocidad y del radio del círculo. ¿Qué combinación de estas variables ofrece las dimensiones correctas de la fuerza?

38 ●● **¡SOLVE!** Demostrar que el producto de la masa por la aceleración y la velocidad tiene las dimensiones de una potencia.

39 ●● El momento lineal o ímpetu de un objeto es el producto de su masa y velocidad. Demostrar que esta magnitud tiene las dimensiones de una fuerza multiplicada por el tiempo.

40 ●● ¿Qué combinación de la fuerza y otra magnitud física tiene las dimensiones de la potencia?

41 ●● SSM **¡SOLVE!** Cuando un objeto cae a través del aire, se produce una fuerza de arrastre que depende del producto del área superficial del objeto y el cuadrado de su velocidad, es decir,  $F_{\text{aire}} = CAv^2$ , en donde  $C$  es una constante. Determinar las dimensiones de  $C$ .

42 ●● La tercera ley de Kepler relaciona el periodo de un planeta con su radio  $r$ , la constante  $G$  de la ley de gravitación de Newton ( $F = Gm_1m_2/r^2$ ) y la masa del Sol,  $M_S$ . ¿Qué combinación de estos factores ofrece las dimensiones correctas para el periodo de un planeta?

## Notación científica y cifras significativas

43 ● SSM Expresar los siguientes números como números decimales sin utilizar la notación de potencias de diez: (a)  $3 \times 10^4$ . (b)  $6,2 \times 10^{-3}$ . (c)  $4 \times 10^{-6}$ . (d)  $2,17 \times 10^5$ .

44 ● Escribir en notación científica los siguientes valores: (a) 3,1 GW = \_\_\_ W. (b) 10 pm = \_\_\_ m. (c) 2,3 fs = \_\_\_ s. (d) 4  $\mu$ s = \_\_\_ s.

45 ● **¡SOLVE!** Realizar las siguientes operaciones, redondeando hasta el número correcto de cifras significativas, y expresar el resultado en notación científica: (a)  $(1,14)(9,99 \times 10^4)$ . (b)  $(2,78 \times 10^{-8}) - (5,31 \times 10^{-9})$ . (c)  $12\pi/(4,56 \times 10^{-3})$ . (d)  $27,6 + (5,99 \times 10^2)$ .

46 ● Calcular las siguientes operaciones redondeando al número correcto de cifras significativas y expresando el resultado en notación científica: (a)  $(200,9)(569,3)$ . (b)  $(0,000000513)(62,3 \times 10^7)$ . (c)  $28,401 + (5,78 \times 10^4)$ . (d)  $63,25/(4,17 \times 10^{-3})$ .

47 ● SSM **¡SOLVE!** Una membrana celular posee un espesor de 7 mm. ¿Cuántas membranas de este espesor deberían apilarse para conseguir una altura de 1 pulgada?

48 ● Calcular las siguientes operaciones redondeando al número correcto de cifras significativas y expresando el resultado en notación científica: (a)  $(2,00 \times 10^4)(6,10 \times 10^{-2})$ . (b)  $(3,141592)(4,00 \times 10^5)$ . (c)  $(2,32 \times 10^3)/(1,16 \times 10^8)$ . (d)  $(5,14 \times 10^3) + (2,78 \times 10^2)$ . (e)  $(1,99 \times 10^2) + (9,99 \times 10^{-5})$ .

49 ● SSM Realizar los siguientes cálculos y redondear los resultados con el número correcto de cifras significativas: (a)  $3,141592654 \times (23,2)^2$ . (b)  $2 \times 3,141592654 \times 0,76$ . (c)  $4/3\pi \times (1,1)^3$ . (d)  $(2,0)^5/3,141592654$ .

## Problemas generales

50 ● Muchas de las carreteras de Canadá limitan la velocidad de los vehículos a 100 km/h. ¿Cuál es la velocidad límite en mi/h?

51 ● SSM Contando dólares a razón de 1\$ por segundo, ¿cuántos años necesitaríamos para contar 1000 millones de dólares?

52 ● A veces puede obtenerse un factor de conversión a partir del conocimiento de una constante en dos sistemas diferentes. (a) La velocidad de la luz en el vacío es 186 000 mi/s =  $3 \times 10^8$  m/s. Utilizar este hecho para hallar el número de kilómetros que tiene una milla. (b) El peso de un pie<sup>3</sup> de agua es 62,4 libras. Utilizar este dato y el hecho de que 1 cm<sup>3</sup> de agua tiene una masa de 1 g para hallar el peso en libras de 1 kg de masa.

53 ●● **¡SOLVE!** La masa de un átomo de uranio es  $4,0 \times 10^{-26}$  kg. ¿Cuántos átomos de uranio hay en 8 g de uranio puro?

54 ●● **¡SOLVE!** Durante una tormenta cae un total de 1,4 pulgadas de lluvia. ¿Cuánta agua ha caído sobre un acre de tierra? (1 mi<sup>2</sup> = 640 acre.)

55 ●● Un núcleo de hierro tiene un radio de  $5,4 \times 10^{-15}$  m y una masa de  $9,3 \times 10^{-26}$  kg. (a) ¿Cuál es su masa por unidad de volumen en kilogramos por metro cúbico? (b) Si la Tierra tuviera la misma masa por unidad de volumen, ¿cuál sería su radio? (La masa de la Tierra es  $5,98 \times 10^{24}$  kg.)

56 ●● Calcular las siguientes expresiones. (a)  $(5,6 \times 10^{-5})(0,0000075)/(2,4 \times 10^{-12})$ . (b)  $(14,2)(6,4 \times 10^7)(8,2 \times 10^{-9}) - 4,06$ . (c)  $(6,1 \times 10^{-6})^2(3,6 \times 10^4)^3/(3,6 \times 10^{-11})^{1/2}$ . (d)  $(0,000064)^{1/3}/[(12,8 \times 10^{-3})(490 \times 10^{-1})^{1/2}]$ .

57 ●● SSM La unidad astronómica (UA) se define como la distancia media de la Tierra al Sol, a saber,  $1,496 \times 10^{11}$  m. El parsec es la longitud radial desde la cual una UA de longitud de arco subtende un ángulo de 1 segundo. El año luz es la distancia que la luz recorre en un año. (a) ¿Cuántos parsecs están contenidos en una unidad astronómica? (b) ¿Cuántos metros tiene un parsec? (c) ¿Cuántos metros existen en un año luz? (d) ¿Cuántas unidades astronómicas existen en un año luz? (e) ¿Cuántos años luz contiene un parsec?

58 ●● Para que el universo deje algún día de expansionarse y comience a contraerse, su densidad media debe ser al menos de  $6 \times 10^{-27}$  kg/m<sup>3</sup>. (a) ¿Cuántos electrones por metro cúbico deberían existir en el universo para alcanzar esta densidad crítica? (b) ¿Cuántos protones por metro cúbico producirían la densidad crítica? ( $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg;  $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$  kg.)

59 ●● SSM El detector japonés de neutrinos Super-Kamiokande está formado por un largo cilindro transparente de 39,3 m de diámetro y 41,4 m de alto, relleno de agua extremadamente pura. Calcular la masa de agua que hay en el interior del cilindro. ¿Se corresponde la cifra obtenida con el dato que consta en el sitio oficial del Super-K, según el cual el detector contiene 50.000 toneladas de agua? Densidad del agua: 1000 kg/m<sup>3</sup>.

60 ●● La tabla adjunta da los resultados experimentales correspondientes a una medida del periodo del movimiento  $T$  de un objeto de masa  $m$  suspendido de un muelle en función de la masa del objeto. Estos datos están de acuerdo con una ecuación sencilla que expresa  $T$  en función de  $m$  de la forma  $T = Cm^n$ , en donde  $C$  y  $n$  son constantes y  $n$  no es necesariamente un entero. (a) Hallar  $n$  y  $C$ . (Para ello existen varios procedimientos. Uno de ellos consiste en suponer un valor de  $n$  y comprobarlo representando  $T$  en función de  $m^n$  en papel milimetrado. Si la suposición es correcta, la representación será una recta. Otro consiste en representar  $\log T$  en función de  $\log m$ . La pendiente

obtenida en este papel es  $n$ .) (b) ¿Qué datos se desvían más de la representación en línea recta de  $T$  en función de  $m^n$ ?

Masa $m$ , kg	0,10	0,20	0,40	0,50	0,75	1,00	1,50
Periodo $T$ , s	0,56	0,83	1,05	1,28	1,55	1,75	2,22

61 ●●● La tabla adjunta da el periodo  $T$  y el radio  $r$  de la órbita correspondientes a los movimientos de cuatro satélites que giran alrededor de un asteroide pesado y denso. (a) Estos datos se relacionan mediante la fórmula  $T = Cr^n$ . Hallar  $C$  y  $n$ . (b) Se descubre un quinto satélite que tiene un periodo de 6,20 años. Determinar la órbita de este satélite que se ajuste a la misma fórmula.

Periodo $T$ , años	0,44	1,61	3,88	7,89
Radio $r$ , Gm	0,088	0,208	0,374	0,600

62 ●●● SSM El periodo  $T$  de un péndulo simple depende de la longitud  $L$  del péndulo y la aceleración  $g$  de la gravedad (dimensiones  $LT^{-2}$ ). (a) Hallar una combinación sencilla de  $L$  y  $g$  que tenga las dimensiones de tiempo. (b) Comprobar la dependencia existente entre el periodo  $T$  y la longitud  $L$  midiendo el periodo (tiempo para una ida y vuelta completa) de un péndulo para dos valores diferentes de  $L$ . (c) En la fórmula correcta que relaciona  $T$  con  $L$  y  $g$  interviene una constante que es un múltiplo de  $\pi$  y que no puede obtenerse mediante el análisis dimensional de la parte (a). Puede hallarse experimentalmente como en la parte (b) si se conoce  $g$ . Utilizando el valor  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  y los resultados experimentales de la parte (b), hallar la fórmula que relaciona  $T$  con  $L$  y  $g$ .

63 ●●● **¡SOLVE!** La atmósfera de la Tierra ejerce una presión sobre la superficie terrestre de valor 14,7 libras por pulgada cuadrada de superficie. ¿Cuál es el peso en libras de la atmósfera terrestre? (El radio de la Tierra es 6370 km, aproximadamente.)

# EL MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

## Capítulo

# 2



- 2.1 Desplazamiento, velocidad y módulo de la velocidad
- 2.2 Aceleración
- 2.3 Movimiento con aceleración constante
- 2.4 Integración

El movimiento en una dirección se asemeja al movimiento a lo largo de una línea recta, como el de un coche en una carretera recta. La conductora se encuentra con semáforos y distintos límites de velocidad en su camino por la carretera hacia la escuela.

¿Cómo puede estimar el tiempo que tardará en llegar? (Véase el ejemplo 2.2.)

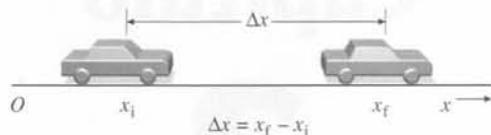
Comenzaremos el estudio del universo físico examinando los objetos en movimiento. El estudio del movimiento, cuyo análisis experimental comenzó hace más de 400 años, dando lugar al nacimiento de la física, se denomina **cinemática**.

➤ Partiremos del caso más simple, el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta, como el de un coche que se mueve a lo largo de una carretera horizontal, recta y estrecha. Una partícula es un objeto cuya posición puede describirse por un solo punto. Cualquier cosa puede considerarse como una partícula —una molécula, una persona o una galaxia— siempre que podamos ignorar razonablemente su estructura interna.

## 2.1 Desplazamiento, velocidad y módulo de la velocidad<sup>1</sup>

La figura 2.1 muestra un coche que está en la posición  $x_i$  en el instante  $t_i$  y en la posición  $x_f$  en un instante posterior  $t_f$ . La variación de la posición del coche  $x_f - x_i$  se denomina **desplazamiento**. Es costumbre utilizar la letra griega  $\Delta$  (delta mayúscula) para indicar la variación o incremento de una magnitud. Así pues, la variación de  $x$  se escribe  $\Delta x$ :

1. En inglés se usan los términos *velocity* y *speed* para denominar la velocidad vectorial y la velocidad escalar o módulo de la velocidad. Aunque se han hecho intentos para denominar celeridad al módulo de la velocidad, se suele nombrar los dos conceptos como velocidad.



**Figura 2.1** Un automóvil se mueve en línea recta en un sistema de coordenadas formado por una línea en la que se escoge un punto  $O$  como origen. A cada punto de la línea se asigna un número  $x$ , cuyo valor es proporcional a la distancia a  $O$ . Los puntos a la derecha de  $O$  son positivos y a la izquierda, negativos. Cuando el coche se desplaza desde el punto  $x_i$  al punto  $x_f$ , su desplazamiento es  $\Delta x = x_f - x_i$ .

$$\Delta x = x_f - x_i \quad (2.1)$$

DEFINICIÓN —DESPLAZAMIENTO

La notación  $\Delta x$  (léase “delta de  $x$ ”) corresponde a una sola magnitud, el incremento de  $x$  (no al producto de  $\Delta$  por  $x$ , como tampoco  $\cos \theta$  es el producto del  $\cos$  por  $\theta$ ). Por convenio, la variación experimentada por una magnitud es siempre su valor final menos su valor inicial.

Se define la **velocidad media** de la partícula  $v_m$ , como el cociente entre el desplazamiento  $\Delta x$  y el intervalo de tiempo  $\Delta t = t_f - t_i$ :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \quad (2.2)$$

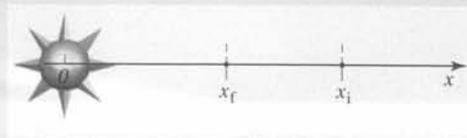
DEFINICIÓN —VELOCIDAD MEDIA

El desplazamiento y la velocidad media pueden ser positivas o negativas. Un valor positivo indica el movimiento en la dirección  $x$  positiva. La unidad del SI de velocidad es el m/s.

### EJEMPLO 2.1 | Desplazamiento y velocidad de un cometa

Un cometa que viaja directamente hacia el Sol es detectado por primera vez en  $x_i = 3,0 \times 10^{12}$  m respecto al Sol (figura 2.2). Exactamente un año después se encuentra en  $x_f = 2,1 \times 10^{12}$  m. Determinar su desplazamiento y velocidad media.

**Planteamiento del problema** Los cometas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol. Aquí se considera la distancia desde el Sol como si el cometa se moviese en una dimensión. Conocemos  $x_i$  y  $x_f$ . Si elegimos  $t_i = 0$  será,  $t_f = 1$  año  $= 3,16 \times 10^7$  s. La velocidad media es  $\Delta x/\Delta t$ .



**Figura 2.2**

1. El desplazamiento se obtiene de su definición:

$$\Delta x = x_f - x_i = (2,1 \times 10^{12} \text{ m}) - (3,0 \times 10^{12} \text{ m}) = -9 \times 10^{11} \text{ m}$$

2. La velocidad media es el desplazamiento dividido por el intervalo de tiempo:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-9 \times 10^{11} \text{ m}}{3,16 \times 10^7 \text{ s}} \\ &= -2,85 \times 10^4 \text{ m/s} = \boxed{-28,5 \text{ km/s}} \end{aligned}$$

**Observación** Ambas magnitudes, desplazamiento y velocidad media, son negativos, pues el cometa se mueve hacia los valores más pequeños de  $x$ . Obsérvese que las unidades, m para  $\Delta x$  y m/s o km/s para  $v_m$ , son partes esenciales de las respuestas. Carece de significado decir que “el desplazamiento es  $-9 \times 10^{11}$ ” o “la velocidad media de una partícula es  $-28,5$ ”.

**Ejercicio** Un avión de reacción sale de Detroit a las 2:15 p.m. y llega a Chicago, a 483 km de distancia, completando el viaje con una velocidad media de 500 km/h. ¿A qué hora llega a Chicago? (Respuesta: 3:13 p.m., hora de Detroit, que es en realidad 2:13 p.m. hora de Chicago.)

### EJEMPLO 2.2 | Camino de la escuela

**¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!**

Habitualmente tardamos 10 minutos en ir de casa a la escuela situada a 5 km de distancia, yendo por una calle recta. Si un día, salimos de casa 15 min antes del comienzo de la clase, pero nos encontramos con un semáforo estropeado que hace que la velocidad durante los 2 primeros kilómetros sea de 20 km/h, ¿llegaremos a tiempo?

**Planteamiento del problema** A fin de resolver el problema hay que encontrar el tiempo total que necesitamos para llegar a la escuela. Para ello, hay que calcular el tiempo  $\Delta t_{2 \text{ km}}$  durante el cual vamos a 20 km/h y el tiempo  $\Delta t_{3 \text{ km}}$  del resto del trayecto, durante el cual la velocidad es la habitual.

1. El tiempo total coincide con el tiempo invertido en los dos primeros kilómetros más el tiempo utilizado para recorrer los tres restantes:
2. Usando  $\Delta x = v_m \Delta t$ , determinar el tiempo que nos cuesta recorrer los dos primeros kilómetros a 20 km/h:
3. Usando  $\Delta x = v_m \Delta t$ , calcular el tiempo que tardamos en recorrer los tres kilómetros restantes:
4. Usando  $\Delta x = v_m \Delta t$ , despejar  $v_{\text{usual}}$ , la velocidad que nos permite recorrer 5 km en 10 min:
5. Despejar el tiempo  $t_{3 \text{ km}}$ :
6. Despejar el tiempo total:
7. El desplazamiento cuesta 12 minutos comparado con los 10 minutos habituales. Sin embargo, habíamos salido de casa con 15 minutos de antelación, por lo tanto *no llegamos tarde a la escuela*.

$$\Delta t_{\text{tot}} = \Delta t_{2 \text{ km}} + \Delta t_{3 \text{ km}}$$

$$\Delta t_{2 \text{ km}} = \frac{\Delta x}{v_m} = \frac{2 \text{ km}}{20 \text{ km/h}} = 0,1 \text{ h} = 6 \text{ min}$$

$$\Delta t_{3 \text{ km}} = \frac{\Delta x}{v_m} = \frac{3 \text{ km}}{v_{\text{usual}}}$$

$$v_{\text{usual}} = \frac{\Delta x_{\text{tot}}}{\Delta t_{\text{usual}}} = \frac{5 \text{ km}}{10 \text{ min}} = 0,5 \text{ km/min}$$

$$\Delta t_{3 \text{ km}} = \frac{3 \text{ km}}{0,5 \text{ km/min}} = 6 \text{ min}$$

$$\Delta t_{\text{tot}} = \Delta t_{2 \text{ km}} + \Delta t_{3 \text{ km}} = 12 \text{ min}$$

El **módulo de la velocidad media** de una partícula es el cociente de la distancia total recorrida y el tiempo total desde el principio al final:

$$\text{Módulo de la velocidad media} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{s}{t} \quad (2.3)$$

La distancia total y el tiempo total son siempre positivos, por lo tanto el módulo de la velocidad media también es siempre positivo.

### EJEMPLO 2.3 | Módulo de la velocidad media en una carrera

Un corredor recorre 100 m en 12 s; luego da la vuelta y recorre 50 m más espacio en 30 s y en dirección al punto desde el que inició su movimiento. ¿Cuál es el valor del módulo de la velocidad media y el de la velocidad media para toda su trayectoria?

**Planteamiento del problema** Utilizaremos las definiciones de módulo de la velocidad media y velocidad media, recordando que el *módulo de la velocidad media* es la *distancia total* dividida por  $\Delta t$ , mientras que la *velocidad media* es el *desplazamiento neto* dividido por  $\Delta t$ .

- (a) 1. El módulo de la velocidad media es igual a la distancia total dividida por el tiempo total:

$$\text{Módulo de la velocidad media} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

2. Calcular la distancia total recorrida y el tiempo total:

$$s = s_1 + s_2 = 100 \text{ m} + 50 \text{ m} = 150 \text{ m}$$

$$t = 12 \text{ s} + 30 \text{ s} = 42 \text{ s}$$

3. Utilizar  $s$  y  $t$  para hallar el módulo de la velocidad media:

$$\text{Módulo de la velocidad media} = \frac{150 \text{ m}}{42 \text{ s}} = \boxed{3,57 \text{ m/s}}$$

- (b) 1. La velocidad media es el cociente del desplazamiento neto  $\Delta x$  y el intervalo de tiempo  $\Delta t$ :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

2. El desplazamiento neto es  $x_f - x_i$ , en donde  $x_i = 0$  es la posición inicial y  $x_f = 50 \text{ m}$  es la posición final:

$$\Delta x = x_f - x_i = 50 \text{ m} - 0 = 50 \text{ m}$$

3. Utilizar  $\Delta x$  y  $\Delta t$  para hallar la velocidad media:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{50 \text{ m}}{42 \text{ s}} = \boxed{1,19 \text{ m/s}}$$

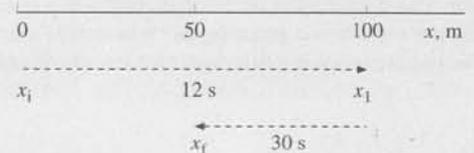


Figura 2.3

**Comprobar el resultado** La marca mundial de una carrera de 100 m está algo por debajo de los 10 s, es decir, 10 m/s es aproximadamente la velocidad máxima que puede obtenerse. El resultado de 3,57 m/s para el módulo de la velocidad media en (a) es razonable, ya que el corredor fue mucho más lentamente durante un tercio de su recorrido. Si el resultado obtenido hubiera sido 35,7 m/s tendríamos razón para pensar que algo había fallado en el cálculo.

**Observación** El módulo de la velocidad media es mayor que la velocidad media porque la distancia total recorrida es mayor que el desplazamiento total. Nótese también que el desplazamiento neto es la suma de los desplazamientos individuales. Es decir  $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (100 \text{ m}) + (-50 \text{ m})$ , que es el resultado del paso 2 de la parte (b).

### EJEMPLO 2.4 | La aventura del pájaro viajero

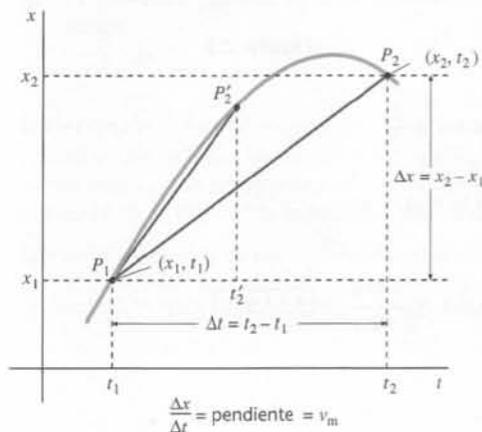
Dos trenes separados 75 km se aproximan uno al otro por vías paralelas, moviéndose cada uno de ellos a 15 km/h. Un pájaro vuela de un tren al otro en el espacio que los separa, hasta que se cruzan. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el pájaro si éste vuela a 20 km/h?

**Planteamiento del problema** Este problema parece difícil a primera vista, pero realmente es muy simple si se enfoca adecuadamente. Para ello escribiremos en primer lugar una ecuación para la magnitud a determinar, es decir, la distancia total  $\Delta s$  recorrida por el pájaro.

1. La distancia total es igual al módulo de la velocidad media multiplicado por el tiempo:
2. El tiempo que el pájaro está en el aire es igual al tiempo que los trenes tardan en encontrarse. La suma de las distancias recorridas por los dos trenes es  $D = 75 \text{ km}$ . Determinar el tiempo que tardan los dos trenes en recorrer una distancia total  $D$ :
3. La distancia total recorrida por el pájaro es, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 s &= (\text{módulo de la velocidad media})_{\text{pájaro}} \times t \\
 &= (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}} \times t \\
 s_1 + s_2 &= (\text{velocidad})_{\text{m 1}} \times t + (\text{velocidad})_{\text{m 2}} \times t = D \\
 \text{por lo tanto} \\
 t &= \frac{D}{(\text{velocidad})_{\text{m 1}} + (\text{velocidad})_{\text{m 2}}} \\
 s &= (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}} \times t \\
 &= (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}} \frac{D}{(\text{velocidad})_{\text{m 1}} + (\text{velocidad})_{\text{m 2}}} \\
 &= 20 \text{ km/h} \frac{75 \text{ km}}{15 \text{ km/h} + 15 \text{ km/h}} = \boxed{50 \text{ km}}
 \end{aligned}$$

**Observación** Algunos tratan de resolver este problema determinando y sumando las distancias recorridas por el pájaro cada vez que se mueve de un tren al otro. Este sistema es muy complejo. Es importante desarrollar un enfoque meditado y sistemático para resolver los problemas. Es útil comenzar por escribir una ecuación que relacione la magnitud desconocida en función de otras magnitudes. Después se procede a determinar los valores de cada una de las restantes magnitudes de la ecuación.



**Figura 2.4** Gráfico de  $x$  en función de  $t$  para una partícula que se mueve en una dimensión. Cada punto de la curva representa la posición  $x$  en un tiempo determinado  $t$ . Se ha dibujado una línea recta entre las posiciones  $P_1$  y  $P_2$ . El desplazamiento  $\Delta x = x_2 - x_1$  y el intervalo de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  se indican en la figura. La línea recta entre  $P_1$  y  $P_2$  es la hipotenusa del triángulo de lados  $\Delta x$  y  $\Delta t$  y la relación  $\Delta x/\Delta t$  es su pendiente. En términos geométricos, la pendiente es una medida de la inclinación de la recta.

La figura 2.4 representa gráficamente la velocidad media. Una línea recta une los puntos  $P_1$  y  $P_2$  y forma la hipotenusa del triángulo de catetos  $\Delta x$  y  $\Delta t$ . El cociente  $\Delta x/\Delta t$  es la **pendiente** de la línea y nos ofrece una interpretación geométrica de la velocidad media:

La velocidad media es la pendiente de la línea recta que conecta los puntos  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x_2)$ .

#### INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA VELOCIDAD MEDIA

En general, la velocidad media depende del intervalo de tiempo escogido. Por ejemplo, si en la figura 2.4 tomamos un intervalo menor de tiempo, escogiendo un instante  $t'_2$  más próximo a  $t_1$ , la velocidad media será mayor, según indica la mayor inclinación de la línea que une los puntos  $P_1$  y  $P'_2$ .

### Velocidad instantánea

A primera vista puede parecer imposible definir la velocidad de la partícula en un solo instante, es decir, en un tiempo específico. En un instante determinado la partícula está en un solo punto. Si está en un solo punto, ¿cómo puede estar moviéndose? Por otra parte, si no se está moviendo, ¿cómo puede tener velocidad? Esto constituye una antigua paradoja que puede resolverse cuando nos damos cuenta que para observar el movimiento y así definirlo, debemos observar la posición del objeto en más de un instante. Entonces resulta posible definir la velocidad en un instante mediante un proceso de paso al límite. Veamos ahora la figura 2.5. Cuando consideramos sucesivamente intervalos de tiempo más cortos a partir de  $t_1$ , la velocidad media para cada intervalo se aproxima más a la pendiente de la tangente en  $t_1$ . La pendiente de esta tangente se define como la **velocidad instantánea** en  $t_1$ . Esta tan-

gente es el límite de la relación  $\Delta x/\Delta t$  cuando  $\Delta t$  y, por lo tanto,  $\Delta x$  se aproximan a cero. Así podremos decir,

La velocidad instantánea es el límite de la relación  $\Delta x/\Delta t$  cuando  $\Delta t$  se aproxima al valor cero.

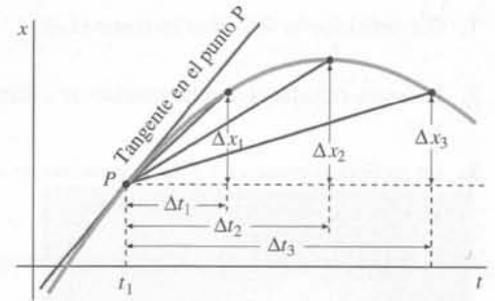
$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{pendiente de la línea tangente a la curva } x \text{ función de } t^1 \quad (2.4)$$

DEFINICIÓN —VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Este límite se denomina **derivada** de  $x$  respecto a  $t$ . La notación usual para la derivada es  $dx/dt$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.5)$$

Esta pendiente puede ser positiva, negativa o nula; por consiguiente, en un movimiento unidimensional la velocidad instantánea puede ser positiva ( $x$  creciente) o negativa ( $x$  decreciente) o nula (no hay movimiento). Su módulo lo denominamos **módulo de la velocidad instantánea**.



**Figura 2.5** Gráfico de  $x$  en función de  $t$ . Obsérvese la secuencia de intervalos de tiempo sucesivamente más pequeños  $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots$ . La velocidad media de cada intervalo es la pendiente de la línea recta para dicho intervalo. A medida que los intervalos se hacen más pequeños, estas pendientes se aproximan a la pendiente de la tangente a la curva en el punto  $t_1$ . La pendiente de esta línea se define como la velocidad instantánea en el tiempo  $t_1$ .

### EJEMPLO 2.5 | Posición de una partícula en función del tiempo

La posición de una partícula viene descrita por la función indicada en la figura 2.6. Hallar la velocidad instantánea en el instante  $t = 2$  s. ¿Cuándo es mayor la velocidad? ¿Cuándo es nula? ¿Es negativa alguna vez?

**Planteamiento del problema** En la figura 2.6 hemos dibujado la línea de tangente a la curva en el instante  $t = 2$  s. La pendiente de la línea tangente es la velocidad instantánea de la partícula en el tiempo dado. Puede utilizarse esta figura para medir la pendiente de la línea tangente.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

1. Determinar los valores  $x_1$  y  $x_2$  sobre la línea tangente en los instantes  $t_1 = 2$  s y  $t_2 = 5$  s.
2. Calcular la pendiente de la línea tangente a partir de estos valores. Esta pendiente es igual a la velocidad instantánea en  $t = 2$  s.
3. Según la figura, la pendiente (y por lo tanto, la velocidad instantánea) es mayor en aproximadamente  $t = 4$  s. La pendiente y la velocidad son cero para  $t = 0$  y  $t = 6$  s y son negativas antes de 0 y después de 6 s.

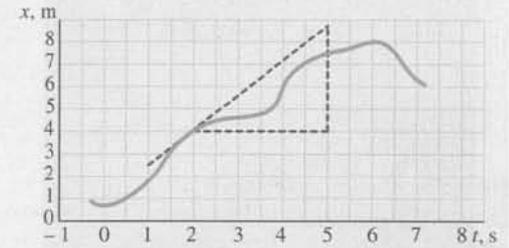
#### Respuestas

$$x_1 = 4 \text{ m}, \quad x_2 = 8,5 \text{ m}$$

$$v = \text{pendiente} = \frac{8,5 \text{ m} - 4 \text{ m}}{5 \text{ s} - 2 \text{ s}} = \boxed{1,5 \text{ m/s}}$$

**Ejercicio** ¿Cuál es la velocidad media de esta partícula entre  $t = 2$  s y  $t = 5$  s? (Respuesta 1,17 m/s.)

### ¡INTÉNELO USTED MISMO!

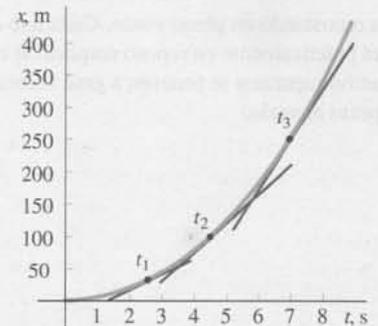


**Figura 2.6**

### EJEMPLO 2.6 | Caída de una piedra desde un acantilado

La posición de una piedra que a partir del reposo se deja caer desde un acantilado viene dada por  $x = 5t^2$ , en donde  $x$  se mide en metros y hacia abajo desde la posición inicial cuando  $t = 0$ , y  $t$  se expresa en segundos. Hallar la velocidad en un instante  $t$  cualquiera. (Se omite la indicación explícita de la unidades para simplificar la notación.)

**Planteamiento del problema** Podemos calcular la velocidad de un instante determinado  $t$  calculando la derivada  $dx/dt$  directamente a partir de su definición en la ecuación 2.4. En la figura 2.7 se muestra la curva correspondiente que nos da  $x$  en función de  $t$ . Las líneas tangentes están dibujadas en los tiempos  $t_1, t_2$  y  $t_3$ . Las pendientes de estas líneas tangentes crecen uniformemente, indicando que la velocidad instantánea crece uniformemente con el tiempo.



**Figura 2.7**

1. La pendiente de la línea tangente a la curva suele llamarse de un modo más simple "pendiente de la curva".

1. Por definición la velocidad instantánea es:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

2. Podemos calcular el desplazamiento  $\Delta x$  a partir de la función posición  $x(t)$ :

$$x(t) = 5t^2$$

3. En un tiempo posterior  $t + \Delta t$ , la posición  $x(t + \Delta t)$  viene dada por:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= 5(t + \Delta t)^2 = 5[t^2 + 2t \Delta t + (\Delta t)^2] \\ &= 5t^2 + 10t \Delta t + 5(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

4. El desplazamiento para este intervalo de tiempo será:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t + \Delta t) - x(t) \\ &= [5t^2 + 10t \Delta t + 5(\Delta t)^2] - 5t^2 \\ &= 10t \Delta t + 5(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

5. Dividir  $\Delta x$  por  $\Delta t$  para determinar la velocidad media en este intervalo de tiempo:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10t \Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 10t + 5 \Delta t$$

6. A medida que consideramos intervalos de tiempo cada vez más cortos,  $\Delta t$  se aproxima a cero y el segundo término,  $5\Delta t$ , tiende a cero; en cambio, el primer término,  $10t$ , permanece invariable:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10t + 5\Delta t) = \boxed{10t}$$

**Observación** Si hubiéramos hecho  $\Delta t = 0$  en los pasos 4 y 5, el desplazamiento hubiera sido  $\Delta x = 0$ , en cuyo caso la relación  $\Delta x/\Delta t$  quedaría indefinida. En su lugar, hemos dejado  $\Delta t$  como una variable hasta el paso final, cuando el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  está bien definido.

Para determinar las derivadas rápidamente se utilizan reglas basadas en estos pasos al límite (véase Apéndice Tabla D.4). Una regla particularmente útil es

$$\text{Si } x = Ct^n, \text{ entonces } \frac{dx}{dt} = Cnt^{n-1} \quad (2.6)$$

en donde  $C$  y  $n$  son constantes. Utilizando esta regla en el ejemplo 2.6 resulta  $x = 5t^2$  y  $v = dx/dt = 10t$ , de acuerdo con los resultados anteriores.

## Velocidad relativa

Si usted está sentado en un avión que se mueve a 800 km/h hacia el este, su velocidad también es de 800 km/h hacia el este. Sin embargo, 800 km/h hacia el este podría ser su velocidad relativa a la superficie de la Tierra o su velocidad relativa al aire exterior del aparato. (Si el avión vuela dentro de una corriente en chorro, estas dos velocidades podrían ser distintas.) Además, su velocidad es cero si se mide respecto del avión. Por lo tanto, para especificar la velocidad de una partícula, debe también especificarse el **sistema de referencia**. En esta discusión se han concretado tres sistemas de referencia: la superficie de la Tierra, el aire exterior del avión y el propio aparato.

Un sistema de referencia es un objeto material cuyas partes están en reposo entre sí.

DEFINICIÓN—SISTEMA DE REFERENCIA

Para medir la posición de un objeto se usan ejes de coordenadas fijos a sistemas de referencia. La posición de un viajero, si éste está sentado en su asiento, es constante, en relación a un sistema de coordenadas horizontal fijo respecto del avión. Sin embargo, para un sistema de coordenadas horizontal fijo respecto de la superficie de la Tierra o para un sistema de coordenadas horizontal fijo respecto de un globo que flota en el aire exterior al avión, la posición del viajero cambia continuamente. Si tiene problemas para imaginarse un sistema de coordenadas fijo en el aire exterior, imagínese un sistema de coordenadas ligado a un globo que flota en el aire. El aire y el globo están en reposo mutuo, por lo cual forman un sistema de referencia único.



Aviones repostando en pleno vuelo. Cada uno de ellos está prácticamente en reposo respecto al otro, si bien ambos aparatos se mueven a gran velocidad con respecto al suelo.

Si una partícula se mueve con velocidad  $v_{pA}$  en relación al sistema de coordenadas A y éste a su vez se mueve con velocidad  $v_{AB}$  en relación a otro sistema de coordenadas B, la velocidad de la partícula relativa a B es

$$v_{pB} = v_{pA} + v_{AB} \quad (2.7a)$$

Por ejemplo, si una persona nada en un río paralelamente a la dirección de la corriente, su velocidad relativa a la orilla,  $v_{po}$ , es igual a la velocidad vectorial relativa al agua,  $v_{pa}$ , más la velocidad del agua relativa a la orilla,  $v_{ao}$ :

$$v_{po} = v_{pa} + v_{ao}$$

Si la persona nada a 2 m/s contra la corriente y la velocidad vectorial del agua relativa a la orilla es de 1,2 m/s, su velocidad respecto a la orilla será  $v_{po} = -2 \text{ m/s} + 1,2 \text{ m/s} = -0,8 \text{ m/s}$ , en donde hemos escogido la dirección de la corriente como sentido positivo.

Una gran sorpresa para los científicos de nuestro siglo fue el descubrimiento de que la ecuación 2.7a es sólo una aproximación. Un estudio de la teoría de la relatividad nos muestra que la expresión exacta para las velocidades relativas es

$$v_{pB} = \frac{v_{pA} + v_{AB}}{1 + v_{pA}v_{AB}/c^2} \quad (2.7b)$$

en donde  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  es la velocidad de la luz en el vacío. En todos los casos cotidianos con objetos macroscópicos,  $v_{pA}$  y  $v_{AB}$  son velocidades mucho menores que  $c$ , con lo cual las ecuaciones 2.7a y 2.7b coinciden, pero si se trata de velocidades muy elevadas, tales como la velocidad de un electrón o la velocidad de las galaxias distantes que se alejan de la Tierra, la diferencia entre estas dos ecuaciones puede ser importante. La ecuación 2.7b tiene la interesante propiedad de que si  $v_{pA} = c$ , entonces  $v_{pB}$  también es igual a  $c$ , lo cual es un postulado de la relatividad, a saber, la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia que se mueven con velocidad constante relativa entre sí.

**Ejercicio** Use la ecuación 2.7b sustituyendo  $c$  por  $v_{pA}$  y resuelva para  $v_{pB}$ . Observe entonces que la ecuación 2.7b está de acuerdo con el resultado que dice "la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia".

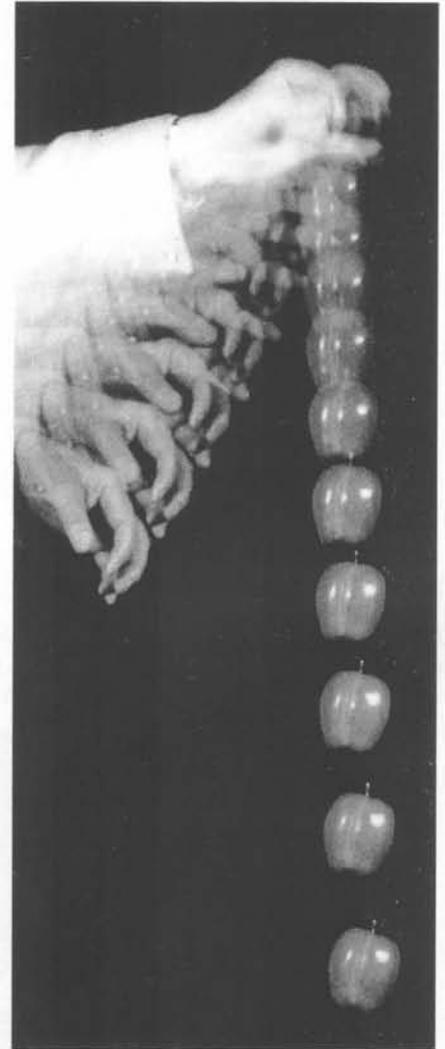
## 2.2 Aceleración

La aceleración es la tasa de cambio de la velocidad instantánea. Cuando, por ejemplo, un conductor aprieta el pedal del acelerador de su coche, espera cambiar su velocidad. La **aceleración media** en un intervalo particular de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , se define como el cociente  $\Delta v/\Delta t$ , en donde  $\Delta v = v_2 - v_1$ :

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.8)$$

DEFINICIÓN —ACELERACIÓN MEDIA

La aceleración tiene las dimensiones de una longitud dividida por el tiempo al cuadrado. La unidad en el SI es  $\text{m/s}^2$ . (En la ecuación 2.8, si el numerador está en  $\text{m/s}$  y el denominador en  $\text{s}$ , las unidades de  $\Delta v/\Delta t$  son  $(\text{m/s})/\text{s}$ . Multiplicando el numerador y el denominador por 1 s, encontramos que las unidades de  $\Delta v/\Delta t$  son  $\text{m/s}^2$ .) Podemos escribir la ecuación 2.8 como  $\Delta v = a_m \Delta t$ . Por ejemplo, si decimos que una partícula tiene una aceleración de  $5,1 \text{ m/s}^2$ , ello quiere decir que, si parte del reposo, después de 1 s se moverá con una velocidad de  $5,1 \text{ m/s}$ ; después de 2 s, lo hará con una velocidad de  $10,2 \text{ m/s}$  y así sucesivamente. La **aceleración instantánea** es el límite del cociente  $\Delta v/\Delta t$  cuando  $\Delta t$  tiende a cero. Si representamos la



Fotografía estroboscópica de la caída de una manzana a 60 destellos por segundo. La aceleración de la manzana viene indicada por el mayor espaciado que se observa en las imágenes inferiores.

velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en el tiempo  $t$  se define como la pendiente de la línea tangente a la curva en ese tiempo:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.9)$$

= pendiente de la línea tangente a la curva de  $v$  en función de  $t$

DEFINICIÓN —ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

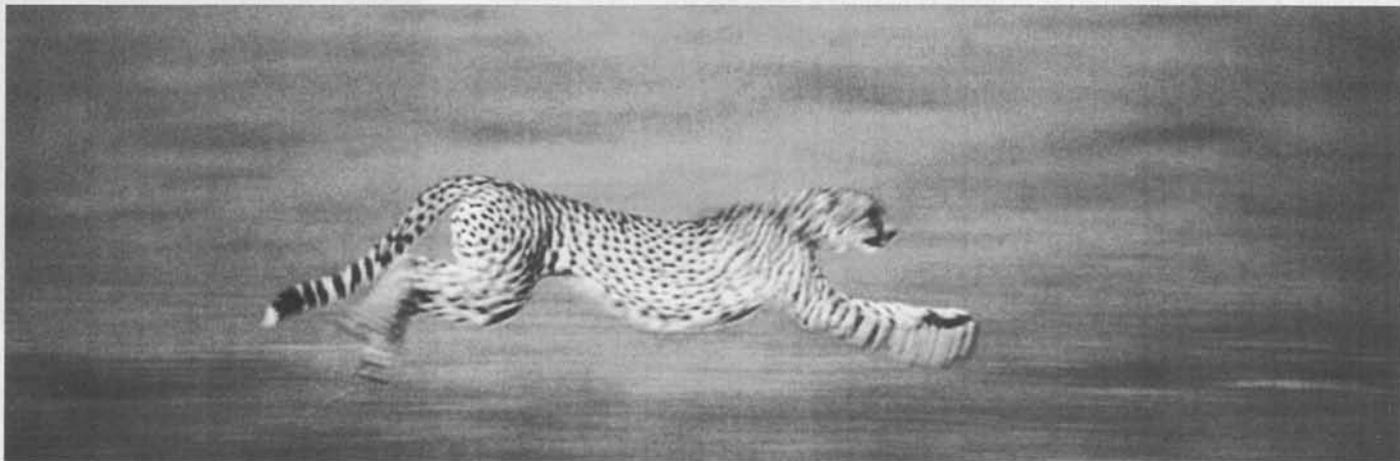
La aceleración es, por lo tanto, la derivada de la velocidad vectorial respecto al tiempo  $dv/dt$ . Como la velocidad es también la derivada de la posición  $x$  respecto a  $t$ , la aceleración es la segunda derivada de  $x$  respecto a  $t$ ,  $d^2x/dt^2$ . Podemos ver el origen de esta notación escribiendo la aceleración como  $dv/dt$  y sustituyendo  $v$  por  $dx/dt$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.10)$$

Si la aceleración es cero, no hay cambio de velocidad con el tiempo, es decir, la velocidad es constante. En este caso, la curva de  $x$  en función de  $t$  es una línea recta. Si la aceleración no es nula, pero es constante, la velocidad varía linealmente con el tiempo y la curva de  $x$  en función de  $t$  es cuadrática con el tiempo.

### EJEMPLO 2.7 | Un felino rápido

Un guepardo puede acelerar de 0 a 96 km/h en 2 s, mientras que una moto requiere 4,5 s. Calcular las aceleraciones medias del guepardo y de la moto y compararlas con la aceleración de caída libre debida a la gravedad,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .



1. Determinar la aceleración media a partir de los datos suministrados:

$$\text{Guepardo } a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{96 \text{ km/h} - 0}{2 \text{ s}} = 48 \text{ km}/(\text{h} \cdot \text{s})$$

$$\text{Moto } a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{96 \text{ km/h} - 0}{4,5 \text{ s}} = 21,3 \text{ km}/(\text{h} \cdot \text{s})$$

2. Convertir a  $\text{m/s}^2$  sabiendo que  $1 \text{ h} = 3600 \text{ s} = 3,6 \text{ ks}$ :

$$\text{Guepardo } \frac{48 \text{ km}}{\text{h} \cdot \text{s}} \times \frac{1 \text{ h}}{3,6 \text{ ks}} = 13,3 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Moto } \frac{21,3 \text{ km}}{\text{h} \cdot \text{s}} \times \frac{1 \text{ h}}{3,6 \text{ ks}} = 5,92 \text{ m/s}^2$$

3. Comparar los resultados con la aceleración de la gravedad, multiplicando por el factor de conversión  $1g/(9,81 \text{ m/s}^2)$ :

$$\text{Guepardo } 13,3 \text{ m/s}^2 \times \frac{1g}{9,81 \text{ m/s}^2} = \boxed{1,36g}$$

$$\text{Moto } 5,92 \text{ m/s}^2 \times \frac{1g}{9,81 \text{ m/s}^2} = \boxed{0,60g}$$

**Observación** Al expresar el tiempo en kilosegundos, los prefijos kilo (k) se cancelan mutuamente.

**Ejercicio** Un coche se mueve a 45 km/h en el tiempo  $t = 0$ . El coche acelera de forma constante a razón de  $10 \text{ km}/(\text{h} \cdot \text{s})$ . (a) ¿Cuál es su velocidad cuando  $t = 2 \text{ s}$ ? (b) ¿En qué momento el coche se mueve a 70 km/h?

(Respuestas (a) 65 km/h, (b) 2,5 s.)

**Ejercicio de análisis dimensional** Si un coche parte del reposo desde  $x = 0$  con aceleración constante  $a$ , su velocidad  $v$  depende de  $a$  y de la distancia recorrida  $x$ . ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene las dimensiones correctas y por lo tanto, corresponde a una ecuación posible que relaciona  $x$ ,  $a$  y  $v$ ?

(a)  $v = 2ax$  (b)  $v^2 = 2a/x$  (c)  $v = 2ax^2$  (d)  $v^2 = 2ax$

(Respuesta Sólo (d) posee las mismas dimensiones a ambos lados de la ecuación. Aunque el análisis dimensional no nos permite obtener la ecuación exacta, con frecuencia es útil para obtener la dependencia funcional.)

### EJEMPLO 2.8 | La velocidad y la aceleración en función del tiempo

La posición de una partícula viene dada por  $x = Ct^3$ , siendo  $C$  una constante cuyas unidades son  $\text{m}/\text{s}^3$ . Hallar la velocidad y aceleración en función del tiempo.

- La velocidad puede determinarse aplicando  $dx/dt = Cnt^{n-1}$  (ecuación 2.6):  $x = Ct^3$   

$$v = \frac{dx}{dt} = \boxed{3Ct^2}$$
- La derivada de la velocidad respecto al tiempo nos da la aceleración:  $a = \frac{dv}{dt} = \boxed{6Ct}$

**Comprobar el resultado** Podemos comprobar las unidades de nuestras respuestas. Para la velocidad  $[v] = [C][t^2] = (\text{m}/\text{s}^3)(\text{s}^2) = \text{m}/\text{s}$ . Para la aceleración  $[a] = [C][t] = (\text{m}/\text{s}^3)(\text{s}) = \text{m}/\text{s}^2$ .

## 2.3 Movimiento con aceleración constante

El movimiento de una partícula que tiene aceleración constante es corriente en la naturaleza. Por ejemplo, cerca de la superficie de la Tierra todos los objetos caen verticalmente con aceleración de la gravedad constante (si puede despreciarse la resistencia del aire). Si una partícula tiene una aceleración constante  $a$ , su aceleración media en cualquier intervalo de tiempo es también  $a$ . Es decir,

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a \quad (2.11)$$

Si la velocidad es  $v_0$  en el tiempo  $t = 0$  y  $v$  al cabo de cierto tiempo  $t$ , la aceleración correspondiente es

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t}$$

Reajustando esta expresión se obtiene  $v$  en función de  $t$ .

$$v = v_0 + at \quad (2.12)$$

ACELERACIÓN CONSTANTE,  $v$  EN FUNCIÓN DE  $t$

Esta es la ecuación de una línea recta en un gráfico de  $v$  en función de  $t$  (figura 2.8). La pendiente de la línea es la aceleración  $a$  y su intersección con el eje vertical es la velocidad inicial  $v_0$ .

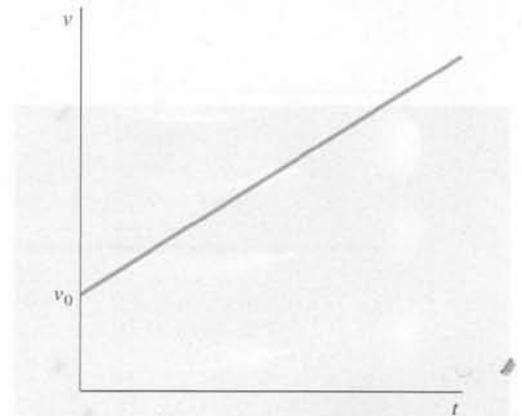


Figura 2.8 Gráfico de la velocidad en función del tiempo con aceleración constante.



“Va de cero a 60 en unos 3 segundos.” © Sydney Harris

El desplazamiento  $\Delta x = x - x_0$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t = t - 0$  es

$$\Delta x = v_m \Delta t = v_m t \quad (2.13)$$

Para una aceleración constante, la velocidad varía linealmente con el tiempo y la velocidad media es el valor medio de las velocidades inicial y final. (Esta relación es válida sólo si la aceleración es constante.) Si  $v_0$  es la velocidad inicial y  $v$  la velocidad final, la velocidad media es

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v) \quad (2.14)$$

ACELERACIÓN CONSTANTE,  $v_m$

El desplazamiento es, por lo tanto,

$$\Delta x = x - x_0 = v_m t = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \quad (2.15)$$

Podemos eliminar  $v$  sustituyendo  $v = v_0 + at$  de la ecuación 2.12:

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v)t = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at)t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

El desplazamiento es, así:

$$\Delta x = x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.16)$$

ACELERACIÓN CONSTANTE,  $x(t)$

El término  $v_0 t$  representa el desplazamiento que tendría lugar si  $a$  fuera cero y el término  $\frac{1}{2}at^2$  es el desplazamiento adicional debido a la aceleración constante.

Eliminando  $t$  entre las ecuaciones 2.12 y 2.14 se obtiene una expresión entre  $\Delta x$ ,  $a$ ,  $v$  y  $v_0$ . De la ecuación 2.12,  $t = (v - v_0)/a$  y sustituyendo en la ecuación 2.14 se obtiene

$$\Delta x = v_m t = \frac{1}{2}(v_0 + v)t = \frac{1}{2}(v_0 + v) \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

es decir

$$v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x \quad (2.17)$$

ACELERACIÓN CONSTANTE

La ecuación 2.17 es útil, por ejemplo, si se trata de determinar la velocidad de una pelota que se ha dejado caer desde cierta altura  $x$  cuando no nos interesa conocer el tiempo de caída.

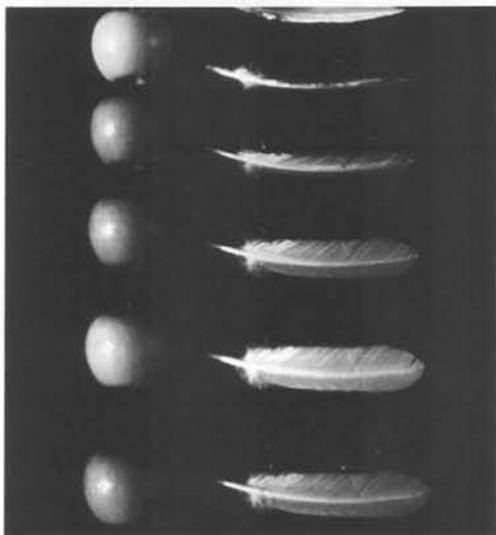
### Problemas con un objeto

Muchos problemas prácticos se refieren a objetos en caída libre, es decir, objetos que caen bajo la única influencia de la gravedad. Todos los objetos en caída libre que parten de la misma velocidad inicial se mueven de forma idéntica. Como se ve en la figura 2.9, se sueltan desde el reposo, simultáneamente, una pluma y una manzana en una cámara de vacío, de modo que caen con el mismo movimiento. Ambos objetos tienen la misma aceleración. El módulo de la aceleración causada por la gravedad se designa por  $g$ , cuyo valor aproximado es

$$g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$$

Como  $g$  es el *módulo* de una aceleración, siempre es positiva. Si la dirección hacia abajo se considera positiva, la aceleración debida a la gravedad es  $a = g$ ; si se considera positiva hacia arriba, entonces  $a = -g$ .

Figura 2.9



### EJEMPLO 2.9 | El birrete volador

Un estudiante de física contento por su graduación lanza su birrete hacia arriba con una velocidad inicial de 14,7 m/s. Considerando que su aceleración es 9,81 m/s<sup>2</sup> hacia abajo (despreciamos la resistencia del aire), (a) ¿cuánto tiempo tardará el birrete en alcanzar su punto más alto? (b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada? (c) Suponiendo que el birrete se recoge a la misma altura de la que ha salido, ¿cuánto tiempo permanece en el aire?

**Planteamiento del problema** Cuando el birrete alcanza su punto más alto, su velocidad instantánea es cero. Así convertimos la expresión “punto más alto” a la condición matemática  $v = 0$ .

(a) 1. Dibujar el birrete en su posición inicial y en el punto más alto de su trayectoria. Incluir un eje de coordenadas y señalar el origen y las dos posiciones del birrete.

2. El tiempo se relaciona con la velocidad y la aceleración:

$$v = v_0 + at$$

3. Calcular el tiempo que tarda el birrete en alcanzar su altura máxima. Para ello hacer  $v = 0$  y despejar  $t$ :

$$t = \frac{0 - v_0}{a} = \frac{-14,7 \text{ m/s}}{-9,81 \text{ m/s}^2} = \boxed{1,50 \text{ s}}$$

(b) Determinar la distancia recorrida a partir del tiempo  $t$  y la velocidad media:

$$\Delta y = v_m t = \frac{1}{2}(v_0 + v)t = \frac{1}{2}(14,7 \text{ m/s} + 0)(1,50 \text{ s}) = \boxed{11,0 \text{ m}}$$

(c) 1. Para calcular el tiempo total hacemos  $\Delta y = 0$  en la ecuación 2.16 y despejamos  $t$ :

$$\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = (v_0 + \frac{1}{2}at)t$$

2. Hay dos soluciones para  $t$  cuando  $\Delta y = 0$ . La primera corresponde al tiempo en que se lanza el birrete y la segunda corresponde al tiempo en que se recoge:

$$t = 0$$

(primera solución)

$$t = -\frac{2v_0}{a} = -\frac{2(14,7 \text{ m/s})}{-9,80 \text{ m/s}^2} = \boxed{3 \text{ s}}$$

(segunda solución)

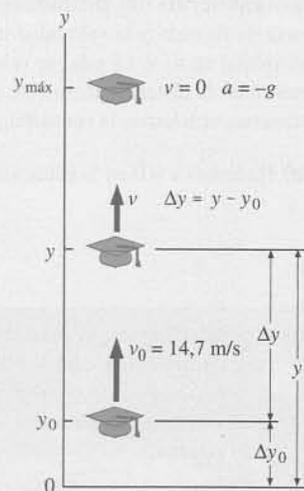


Figura 2.10

**Observación** La solución  $t = 3 \text{ s}$  también resulta de la simetría del sistema. El tiempo que tarda el birrete en caer desde la altura máxima es el mismo que transcurre hasta alcanzar dicha altura (figura 2.11). En realidad, el birrete no está sometido a una aceleración constante debido a que la resistencia del aire sobre un objeto ligero como es el birrete ejerce un efecto significativo. Si la resistencia del aire no es despreciable, el tiempo de caída es mayor que el de subida.

**Ejercicio** Calcular  $y_{\text{máx}} - y_0$  utilizando (a) la ecuación 2.15 y (b) la ecuación 2.16. (c) Determinar la velocidad del birrete cuando vuelve a su punto de partida. (Respuestas (a) y (b)  $y_{\text{máx}} - y_0 = 11,0 \text{ m}$ , (c)  $-14,7 \text{ m/s}$ ; obsérvese que la velocidad final es la misma que la velocidad inicial.)

**Ejercicio** ¿Cuál es la velocidad del birrete (a) 0,1 s antes de que alcance su punto más alto y (b) 0,1 s después de alcanzar su punto más alto? (c) Calcular  $\Delta v/\Delta t$  para este intervalo de tiempo de 0,2 s. (Respuestas (a)  $+0,981 \text{ m/s}$ , (b)  $-0,981 \text{ m/s}$ , (c)  $[-0,981 \text{ m/s} - (+0,981 \text{ m/s})]/(0,2 \text{ s}) = -9,81 \text{ m/s}^2$ .)

**Ejercicio** Un coche acelera desde el reposo a  $8 \text{ m/s}^2$ . (a) ¿Qué velocidad lleva al cabo de 10 s? (b) ¿Qué distancia ha recorrido después de 10 s? (c) ¿Cuál es su velocidad media en el intervalo  $t = 0$  a  $t = 10 \text{ s}$ ? (Respuestas (a)  $80 \text{ m/s}$ , (b)  $400 \text{ m}$ , (c)  $40 \text{ m/s}$ .)

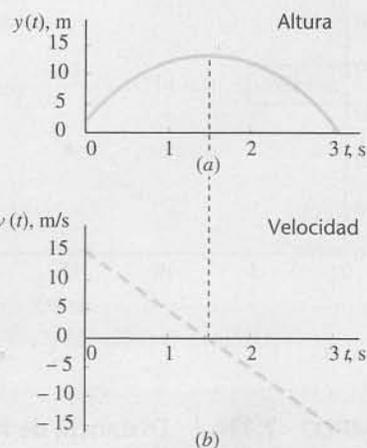


Figura 2.11

El ejemplo siguiente se refiere a la **distancia de frenado** de un coche, es decir, al espacio que recorre desde que comienza a frenar hasta que se detiene.

### EJEMPLO 2.10 | Distancia de frenado de un vehículo

Una persona que conduce un vehículo de noche por una autopista ve de pronto a cierta distancia un coche parado y frena hasta detenerse con una aceleración de  $5 \text{ m/s}^2$  (una aceleración que reduce la velocidad suele llamarse desaceleración). ¿Cuál es la distancia de frenado del vehículo si su velocidad inicial es (a)  $15 \text{ m/s}$  o (b)  $30 \text{ m/s}$ ?

**Planteamiento del problema** Si elegimos la dirección del movimiento como positiva, la distancia de frenado y la velocidad inicial son positivas pero la aceleración es negativa. Así, la velocidad inicial es  $v_0 = 15 \text{ m/s}$ , la velocidad final es  $v = 0$  y la aceleración es  $a = -5 \text{ m/s}^2$ . Queremos determinar la distancia recorrida,  $\Delta x$ . Como no necesitamos conocer el tiempo que tarda el coche en detenerse, utilizamos la ecuación 2.17 como la más conveniente.

(a) Hacemos  $v = 0$  en la ecuación 2.17: Despejamos  $\Delta x$ :

$$v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$$

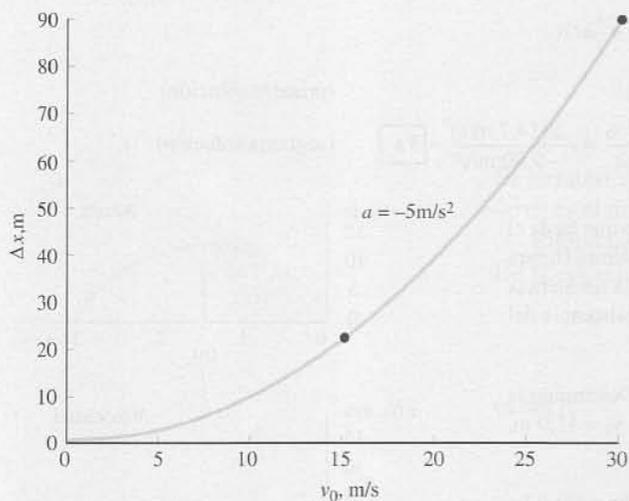
por lo tanto

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0^2 - v_0^2}{2a} = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-(15 \text{ m/s})^2}{2(-5 \text{ m/s}^2)} = \boxed{22,5 \text{ m}}$$

(b) A partir del apartado anterior vemos que si  $v = 0$ ,  $\Delta x = -v_0^2/(2a)$ . Así,  $\Delta x$  es proporcional al cuadrado de la velocidad inicial. Haciendo uso de esta observación y del resultado del apartado (a), encontrar la distancia de frenado para una velocidad inicial el doble de la del apartado anterior.

$$\Delta x = 2^2(22,5 \text{ m}) = \boxed{90 \text{ m}}$$

**Observación** La respuesta (b) también puede obtenerse sustituyendo directamente la velocidad inicial de  $30 \text{ m/s}$  en la expresión de  $\Delta x$  deducida en el apartado (a). Noventa metros es una distancia considerable, aproximadamente la longitud de un campo de fútbol. El incremento de  $v_0$  en un factor 2 modifica la distancia de frenado en un factor  $2^2 = 4$  (ver figura 2.12). La consecuencia práctica de esta dependencia cuadrática es que incluso incrementos modestos en la velocidad originan aumentos importantes en la distancia de frenado.



**Figura 2.12** Distancia de frenado en función de la velocidad inicial. La curva muestra el caso del ejemplo 2.10, en que la aceleración es  $a = -5,0 \text{ m/s}^2$ ; los puntos que se muestran en la curva son las soluciones de los apartados (a) y (b).

### EJEMPLO 2.11 | Distancia de frenado

**¡INTÉNELO USTED MISMO!**

En el ejemplo 2.10, (a) ¿cuánto tiempo tarda el coche en detenerse si su velocidad inicial es  $30 \text{ m/s}$ ? (b) ¿Qué distancia recorre el coche durante el último segundo?

**Planteamiento del problema** (a) Excepto en los valores, este ejemplo coincide con el apartado (a) del ejemplo 2.9. Utilizar el mismo procedimiento que se ha mostrado en el ejemplo 2.10. (b) Como la velocidad disminuye en  $5 \text{ m/s}$  cada segundo, la velocidad que tendrá el coche 1 s antes de detenerse debe ser de  $5 \text{ m/s}$ . Determinar la velocidad media durante el último segundo y con ella calcular la distancia recorrida.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

- Determinar el tiempo total de frenado.
1. Calcular la velocidad media durante el último segundo.  
2. Calcular la distancia recorrida a partir de  $\Delta x = v_m \Delta t$ .

#### Respuestas

$$t = 6 \text{ s}$$

$$v_m = \boxed{2,5 \text{ m/s}}$$

$$\Delta x_t = v_m \Delta t = \boxed{2,5 \text{ m}}$$

**Observación** Si el apartado (b) hubiera preguntado por la velocidad media durante los últimos 1,3 segundos (en vez de durante el último segundo), se hubiera podido determinar la velocidad inicial  $v_i$  durante este intervalo a partir de la ecuación 2.11  $\Delta v = a\Delta t$ .

A veces nos podemos formar una imagen valiosa sobre el movimiento de un objeto suponiendo que podemos aplicar las fórmulas para la aceleración constante aunque ésta, en realidad, no lo sea. Éste es el caso del ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 2.12 | El choque de prueba

Un coche que va a 100 km/h choca contra una pared de hormigón rígida. ¿Cuál es su aceleración?

**Planteamiento del problema** En este ejemplo no es correcto considerar el coche como una partícula, ya que las distintas partes del mismo sufrirán aceleraciones distintas al arrugarse sobre la pared. Además, estas aceleraciones no son constantes. Sin embargo *podemos* obtener una respuesta aproximada suponiendo que una partícula puntual localizada en el centro del coche posee una aceleración constante. Para resolver este problema necesitamos más información: la distancia de detención o el tiempo de detención del coche. Podemos estimar la distancia de detención utilizando el sentido común. Después del impacto, el centro del coche se desplazará hacia adelante algo menos que la mitad de la longitud del coche. Tomaremos para nuestra estimación el valor razonable de 0,75 m. Como el problema no nos proporciona el tiempo, utilizaremos la relación  $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$ .



1. Usando  $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$ , obtener la aceleración:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

por lo tanto

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x} = \frac{0^2 - (100 \text{ km/h})^2}{2(0,75 \text{ m})}$$

2. Convertir la velocidad expresada en km/h en m/s. En una hora hay  $60^2 \text{ s} = 3,6 \text{ ks}$ :

$$(100 \text{ km/h}) \times \left(\frac{1 \text{ h}}{3,6 \text{ ks}}\right) = 27,8 \text{ m/s}$$

3. Completar el cálculo de la aceleración:

$$a = \frac{0^2 - (100 \text{ km/h})^2}{2(0,75 \text{ m})} = \frac{-(27,8 \text{ m/s})^2}{1,5 \text{ s}} = -514 \text{ m/s}^2 \approx \boxed{-500 \text{ m/s}^2}$$

**Observación** Nótese que el módulo de esta aceleración es superior a 50g. Esta estimación de la aceleración se basa en las suposiciones de que el desplazamiento del centro del coche es de 0,75 m y que la aceleración es constante.

### EJEMPLO 2.13 | El movimiento de un electrón

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un electrón en un tubo de rayos catódicos acelera desde el reposo con una aceleración de  $5,33 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$  durante  $0,15 \mu\text{s}$  ( $1 \mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}$ ). Después, el electrón se mueve con velocidad constante durante  $0,2 \mu\text{s}$ . Finalmente alcanza el reposo con una aceleración de  $-2,67 \times 10^{13} \text{ m/s}^2$ . ¿Qué distancia total recorre el electrón?

**Planteamiento del problema** Las ecuaciones de aceleración constante no se pueden aplicar directamente a este problema, ya que la aceleración del electrón varía con el tiempo. Dividir el movimiento del electrón en tres intervalos, cada uno con una aceleración constante distinta y utilizar la posición y velocidad finales de cada intervalo como condiciones iniciales para el intervalo siguiente. Tomar como origen la posición de partida del electrón y asignar la dirección positiva a la dirección del movimiento.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

**Pasos**

**Respuestas**

1. Determinar el desplazamiento y la velocidad final en el primer intervalo de  $0,15 \mu\text{s}$ .

$$\Delta x_1 = 6,00 \text{ cm}; \quad v_1 = 8,00 \times 10^5 \text{ m/s}$$

2. Utilizar esta velocidad final como velocidad constante para determinar el desplazamiento mientras se mueve uniformemente.

$$\Delta x_2 = 16 \text{ cm}$$

- Utilizar esta misma velocidad como valor inicial y la ecuación 2.17 con  $v = 0$  para determinar el desplazamiento del tercer intervalo, en el cual el electrón termina en reposo.
- Sumar los desplazamientos obtenidos en los pasos 1, 2 y 3 para calcular el recorrido total.

$$\Delta x_3 = 1,20 \text{ cm}$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

$$= 6,00 \text{ cm} + 16 \text{ cm} + 1,20 \text{ cm} = \boxed{23,2 \text{ cm}}$$

**Observación** En un aparato de rayos X los electrones son acelerados desde un alambre caliente hacia un blanco metálico. Al chocar contra éste, se paran bruscamente. Como consecuencia, el blanco emite rayos X característicos del metal.



(Izquierda) Acelerador lineal de unos tres kilómetros de longitud de la Universidad de Stanford (EE.UU.). Se utiliza para acelerar electrones y positrones en línea recta a velocidades próximas a las de la luz. (Derecha) Sección transversal del haz electrones del acelerador, tal como se observa en un monitor de video.

### EJEMPLO 2.14 | Lanzamiento de prismáticos

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Juan trepa a un árbol para presenciar mejor al conferenciante de una ceremonia de graduación que se celebra al aire libre. Desgraciadamente ha olvidado sus prismáticos abajo. María lanza los prismáticos hacia Juan pero su fuerza es mayor que su precisión. Los prismáticos pasan a la altura de la mano extendida de Juan 0,69 s después del lanzamiento y vuelven a pasar por el mismo punto 1,68 s más tarde. ¿A qué altura se encuentra Juan?

**Planteamiento del problema** En este problema hay dos incógnitas: la altura  $h$  de Juan y la velocidad inicial de los prismáticos,  $v_0$ . Sabemos que  $y = h$  para  $t_1 = 0,69$  s e  $y = h$  para  $t_2 = 0,69$  s + 1,68 s = 2,37 s. Expresando  $h$  en función del tiempo  $t$  tendremos dos ecuaciones a partir de las cuales se pueden determinar las dos incógnitas.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

- Utilizando  $\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ , igualar y para los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  teniendo en cuenta que  $y = h$  y  $a = -g$  en cada caso.
- Eliminar  $v_0$  de estas dos ecuaciones y despejar  $h$  en función de los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ . Esto puede hacerse despejando  $v_0$  en la primera ecuación y sustituyendo el resultado en la segunda ecuación.

#### Respuestas

$$h = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \text{y} \quad h = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$h = \left( \frac{h + \frac{1}{2} g t_1^2}{t_1} \right) t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

por lo tanto

$$h = \boxed{8,02 \text{ m}}$$

**Observación** Tenemos dos incógnitas  $h$  y  $v_0$ , pero disponemos de dos tiempos, lo cual nos permite escribir dos ecuaciones y resolver las dos incógnitas.

**Ejercicio** Determinar la velocidad inicial de los prismáticos y la velocidad que llevan cuando pasan a la altura de Juan en su trayectoria descendente. (Respuesta  $v_0 = 15,0$  m/s y  $v_2 = -8,24$  m/s.)

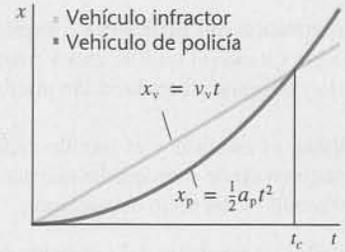
### Problemas con dos objetos

A continuación exponemos algunos problemas que incluyen dos objetos que se mueven con aceleración constante.

#### EJEMPLO 2.15 | A la caza de un coche con exceso de velocidad

Un coche lleva una velocidad de 25 m/s ( $\approx 90$  km/h) en una zona escolar. Un coche de policía que está parado, arranca cuando el infractor le adelanta y acelera con una velocidad constante de 5 m/s<sup>2</sup>. (a) ¿Cuánto tiempo tarda el coche de policía en alcanzar al vehículo infractor? (b) ¿Qué velocidad lleva el coche de policía cuando le alcanza?

**Planteamiento del problema** Para determinar cuando los dos coches se encuentran en la misma posición, expresamos las posiciones  $x_v$  del vehículo infractor y  $x_p$  del coche de policía en función del tiempo y despejamos  $t$  para  $x_v = x_p$ .



**Figura 2.13** Las dos curvas muestran la posición del coche infractor y del coche de policía. Tienen la misma posición en el instante inicial,  $t = 0$ , y de nuevo cuando  $t = t_c$ .

(a) 1. Funciones de posición del infractor y del coche policía:

$$x_v = v_v t \quad \text{y} \quad x_p = \frac{1}{2} a_p t^2$$

2. Hacer  $x_v = x_p$  y resolver para el tiempo  $t_c$ , para  $t_c > 0$ :

$$v_v t_c = \frac{1}{2} a_p t_c^2 \Rightarrow v_v = \frac{1}{2} a_p t_c \quad t_c \neq 0$$

$$t_c = \frac{2v_v}{a_p} = \frac{2(25 \text{ m/s})}{5 \text{ m/s}^2} = \boxed{10 \text{ s}}$$

(b) 1. La velocidad del coche de policía viene expresada por  $v = v_0 + at$ , en donde  $v_0 = 0$ :

$$v_p = a_p t_c = (5 \text{ m/s}^2)(10 \text{ s}) = \boxed{50 \text{ m/s}}$$

**Observación** La velocidad final del coche de policía en (b) es exactamente el doble que la del coche infractor. Como los dos coches cubren la misma distancia en igual tiempo, ambos hicieron el recorrido con igual velocidad media. La velocidad media del infractor es, naturalmente de 25 m/s. Como el policía parte del reposo y su velocidad media es de 25 m/s, debe alcanzar una velocidad final de 50 m/s.

**Ejercicio** ¿Qué distancia han recorrido los coches cuando el policía alcanza al infractor? (Respuesta 250 m.)

#### EJEMPLO 2.16 | El coche de policía

¿Qué velocidad lleva el coche de policía del ejemplo 2.15 cuando se encuentra a 25 m por detrás del vehículo infractor?

**Planteamiento del problema** La velocidad viene expresada por  $v_p = at_1$ , en donde  $t_1$  es el tiempo en el cual  $D = x_v - x_p = 25$  m.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

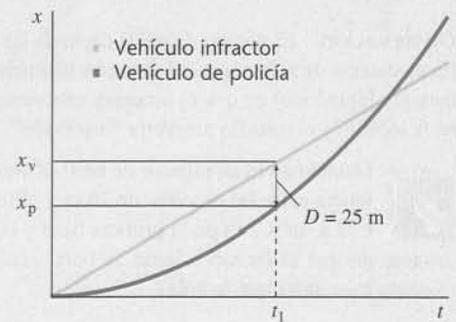
1. Dibujar una curva  $x-t$  que muestre las posiciones de los dos coches en el tiempo  $t_1$  (figura 2.14).
2. Utilizar las ecuaciones para  $x_p$  y  $x_v$  del ejemplo 2.15 y despejar  $t_1$  cuando  $x_v - x_p = 25$  m. Hay dos soluciones, una que corresponde a pocos instantes después del inicio del movimiento y otra que corresponde a poco antes de que el vehículo con exceso de velocidad sea alcanzado.
3. Utilizar  $v_p = a_p t$  para calcular la velocidad del coche de policía cuando  $t = t_1$ .

#### Respuestas

$$t_1 = (5 \text{ s} \pm \sqrt{15}) \text{ s}$$

$$v_{p1} = \boxed{5,64 \text{ m/s}} \quad \text{y} \quad \boxed{44,4 \text{ m/s}}$$

#### ¡INTÉNTELO USTED MISMO!



**Figura 2.14**

**Observación** En la figura 2.14 se observa que la distancia entre los dos coches al principio es cero, crece hasta un valor máximo y luego disminuye. La separación en cualquier momento es  $D = x_v - x_p = v_v t - \frac{1}{2} a_p t^2$ . Cuando la separación es máxima,  $dD/dt = 0$ , lo cual ocurre en el instante  $t = 5$  s. Para intervalos de tiempo iguales antes y después de  $t = 5$  s, las separaciones son las mismas.

**EJEMPLO 2.17** | Un ascensor en movimiento

Una persona en un ascensor ve un tornillo que cae del techo. La altura del ascensor es de 3 m. ¿Cuánto tiempo tarda el tornillo en chocar contra el suelo si el ascensor asciende con una aceleración constante  $a_e = 4,0 \text{ m/s}^2$ ?

**Planteamiento del problema** Expresar las posiciones del tornillo  $y_t$  y del suelo  $y_s$  en función del tiempo. Cuando el tornillo choca contra el suelo,  $y_t = y_s$ . Tomar como origen la posición inicial del suelo y designar como dirección positiva la dirección hacia arriba.

1. Dibujar el ascensor y el tornillo como se muestra en la figura 2.15. Añadir un eje de coordenadas que nos sirva para indicar las posiciones del tornillo y del suelo del ascensor:

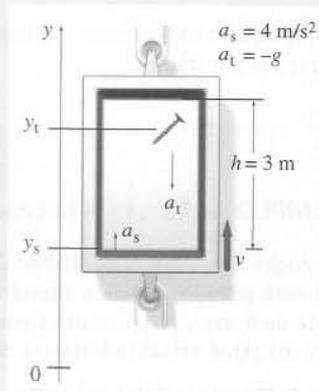
2. Escribir las funciones de la posición del ascensor y del tornillo:

3. Cuando  $t = t_1$ , el tornillo llega al suelo. En ese instante las posiciones son:

4. Cuando  $t = 0$ , el suelo del ascensor y el tornillo tienen la misma velocidad. Usar este hecho para simplificar el resultado del paso 3:

5. Usar la información obtenida para simplificar:

6. Despejar el tiempo:



**Figura 2.15** El eje de coordenadas está fijo al edificio.

$$y_s - y_{0s} = v_{0s}t + \frac{1}{2}a_s t^2$$

$$y_t - y_{0t} = v_{0t}t + \frac{1}{2}a_t t^2$$

$$y_t = y_s$$

$$y_{0t} + v_{0t}t_1 + \frac{1}{2}a_t t_1^2 = y_{0s} + v_{0s}t_1 + \frac{1}{2}a_s t_1^2$$

$$v_{0s} = v_{0t}$$

por lo tanto

$$y_{0t} + v_{0t}t_1 + \frac{1}{2}a_t t_1^2 = y_{0s} + v_{0s}t_1 + \frac{1}{2}a_s t_1^2$$

$$y_{0t} + \frac{1}{2}a_t t_1^2 = y_{0s} + \frac{1}{2}a_s t_1^2$$

$$y_{0s} = 0, \quad a_s = 4,0 \text{ m/s}^2$$

$$y_{0t} = h = 3 \text{ m}, \quad a_t = -g$$

por lo tanto

$$h - \frac{1}{2}g t_1^2 = 0 + \frac{1}{2}a_s t_1^2$$

o

$$h = \frac{1}{2}(g + a_s)t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g + a_s}} = \sqrt{\frac{2(3 \text{ m})}{9,81 \text{ m/s}^2 + 4,0 \text{ m/s}^2}} = \boxed{0,659 \text{ s}}$$

**Observación** El tiempo de caída depende de la aceleración del ascensor, pero no de la velocidad. En el sistema de referencia del ascensor hay una “gravedad efectiva”  $g' = g + a_s$ . En el caso (supuestamente hipotético) en que el ascensor estuviera en caída libre, es decir  $a_s = -g'$ , el tiempo de caída sería infinito y el tornillo parecería “ingrávido”.

**MASTERS OF CONSCIENCE** Cuando un buen jugador de béisbol corre entre bases va a una velocidad de 9,5 m/s. La distancia entre las bases es de 26 m y el lanzador está a unos 18,5 m de la base. Si un jugador está a unos 2 m de la primera base y comienza a correr hacia la segunda base en el mismo instante en que el lanzador lanza la bola, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador llegue a la segunda base antes que la bola?

**EJEMPLO 2.18** | Un ascensor en movimiento

¡¡INTÉNELO USTED MISMO!

Considerar el ascensor y el tornillo del ejemplo 2.17. Suponer que la velocidad de subida del ascensor es de 16 m/s cuando el tornillo se desprende del techo y empieza a caer. (a) ¿Qué distancia recorre el ascensor mientras el tornillo cae? ¿Qué distancia recorre el tornillo? (b) ¿Cuál es la velocidad del tornillo y del ascensor en el momento del impacto de aquél en el suelo? (c) ¿Cuál es la velocidad relativa del tornillo con respecto al suelo del ascensor?

**Planteamiento del problema** El tiempo de vuelo del tornillo se ha obtenido en la solución del ejemplo 2.17. Usar este tiempo para resolver los apartados (a) y (b). Por lo que se refiere al apartado (c), la velocidad del tornillo respecto del edificio es igual a la suma de la velocidad del tornillo con respecto al ascensor más la velocidad del ascensor respecto al edificio.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

### Pasos

- (a) 1. Usar la ecuación 2.16 para calcular la distancia que se mueve el suelo del ascensor durante el tiempo  $t_1$ .
2. El tornillo se desprende a tres metros del suelo.
- (b) Usar la ecuación 2.12 para encontrar la velocidad del impacto del tornillo con el suelo del ascensor.
- (c) Usar la ecuación 2.7a para determinar la velocidad relativa del tornillo respecto del ascensor.

### Respuestas

$$\Delta y_s = v_{s0}t_1 + \frac{1}{2}a_s t_1^2 = \boxed{11,4 \text{ m}}$$

$$\Delta y_t = \boxed{8,42 \text{ m}}$$

$$v = v_0 + at, \text{ por lo tanto}$$

$$v_t = v_{t0} - gt_1 = \boxed{9,53 \text{ m/s}}$$

$$v_s = v_{s0} + a_s t_1 = \boxed{18,6 \text{ m/s}}$$

$$v_{te} = v_{ts} + v_{se}$$

por lo tanto

$$v_{ts} = v_{te} - v_{se} = 9,53 \text{ m/s} - 18,6 \text{ m/s} \\ = \boxed{-9,10 \text{ m/s}}$$

**Observación** El tornillo impacta con el suelo del ascensor 8,4 m por encima de su posición inicial. Con respecto al edificio, en el momento del contacto, el tornillo todavía está subiendo. Nótese que en el momento del impacto la velocidad del tornillo relativa al edificio es positiva.

## 2.4 Integración

Para determinar la velocidad a partir de una determinada aceleración, observemos que la velocidad es la función  $v(t)$  cuya derivada es la aceleración  $a(t)$ :

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t)$$

Si la aceleración es constante, la velocidad es aquella función del tiempo que cuando se deriva es igual a esta constante. Por ejemplo

$$v = at, \quad a = \text{constante}$$

De un modo más general, podemos añadir a la función  $at$  cualquier constante sin que se modifique la derivada respecto al tiempo. Llamando  $c$  a esta nueva constante, resulta

$$v = at + c$$

Cuando  $t = 0$ ,  $v = c$ . Así pues,  $c$  es la velocidad inicial  $v_0$ .

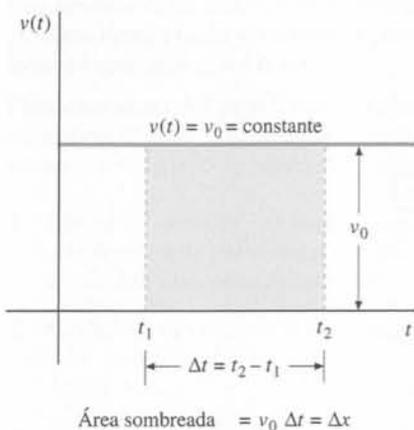
Análogamente, la función posición  $x(t)$  es aquella función cuya derivada es la velocidad:

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + at$$

Cada uno de estos términos puede tratarse separadamente. La función cuya derivada es una constante  $v_0$  es  $v_0 t$  más cualquier constante. La función cuya derivada es  $at$  es  $\frac{1}{2}at^2$  más cualquier constante. Llamando  $x_0$  a la suma combinada de todas estas constantes arbitrarias resulta

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Cuando  $t = 0$ ,  $x = x_0$ . Así pues,  $x_0$  es la posición inicial.



**Figura 2.16** El desplazamiento  $\Delta x$  durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es igual al área bajo la curva de  $v$  en función de  $t$ . Para  $v(t) = v_0 = \text{constante}$ , el desplazamiento es igual al área del rectángulo sombreado.

Siempre que se obtiene una función a partir de su derivada, debe añadirse una constante arbitraria en la función general. Como para obtener  $x(t)$  a partir de la aceleración debemos integrar dos veces, aparecen dos constantes. Normalmente estas constantes se determinan a partir de la velocidad y la posición iniciales en un instante determinado. Generalmente se elige el instante en que  $t = 0$ . Es por esto que estas constantes reciben el nombre de **condiciones iniciales**. Un problema común llamado **problema del valor inicial** toma la forma: “dado  $a(t)$  y los valores iniciales de  $x$  y de  $v$  determinar  $x(t)$ ”. Este problema es particularmente importante en física porque la aceleración de una partícula está determinada por las fuerzas que actúan sobre ella. Así pues, si conocemos las fuerzas que actúan sobre una partícula y su posición y velocidad en un instante determinado, podemos hallar unívocamente su posición en cualquier otro instante.

Una función  $F(t)$  cuya derivada (respecto a  $t$ ) es igual a la función  $f(t)$  se denomina **anti-derivada** de  $f(t)$ . El problema de la antiderivada está relacionado con el de la obtención del área bajo una curva. Consideremos el caso del movimiento con velocidad constante  $v_0$ . El cambio de posición  $\Delta x$  durante un intervalo  $\Delta t$  es

$$\Delta x = v_0 \Delta t$$

Ésta es el área bajo la curva de  $v$  en función de  $t$  (figura 2.16). Si  $v_0$  es negativa, tanto el desplazamiento como el área bajo la curva son negativos. Normalmente pensamos en el área como una magnitud que no puede ser negativa, pero en este contexto no es así. En este caso el “área bajo la curva” (el área entre la curva y el eje temporal) es una magnitud negativa.

La interpretación geométrica del desplazamiento como el área bajo la curva de  $v$  en función de  $t$  es válida no sólo para la velocidad constante, sino también en general, como se ilustra en la figura 2.17. En este caso, el área bajo la curva puede aproximarse dividiendo el intervalo de tiempo en cierto número de pequeños intervalos  $\Delta t_1, \Delta t_2, \text{etc.}$ , y trazando una serie de áreas rectangulares. El área del rectángulo correspondiente al intervalo de tiempo  $\Delta t_i$  es  $v_i \Delta t_i$ , el cual es aproximadamente igual al desplazamiento  $\Delta x_i$  durante el intervalo  $\Delta t_i$ . La suma de las áreas de los rectángulos es, por lo tanto, la suma de los desplazamientos realizados durante los intervalos de tiempo correspondientes y es aproximadamente igual al desplazamiento total desde el instante  $t_1$  al  $t_2$ . Matemáticamente, escribiremos esto en la forma

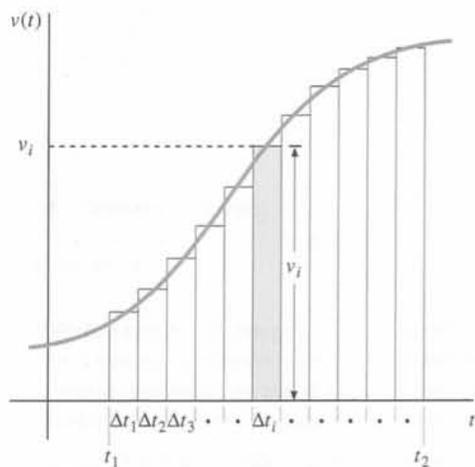
$$\Delta x \approx \sum_i v_i \Delta t_i$$

en donde la letra  $\Sigma$  (sigma mayúscula) representa una “suma”. Podemos hacer la aproximación tan exacta como queramos escogiendo suficientes rectángulos bajo la curva, cada uno de los cuales corresponde a un valor pequeño de  $\Delta t$ . En el límite correspondiente a intervalos de tiempo cada vez más pequeños, esta suma es igual al área comprendida bajo la curva, que equivale, por lo tanto, al desplazamiento. Este límite se denomina **integral** y se escribe del modo siguiente.

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \sum_i v_i \Delta t_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} v \, dt \quad (2.18)$$

Es útil imaginar que el signo integral  $\int$  es una  $S$  alargada que indica una suma. Los límites  $t_1$  y  $t_2$  indican los valores inicial y final de la variable  $t$ . El desplazamiento es, por lo tanto, el área bajo la curva de  $v$  en función de  $t$ . La figura 2.18 demuestra que la velocidad media tiene una interpretación geométrica simple en función del área bajo la curva.

Para ilustrar que el desplazamiento iguala el área bajo una curva  $v-t$ , consideremos lo que ocurre cuando se lanza una pelota de golf directamente hacia arriba. La pelota sube aproximadamente un metro, invierte su sentido de movimiento, y cae de nuevo acelerando hasta que la volvemos a coger con la mano. Si se supone que la resistencia del aire es despreciable, la velocidad de la pelota viene dada por  $v = v_0 + at$  (ecuación 2.12), donde la dirección hacia arriba se considera positiva y  $a = -g$ . La figura 2.19 representa esta velocidad durante el tiempo de vuelo de la pelota. Inicialmente la velocidad de la pelota es positiva, a medio camino vale cero, y justo antes de cogerla vale  $-v_0$ . Durante su ascenso, el área bajo la curva es positiva, mientras que durante el descenso es negativa. Así, el área total bajo la curva



**Figura 2.17** Gráfico de una curva general de  $v(t)$  en función de  $t$ . El desplazamiento total desde  $t_1$  hasta  $t_2$  es el área bajo la curva en este intervalo, que puede obtenerse aproximadamente sumando las áreas de los rectángulos.

durante el vuelo es cero. Dado que la pelota se lanza desde el mismo sitio donde finalmente es recogida, el cambio de posición es cero. Por consiguiente, el desplazamiento y el área bajo la curva  $v-t$  son iguales porque ambos son cero.

El proceso de calcular una integral se llama **integración**. En la ecuación 2.18,  $v$  es la derivada de  $x$  y  $x$  es la antiderivada de  $v$ . Este es un ejemplo del teorema fundamental de cálculo, cuya formulación durante el siglo XVII aceleró el desarrollo matemático de la física:

$$\text{Si } f(t) = \frac{dF(t)}{dt}, \text{ entonces } F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (2.19)$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

La antiderivada de una función se denomina también integral indefinida de la función y se escribe sin límites sobre el signo integral:

$$x = \int v dt$$

La operación de determinar  $x$  a partir de la derivada  $v$  (es decir, determinar la antiderivada) se llama también integración. Por ejemplo, si  $v = v_0$  (una constante) entonces,

$$x = \int v_0 dt = v_0 t + x_0$$

donde  $x_0$  es la constante arbitraria de integración. A partir de la ecuación 2.6 que expresa la regla general para la derivada de una potencia, podemos determinar una regla general para la integración de una potencia de  $t$ . El resultado es

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \quad (2.20)$$

en donde  $C$  es una constante arbitraria. Puede comprobarse fácilmente derivando el segundo miembro mediante la regla de la ecuación 2.6. (Para el caso especial  $n = -1$ ,  $\int t^{-1} dt = \ln t + C$ , en donde  $\ln t$  es el logaritmo natural de  $t$ .)

El cambio de velocidad durante cierto intervalo de tiempo puede interpretarse análogamente como el área bajo la curva  $a$  en función de  $t$  en dicho intervalo. Así se escribe

$$\Delta v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \sum_i a_i \Delta t_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} a dt \quad (2.21)$$

Así pueden deducirse las ecuaciones de la aceleración constante calculando las integrales indefinidas de la aceleración y la velocidad. Si  $a$  es constante, tenemos

$$v = \int a dt = a \int dt = v_0 + at \quad (2.22)$$

en donde hemos escrito en primer lugar la constante de integración  $v_0$ . Integrando de nuevo y llamando  $x_0$  a la constante de integración resulta

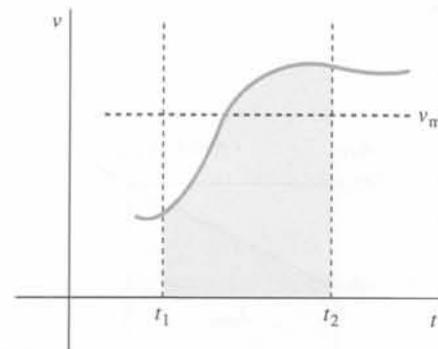
$$x = \int (v_0 + at) dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2.23)$$

Es instructivo deducir las ecuaciones 2.22 y 2.23 usando integrales definidas en vez de integrales indefinidas. Si la aceleración es constante, la ecuación 2.21, con  $t_1 = 0$ , nos da

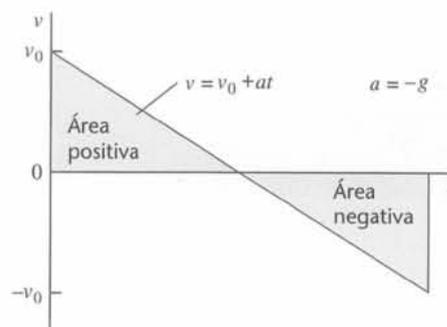
$$v(t_2) - v(0) = a \int_0^{t_2} dt = a(t_2 - 0)$$

donde el tiempo  $t_2$  es arbitrario. Como es arbitrario, se puede poner  $t_2 = t$  y se obtiene

$$v = v_0 + at$$



**Figura 2.18** El desplazamiento  $\Delta x$  durante el intervalo de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  es igual al área de la región sombreada. Según la definición de velocidad media  $\Delta x = v_m \Delta t$ . Ésta es justamente el área del rectángulo de altura  $v_m$  y base  $\Delta t$ . Así pues, el área rectangular  $v_m \Delta t$  y el área bajo la curva  $v$  en función de  $t$  deben ser iguales.



**Figura 2.19** Curva  $v$  en función de  $t$  para una pelota de golf que se lanza directamente hacia arriba. El área bajo la curva es positiva en la parte que corresponde al ascenso, y negativa en la del descenso. El área bajo la curva correspondiente a todo el vuelo es cero.

donde  $v = v(t)$  y  $v_0 = v(0)$ . Para obtener la ecuación 2.23, se sustituye  $v_0 + at$  por  $v$  en la ecuación 2.18 con  $t_1 = 0$ . Esto nos lleva a

$$x(t_2) - x(0) = \int_0^{t_2} (v_0 + at) dt$$

Esta integral es igual al área bajo la curva  $v-t$  (figura 2.20). Evaluando la integral y resolviendo para  $x$  nos da

$$x(t_2) - x(0) = \int_0^{t_2} (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Big|_0^{t_2} = v_0 t_2 + \frac{1}{2} at_2^2$$

donde  $t_2$  es arbitrario. Poniendo  $t_2 = t$  obtenemos

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

donde  $x = x(t)$  y  $x_0 = x(0)$ .

Una vez deducidas las ecuaciones cinemáticas de aceleración constante sin ninguna referencia a la velocidad media, podemos demostrar que para el caso especial de aceleración constante, la velocidad media es el valor medio entre las velocidades inicial y final (ecuación 2.14). Sea  $v_0$  la velocidad inicial en  $t = 0$  y  $v$  la velocidad final en el tiempo  $t$ . De acuerdo con la definición de velocidad media, el desplazamiento es

$$\Delta x = v_m \Delta t = v_m (t - 0) = v_m t \quad (2.24)$$

Igualmente, de la ecuación 2.23 resulta

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Podemos eliminar la aceleración según la ecuación 2.12 utilizando  $a = (v - v_0)/t$ . Es decir

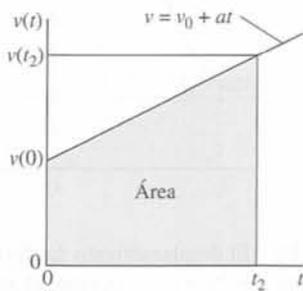
$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} \left( \frac{v - v_0}{t} \right) t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} vt - \frac{1}{2} v_0 t = \frac{1}{2} (v + v_0) t \quad (2.25)$$

Comparando este resultado con  $\Delta x = v_m t$  (ecuación 2.24) resulta

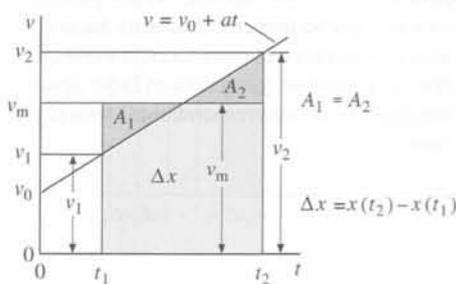
$$v_m = \frac{1}{2} (v_0 + v_f)$$

que coincide con la ecuación 2.14.

Puede visualizarse la velocidad media mediante el uso de la curva  $v-t$  (figura 2.21). El desplazamiento  $\Delta x$  corresponde al área bajo la curva. Sin embargo, la velocidad media es el área bajo la curva  $v = v_m$  por el mismo intervalo de tiempo. Así, la altura de la curva  $v = v_m$  es tal que las áreas bajo las dos curvas coinciden. Esto implica que las áreas de los dos triángulos grises sean iguales y que  $v_m = \frac{1}{2} (v_1 + v_2)$ .



**Figura 2.20** El área bajo la curva  $v-t$  es el desplazamiento  $\Delta x = x(t_2) - x(0)$ .



**Figura 2.21**

### EJEMPLO 2.19 | Un transbordador

Un transbordador lleva una velocidad constante  $v_0 = 8$  m/s durante 60 s. A continuación para sus motores y se acerca a la costa. Su velocidad es entonces una función del tiempo dada por la expresión  $v = v_0 t_1^2 / t^2$ , siendo  $t_1 = 60$  s. ¿Cuál es el desplazamiento del transbordador en el intervalo  $0 < t < \infty$ ?

**Planteamiento del problema** La función velocidad viene representada por la figura 2.20. El desplazamiento total se calcula sumando el desplazamiento  $\Delta x_1$  correspondiente al intervalo  $0 < t < t_1 = 60$  s y el desplazamiento durante el intervalo  $t_1 < t < \infty$ .



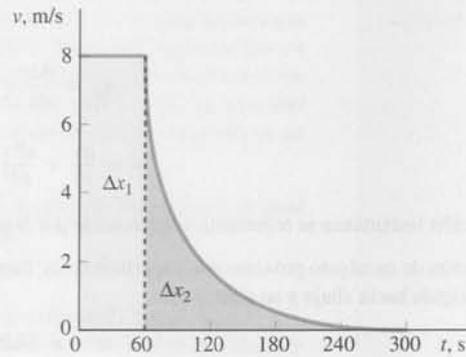


Figura 2.22

1. La velocidad del transbordador es constante durante los primeros 60 segundos; así, el desplazamiento es simplemente el producto de la velocidad por el tiempo transcurrido:
2. El desplazamiento restante viene dado por la integral de la velocidad desde  $t = t_1$  hasta  $t = \infty$ . Utilizamos la ecuación 2.18 para calcular la integral:
3. El desplazamiento total es la suma de los dos desplazamientos anteriores:

$$\Delta x_1 = v_0 \Delta t = v_0 t_1 = (8 \text{ m/s})(60 \text{ s}) = 480 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= \int_{t_1}^{\infty} v \, dt = \int_{t_1}^{\infty} \frac{v_0 t_1^2}{t^2} \, dt = v_0 t_1^2 \int_{t_1}^{\infty} t^{-2} \, dt = v_0 t_1^2 \left[ \frac{t^{-1}}{-1} \right]_{t_1}^{\infty} \\ &= -v_0 t_1^2 \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{t_1} \right) = v_0 t_1 = (8 \text{ m/s})(60 \text{ s}) = 480 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 480 \text{ m} + 480 \text{ m} = \boxed{960 \text{ m}}$$

**Observación** El área bajo la curva de  $v$  en función del tiempo es finita. Así, aunque el transbordador nunca deja de moverse, viaja sólo una distancia finita. Una representación mejor de la velocidad de un buque que bordea la costa con los motores parados sería una función exponencialmente decreciente  $v = v_0 e^{-b(t-t_1)}$ , donde  $b$  es una constante positiva. En este caso el buque se acercaría a la costa también una distancia finita en el intervalo  $60 \text{ s} \leq t < \infty$ .

## Resumen

El desplazamiento, la velocidad y la aceleración son magnitudes cinemáticas *definidas* importantes.

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### 1. Desplazamiento

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (2.1)$$

Interpretación gráfica

El desplazamiento es el área bajo la curva  $v$  en función de  $t$ .

#### 2. Velocidad

Velocidad media

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2)$$

Velocidad instantánea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.5)$$

Interpretación gráfica

La velocidad instantánea se representa gráficamente por la pendiente de la curva  $x$  en función de  $t$ .

Velocidad relativa

Si una partícula se mueve con velocidad  $v_{pA}$  respecto a un sistema de coordenadas A, el cual a su vez se mueve con velocidad  $v_{AB}$  respecto a otro sistema de coordenadas B, la velocidad de la partícula relativa a B es

$$v_{pB} = v_{pA} + v_{AB} \quad (2.7)$$

#### 3. Módulo de la velocidad

Módulo de la velocidad media

$$\text{Módulo de la velocidad media} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{s}{t} \quad (2.3)$$

## 4. Aceleración

Aceleración media

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.8)$$

Aceleración instantánea

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.10)$$

Interpretación gráfica

La aceleración instantánea se representa gráficamente por la pendiente de la curva  $v$  en función del tiempo  $t$ .

Aceleración debida a la gravedad

La aceleración de un objeto próximo a la superficie de la Tierra en caída libre bajo la influencia de la gravedad está dirigida hacia abajo y su módulo es

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 = 32,2 \text{ pies/s}^2$$

## 5. El desplazamiento y la velocidad como integrales

El desplazamiento se representa gráficamente por el área bajo la curva  $v$  en función del tiempo. Esta área es la integral de  $v$  extendida al tiempo, desde cierto valor inicial  $t_1$  a cierto valor final  $t_2$  y se expresa del modo siguiente:

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v \, dt \quad (2.18)$$

Igualmente, el cambio de velocidad durante cierto tiempo se representa gráficamente por el área bajo la curva  $a$  en función de  $t$ :

$$\Delta v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i a_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} a \, dt \quad (2.21)$$

Velocidad

$$v = v_0 + at \quad (2.12)$$

Desplazamiento en función de  $v_m$ 

$$\Delta x = x - x_0 = v_m t = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \quad (2.15)$$

Desplazamiento en función de  $a$ 

$$\Delta x = x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.16)$$

 $v$  en función de  $a$  y  $\Delta x$ 

$$v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x \quad (2.17)$$

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

Usar en todos los problemas  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

### Problemas conceptuales

1 ● ¿Cuál es la velocidad media del recorrido de "ida y vuelta" de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba y que vuelve a caer en el mismo sitio desde donde ha sido lanzado?

2 ● SSM Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba vuelve al suelo  $T$  segundos más tarde. Su altura máxima es  $H$  metros y su altura en el momento de soltarlo es despreciable. Su velocidad media durante estos  $T$  segundos es (a)  $H/T$ , (b) 0, (c)  $H/2T$ , (d)  $2H/T$ .

3 ● iSOLVE Para evitar una caída demasiado rápida durante el aterrizaje, un avión debe mantener una mínima velocidad relativa de vuelo (velocidad del avión respecto al aire). Sin embargo, cuanto menor sea la velocidad con respecto del suelo durante el aterrizaje, más segura es la maniobra. ¿Qué opción es más segura para un avión, aterrizar a favor del viento o con el viento en contra?

4 ● Dé un ejemplo de un movimiento en una dimensión donde (a) la velocidad sea positiva y la aceleración sea negativa y, (b) donde la velocidad sea negativa y la aceleración sea positiva.

5 ● SSM Póngase en el centro de una habitación espaciosa. Considere que el movimiento hacia su derecha es positivo y el movimiento hacia su izquierda, negativo. Muévase por la habitación en línea recta de modo que su velocidad sea negativa pero su aceleración sea positiva. (a) ¿Su desplazamiento inicial es positivo o negativo? Explíquelo. (b) Describa cómo varía su velocidad a medida que se mueve. (c) Confeccione un esquema del movimiento en un gráfico  $v-t$ .

6 ● Verdadero o falso; explíquelo: el desplazamiento *siempre* es igual al producto de la velocidad media por el tiempo.

7 ● Verdadero o falso; explíquelo:

- (a) para que la velocidad sea constante, la aceleración *debe ser* cero.
- (b) para que el módulo de la velocidad sea constante, la aceleración *debe ser* cero.

8 ●● SSM Dibuje cuidadosamente los gráficos que representan la posición, la velocidad y la aceleración en un periodo de tiempo  $0 \leq t \leq 25$  para un automóvil que

- (a) durante los primeros 5 s se aleja despacio y regularmente (a velocidad constante) del origen;
- (b) se aleja a mayor velocidad y regularmente (a velocidad constante) durante los 5 s siguientes;
- (c) se queda quieto durante los 5 s que siguen;
- (d) se mueve de nuevo hacia el origen, despacio y regularmente (a velocidad constante), durante los 5 s siguientes;
- (e) se queda quieto durante los últimos 5 s.

9 ● Verdadero o falso; explíquelo: la velocidad media siempre se calcula como la semisuma de las velocidades final e inicial.

10 ● Dos hermanos gemelos idénticos lanzan simultáneamente dos piedras al agua desde un puente horizontal. Una piedra llega al agua antes que la otra. ¿Puede darse esta situación?

11 ●● SSM El Dr. Josiah S. Carberry está en lo alto de la torre Sears en Chicago. Con el objetivo de emular a Galileo e ignorando la seguridad de los peatones que se mueven en la zona cercana a la base del edificio, suelta una bola desde lo más alto del edificio. Un segundo más tarde suelta una segunda bola. Mientras las bolas están en el aire, su separación (a) ¿aumenta con el tiempo, (b) disminuye, o (c) se mantiene constante? Ignórense los efectos de la resistencia del aire.

12 ●● ¿Cuál de las curvas *posición-tiempo* de la figura 2.23 describe mejor el movimiento de un objeto sometido a una aceleración constante y positiva?

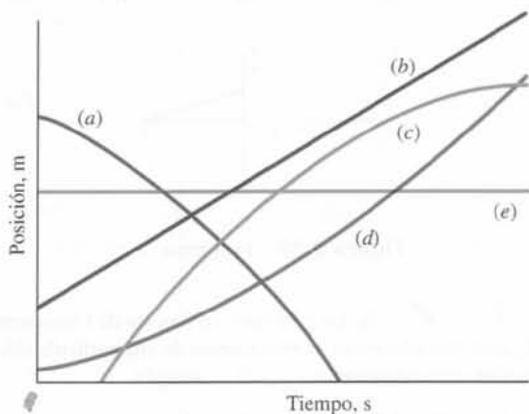


Figura 2.23 Problema 12

13 ● SSM ¿Cuál de las curvas *velocidad-tiempo* de la figura 2.24 describe mejor el movimiento de un objeto sometido a una aceleración constante y positiva?

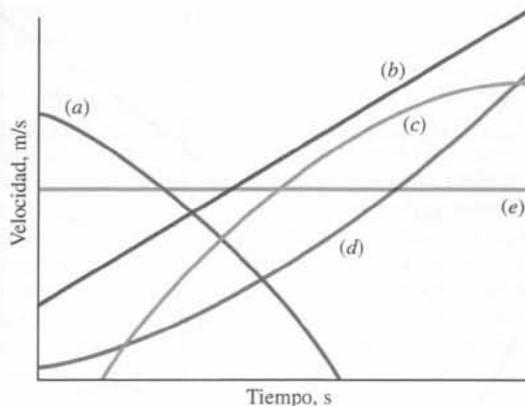


Figura 2.24 Problema 13

14 ● ¿Tiene sentido la siguiente afirmación? “La velocidad media del coche a las 9 de la mañana fue 60 km/h”.

15 ● SSM ¿Es posible que la velocidad media de un objeto sea cero durante algún intervalo aunque su velocidad media en la primera mitad del intervalo no sea cero? Razonar la respuesta.

16 ● El diagrama de la figura 2.25 representa la trayectoria de un objeto que se mueve en línea recta a lo largo del eje  $x$ . Suponiendo que el objeto se encuentra en el origen ( $x_0 = 0$ ) en  $t_0 = 0$ , ¿qué punto de la figura representa el instante de tiempo en que el objeto está más lejos de su punto de partida? (a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

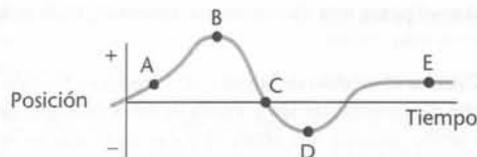


Figura 2.25 Problema 16

17 ● SOLVE Si la velocidad instantánea no se modifica, ¿varián las velocidades medias en diferentes intervalos?

18 ● Si  $v_m = 0$  para cierto intervalo de tiempo  $\Delta t$ , ¿debe ser cero la velocidad instantánea en algún punto de este intervalo? Razonar la respuesta mediante un esquema que presente una curva de  $x$  en función de  $t$  con un  $\Delta x = 0$  en algún intervalo  $\Delta t$ .

19 ●● Un objeto se mueve a lo largo del eje  $x$  como indica la figura 2.26. ¿En qué punto o puntos el módulo de la velocidad pasa por un mínimo? (a) A y E. (b) B, D y E. (c) Sólo C. (d) Sólo E. (e) Ninguna de estas respuestas es correcta.

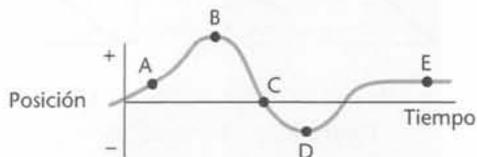


Figura 2.26 Problema 19

20 ●● SSM SOLVE En cada uno de los cuatro gráficos de  $x$  en función de  $t$  de la figura 2.27 indicar

- (a) si la velocidad en el instante  $t_2$  es mayor, menor o igual que la velocidad en el instante  $t_1$  y
- (b) si el módulo de la velocidad en el tiempo  $t_2$  es mayor, menor o igual que en el tiempo  $t_1$ .

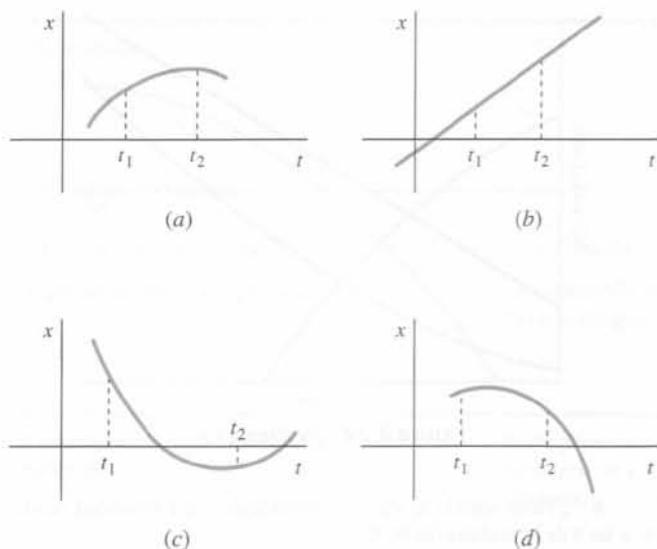


Figura 2.27 Problema 20

21 ● Verdadero o falso:

- (a) Si la aceleración es cero, la partícula no puede estar moviéndose.  
 (b) Si la aceleración es cero, la curva  $x$  en función de  $t$  es una línea recta.

22 ● ¿Es posible que un objeto tenga simultáneamente aceleración nula y velocidad cero?

23 ● **SOLVE** Se lanza una pelota hacia arriba verticalmente. ¿Cuál es su velocidad en el punto más alto de su movimiento? ¿Cuál es la aceleración en ese punto?

24 ● Calcular el módulo de la velocidad media en función de la velocidad inicial  $v_0$  del movimiento de ida y vuelta de un objeto que, desde el suelo, se lanza hacia arriba, alcanza una altura  $H$  y cae en el mismo sitio de donde había salido  $T$  segundos más tarde.

25 ● Una pelota se lanza hacia arriba. Mientras está en el aire, su aceleración es (a) decreciente, (b) constante, (c) cero, (d) creciente.

26 ● En el instante  $t = 0$ , un objeto A se deja caer desde el tejado de una casa. En el mismo instante, otro objeto B se deja caer desde una ventana a 10 m por debajo del tejado. Durante su descenso al suelo la distancia entre los dos objetos (a) es proporcional a  $t$ , (b) es proporcional a  $t^2$ , (c) decrece, (d) permanece igual a 10 m constantemente.

27 ●● **SSM** Un automóvil Porsche acelera uniformemente de 80,5 km/h en el instante  $t = 0$  hasta 113 km/h en  $t = 9$  s. ¿Qué gráfico de la figura 2.28 representa mejor el movimiento del coche?

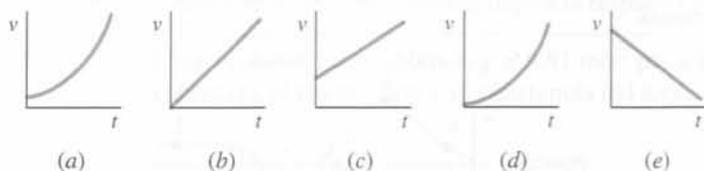


Figura 2.28 Problema 27

28 ●● **SSM** Un objeto cae, partiendo del reposo, y recorre una distancia  $D$  en un tiempo determinado. Si el tiempo de la caída se dobla, la distancia recorrida será: (a)  $4D$ , (b)  $2D$ , (c)  $D$ , (d)  $D/2$ , (e)  $D/4$ .

29 ●● Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0$ . A medio camino del punto más alto de su recorrido la velocidad es (a)  $0,25v_0$ , (b)  $0,5v_0$ , (c)  $0,707v_0$ , (d)  $v_0$ , (e) a partir de la información disponible no se puede determinar.

30 ● Verdadero o falso:

- (a) La ecuación  $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$  es válida para todo movimiento de partículas en una dimensión.  
 (b) Si la velocidad en un instante determinado es cero, la aceleración en dicho instante también debe ser cero.  
 (c) La ecuación  $\Delta x = v_m \Delta t$  es válida para todo movimiento en una dimensión.

31 ● **SSM** Si un objeto se mueve con aceleración constante sobre una línea recta, su velocidad instantánea a la mitad de la distancia recorrida en cualquier intervalo de tiempo es (a) mayor que su velocidad media; (b) menor que su velocidad media; (c) igual que su velocidad media; (d) la mitad de su velocidad media; (e) dos veces su velocidad media.

32 ●● En un gráfico el eje vertical representa la posición y el eje horizontal, el tiempo. En este gráfico una línea recta de pendiente negativa representa (a) una aceleración constante positiva; (b) una aceleración constante negativa; (c) una velocidad nula; (d) una velocidad constante positiva; (e) una velocidad constante negativa.

33 ●● En un gráfico, el eje vertical representa la posición y el eje horizontal, el tiempo. En este gráfico una parábola que se abre hacia arriba representa (a) una aceleración positiva; (b) una aceleración negativa; (c) que no hay aceleración; (d) una aceleración positiva seguida de otra negativa; (e) una aceleración negativa seguida de otra positiva.

34 ●● En un gráfico, el eje vertical representa la velocidad y el eje horizontal, el tiempo. Una aceleración constante nula se representa por (a) una línea recta de pendiente positiva; (b) una línea recta de pendiente negativa; (c) una línea recta de pendiente cero; (d) cualquiera de las (a), (b) o (c); (e) ninguna de las anteriores.

35 ●● En un gráfico, el eje vertical representa la velocidad y el eje horizontal, el tiempo. La aceleración constante viene representada por (a) una línea recta de pendiente positiva; (b) una línea recta de pendiente negativa; (c) una línea recta de pendiente cero; (d) cualquiera de las (a), (b) o (c); (e) ninguna de las anteriores.

36 ●● De los gráficos  $v$  en función de  $t$  representados en la figura 2.29, ¿cuál describe mejor el movimiento de una partícula con velocidad positiva y aceleración negativa?

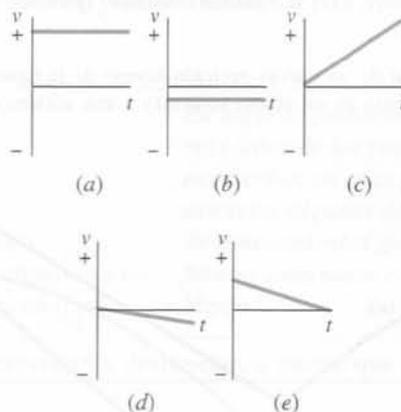


Figura 2.29 Problema 36

37 ●● **SOLVE** De los gráficos  $v$  en función de  $t$  representados en la figura 2.29, ¿cuál describe mejor el movimiento de una partícula con velocidad negativa y aceleración negativa?

38 ●● Un gráfico del movimiento de un objeto se representa con la velocidad sobre el eje vertical y el tiempo sobre el eje horizontal. El gráfico es una línea recta. ¿Cuál de estas magnitudes *puede* determinarse a partir de este gráfico? (a) El desplazamiento a partir del tiempo  $t = 0$  hasta cualquier otro tiempo representado. (b) La velocidad inicial en el tiempo  $t = 0$ . (c) La aceleración del objeto como función del tiempo. (d) La velocidad media del objeto en cualquier intervalo de tiempo representado. (e) Todas las anteriores.

**39** ●● **SSM** La figura 2.30 representa la posición de un coche en función del tiempo. ¿En cuál de los tiempos entre  $t_0$  y  $t_7$  la velocidad es (a) negativa, (b) positiva, (c) cero? ¿En cuál de los tiempos la aceleración es (a) negativa, (b) positiva, (c) cero?

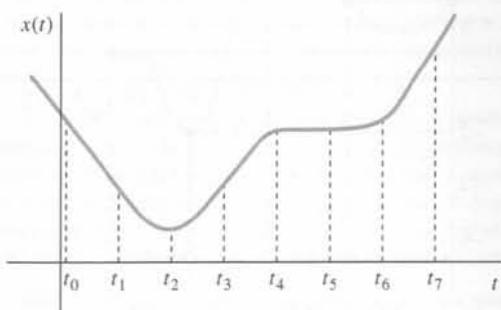


Figura 2.30 Problema 39

**40** ●● Representar las curvas  $v$  en función de  $t$  para cada una de las siguientes condiciones: (a) La aceleración es cero y constante, pero la velocidad no es nula. (b) La aceleración es constante, pero no cero. (c) La velocidad y la aceleración son ambas positivas. (d) La velocidad y la aceleración son ambas negativas. (e) La velocidad es positiva y la aceleración negativa. (f) La velocidad es negativa y la aceleración positiva. (g) La velocidad es momentáneamente nula, pero la aceleración no lo es.

**41** ●● En la figura 2.31 se representan nueve gráficos de posición, velocidad y aceleración para objetos en movimiento lineal. Indicar los gráficos que cumplen las siguientes condiciones: (a) La velocidad es constante. (b) La velocidad invierte su dirección. (c) La aceleración es constante. (d) La aceleración no es constante. (e) ¿Qué gráficos de posición, velocidad y aceleración son mutuamente coherentes?

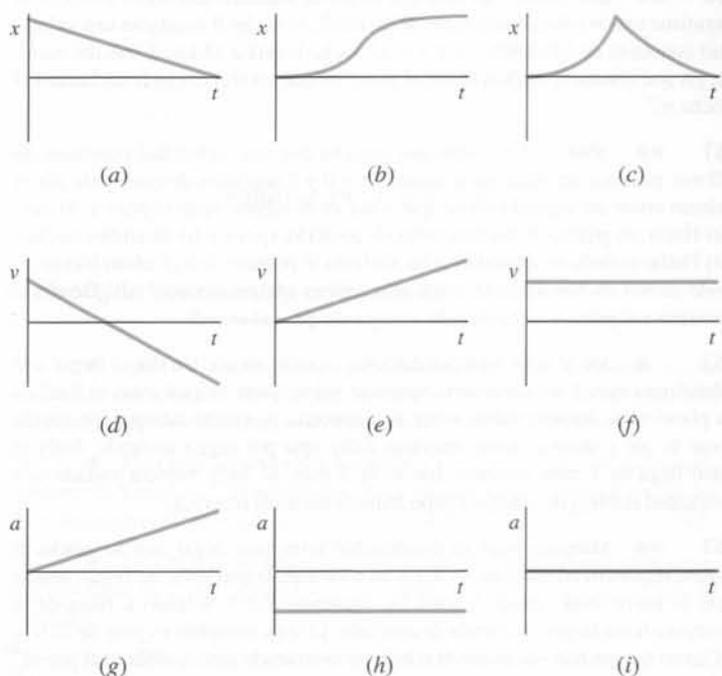


Figura 2.31 Problema 41

tro a la velocidad de 60 km/h? (b) Si vive 95 años, cuántos latidos realizará su corazón en el curso de toda su vida?

**43** ●● **SSM** **RESOLVE** Ocasionalmente tenemos noticia de personas que sobreviven a caídas desde grandes alturas cuando la superficie sobre la que caen es blanda. Durante una escalada por la vía norte del Eiger (montaña de los Alpes suizos), una fijación del montañero Carlos Ragone cedió y precipitó al escalador a una caída de 150 m sobre la nieve. Sorprendentemente sufrió únicamente unas pocas magulladuras y un tirón en el hombro. (a) ¿Qué velocidad final tenía antes del choque con la nieve? (Despreciar la resistencia del aire). (b) Suponiendo que su impacto dejó un agujero de 122 cm en la nieve, estimar la aceleración a la que estuvo sometido durante el frenado. (Se supone que la aceleración fue constante.) Expresarla como múltiplo de  $g$  (aceleración de caída libre en la superficie de la Tierra).

**44** ●● Cuando se resuelven problemas relacionados con la caída libre en la atmósfera de la Tierra, es importante recordar que siempre se da la resistencia del aire. Por lo tanto, si para simplificar, suponemos que los objetos caen con aceleración constante, podemos obtener resultados erróneos en varios órdenes de magnitud. ¿Qué criterio podemos aplicar para suponer que un objeto cae con aceleración (prácticamente) constante? Cuando un cuerpo cae, partiendo del reposo, a través del aire, a medida que su velocidad aumenta, su aceleración disminuye. La velocidad se aproxima, aunque nunca la alcanza, a la *velocidad terminal* o *velocidad límite*, que depende de la masa y del área transversal del objeto. A la velocidad terminal, la fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por la resistencia del aire se igualan. Para un paracaidista, una estimación razonable de la velocidad terminal es de unos 50 m/s. Si el paracaidista lleva la mitad de esta velocidad, su aceleración es  $\frac{3}{4}g$ . (a) Tomemos la mitad de la velocidad límite como un límite superior por encima del cual no podemos usar las fórmulas de la aceleración constante para calcular la velocidad y el desplazamiento. ¿Cuánto debe caer el paracaidista para que podamos utilizar la aproximación de aceleración constante? (a) Repita el análisis para un ratón, que tiene una velocidad terminal de 1 m/s.

**45** ●● El 16 de junio de 1999 Maurice Greene de los Estados Unidos estableció un nuevo récord del mundo en los 100 m lisos con una marca de 9,79 s. Supongamos que aceleró desde el reposo a aceleración constante  $a$  y que alcanzó su velocidad máxima en 3,00 s, la cual mantuvo hasta llegar a la meta. ¿Cuál fue su aceleración en la prueba del récord?

**46** ●● **SSM** La figura 2.32 muestra la fotografía tomada con tiempos de apertura cortos (1/30s) de un malabarista con dos pelotas de tenis en el aire. La pelota de tenis que está a mayor altura está menos borrosa que la otra. ¿Por qué? ¿Puede estimarse la velocidad de esta última pelota?

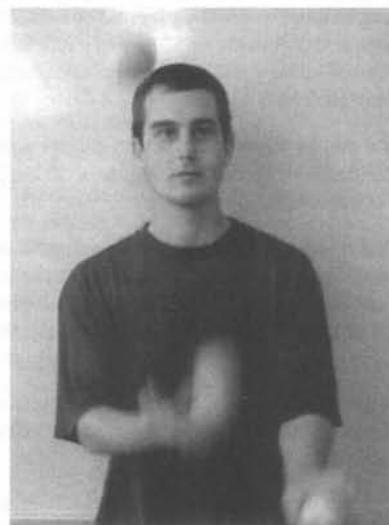


Figura 2.32 Problema 46

**Estimaciones y aproximaciones**

**42** ● Mida su propio pulso (número de latidos del corazón por minuto). El pulso típico de un adulto está entre 60 y 80 pulsaciones por minuto. (a) ¿Cuántas veces late su corazón durante el tiempo que invertió en conducir un kilómetro?

47 ●● Busque en la velocidad a la que un impulso nervioso recorre nuestro cuerpo. Estimar el tiempo transcurrido desde que el pie tropieza con una piedra y la sensación de dolor que se produce.

### Desplazamiento, velocidad y módulo de la velocidad

48 ● (a) Un electrón de un tubo de televisión recorre los 16 cm de distancia de la rejilla a la pantalla con una velocidad media de  $4 \times 10^7$  m/s. ¿Qué tiempo transcurre en ese trayecto? (b) Un electrón en un conductor por el que circula una corriente se mueve con una velocidad media de  $4 \times 10^{-5}$  m/s. ¿Qué tiempo tarda en recorrer 16 cm?

49 ● SSM Un atleta corre 2,5 km en línea recta en 9 min y luego tarda 30 min en volver andando al punto de partida. (a) ¿Cuál es la velocidad media durante los primeros 9 minutos? (b) ¿Cuál es la velocidad media durante el tiempo que camina? (c) ¿Cuál es la velocidad media a lo largo de todo el recorrido? (d) ¿Cuál es el valor del módulo de la velocidad media para todo el recorrido?

50 ● **¡SOLVE!** Un coche viaja en línea recta con velocidad media de 80 km/h durante 2,5 h y luego con velocidad media de 40 km/h durante 1,5 h. (a) ¿Cuál es el desplazamiento total en el viaje de 4 h? (b) ¿Cuál es la velocidad media del viaje completo?

51 ● Una ruta aérea muy concurrida a través del Océano Atlántico tiene una longitud aproximada de 5500 km. (a) ¿Cuánto tiempo tarda un reactor supersónico que vuela al doble de la velocidad del sonido en recorrer esta ruta? Utilizar el valor 340 m/s como velocidad del sonido. (b) ¿Cuánto tardaría un avión subsónico en realizar el mismo viaje volando a 0,9 veces la velocidad del sonido? (c) Suponiendo que se utilizan 2 h al final del viaje para el transporte por tierra, controles y manipulación del equipaje ¿Cuál es la velocidad media "puerta a puerta" cuando se viaja en el avión supersónico? (d) ¿Cuál es la velocidad media en el avión subsónico?

52 ● SSM La luz se propaga con una velocidad de  $c = 3 \times 10^8$  m/s. (a) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en ir del Sol a la Tierra al recorrer una distancia de  $1,5 \times 10^{11}$  m? (b) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en recorrer la distancia Luna-Tierra que es de  $3,84 \times 10^8$  m? (c) Un año luz es una unidad de distancia que equivale al camino recorrido por la luz en 1 año. Determinar la distancia equivalente a 1 año luz en kilómetros y en millas.

53 ● La estrella Próxima Centauri es una enana roja muy poco luminosa próxima a las estrellas Alfa Centauri y situada a  $4,1 \times 10^{13}$  km de distancia. Desde la proximidad de esta estrella, Gregor manda una orden a la empresa Tony's Pizza de Hoboken, New Jersey, para lo cual utiliza una señal de comunicación luminosa. La nave más rápida de Tony viaja a la velocidad de  $10^{-4}c$  (véase problema 52). (a) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar la orden a la empresa? (b) ¿Cuánto tiempo tendrá que esperar Gregor entre que envía la señal y recibe la pizza? Si las normas de distribución de Tony dicen que la tardanza máxima en servir la pizza es de 1000 años y que si sobrepasa este plazo, el servicio será gratuito, ¿tendrá Gregor que pagar la pizza?

54 ● Un coche que ha de recorrer 100 km cubre los primeros 50 km a 40 km/h. ¿A qué velocidad debe recorrer los segundos 50 km para que la velocidad media en todo el trayecto sea de 50 km/h?

55 ●● SSM Un arquero lanza una flecha que produce un ruido sordo al impactar en el blanco. Si el arquero oye el ruido del impacto exactamente 1 s después del disparo y la velocidad media de la flecha es de 40 m/s, ¿qué distancia separa el arquero del blanco? Use para la velocidad del sonido el valor de 340 m/s.

56 ●● John puede correr a 6 m/s. Marcia puede correr un 15% más que John. (a) En una carrera de 100 m, ¿qué ventaja en metros sacará Marcia sobre John? (b) ¿Y en segundos?

57 ● **¡SOLVE!** La figura 2.33 muestra la posición de una partícula en función del tiempo. Determinar la velocidad media en los intervalos de tiempo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  indicados en la figura.

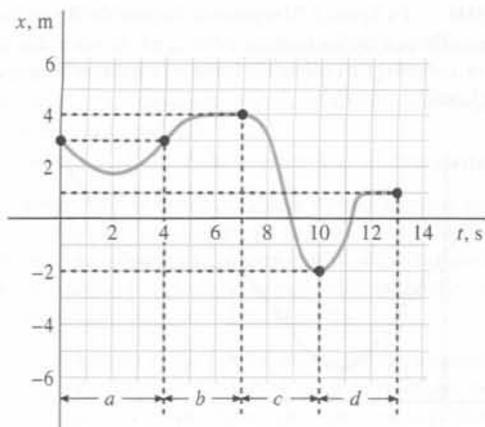


Figura 2.33 Problema 57

58 ●● Se sabe que las galaxias se alejan de la Tierra a una velocidad proporcional a su distancia de nuestro planeta: ley de Hubble. La velocidad de una galaxia a la distancia  $r$  es  $v = Hr$ , siendo  $H$  la constante de Hubble, de valor  $1,58 \times 10^{-18}$  s $^{-1}$ . Determine la velocidad de una galaxia (a) que dista  $5 \times 10^{22}$  m de la Tierra y (b) otra que dista  $2 \times 10^{25}$  m de la Tierra. (c) Si cada una de estas galaxias viaja con velocidad constante, ¿cuánto tiempo ha transcurrido desde que ambas estuvieron en el mismo lugar que la Tierra?

59 ●● SSM **¡SOLVE!** Un leopardo puede correr a  $v_1 = 113$  km/h, un halcón puede volar a  $v_2 = 161$  km/h y un atún puede nadar a  $v_3 = 105$  km/h. Si nos imaginamos que los tres animales forman un equipo y corren una carrera de relevos, cada uno recorriendo una distancia  $L$  a su velocidad máxima, ¿cuál sería la velocidad media del equipo? Comparar el resultado obtenido con la media de las tres velocidades.

60 ●● Dos coches circulan a lo largo de una carretera recta. El coche A mantiene una velocidad constante de 80 km/h; el coche B mantiene una velocidad constante de 110 km/h. En  $t = 0$ , el coche B está a 45 km detrás del coche A. ¿A qué distancia medida desde el punto en que  $t = 0$  el coche B adelantará al coche A?

61 ●● SSM Un coche que marcha con una velocidad constante de 20 m/s pasa por un cruce en el instante  $t = 0$  y 5 segundos después pasa por el mismo cruce un segundo coche que viaja en el mismo sentido pero a 30 m/s. (a) Hacer un gráfico de las funciones de posición  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  de ambos coches. (b) Hallar cuándo el segundo coche adelanta al primero. (c) ¿Cuánto han recorrido ambos coches desde el cruce al ocurrir el adelantamiento? (d) ¿Dónde se encuentra el primer coche cuando el segundo pasa el cruce?

62 ● Joe y Sally siempre discuten cuando viajan. Un día al llegar a la plataforma móvil del aeropuerto apuestan sobre quien llegará antes al final de la plataforma. Aunque saltan sobre la plataforma al mismo tiempo, Joe decide estar de pie y dejarse llevar, mientras Sally opta por seguir andando. Sally al final llega en 1 min, mientras Joe tarda 2 min. Si Sally hubiera andado con velocidad doble, ¿en cuánto tiempo hubiera hecho el recorrido?

63 ●● Margaret tiene el combustible justo para llegar con su lancha al puerto deportivo en un viaje de 4,0 h en contra de la corriente. Al llegar, resulta que el puerto está cerrado y pasa las siguientes 8,0 h flotando a favor de la corriente hasta llegar a su tienda de campaña. El viaje completo es pues de 12,0 h. ¿Cuánto tiempo hubiera invertido si hubiese encontrado combustible en el puerto?

### Aceleración

64 ● **¡SOLVE!** Un coche deportivo BMW M3 acelera con la tercera marcha de 48,3 km/h a 80,5 km/h en 3,7 s. (a) ¿Cuál es su aceleración media en m/s $^2$ ? (b) Si el coche continúa con esta aceleración otro segundo, ¿cuál será su velocidad?

**65** ● En el instante  $t = 5$  s, un objeto en  $x = 3$  m se mueve a  $+5$  m/s. Para  $t = 8$  s, se encuentra en  $x = 9$  m y su velocidad es  $-1$  m/s. Determinar la aceleración media para este intervalo.

**66** ●● Una partícula se mueve con velocidad  $v = (8 \text{ m/s}^2)t - 7 \text{ m/s}$ , en donde  $v$  se expresa en metros por segundo y  $t$  en segundos. (a) Determinar la aceleración media a intervalos de un segundo comenzando en  $t = 3$  s y  $t = 4$  s. (b) Representar  $v$  en función de  $t$ . ¿Cuál es la aceleración instantánea en cualquier momento?

**67** ●● **¡SOLVE!** La posición de una partícula depende del tiempo según la ecuación  $x(t) = t^2 - 5t + 1$ , donde  $x$  se expresa en metros y  $t$  en segundos. (a) Determinar el desplazamiento y la velocidad media durante el intervalo  $3 \text{ s} \leq t \leq 4 \text{ s}$ . (b) Encontrar la fórmula general para el desplazamiento durante el intervalo entre  $t$  y  $t + \Delta t$ . (c) Determinar la velocidad instantánea para cualquier tiempo  $t$  haciendo el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero.

**68** ●● **SSM** **¡SOLVE!** La posición de un objeto está relacionada con el tiempo por la expresión  $x = At^2 - Bt + C$ , en donde  $A = 8 \text{ m/s}^2$ ,  $B = 6 \text{ m/s}$  y  $C = 4 \text{ m}$ . Determinar la velocidad instantánea y la aceleración como funciones del tiempo.

**69** ●● El movimiento unidimensional de una partícula viene representado en la figura 2.34. (a) ¿Cuál es la aceleración en los intervalos AB, BC y CE? (b) ¿A qué distancia de su punto de partida se encuentra la partícula al cabo de 10 s? (c) Representar el desplazamiento de la partícula en función del tiempo; indicar en ella los instantes A, B, C, D y E. (d) ¿En qué instante la partícula se mueve más lentamente?

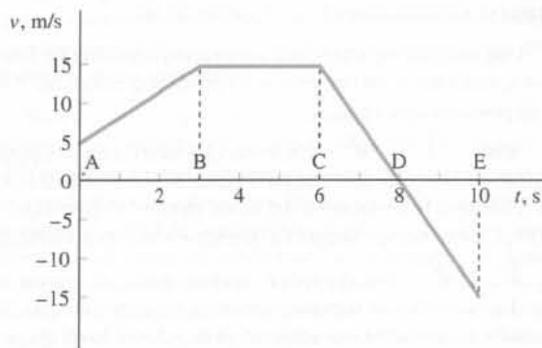


Figura 2.34 Problema 69

### Aceleración constante y caída libre

**70** ● **SSM** Un objeto lanzado hacia arriba con velocidad inicial  $v_0$  alcanza una altura  $h$ . Otro objeto lanzado en las mismas condiciones con velocidad inicial  $2v_0$  alcanzará una altura de (a)  $4h$ , (b)  $3h$ , (c)  $2h$ , (d)  $h$ .

**71** ● Un coche parado en la posición  $x = 50$  m acelera con aceleración constante de  $8 \text{ m/s}^2$ . (a) ¿Transcurridos 10 s, cuál es su velocidad? (b) ¿Qué distancia ha recorrido? (c) ¿Cuál es su velocidad media en el intervalo  $0 \leq t \leq 10$  s?

**72** ● Un objeto con una velocidad inicial de  $5 \text{ m/s}$  posee una aceleración constante de  $2 \text{ m/s}^2$ . Cuando su velocidad es de  $15 \text{ m/s}$ , ¿qué espacio ha recorrido?

**73** ● **SSM** Un objeto con aceleración constante posee una velocidad de  $10 \text{ m/s}$  cuando se encuentra en  $x = 6 \text{ m}$  y de  $15 \text{ m/s}$  cuando se encuentra en  $x = 10 \text{ m}$ . ¿Cuál es su aceleración?

**74** ● La velocidad de un objeto aumenta a una tasa constante de  $4 \text{ m/s}$  cada segundo. Su velocidad es  $1 \text{ m/s}$  cuando  $t = 0$ , en cuyo instante está en  $x = 7 \text{ m}$ . ¿Con qué velocidad se mueve cuando está en  $x = 8 \text{ m}$ ? ¿Cuándo sucederá esto?

**75** ●● **¡SOLVE!** Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de  $20 \text{ m/s}$ . (a) ¿Cuánto tiempo está la pelota en el aire? (Despreciar la altura del punto de lanzamiento.) (b) ¿Cuál es la mayor altura alcanzada por la

pelota? (c) ¿Cuándo está la pelota a  $15 \text{ m}$  por encima del punto de lanzamiento?

**76** ●● **¡SOLVE!** En el corrimiento de tierras de Blackhawk, en California, una masa de rocas y barro cayó  $460 \text{ m}$  al desprenderse de una montaña y luego recorrió  $8 \text{ km}$  a través de una llanura sobre una capa de vapor de agua. Suponiendo que esta masa cayó con la aceleración de la gravedad y después se deslizó horizontalmente con desaceleración constante, (a) ¿cuánto tiempo tardó en caer los  $460 \text{ m}$ ? (b) ¿Cuál era su velocidad al llegar al fondo? (c) ¿Cuánto tiempo tardó en deslizarse horizontalmente a lo largo de los  $8 \text{ km}$ ?

**77** ●● **SSM** Una grúa levanta una carga de ladrillos a la velocidad constante de  $5 \text{ m/s}$ , cuando a  $6 \text{ m}$  del suelo se desprende un ladrillo de la carga. (a) Describir el movimiento del ladrillo desprendido haciendo un esquema de  $x(t)$ . (b) ¿Cuál es la altura máxima respecto al suelo que alcanza el ladrillo? (c) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo? (d) ¿Cuál es su velocidad en el momento de chocar contra el suelo?

**78** ●● Un tornillo se desprende del fondo exterior de un ascensor que se mueve hacia arriba a la velocidad de  $6 \text{ m/s}$ . El tornillo alcanza el fondo del hueco del ascensor en  $3 \text{ s}$ . (a) ¿A qué altura estaba el ascensor cuando se desprendió el tornillo? (b) ¿Qué velocidad tiene el tornillo al chocar contra el fondo del hueco del ascensor?

**79** ●● **SSM** Un objeto cae de una altura de  $120 \text{ m}$ . Determinar la distancia que recorre durante su último segundo en el aire.

**80** ●● Un objeto cae de una altura  $h$ . Durante el segundo final de su caída recorre  $38 \text{ m}$ . ¿Cuánto vale  $h$ ?

**81** ● **SSM** Una piedra cae verticalmente desde un acantilado de  $200 \text{ m}$  de altura. Durante el último medio segundo de su caída la piedra recorre una distancia de  $45 \text{ m}$ . Determinar la velocidad inicial de la piedra.

**82** ●● Un objeto en caída libre desde una altura  $h$  recorre  $0,4 h$  durante el primer segundo de su descenso. Determinar la velocidad media del objeto durante su caída.

**83** ●● Un autobús acelera a  $1,5 \text{ m/s}^2$  desde el reposo durante  $12 \text{ s}$ . A continuación se mueve a velocidad constante durante  $25 \text{ s}$ , después de los cuales disminuye su velocidad con una aceleración de  $-1,5 \text{ m/s}^2$ . (a) ¿Qué distancia total recorrió el autobús? (b) ¿Cuál fue su velocidad media?

**84** ●● **SSM** Para resolver ciertas clases de problemas de física es relativamente fácil usar un programa como el Microsoft Excel, con una hoja de cálculo. Por ejemplo, probablemente ha resuelto el problema 75 usando álgebra; aquí resolveremos aquel problema de una forma diferente usando una hoja de cálculo. Aunque éste no es el caso, hay muchas situaciones en física donde se ha de recurrir como única alternativa a la solución de un problema mediante métodos numéricos. (a) Usando una hoja de cálculo, generar un gráfico *altura-tiempo* para la pelota del ejercicio 75 (lanzada hacia arriba con una velocidad vertical inicial de  $20 \text{ m/s}$ ). Determinar la altura máxima alcanzada, el tiempo que ha estado en el aire, y el tiempo durante el cual la bola está en el aire por encima de los  $15 \text{ m}$  de altura (con la ayuda de la gráfica). (b) Imponga que la velocidad inicial sea  $10 \text{ m/s}$  y encuentre la altura máxima que alcanza la bola y el tiempo que ésta está en el aire.

**85** ●● **SSM** **¡SOLVE!** Al y Bert han salido a correr por un camino que discurre por el interior de un bosque. Mantienen una velocidad de  $0,75 \text{ m/s}$ . Al ve que el final del camino y del bosque se encuentra a unos  $35 \text{ m}$  y acelera con una aceleración constante de  $0,5 \text{ m/s}^2$ , dejando atrás a Bert, que continúa a velocidad constante. (a) ¿Cuánto le cuesta a Al llegar al final del camino? (a) Cuando alcanza la meta, inmediatamente se da la vuelta y deshace el camino a la velocidad constante de  $0,85 \text{ m/s}$ . ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que se cruza con Bert? (c) ¿A qué distancia del final del camino se encuentran cuando se cruzan?

**86** ●● Resuelva las preguntas (b) y (c) del problema 85 usando una hoja de cálculo.

**87** ●● Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba con una aceleración de  $20 \text{ m/s}^2$ . Al cabo de  $25 \text{ s}$  el combustible se agota y el cohete continúa como una partícula libre hasta que alcanza el suelo. Calcular (a) el punto más alto

alcanzado por el cohete, (b) el tiempo total que el cohete está en el aire, (c) la velocidad del cohete justo antes de chocar contra el suelo.

**88** ●● **RESOLVE** Una maceta cae desde una repisa de un edificio de apartamentos. Una persona de un apartamento inferior que dispone de un cronómetro, observa que la maceta tarda 0,2 s en pasar a través de su ventana que tiene 4 m de altura. ¿A qué altura sobre el borde superior de la ventana está la repisa de la cual cayó la maceta?

**89** ●● **SSM** En una experiencia de cátedra un cuerpo se desliza a lo largo de una pista de aire inclinada sin rozamiento con una aceleración constante  $a$ . Se le impulsa desde el origen de la pista ( $x = 0$ ) con una velocidad inicial  $v_0$ . En el instante  $t = 8$  s se encuentra en  $x = 100$  cm y se mueve a lo largo de la pista con velocidad  $v = -15$  cm/s. Determinar la velocidad inicial  $v_0$  y la aceleración  $a$ .

**90** ●● Una piedra que cae de lo alto de un acantilado recorre un tercio de su distancia total al suelo en el último segundo de su caída. ¿Qué altura tiene el acantilado?

**91** ●● Un automóvil tiene una desaceleración máxima de unos  $7 \text{ m/s}^2$ ; el tiempo de reacción típico para aplicar los frenos es de 0,50 s. Un cartel indica que la velocidad límite en una zona escolar debe cumplir la condición de que todos los coches puedan detenerse en una distancia de frenado de 4 m. (a) ¿Qué velocidad máxima puede alcanzar en esa zona un automóvil típico? (b) ¿Qué fracción de los 4 m corresponde al tiempo de reacción?

**92** ●● Dos trenes se acercan uno al otro sobre vías adyacentes. Inicialmente están en reposo con una separación de 40 m. El tren de la izquierda acelera hacia la derecha a  $1,4 \text{ m/s}^2$ . El tren de la derecha acelera hacia la izquierda a  $2,2 \text{ m/s}^2$ . ¿Qué distancia recorre el tren de la izquierda antes de que se produzca el cruce de ambos?

**93** ●● Dos piedras se dejan caer desde el borde de un acantilado de 60 m. La segunda piedra se deja caer 1,6 s después de la primera. ¿Qué distancia ha recorrido la segunda piedra cuando la separación entre ambas es de 36 m?

**94** ●● **SSM** Un policía motorista escondido en un cruce de calles observa que un coche no respeta la señal de parada, cruza la intersección y continúa a velocidad constante. El policía emprende su persecución 2,0 s después que el coche sobrepasa la señal, acelera a  $6,2 \text{ m/s}^2$  y alcanza una velocidad de  $110 \text{ km/h}$ ; continúa con esta velocidad hasta que alcanza al coche infractor. En ese instante, el coche se encuentra a  $1,4 \text{ km}$  del cruce. ¿Qué velocidad llevaba el coche?

**95** ●● **RESOLVE** En el instante  $t = 0$  se deja caer una piedra desde un acantilado sobre un lago; 1,6 s más tarde, otra piedra se lanza hacia abajo desde el mismo punto con una velocidad inicial de  $32 \text{ m/s}$ . Ambas piedras chocan con el agua al mismo tiempo. Determinar la altura del acantilado.

**96** ●●● **RESOLVE** Un tren de pasajeros circula a  $29 \text{ m/s}$  cuando el conductor ve delante de él un tren de carga a  $360 \text{ m}$  de distancia por la misma vía en la misma dirección. El tren de carga lleva una velocidad de  $6 \text{ m/s}$ . (a) Si el tiempo de reacción del conductor es de  $0,4 \text{ s}$ , ¿cuál debe ser la desaceleración del tren de pasajeros para evitar la colisión? (b) Si su respuesta es la desaceleración máxima que puede realizar el tren de pasajeros, pero el tiempo de reacción del conductor es de  $0,8 \text{ s}$ , ¿cuál será entonces la velocidad relativa de los dos trenes en el instante de la colisión y qué distancia habrá recorrido el tren de pasajeros desde que el conductor divisó el tren de carga hasta que se produjo el choque?

**97** ● Para intentar estudiar los efectos de la gravedad un estudiante lanza un pequeño proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad  $300 \text{ m/s}$ . Despreciando el rozamiento con el aire, ¿cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?

**98** ● **SSM** Al final de *Charlie y la fábrica de chocolate*, Willie Wonka acciona un botón que lanza el enorme ascensor de cristal fuera de la fábrica a través del tejado. (a) Si el ascensor alcanza la altura máxima de  $10 \text{ km}$  por encima del tejado de la fábrica, ¿cuál era la velocidad que llevaba el artefacto en el momento de atravesar el tejado? Despreciar la resistencia del aire, aunque en este caso tenga poco sentido ignorarla. (b) Supóngase que la velocidad del ascensor después de romper el tejado y atravesarlo era la mitad de la que tenía antes de chocar con el techo. Suponiendo que inició su movimiento

desde el reposo y que el tejado de la fábrica está a  $150 \text{ m}$  por encima del suelo, ¿qué aceleración uniforme le hizo falta para alcanzar aquella velocidad?

**99** ●● Algunos elatéridos (insectos coleópteros) pueden proyectarse verticalmente por sí mismos con una aceleración de unos  $400g$  (un orden de magnitud superior del que un ser humano puede resistir). Los elatéridos saltan “desdoblado” sus patas, que tienen una longitud aproximada de  $d = 0,6 \text{ cm}$ . ¿A qué altura pueden saltar? ¿Cuánto tiempo permanecen en el aire? (Suponer la aceleración constante mientras está en contacto con el suelo y despreciar la resistencia del aire.)

**100** ● **RESOLVE** ✓ Una prueba de un prototipo de un nuevo automóvil muestra que la distancia mínima para una parada controlada a  $98 \text{ km/h}$  es de  $50 \text{ m}$ . Determinar la aceleración (supuesta constante) y expresar la respuesta como una fracción de la aceleración de la gravedad. ¿Cuánto tiempo tarda en pararse?

**101** ●● **SSM** Consideremos el movimiento de una partícula que experimenta un movimiento de caída libre con aceleración constante. Antes de disponer de los modernos sistemas de adquisición de datos informatizados, el experimento de caída libre de un objeto, como por ejemplo, un disco de hockey, se realizaba usando una cinta teñida colocada verticalmente junto a la trayectoria de caída del disco conductor. Con el uso de un generador de alto voltaje se hacía saltar una chispa, a intervalos regulares de tiempo, entre dos conductores paralelos en el punto donde se encontraba el disco gracias a sus propiedades conductoras. De este modo en la cinta quedaba registrada la posición del disco a intervalos de tiempo sucesivos. Mostrar que la posición del disco seguía la *Regla de Galileo de los números extraños*  $\Delta y_{21} = 3\Delta y_{10}$ ,  $\Delta y_{32} = 5\Delta y_{10}$ , ... donde  $\Delta y_{10}$  es el cambio en  $y$  durante el primer intervalo de tiempo  $\Delta t$ ,  $\Delta y_{21}$  es el cambio en  $y$  durante el segundo intervalo de duración  $\Delta t$ , etc.

**102** ●● Una partícula se mueve con aceleración constante de  $3 \text{ m/s}^2$ . En el instante  $t = 4 \text{ s}$ , está en  $x = 100 \text{ m}$ ; en  $t = 6 \text{ s}$  posee una velocidad  $v = 15 \text{ m/s}$ . Determinar su posición en  $t = 6 \text{ s}$ .

**103** ●● **SSM** **RESOLVE** ✓ Un avión que aterriza en una pequeña isla tropical dispone de una pista de  $70 \text{ m}$  para parar. Si su velocidad inicial es de  $60 \text{ m/s}$ , (a) ¿cuál será la aceleración del avión durante el aterrizaje, supuesta constante? (b) ¿Cuánto tiempo tardará en detenerse con esta aceleración?

**104** ●● **RESOLVE** ✓ Un automóvil acelera desde el reposo a  $2 \text{ m/s}^2$  durante  $20 \text{ s}$ . La velocidad se mantiene entonces constante durante  $20 \text{ s}$ , después de los cuales experimenta una aceleración de  $-3 \text{ m/s}^2$  hasta que se detiene. ¿Cuál es la distancia total recorrida?

**105** ●● **SSM** **RESOLVE** Si fuera posible diseñar una nave espacial que pudiera mantener una aceleración constante de forma indefinida, los viajes a los planetas del Sistema Solar serían cuestión de días o semanas, y los viajes a estrellas próximas se podrían llevar a cabo en pocos años. (a) Demostrar que  $g$ , el módulo de la aceleración de caída libre en la Tierra, es aproximadamente  $1 \text{ c-año/año}^2$  ( $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Véase en el problema 52 la definición de año luz). (b) Usando los datos que aparecen en las tablas al final del libro, determinar el tiempo que se invertiría para ir desde la Tierra a Marte (Marte es el planeta más cercano a la Tierra) suponiendo que una nave parte del reposo, sigue una trayectoria recta, acelera durante media trayectoria a  $g$ , se da la vuelta y el resto del viaje desacelera a  $g$ .

**106** ● **RESOLVE** ✓ La Stratosphere Tower de Las Vegas es un edificio de  $293,35 \text{ m}$  de altura. Un ascensor rápido invierte 1 minuto y 20 segundos en subir desde la planta baja hasta el último piso del edificio. Suponiendo que el ascensor mantiene una aceleración constante, encontrar su valor expresándolo en función de la aceleración de la gravedad.

**107** ●● **RESOLVE** ✓ Un tren sale de una estación con una aceleración de  $0,4 \text{ m/s}^2$ . Una pasajera llega corriendo al andén  $6,0 \text{ s}$  después de que el tren haya iniciado la marcha. ¿Cuál es la velocidad constante mínima con que debe correr la pasajera para poder alcanzar al tren? Confeccione un esquema de las curvas del movimiento del tren y de la pasajera en función del tiempo.

**108** ●●● Una bola A se suelta desde lo más alto de un edificio en el mismo instante en que otra bola B se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo. Cuando las bolas se encuentran, ambas se mueven en sentido contrario y la

velocidad de la bola A es dos veces la velocidad de la bola B. ¿En qué fracción de la altura del edificio ocurre el encuentro?

**109** ●●● Resuelva el problema 108 si la colisión ocurre cuando las dos bolas se mueven en el mismo sentido y la velocidad de A es 4 veces la velocidad de B.

**110** ●● SSM Un metro parte de una estación y acelera desde el reposo con una aceleración de  $1,0 \text{ m/s}^2$  hasta la mitad de la distancia que le separa de la siguiente estación; después, desacelera con el mismo ritmo durante la segunda mitad del trayecto. La distancia total entre estaciones es de 900 m. (a) Representar gráficamente la velocidad  $v$  en función del tiempo a lo largo de todo el recorrido. (b) Representar gráficamente la distancia recorrida en función del tiempo para todo el viaje. Dar valores numéricos apropiados a lo largo de ambos ejes.

**111** ●● **ESDNE** Un coche de policía pretende alcanzar a un coche que marcha a  $125 \text{ km/h}$ . La velocidad máxima del coche de policía es de  $190 \text{ km/h}$ , y arranca desde el reposo con aceleración constante de  $8 \text{ km/h} \cdot \text{s}$ , hasta que su velocidad alcanza los  $190 \text{ km/h}$  y luego prosigue con velocidad constante. (a) ¿Cuándo alcanzará al otro coche si se pone en marcha al pasar éste junto a él? (b) ¿Qué espacio habrán recorrido entonces ambos coches? (c) Hacer un gráfico de  $x(t)$  para cada coche.

**112** ●● Cuando el coche de policía del problema 111 (marchando a  $190 \text{ km/h}$ ) está a 100 metros detrás del otro coche (que marcha a  $125 \text{ km/h}$ ) éste observa que le siguen y acciona los frenos bloqueando las ruedas. (a) Suponiendo que cada coche pueda frenar con una aceleración negativa de  $6 \text{ m/s}^2$  y que el conductor del coche de policía frena tan pronto como ve encenderse las luces de freno del coche que persigue, es decir, sin tiempo muerto de reacción, demostrar que los coches chocan. (b) ¿En qué momento chocan contando a partir del instante que empiezan a frenar? (c) Analizar cómo el tiempo de reacción afecta la resolución de este problema.

**113** ●● Necesitando urgentemente el premio en metálico, Lou se apunta a una competición de automóviles en la cual el coche del concursante comienza y termina la prueba parado, recorriendo una distancia  $L$  en el tiempo más corto posible. Hay que demostrar destreza mecánica y ser buen conductor, así como consumir la mayor cantidad de combustibles fósiles en el menor tiempo posible. La carrera está diseñada de modo que las velocidades máximas de los automóviles no se alcanzan nunca. (a) Si el coche de Lou posee una aceleración máxima  $a$  y una desaceleración máxima  $2a$ , ¿en qué fracción de  $L$  debe Lou mover su pie desde el pedal del acelerador al pedal del freno? (b) ¿Qué fracción de tiempo utilizado en el trayecto total ha transcurrido hasta este momento?

**114** ●● **ESDNE** Una profesora de física prueba su paracaídas anti-gravedad saltando con velocidad inicial cero desde un helicóptero situado a 575 m de altura. Durante 8 s la profesora se mueve en caída libre; inmediatamente después abre el paracaídas de modo que frena con una aceleración de  $15 \text{ m/s}^2$  hasta que su velocidad de caída se sitúa en  $5 \text{ m/s}$ , que es cuando ajusta los controles de modo que se mantenga esta velocidad hasta llegar al suelo. (a) En una única figura, dibuje la aceleración y la velocidad de la profesora en función del tiempo. (Considerar positivo el sentido hacia arriba.) (b) ¿Cuál es su velocidad transcurridos los primeros 8 s del salto? (c) ¿Durante cuánto tiempo está frenando? (d) ¿Qué distancia recorre mientras su velocidad disminuye? (e) ¿Cuál es el tiempo invertido en todo el salto? (f) ¿Cuál es la velocidad media durante el salto completo?

## Integración y ecuaciones de movimiento

**115** ● SSM La velocidad de una partícula viene dada por  $v(t) = (6 \text{ m/s}^2)t + (3 \text{ m/s})$ . (a) Hacer un gráfico de  $v$  en función de  $t$  y hallar el área limitada por la curva en el intervalo de  $t = 0 \text{ s}$  a  $t = 5 \text{ s}$ . (b) Hallar la función de posición  $x(t)$ . Utilizarla para calcular el desplazamiento durante el intervalo de  $t = 0$  a  $t = 5 \text{ s}$ .

**116** ● La figura 2.35 muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo. (a) ¿Cuál es el valor en metros del área del rectángulo señalado? (b) Hallar el recorrido de la partícula para los intervalos de  $1 \text{ s}$  que empiezan a partir

de  $t = 1 \text{ s}$  y  $t = 2 \text{ s}$ . (c) ¿Cuál es la velocidad media para el intervalo  $1 \text{ s} \leq t \leq 3 \text{ s}$ ? (d) La ecuación de la curva es  $v = (0,5 \text{ m/s}^3)t^2$ . Determinar el desplazamiento de la partícula en el intervalo  $1 \text{ s} \leq t \leq 3 \text{ s}$  por integración y comparar la respuesta con la del apartado (b). En este caso, ¿la velocidad media es igual a la suma de las velocidades inicial y final?

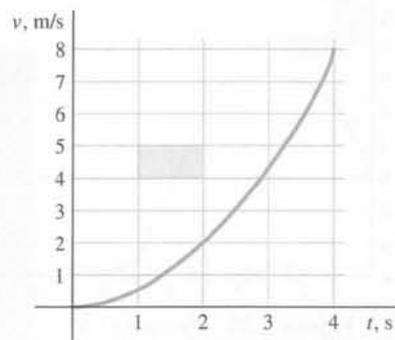


Figura 2.35 Problema 116

**117** ●● SSM La velocidad de una partícula en metros por segundo viene dada por  $v = (7 \text{ m/s}^3)t^2 - 5 \text{ m/s}$ , donde  $t$  se expresa en segundos y  $v$  en metros por segundo. Si la partícula sale del origen,  $x_0 = 0$  cuando  $t_0 = 0$ , hallar la función posición general  $x(t)$ .

**118** ●● Considere el gráfico de la figura 2.36. Suponiendo que  $x = 0$  cuando  $t = 0$ , escriba las expresiones algebraicas correctas para  $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ , con los valores apropiados de todas las constantes.

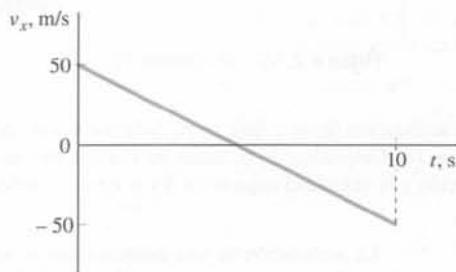


Figura 2.36 Problema 118

**119** ●●● La figura 2.37 muestra la aceleración de una partícula en función del tiempo. (a) ¿Cuál es el valor del área del rectángulo señalado? (b) La partícula parte del reposo a  $t = 0$ . Hallar la velocidad en los tiempos  $t = 1, 2$  y  $3 \text{ s}$  contando los cuadrados bajo la curva. (c) Hacer un gráfico  $v(t)$  a partir de los resultados de la parte (b) y hallar un valor estimado de la distancia recorrida por la partícula en el intervalo de  $t = 0$  a  $t = 3 \text{ s}$ .

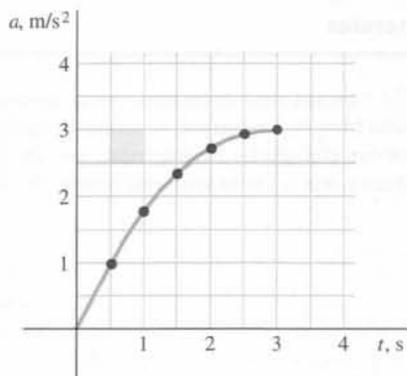


Figura 2.37 Problema 119

**120** ●● La figura 2.38 muestra un gráfico  $v$  en función de  $t$  para una partícula que se mueve sobre una recta. La posición de la misma en el instante  $t_0 = 0$  es  $x_0 = 5$  m. (a) Hallar  $x$  para varios tiempos  $t$  contando cuadrados y dibujar  $x$  en función de  $t$ . (b) Hacer un dibujo aproximado de la aceleración  $a$  en función de  $t$ .

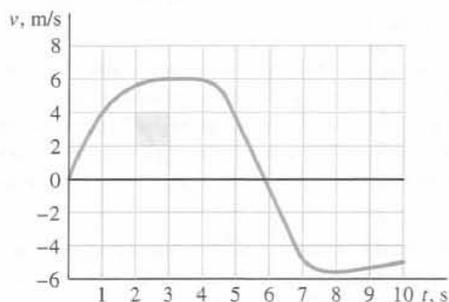


Figura 2.38 Problema 120

**121** ●● SSM La figura 2.39 muestra un gráfico de  $x$  en función de  $t$  para un cuerpo que se mueve en línea recta. Dibujar gráficos aproximados de  $v$  en función de  $t$  y  $a$  en función de  $t$  para este movimiento.

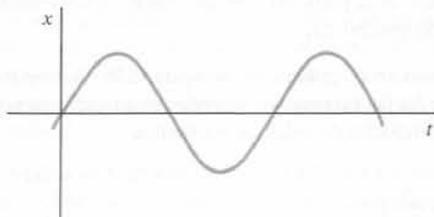


Figura 2.39 Problema 121

**122** ●● La aceleración de un cohete viene dada por  $a = bt$ , donde  $b$  es una constante positiva. (a) Determinar la posición en función del tiempo  $x(t)$ . (b) Calcular la posición y la velocidad cuando  $t = 5$  s si  $x = 0$  y  $v = 0$  cuando  $t = 0$ , y si  $b = 3 \text{ m/s}^3$ .

**123** ●● **SOLVE** La aceleración de una partícula que se mueve en una dimensión durante el intervalo de tiempo comprendido entre 0,0 y 10,0 s viene dada por  $a = (0,20 \text{ m/s}^3)t$ . Si la partícula inicia su movimiento desde el reposo y en el origen, (a) calcular primero su *velocidad instantánea* en cualquier instante de tiempo comprendido dentro del intervalo indicado. (b) Calcular su *velocidad media* durante el intervalo de tiempo entre 2,0 s y 7,0 s.

**124** ● Considere el movimiento de una partícula que está sometida a una aceleración no constante  $a$  dada por  $a = a_0 + bt$ , donde  $a_0$  y  $b$  son constantes. (a) Calcular la velocidad instantánea en función del tiempo. (b) Determinar la posición en función del tiempo. (c) Calcular la velocidad media en el mismo intervalo de tiempo, entre un tiempo inicial 0 y un tiempo final arbitrario  $t$ .

### Problemas generales

**125** ●●● **SOLVE** En una clase de ciencias, con el objetivo de determinar la aceleración de caída libre de los cuerpos, se monta el siguiente dispositivo experimental: se colocan dos células fotoeléctricas, una en el borde de una mesa de 1,0 m de altura y otra 0,5 m exactamente debajo. Se suelta una canica

desde el borde de la mesa de modo que, cuando pasa por la primera célula, pone en marcha el reloj y, cuando pasa por la segunda, lo para. El valor de la aceleración de caída libre  $g$  se determina mediante la expresión  $g_{\text{exp}} = (1 \text{ m})/\Delta t^2$ , donde  $\Delta t$  es el tiempo medido por el cronómetro. Un estudiante poco cuidadoso coloca la primera célula 0,5 cm por debajo de la mesa. (Suponga que la segunda célula está bien colocada.) ¿Qué valor de  $g_{\text{exp}}$  obtendrá? ¿Qué porcentaje de diferencia habrá entre el valor obtenido y el valor común de esta magnitud al nivel del mar?

**126** ●●● SSM La posición de un cuerpo que oscila sobre un muelle viene dada por  $x = A \sin \omega t$ , en donde  $A$  y  $\omega$  son constantes de valores  $A = 5$  cm y  $\omega = 0,175 \text{ s}^{-1}$ . (a) Representar  $x$  en función de  $t$  para  $0 \leq t \leq 36$  s. (b) Medir la pendiente del gráfico en  $t = 0$  para determinar la velocidad en ese instante. (c) Calcular la velocidad media para una serie de intervalos que comienzan en  $t = 0$  y terminan en  $t = 6, 3, 2, 1, 0,5$  y  $0,25$  s. (d) Calcular  $dx/dt$  y determinar la velocidad en el instante  $t = 0$ . Comparar los resultados con los apartados (c) y (d).

**127** ●●● **SOLVE** Considere un objeto cuyo motor le da una velocidad descrita por la ecuación  $v = v_{\text{máx}} \sin(\omega t)$ , donde  $\omega$  se expresa en radianes/s. (a) ¿Cuál es la aceleración del objeto? ¿Es constante? (b) Cuando  $t = 0$ , la posición es  $x_0$ . ¿Cuál es la posición en función del tiempo?

**128** ●●● Suponga que la aceleración de una partícula es una función de  $x$ , donde  $a(x) = (2 \text{ s}^{-2})x$ . (a) Si la velocidad cuando  $x = 1$  m es cero, ¿cuál es la velocidad de la partícula en  $x = 3$  m? (b) ¿Cuánto tiempo invierte la partícula en moverse desde  $x = 1$  m hasta  $x = 3$  m?

**129** ●●● Suponga que una partícula se mueve en una línea recta de forma que, en cada instante de tiempo, su posición y su velocidad tienen el mismo valor numérico expresado en unidades del SI. (a) Exprese la posición en función del tiempo. (b) Demuestre que en cada instante de tiempo la aceleración tiene el mismo valor numérico que la posición y la velocidad.

**130** ●●● Una piedra se hunde en el agua con una aceleración que decrece exponencialmente con el tiempo según  $a(t) = ge^{-bt}$ , donde  $b$  es una constante positiva que depende de la forma y del tamaño de la piedra y de las propiedades físicas del agua. Basándose en este resultado, deduzca una expresión para la posición de la piedra en función del tiempo, suponiendo que su velocidad inicial es cero.

**131** ●●● SSM En el problema 130 una piedra cae en el agua con una aceleración que viene dada por  $a(t) = ge^{-bt}$ , donde  $b$  es una constante positiva. En física, habitualmente, se suele conocer la aceleración en función de la posición o de la velocidad, pero no se suele tener información sobre la aceleración en función del tiempo. Supongamos que la función que nos da la aceleración en función de la *velocidad* es  $a = g - bv$  donde  $g$  es el módulo de la aceleración de la gravedad y  $v$  es la velocidad de la piedra. Demuestre que, si la piedra parte del reposo, la función que da la aceleración en función del tiempo es la que se da al comienzo del problema.

**132** ●●● La aceleración de un paracaidista que se lanza al vacío desde un avión viene dada, antes de abrir el paracaídas, por la fórmula  $a = g - cv^2$ , donde  $c$  es una constante que depende del área transversal de la saltadora y de la densidad de la atmósfera que la rodea. (a) Si su velocidad inicial en el momento del salto es 0, demostrar que su velocidad en función del tiempo sigue la fórmula  $v(t) = v_t \tanh(t/T)$ , donde  $v_t$  es la velocidad límite ( $v_t = \sqrt{g/c}$ ) y  $T = v_t/g$  es la escala que determina cuánto tiempo le cuesta alcanzar la velocidad terminal. (b) Use un programa de una hoja de cálculo para representar  $v(t)$  en función del tiempo, usando una velocidad terminal de 56 m/s (use este valor para calcular  $c$  y  $T$ ). ¿Tiene sentido la curva resultante?

# MOVIMIENTO EN DOS Y TRES DIMENSIONES



Los barcos a vela no navegan en línea recta hacia su destino sino que siguen una trayectoria en zig-zag contra el viento. El barco de la foto que se dirige hacia un puerto situado hacia el sudeste navega primero hacia el este, después hacia el sur para acabar torciendo finalmente hacia el este.

¿Cómo podemos calcular el desplazamiento y la velocidad medias? (Véase el ejemplo 3.3.)

*E*n este capítulo extenderemos las ideas del capítulo anterior a dos y tres dimensiones. Para llevar a cabo esta extensión, introduciremos los vectores y mostraremos cómo se usan para analizar y describir el movimiento.

El objetivo principal de este capítulo es desarrollar el concepto del vector aceleración, un concepto fundamental para el desarrollo de las leyes de Newton en los capítulos 4 y 5.

## 3.1 El vector desplazamiento

Cuando hay movimiento, el desplazamiento de una partícula tiene una dirección en el espacio y un módulo. La magnitud que expresa la dirección y la distancia en línea recta comprendida entre dos puntos del espacio es un segmento lineal llamado **vector desplazamiento**. Se representa gráficamente por una flecha cuya dirección es la misma que la del vector desplazamiento y cuya longitud es proporcional al módulo del vector desplazamiento. Designaremos los vectores con letras negritas, como en  $\mathbf{A}$ . (Cuando se escribe a mano, un vector se indica mediante una flecha sobre el símbolo considerado, por ejemplo,  $\vec{A}$ .) El módulo de  $\mathbf{A}$  se escribe  $|\mathbf{A}|$  o simplemente  $A$  y, por ejemplo, el módulo del vector desplazamiento tiene dimensiones de longitud. El módulo de un vector no puede ser negativo.

## Capítulo

# 3

- 3.1 El vector desplazamiento
- 3.2 Propiedades generales de los vectores
- 3.3 Posición, velocidad y aceleración
- 3.4 Primer caso particular: movimiento de proyectiles
- 3.5 Segundo caso particular: movimiento circular

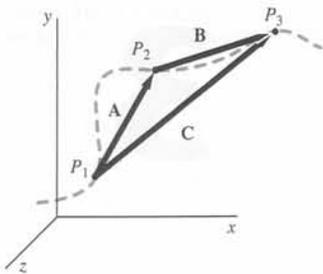


Figura 3.1

### Suma de vectores desplazamiento

La figura 3.1 muestra la trayectoria de una partícula que se mueve desde el punto  $P_1$  hasta un segundo punto  $P_2$  y luego a un tercer punto  $P_3$ . El desplazamiento de  $P_1$  a  $P_2$  viene representado por el vector  $A$  y el desplazamiento de  $P_2$  a  $P_3$  por  $B$ . Obsérvese que el vector desplazamiento depende sólo de los puntos extremos y no de la trayectoria real de la partícula. El desplazamiento resultante de  $P_1$  a  $P_3$ , llamado  $C$ , es la suma de los dos desplazamientos sucesivos  $A$  y  $B$ :

$$C = A + B \quad (3.1)$$

Dos vectores desplazamiento se suman gráficamente situando el origen de uno en el extremo del otro (figura 3.2). El vector resultante se extiende desde el origen del primer vector al extremo final del segundo. Obsérvese que  $C$  no es igual a  $A + B$  a menos que  $A$  y  $B$  estén en la misma dirección. Es decir  $C = A + B$  no implica que  $C = A + B$ .

Una forma equivalente de sumar vectores es el llamado **método del paralelogramo**, que consiste en desplazar  $B$  hasta que coincida su origen con el de  $A$ . La diagonal del paralelogramo formado por  $A$  y  $B$  es igual a  $C$ . Como puede verse en la figura 3.3, no existe diferencia en el orden en que sumemos los vectores; es decir  $A + B = B + A$ .

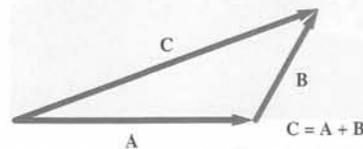


Figura 3.2 Método para la suma de vectores que consiste en situar los dos vectores uno a continuación del otro.

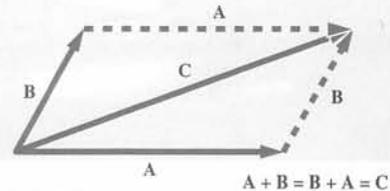


Figura 3.3 Método del paralelogramo para la suma de vectores.

### EJEMPLO 3.1 | Desplazamiento

Una persona se mueve 3 km hacia el este y luego 4 km hacia el norte. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?

**Planteamiento del problema** Los dos desplazamientos componentes y el desplazamiento resultante se muestran en la figura 3.4. Como  $A$  y  $B$  forman un ángulo recto entre sí y  $C = A + B$  es la hipotenusa del correspondiente triángulo rectángulo, el módulo  $C$  puede hallarse mediante el teorema de Pitágoras. La dirección de  $C$  se obtiene por trigonometría.

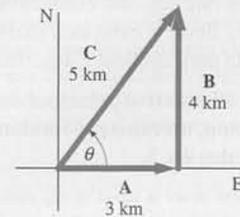


Figura 3.4

1. El módulo del desplazamiento resultante está relacionado con los módulos de los dos desplazamientos por el teorema de Pitágoras:

$$C^2 = A^2 + B^2 \\ = (3 \text{ km})^2 + (4 \text{ km})^2 = 25 \text{ km}^2$$

y de aquí

$$C = \sqrt{25 \text{ km}^2} = 5 \text{ km}$$

2. Sea  $\theta$  el ángulo que forma el eje de dirección este con el desplazamiento  $C$ . Según sea la figura podemos determinar  $\text{tg } \theta$  y basta utilizar una calculadora con funciones trigonométricas para obtener  $\theta$ :

$$\text{tg } \theta = \frac{B}{A}$$

y de aquí

$$\theta = \text{arctg } \frac{B}{A} = \text{arctg } \frac{4 \text{ km}}{3 \text{ km}} = 53,1^\circ$$

**Observación** Un vector viene descrito por su módulo y dirección. En este ejemplo el desplazamiento resultante es un vector de longitud 5 km en una dirección  $53,1^\circ$  al norte del este.

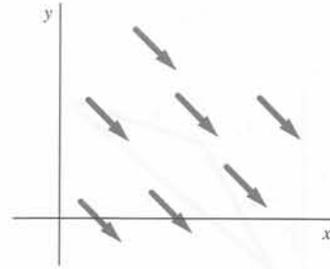
## 3.2 Propiedades generales de los vectores

En física existen muchas magnitudes que poseen módulo y dirección, y se suman como los desplazamientos. Son ejemplos la velocidad, la aceleración, el momento lineal y la fuerza. Estas magnitudes se llaman **vectores**. Las magnitudes que carecen de dirección asociada —por ejemplo, la distancia y el módulo de la velocidad— se denominan **escalares**.

Los vectores son magnitudes con módulo, dirección y sentido que se suman como los desplazamientos.

### DEFINICIÓN —VECTORES

Un vector se representa gráficamente por una flecha cuya dirección es la misma que la del vector y cuya longitud es proporcional al módulo del vector. Cuando se expresa el módulo de un vector, debe venir acompañado de sus unidades. Así, el módulo del vector velocidad se expresa en metros por segundo. Dos vectores son iguales cuando tienen el mismo módulo y la misma dirección. Gráficamente esto significa que tienen la misma longitud y son paralelos el uno al otro. Una consecuencia de esta definición es que si un vector se mueve manteniéndose paralelo a sí mismo, no se modifica. Así todos los vectores de la figura 3.5 son iguales. Si trasladamos o giramos el sistema de coordenadas, todos los vectores de la figura 3.5 permanecen iguales. Un vector no depende del sistema de coordenadas utilizado para su representación (excepto los vectores de posición, que introduciremos en la sección 3.3).



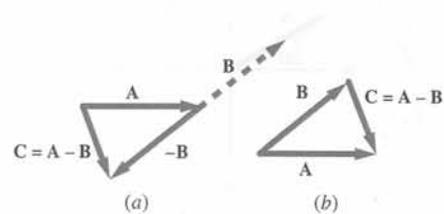
**Figura 3.5** Los vectores son iguales si sus módulos y direcciones son los mismos. Todos los vectores de esta figura son iguales.

### Producto de un vector por un escalar

Un vector **A** multiplicado por un escalar  $s$  es el vector  $\mathbf{B} = s\mathbf{A}$ , que tiene módulo  $|s|A$  y es paralelo a **A** si  $s$  es positivo, y antiparalelo a **A** si  $s$  es negativo. Así, el vector  $-\mathbf{A}$  tiene el mismo módulo que **A**, pero apunta en dirección opuesta, de modo que  $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$ . Las dimensiones de  $s\mathbf{A}$  son las de  $s$  multiplicadas por las de **A**.

### Resta de vectores

Para restar el vector **B** del vector **A** basta sumarle  $-\mathbf{B}$ . El resultado es  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{A} - \mathbf{B}$  (figura 3.6a). Otro método equivalente de restar **B** de **A** es unir sus orígenes y trazar el vector **C** de **B** a **A**. Es decir, **C** es el vector que debe sumarse a **B** para obtener el vector resultante **A** (figura 3.6b). Las reglas de sumar o restar dos vectores cualesquiera, tales como dos vectores velocidad o dos vectores aceleración, son las mismas que las utilizadas para los desplazamientos.



**Figura 3.6**

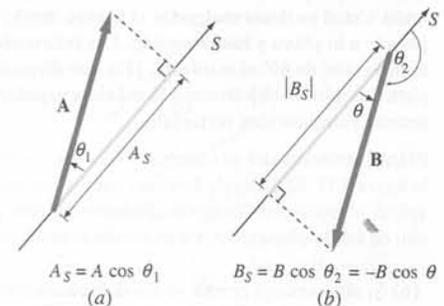
### Componentes de los vectores

La componente de un vector a lo largo de una línea en el espacio es la longitud de la proyección del vector sobre dicha línea. Se obtiene trazando una línea perpendicular desde el extremo o flecha de un vector a la línea, como indica la figura 3.7. El signo de la componente es positivo si la proyección de la punta del vector se encuentra en la dirección positiva con relación a su origen. Las componentes de un vector a lo largo de las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , ilustradas en la figura 3.8 para un vector en el plano  $xy$ , se denominan componentes rectangulares. Obsérvese que las componentes de un vector dependen del sistema de coordenadas utilizado para su representación, aunque el mismo vector no dependa de ello.

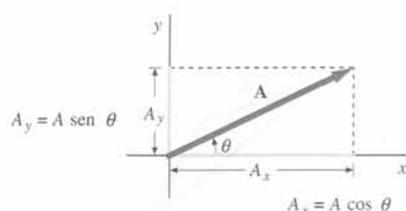
Las componentes rectangulares son útiles para la suma o resta de vectores. Si  $\theta$  es el ángulo comprendido entre **A** y el eje  $x$ , resulta

$$A_x = A \cos \theta \quad (3.2)$$

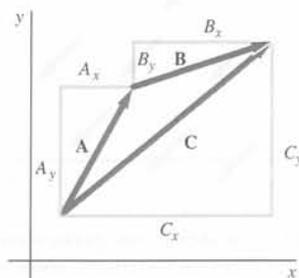
COMPONENTE X DE UN VECTOR



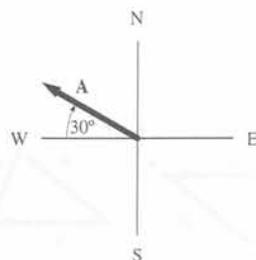
**Figura 3.7** Definición de la componente de un vector. La componente del vector **A** en la dirección positiva de  $S$  es  $A_s$ , y  $A_s$  es positiva. La componente del vector **B** en la dirección positiva de  $S$  es  $B_s$ , y  $B_s$  es negativa.



**Figura 3.8** Componentes rectangulares de un vector.  $A_x = A \cos \theta$ ,  $A_y = A \sin \theta$ .



**Figura 3.9**



**Figura 3.10**

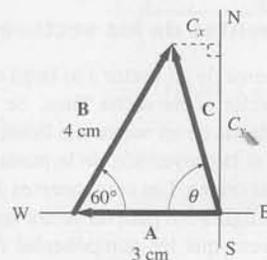
### EJEMPLO 3.2 | El mapa del tesoro

Suponga que usted trabaja como animador en un centro turístico en una isla tropical. Dispone de un mapa que le indica las direcciones a seguir para enterrar un tesoro en un lugar determinado. Usted no desea malgastar el tiempo dando vueltas por la isla, porque quiere acabar pronto para ir a la playa y hacer surfing. Las instrucciones son ir 3 km hacia el oeste y luego 4 km en la dirección de  $60^\circ$  al nordeste. ¿En qué dirección debe moverse y cuánto tendrá que caminar para cumplir su objetivo con la máxima rapidez? Encuentre la respuesta (a) gráficamente y (b) usando componentes vectoriales

**Planteamiento del problema** Hay que encontrar la resultante del desplazamiento, que es C en la figura 3.11. El triángulo formado por los tres vectores no es rectangular, de modo que no podemos aplicar el teorema de Pitágoras. Podemos obtener gráficamente la resultante dibujando a escala cada uno de los desplazamientos y midiendo el desplazamiento resultante.

- (a) Si dibujamos el primer vector desplazamiento A de 3 cm de largo y el segundo B de 4 cm de largo, encontraremos que el vector resultante C es de unos 3,5 cm de longitud. Así, el módulo del desplazamiento resultante es de 3,5 km. El ángulo  $\theta$  formado por el desplazamiento resultante y la dirección oeste puede medirse con un transportador angular. Por lo tanto, debe andar 3,5 km a  $75^\circ$ .

### ¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!



**Figura 3.11**

y

$$A_y = A \sin \theta \quad (3.3)$$

COMPONENTE Y DE UN VECTOR

en donde  $A$  es el módulo de  $\mathbf{A}$ .

Si conocemos  $A_x$  y  $A_y$ , podemos obtener el ángulo  $\theta$  a partir de

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_y}{A_x}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{A_y}{A_x} \quad (3.4)$$

y el módulo  $A$  a partir del teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (3.5a)$$

En tres dimensiones,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (3.5b)$$

Las componentes pueden ser positivas o negativas. Por ejemplo, si  $\mathbf{A}$  apunta en la dirección negativa de  $x$ ,  $A_x$  es negativa.

Consideremos dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  en el plano  $xy$ . Las componentes rectangulares de cada vector y las de la suma  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  se muestran en la figura 3.9. Como puede verse, la ecuación vectorial  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  es equivalente a las dos ecuaciones de las componentes:

$$C_x = A_x + B_x \quad (3.6a)$$

y

$$C_y = A_y + B_y \quad (3.6b)$$

**Ejercicio** Un coche recorre 20 km en dirección  $30^\circ$  al norte del oeste. Se supone que el eje  $x$  apunta al este y el eje  $y$  al norte, como en la figura 3.10. Determinar las componentes  $x$  e  $y$  del vector desplazamiento del coche. (Respuesta  $A_x = -17,3$  km,  $A_y = +10$  km.)

(b) 1. Para resolver el problema utilizando las componentes vectoriales, sea **A** el primer desplazamiento y elegimos el eje *x* positivo en la dirección este y el eje *y* positivo en la dirección norte. Calculamos  $A_x$  y  $A_y$  de las ecuaciones 3.2 y 3.3:

$$A_x = -3 \text{ km} \quad \text{y} \quad A_y = 0$$

2. De igual modo calculemos las componentes del segundo desplazamiento **B**:

$$B_x = (4 \text{ km}) \cos 60^\circ = 2 \text{ km}$$

$$B_y = (4 \text{ km}) \sin 60^\circ = 3,46 \text{ km}$$

3. Las componentes del desplazamiento resultante  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  se obtienen por suma:

$$C_x = A_x + B_x = -3 \text{ km} + 2 \text{ km} = -1 \text{ km}$$

$$C_y = A_y + B_y = 0 + 2\sqrt{3} \text{ km} = 3,46 \text{ km}$$

4. El teorema de Pitágoras nos permite obtener la magnitud de **C**:

$$C^2 = C_x^2 + C_y^2 = (-1 \text{ km})^2 + (2\sqrt{3} \text{ km})^2 = 13,0 \text{ km}^2$$

$$C = \sqrt{13} \text{ km} = \boxed{3,61 \text{ km}}$$

5. El cociente entre  $C_y$  y  $C_x$  es igual a la tangente del ángulo  $\theta$  entre **C** y la dirección negativa de *x*:

$$\text{tg } \theta = \frac{C_y}{|C_x|}$$

por lo tanto,

$$\theta = \text{arctg} \frac{2\sqrt{3} \text{ km}}{1 \text{ km}} = \text{arctg} (2\sqrt{3})$$

$$= \boxed{74^\circ}$$

**Observaciones** Como el desplazamiento es una magnitud vectorial, la respuesta debe incluir el módulo y la dirección o ambas componentes. En (b) podríamos haber concluido el cálculo en el paso 3, ya que las componentes *x* e *y* definen completamente el vector desplazamiento. Se han convertido en el módulo y la dirección para comparar el resultado con la respuesta a la parte (a). Obsérvese que en el paso 5 de (b) se obtiene un ángulo de  $74^\circ$ . Este resultado está de acuerdo con el de (a) dentro de la exactitud de nuestra medida.

### Vectores unitarios

Un **vector unitario** es un vector *sin dimensiones* de módulo unidad. El vector  $A^{-1}\mathbf{A}$  es un ejemplo de vector unitario que apunta en la dirección de **A**. (A veces, para evitar confusiones, los vectores unitarios se escriben en negritas con un pequeño ángulo en su parte superior; por ejemplo,  $\hat{\mathbf{A}} = A^{-1}\mathbf{A}$ .) Los vectores unitarios que apuntan en las direcciones *x*, *y* y *z* son convenientes para expresar los vectores en función de sus componentes rectangulares. Usualmente se escriben **i**, **j** y **k**, respectivamente. Así, el vector  $A_x\mathbf{i}$  tiene módulo  $A_x$  y apunta en la dirección *x* positiva si  $A_x$  es positiva (o la dirección *x* negativa si  $A_x$  es negativo). Un vector **A** en general puede escribirse como suma de tres vectores, cada uno de ellos paralelo a un eje coordenado (figura 3.12):

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \quad (3.7)$$

La suma de dos vectores **A** y **B** puede escribirse en función de vectores unitarios en la forma

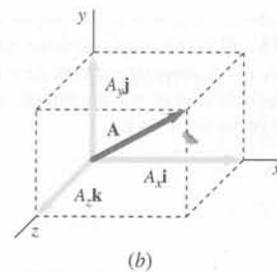
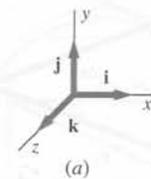
$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Las propiedades generales de los vectores se resumen en la tabla 3.1.

**Ejercicio** Dados dos vectores

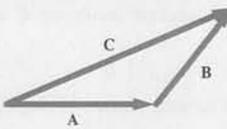
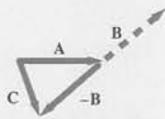
$$\mathbf{A} = (4 \text{ m})\mathbf{i} + (3 \text{ m})\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = (2 \text{ m})\mathbf{i} - (3 \text{ m})\mathbf{j},$$

determinar (a) **A**, (b) **B**, (c)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , y (d)  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ . (Respuestas (a)  $A = 5 \text{ m}$ , (b)  $B = 3,61 \text{ m}$ , (c)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (6 \text{ m})\mathbf{i}$ , (d)  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = (2 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}$ .)



**Figura 3.12** (a) Vectores unitarios **i**, **j** y **k** en un sistema de coordenadas rectangulares. (b) Vector **A** escrito en función de los vectores unitarios:  $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ .

TABLA 3.1 Propiedades de los vectores

Propiedad	Explicación	Figura	Representación de las componentes
Igualdad	$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si $ \mathbf{A}  =  \mathbf{B} $ y sus direcciones y sentidos son iguales		$A_x = B_x$ $A_y = B_y$ $A_z = B_z$
Adición	$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$		$C_x = A_x + B_x$ $C_y = A_y + B_y$ $C_z = A_z + B_z$
Negativo de un vector	$\mathbf{A} = -\mathbf{B}$ si $ \mathbf{B}  =  \mathbf{A} $ y su sentido es opuesto		$A_x = -B_x$ $A_y = -B_y$ $A_z = -B_z$
Sustracción	$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$		$C_x = A_x - B_x$ $C_y = A_y - B_y$ $C_z = A_z - B_z$
Multiplicación por un escalar	$\mathbf{B} = s\mathbf{A}$ tiene el módulo $ \mathbf{B}  = s \mathbf{A} $ y la misma dirección que $\mathbf{A}$ si $s$ es positivo o $-\mathbf{A}$ si $s$ es negativo		$B_x = sA_x$ $B_y = sA_y$ $B_z = sA_z$

### 3.3 Posición, velocidad y aceleración

#### Vectores posición y velocidad

El **vector posición** de una partícula es un vector trazado desde el origen de un sistema de coordenadas hasta la posición de la partícula. Para una partícula en el punto  $(x, y)$  su vector posición  $\mathbf{r}$  es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (3.9)$$

DEFINICIÓN —VECTOR POSICIÓN

La figura 3.13 representa la trayectoria o camino real seguido por la partícula. (No confundir la trayectoria con los gráficos  $x$  en función de  $t$  del capítulo anterior.) En el instante  $t_1$ , la partícula se encuentra en  $P_1$ , y su vector posición es  $\mathbf{r}_1$ ; en el instante  $t_2$  la partícula se ha movido a  $P_2$  y el vector posición es  $\mathbf{r}_2$ . El cambio de posición de la partícula es el vector desplazamiento  $\Delta\mathbf{r}$ :

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (3.10)$$

DEFINICIÓN —VECTOR DESPLAZAMIENTO

El cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  es el **vector velocidad media**.

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \quad (3.11)$$

DEFINICIÓN —VECTOR VELOCIDAD MEDIA

Este vector apunta en la dirección del desplazamiento.

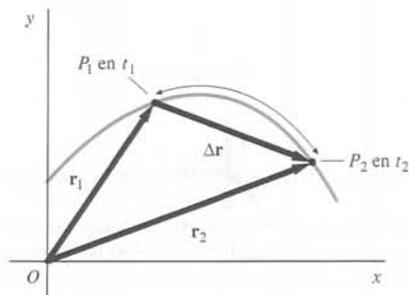


Figura 3.13 El vector desplazamiento  $\Delta\mathbf{r}$  es la diferencia de los vectores de posición  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . De igual modo  $\Delta\mathbf{r}$  es el vector que sumado a  $\mathbf{r}_1$  nos da el nuevo vector posición  $\mathbf{r}_2$ .

El módulo del vector desplazamiento es inferior a la distancia recorrida a lo largo de la curva a menos que la partícula se mueva en línea recta. Sin embargo, si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños (figura 3.14), el desplazamiento se aproxima a la distancia real recorrida por la partícula a lo largo de la curva, y la dirección  $\Delta \mathbf{r}$  se aproxima a la dirección de la línea tangente a la curva en el comienzo del intervalo. Definimos el **vector velocidad instantánea** como el límite del vector velocidad media cuando  $\Delta t$  tiende a cero:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.12)$$

DEFINICIÓN — VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA

El vector velocidad instantánea es la derivada del vector posición respecto al tiempo. Su módulo es la velocidad escalar y apunta en la dirección del movimiento de la partícula a lo largo de la línea tangente a la curva.

Para calcular la derivada en la ecuación 3.12 expresamos el vector posición en función de sus componentes.

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)\mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)\mathbf{j}$$

es decir,

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \quad (3.13)$$

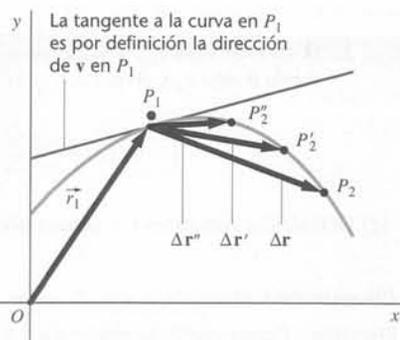


Figura 3.14 Al considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños, la dirección del desplazamiento se aproxima a la tangente a la curva.

### EJEMPLO 3.3 | La velocidad de un velero

Un barco de vela tiene las coordenadas  $(x_1, y_1) = (110 \text{ m}, 218 \text{ m})$  en el instante  $t_1 = 60 \text{ s}$ . Dos minutos más tarde, en el instante  $t_2$ , sus coordenadas son  $(x_2, y_2) = (130 \text{ m}, 205 \text{ m})$ . (a) Determinar la velocidad media en este intervalo de dos minutos. Expresar  $\mathbf{v}_m$  en función de sus componentes rectangulares. (b) Determinar el módulo y la dirección de esta velocidad media. (c) Para  $t \geq 20 \text{ s}$ , la posición del barco en función del tiempo es  $x(t) = b_1 + b_2 t$  e  $y(t) = c_1 + c_2 t$ , donde  $b_1 = 100 \text{ m}$ ,  $b_2 = \frac{1}{6} \text{ m/s}$ ,  $c_1 = 200$  y  $c_2 = 1080 \text{ m} \cdot \text{s}$ . Calcular la velocidad instantánea en el tiempo genérico  $t \geq 20 \text{ s}$ .

**Planteamiento del problema** Se conocen las posiciones inicial y final del barco de vela. (a) El vector velocidad media apunta de la posición inicial a la final. (b) Las componentes de la velocidad instantánea se calculan a partir de la ecuación 3.13:  $v_x = dx/dt$  y  $v_y = dy/dt$ .

- (a) 1. Dibuje un sistema de coordenadas (figura 3.15) que muestre el desplazamiento del velero. La dirección del vector velocidad media y del vector desplazamiento coincide.
2. Las componentes  $x$  e  $y$  de la velocidad media  $\mathbf{v}_m$  se calculan directamente a partir de sus definiciones:

$$\mathbf{v}_m = v_{x,m}\mathbf{i} + v_{y,m}\mathbf{j}$$

donde

$$v_{x,m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{130 \text{ m} - 110 \text{ m}}{120 \text{ s}} = 0,167 \text{ m/s}$$

$$v_{y,m} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{205 \text{ m} - 218 \text{ m}}{120 \text{ s}} = -0,108 \text{ m/s}$$

por lo tanto

$$\mathbf{v}_m = (0,167 \text{ m/s})\mathbf{i} - (0,108 \text{ m/s})\mathbf{j}$$

3. El módulo de  $\mathbf{v}_m$  se deduce del teorema de Pitágoras:

$$v_m = \sqrt{(v_{x,m})^2 + (v_{y,m})^2} = 0,199 \text{ m/s}$$

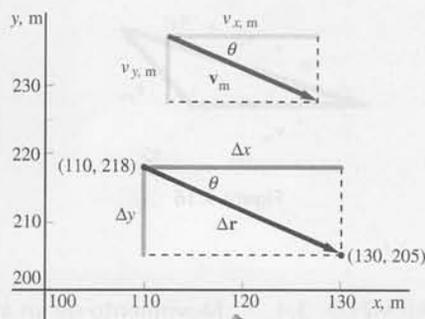


Figura 3.15

2. El cociente entre  $v_{y,m}$  y  $v_{x,m}$  expresa el valor de la tangente del ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{v}_m$  y el eje  $x$ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{y,m}}{v_{x,m}}$$

luego

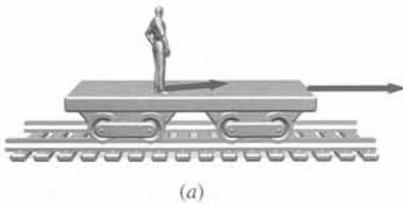
$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{v_{y,m}}{v_{x,m}} = \operatorname{arctg} \frac{-0,108 \text{ m/s}}{0,167 \text{ m/s}} = \boxed{-33,0^\circ}$$

(c) La velocidad instantánea  $\mathbf{v}$  se obtiene calculando  $dx/dt$  y  $dy/dt$ .

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} = b_2 \mathbf{i} - c_2 t^{-2} \mathbf{j} = \left( \frac{1}{6} \text{ m/s} \right) \mathbf{i} - \frac{1080 \text{ m} \cdot \text{s}}{t^2} \mathbf{j}$$

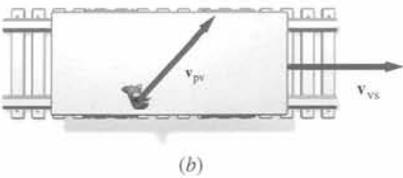
**Observación** El módulo de  $\mathbf{v}$  se obtiene de  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  y su dirección de  $\operatorname{tg} \theta = v_y/v_x$ .

**Ejercicio** Determinar las componentes  $x$  e  $y$  y el módulo y dirección de la velocidad instantánea del barco de vela en el instante  $t_1 = 60 \text{ s}$  (Respuestas  $\mathbf{v} = (\frac{1}{6} \text{ m/s}) \mathbf{i} - (0,30 \text{ m/s}) \mathbf{j}$ ,  $v_1 = 0,34 \text{ m/s}$ ,  $\theta_1 = -60,9^\circ$ .)



### Velocidad relativa

Las velocidades relativas en dos y tres dimensiones pueden combinarse del mismo modo que lo hacen en una dimensión, excepto en el hecho de que los vectores velocidad no coinciden necesariamente a lo largo de la misma línea. Si una partícula se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{pA}$  relativa a un sistema de coordenadas A, y éste a su vez se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{AB}$  relativa a otro sistema B, la velocidad de la partícula respecto a B es



$$\mathbf{v}_{pB} = \mathbf{v}_{pA} + \mathbf{v}_{AB} \quad (3.14)$$

VELOCIDAD RELATIVA

Por ejemplo, si Ud. se encuentra en una vagoneta que se mueve respecto al suelo con velocidad  $\mathbf{v}_{vs}$  (figura 3.16a) y camina con una velocidad relativa a la vagoneta de  $\mathbf{v}_{pv}$  (figura 3.16b), su velocidad relativa respecto al suelo será la suma de estas dos velocidades:  $\mathbf{v}_{ps} = \mathbf{v}_{vs} + \mathbf{v}_{pv}$  (figura 3.16c).

La velocidad del objeto A relativo al objeto B es igual en módulo y opuesta en dirección a la velocidad del objeto B respecto al objeto A. Por ejemplo,  $\mathbf{v}_{pv} = -\mathbf{v}_{vp}$ , en donde  $\mathbf{v}_{vp}$  es la velocidad de la vagoneta respecto a la persona. La adición de velocidades relativas se realiza del mismo modo que la suma de desplazamientos: gráficamente, situando los vectores velocidad el origen de uno en el extremo del otro o bien, analíticamente a partir de las componentes vectoriales.

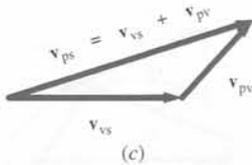


Figura 3.16

### EJEMPLO 3.4 | Movimiento de un avión

Un avión debe volar hacia el norte. La velocidad del avión respecto al aire es 200 km/h y el viento sopla de oeste a este a 90 km/h. (a) ¿Cuál debe ser el rumbo del avión? (b) ¿Qué velocidad debe llevar el avión respecto al suelo?

**Planteamiento del problema** Como el viento sopla hacia el este, un avión con rumbo hacia el norte derivará hacia el este. Para compensar el viento de través, el avión debe dirigirse hacia el noreste. La velocidad del avión respecto al suelo  $\mathbf{v}_{As}$  será la suma de la velocidad del avión respecto al aire  $\mathbf{v}_{Aa}$  más la velocidad del aire respecto al suelo  $\mathbf{v}_{as}$ .

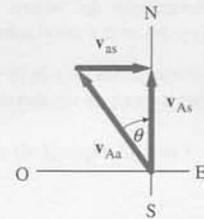


Figura 3.17

- (a) 1. La velocidad del avión respecto al suelo viene dada por la ecuación 3.14:  $\mathbf{v}_{As} = \mathbf{v}_{Aa} + \mathbf{v}_{as}$
2. Dibuje un diagrama que muestre la suma de los vectores del paso 1. Ponga los ejes de referencia como los que se muestran en la figura 3.17.

3. El seno del ángulo  $\theta$  formado por la velocidad del avión y la dirección norte es igual al cociente entre  $v_{as}$  y  $v_{Aa}$ :

$$\text{sen } \theta = \frac{v_{as}}{v_{Aa}}$$

por lo tanto

$$\theta = \arcsen \frac{v_{as}}{v_{Aa}} = \arcsen \frac{90 \text{ km/h}}{200 \text{ km/h}} = \boxed{26,7^\circ}$$

- (b) Como  $v_{as}$  y  $v_{As}$  son perpendiculares podemos utilizar el teorema de Pitágoras para determinar el módulo de  $v_{as}$ :

$$v_{Aa}^2 = v_{as}^2 + v_{As}^2$$

con lo cual

$$\begin{aligned} v_{As} &= \sqrt{v_{Aa}^2 - v_{as}^2} \\ &= \sqrt{(200 \text{ km/h})^2 - (90 \text{ km/h})^2} = \boxed{179 \text{ km/h}} \end{aligned}$$

## Vector aceleración

Se define el **vector aceleración media** como el cociente entre la variación del vector velocidad instantánea  $\Delta \mathbf{v}$  y el intervalo de tiempo  $\Delta t$ :

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (3.15)$$

DEFINICIÓN —VECTOR ACELERACIÓN MEDIA

El **vector aceleración instantánea** es el límite de esta relación cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero; es decir, el vector aceleración instantánea es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.16)$$

DEFINICIÓN —VECTOR ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Para calcular la aceleración instantánea expresaremos  $\mathbf{v}$  en función de sus coordenadas rectangulares:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} \\ &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.17)$$

### EJEMPLO 3.5 | El movimiento de una pelota de béisbol

La posición de una pelota de béisbol golpeada por el bateador viene dada por la expresión  $\mathbf{r} = 1,5 \text{ m } \mathbf{i} + (12 \text{ m/s } \mathbf{i} + 16 \text{ m/s } \mathbf{j})t - 4,9 \text{ m/s}^2 \mathbf{j} t^2$ . Determinar su velocidad y aceleración.

**Planteamiento del problema** Dado que  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ , tenemos que  $x = 1,5 \text{ m} + (12 \text{ m/s})t$  y que  $y = (16 \text{ m/s})t - (4,9 \text{ m/s}^2)t^2$ . Podemos calcular las componentes  $x$  e  $y$  de la velocidad y de la aceleración derivando  $x$  e  $y$  respecto a  $t$ .

1. Las componentes  $x$  e  $y$  de la velocidad se obtienen derivando  $x$  e  $y$ .

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[1,5 \text{ m} + (12 \text{ m/s})t] = 12 \text{ m/s}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[(16 \text{ m/s})t - (4,9 \text{ m/s}^2)t^2] \\ = 16 \text{ m/s} - (9,8 \text{ m/s}^2)t$$

2. Derivando de nuevo se obtienen las componentes de la aceleración:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -9,8 \text{ m/s}^2$$

3. Utilizando la notación vectorial, la velocidad y la aceleración son:

$$\mathbf{v} = [(12 \text{ m/s})\mathbf{i} + [16 \text{ m/s} + (9,8 \text{ m/s}^2)t]\mathbf{j}] \\ \mathbf{a} = [(-9,8 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}]$$

**Observación** Este es un ejemplo del movimiento de proyectiles, tema que estudiaremos en la sección 3.4.

Para que un vector sea constante, tanto su módulo como su dirección deben permanecer constantes. Si cualquiera de ellas cambia, el vector se modifica. Por lo tanto, si un coche toma una curva en la carretera con el módulo de la velocidad constante, experimenta una aceleración, ya que el vector velocidad se modifica debido al cambio de dirección.

### EJEMPLO 3.6 | Doblando una esquina

Un coche se mueve hacia el este a 60 km/h. Toma una curva y 5 s más tarde viaja hacia el norte a 60 km/h. Determinar la aceleración media del coche.

**Planteamiento del problema** Los vectores inicial y final se indican en la figura 3.18. Elegimos el vector unitario  $\mathbf{i}$  hacia el este y el vector  $\mathbf{j}$  hacia el norte y calculamos la aceleración media a partir de su definición,  $\mathbf{a} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ . Obsérvese que  $\Delta\mathbf{v}$  es el vector que sumado a  $\mathbf{v}_i$  nos da  $\mathbf{v}_f$ .

1. La aceleración media es el cociente entre la variación de velocidad y el intervalo de tiempo:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

2. El cambio de velocidad viene relacionado con las velocidades inicial y final:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$$

3. Expresar las velocidades inicial y final como vectores:

$$\mathbf{v}_i = (60 \text{ km/h})\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_f = (60 \text{ km/h})\mathbf{j}$$

4. Sustituya los resultados anteriores para determinar la aceleración media:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{\Delta t} = \frac{(60 \text{ km/h})\mathbf{j} - (60 \text{ km/h})\mathbf{i}}{5 \text{ s}} \\ = [-(12 \text{ km/h/s})\mathbf{i} + [(12 \text{ km/h/s})\mathbf{j}]]$$

**Observación** El coche acelera, aunque el módulo de la velocidad no cambia.

**Ejercicio** Determinar el módulo y la dirección del vector aceleración media. (Respuesta  $\mathbf{a}_m = (17,0 \text{ km/h/s})$ , a  $45^\circ$  hacia el oeste del norte.)

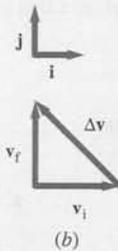
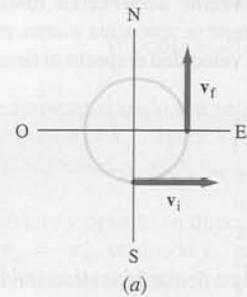
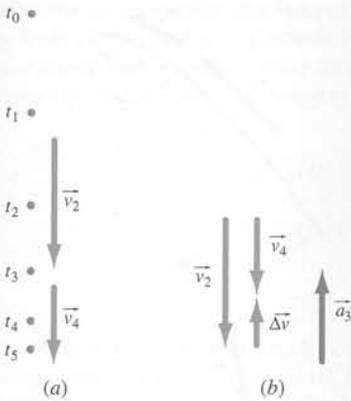


Figura 3.18

El movimiento de un objeto alrededor de una circunferencia es un ejemplo corriente de movimiento en el cual la velocidad de un objeto cambia, aunque su módulo permanezca constante.

**La dirección del vector aceleración** En los ejemplos siguientes queremos mostrar cómo se determina la dirección del vector aceleración a partir de una descripción del movimiento. Por ejemplo, analicemos el movimiento de una gimnasta saltando en una plataforma



**Figura 3.19** (a) Diagrama del movimiento del frenado de una saltadora cuando llega al suelo. Los puntos se han dibujado a instantes de tiempo consecutivos. (b) Dibujamos los vectores  $\vec{v}_2$  y  $\vec{v}_4$  en el mismo punto y determinamos  $\Delta\vec{v}$  como el vector que une el extremo de  $\vec{v}_2$  con el punto que alcanza  $\vec{v}_4$  de modo que  $\vec{v}_2 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_4$ . La aceleración  $\vec{a}_3$  va en la misma dirección y sentido que  $\Delta\vec{v}$ .



**Figura 3.20** Los puntos que representan el ascenso de la saltadora se dibujan a la derecha de aquellos que representan su descenso con el objetivo de que no se superpongan. Sin embargo, el movimiento de la saltadora está dirigido en la misma dirección aunque con sentido contrario.

elástica cuando alcanza el punto más bajo de un salto y frena y, posteriormente, cambia el sentido de su velocidad iniciando un nuevo salto. Para determinar la dirección de la aceleración cuando está frenando, en la figura 3.19a dibujamos una serie de puntos que muestran su posición en sucesivos instantes de tiempo. Cuanto más rápido se mueve, mayor es la distancia que recorre en instantes de tiempo sucesivos y, por lo tanto, mayor es la distancia entre los correspondientes puntos de la figura. Numeramos los puntos correlativamente, empezando con el cero. En el instante  $t_0$  la saltadora está en el punto 0, en el instante  $t_1$  en el punto 1 y así sucesivamente. Para determinar la dirección de la aceleración en el instante  $t_3$  dibujamos los vectores que representan la velocidad de la saltadora en los instantes  $t_2$  y  $t_4$ . La aceleración media en el intervalo entre  $t_2$  y  $t_4$  es  $\Delta\vec{v}/\Delta t$  donde  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_4 - \vec{v}_2$  y  $\Delta t = t_4 - t_2$ . Usamos estas expresiones para estimar la aceleración de la saltadora en el instante de tiempo  $t_3$ , es decir,  $\vec{a}_3 \approx \Delta\vec{v}/\Delta t$ . Como  $\vec{a}_3$  y  $\Delta\vec{v}$  van en la misma dirección, determinando la dirección de  $\Delta\vec{v}$  encontramos también la dirección de  $\vec{a}_3$ . La dirección de  $\Delta\vec{v}$  se obtiene usando la relación  $\vec{v}_2 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_4$  y dibujando el correspondiente diagrama de suma de vectores (figura 3.19b). Como la saltadora se mueve más rápido en el instante  $t_2$  que en el instante  $t_4$  (los puntos están más separados), la longitud de  $\vec{v}_2$  es superior a la de  $\vec{v}_4$ . A partir de la figura obtenemos la dirección de  $\Delta\vec{v}$  y, por lo tanto, la dirección de  $\vec{a}_3$ .

**Ejercicio** La figura 3.20 es el diagrama del movimiento de la saltadora antes, durante y después del instante de tiempo  $t_6$ , cuando se halla momentáneamente en reposo en el punto más bajo de su descenso. En el trozo mostrado de su ascenso la velocidad de la saltadora aumenta. Utilice este diagrama para determinar la dirección de la aceleración de la saltadora (a) en el instante  $t_6$  y (b) en el instante  $t_9$ . (Respuesta (a) hacia arriba, (b) hacia arriba)

### EJEMPLO 3.7 | Un birrete volador

Un estudiante de física el día de su graduación lanza su birrete al aire con un ángulo inicial de  $60^\circ$  por encima de la horizontal. Determinar la dirección de la aceleración del birrete durante su movimiento ascendente usando un diagrama del movimiento.

**Planteamiento del problema** A medida que el birrete sube, pierde velocidad y varía su posición. Dibujaremos el diagrama del movimiento y para determinar la dirección de  $\Delta\vec{v}$ , es decir, la de la aceleración, haremos un esquema de la relación  $\vec{v}_i + \Delta\vec{v} = \vec{v}_f$ .

1. El diagrama de la figura 3.21a muestra el movimiento ascendente del birrete. Como a medida que asciende se frena, el espacio entre los puntos disminuye.
2. En un punto de la figura se dibuja el vector velocidad en un instante de tiempo inmediatamente anterior y posterior al elegido. Nótese que los vectores se dibujan tangentes a la trayectoria del birrete.
3. La representación gráfica de la relación  $\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f$  se obtiene dibujando los dos vectores velocidad en un mismo punto. Estos vectores tienen el mismo módulo y dirección que los vectores dibujados en el paso 2. El vector  $\Delta\mathbf{v}$  se obtiene uniendo sus extremos.
4. El vector aceleración tiene la misma dirección que el vector  $\Delta\mathbf{v}$ , pero no necesariamente la misma longitud, ya que  $\mathbf{a} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ .

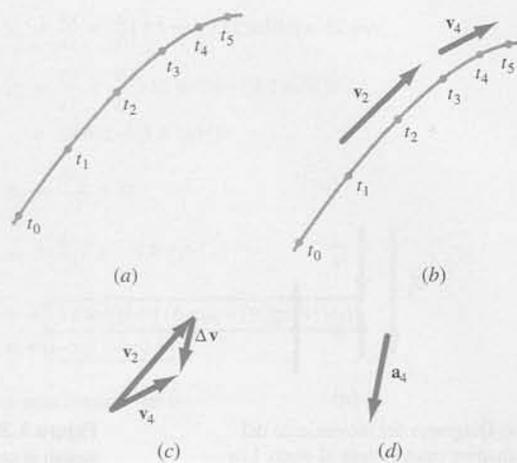


Figura 3.21

**Observación** El método de determinar la dirección de la aceleración mediante el diagrama del movimiento no es preciso. Por consiguiente, el resultado solamente es una estimación de la aceleración, no un cálculo exacto.

**Ejercicio** Usar el diagrama del movimiento para determinar la dirección de la aceleración del birrete del ejemplo 3.7 durante su caída. (*Respuesta* directamente hacia abajo)

### 3.4 Primer caso particular: movimiento de proyectiles

La figura 3.22 muestra el lanzamiento de una partícula con velocidad inicial  $v_0$  y formando un ángulo  $\theta_0$  con el eje horizontal. Sea  $(x_0, y_0)$  el punto de lanzamiento;  $y$  es positiva hacia arriba y  $x$  positiva hacia la derecha.

Las componentes de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad (3.18a)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 \quad (3.18b)$$

En ausencia de la resistencia del aire, la aceleración es la de la gravedad, dirigida verticalmente hacia abajo:

$$a_x = 0 \quad (3.19a)$$

$$a_y = -g \quad (3.19b)$$

Como la aceleración es constante, podemos utilizar las ecuaciones cinemáticas discutidas en el capítulo 2. La componente  $x$  de la velocidad es constante, ya que no existe aceleración horizontal:

$$v_x = v_{0x} \quad (3.20a)$$

La componente  $y$  varía con el tiempo según la ecuación 2.11, con  $a = -g$ :

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (3.20b)$$

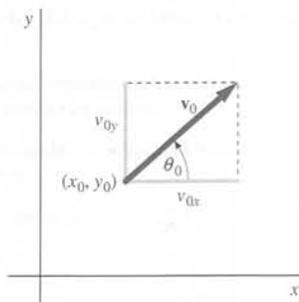


Figura 3.22

Obsérvese que  $v_x$  no depende de  $v_y$  y viceversa. Las componentes horizontal y vertical del movimiento de proyectiles son independientes. Esto puede demostrarse dejando caer una bola desde cierta altura y proyectando horizontalmente desde la misma altura una segunda bola al mismo tiempo. Ambas bolas chocan contra el suelo simultáneamente. Los desplazamientos  $x$  e  $y$  vienen dados por (véase ecuación 2.16.)

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \quad (3.21a)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.21b)$$

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

La notación  $x(t)$  e  $y(t)$  destaca simplemente que  $x$  e  $y$  son funciones del tiempo. Si se conoce la componente  $y$  de la velocidad inicial, la ecuación 3.21b nos permite determinar el instante  $t$  en que la partícula se encuentra a la altura  $y$ . La posición horizontal en ese mismo tiempo puede calcularse a partir de la ecuación 3.21a. La distancia total horizontal recorrida por un proyectil es su **alcance**. (Las formas vectoriales de las ecuaciones 3.19 a 3.21 se dan en las páginas 63 y 64.)

### EJEMPLO 3.8 | Otro birrete en el aire

Un estudiante de física lanza un birrete al aire con una velocidad inicial de 24,5 m/s, formando un ángulo de 36,9° con la horizontal. Posteriormente, otro estudiante lo coge. Determinar (a) el tiempo total que el birrete está en el aire y (b) la distancia total horizontal recorrida.

**Planteamiento del problema** Elegimos la posición inicial del birrete como origen, de modo que  $x_0 = y_0 = 0$ . Suponemos que el otro estudiante lo coge a la misma altura. El tiempo total que el birrete está en el aire se determina haciendo  $y = 0$  en la ecuación 3.21b. Este resultado puede utilizarse en la ecuación 3.21a para determinar la distancia total recorrida.

(a) 1. Hacemos  $y = 0$  en la ecuación 3.21b y despejamos  $t$ :

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = t\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt\right) = 0$$

2. Existen dos soluciones para  $t$ :

$$t = 0 \quad (\text{condiciones iniciales})$$

$$t = \frac{2v_{0y}}{g}$$

3. Calcular la componente vertical del vector velocidad inicial:

$$v_{0y} = v_0 \text{ sen } \theta_0 = (24,5 \text{ m/s}) \text{ sen } 36,9^\circ = 14,7 \text{ m/s}$$

4. Sustituir este resultado en  $v_{0y}$  del paso 2 para determinar el tiempo total  $t$ :

$$t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \text{ sen } \theta_0}{g} \\ = \frac{2(24,5 \text{ m/s}) \text{ sen } 36,9^\circ}{9,81 \text{ m/s}^2} = \boxed{3,00 \text{ s}}$$

(b) Utilizar este valor del tiempo para calcular la distancia total horizontal recorrida:

$$x = v_{0x}t = (v_0 \text{ cos } \theta_0)t = (24,5 \text{ m/s}) \text{ cos } 36,9^\circ (3,00 \text{ s}) = \boxed{58,8 \text{ m}}$$

**Observación** El tiempo que el birrete está en el aire es el mismo que obtuvimos en el ejemplo 2.9, en donde el birrete fue lanzado verticalmente hacia arriba con  $v_0 = 14,7$  m/s. La figura 3.23 muestra la altura  $y$  en función de  $t$  para el birrete. Esta curva es idéntica a la representada en la figura 2.11 (ejemplo 2.9) porque ambos birretes están sometidos a la misma aceleración y velocidad vertical. La figura 3.23 puede reinterpretarse como un gráfico de  $y$  en función de  $x$  si su escala de tiempo se convierte en una escala de longitud. Para ello basta multiplicar los valores del tiempo por 19,6 m/s, ya que el birrete se desplaza horizontalmente a  $(24,5 \text{ m/s}) \text{ cos } 36,9^\circ = 19,6 \text{ m/s}$ . La curva  $y$  en función de  $x$  es una parábola.

La figura 3.24 muestra una serie de gráficos de las distancias verticales en función de las distancias horizontales para proyectiles de velocidad inicial 24,5 m/s y varios ángulos iniciales distintos. Los ángulos representados son 45°, que es el de alcance máximo, y pares de ángulos que difieren el

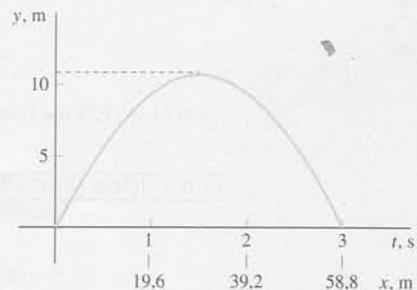


Figura 3.23

mismo número de grados por encima y por debajo de  $45^\circ$ . Obsérvese que estos pares de ángulo tienen el mismo alcance. La curva azul tiene un ángulo inicial de  $36,9^\circ$  (0,64 rad), como en este ejemplo.

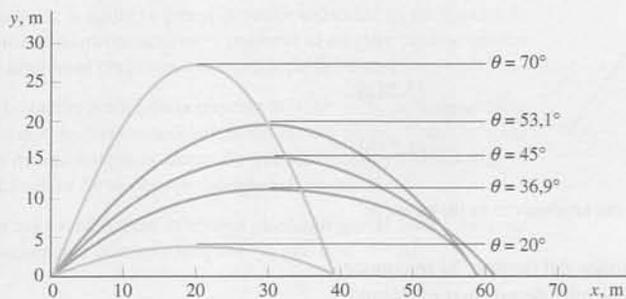


Figura 3.24

La ecuación general para la trayectoria  $y(x)$  puede obtenerse a partir de las ecuaciones 3.21 eliminando la variable  $t$  entre ambas. Escogiendo  $x_0 = y_0 = 0$  se obtiene  $t = x/v_{0x}$  de la ecuación 3.21a. Sustituyendo este resultado en la ecuación 3.21b se obtiene

$$y(x) = v_{0y} \left( \frac{x}{v_{0x}} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_{0x}} \right)^2 = \left( \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \right) x - \left( \frac{g}{2v_{0x}^2} \right) x^2$$

Teniendo en cuenta los valores de las componentes de las velocidades, resulta

$$y(x) = (\tan \theta_0) x - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \right) x^2 \quad (3.22)$$

TRAYECTORIA DE UN PROYECTIL

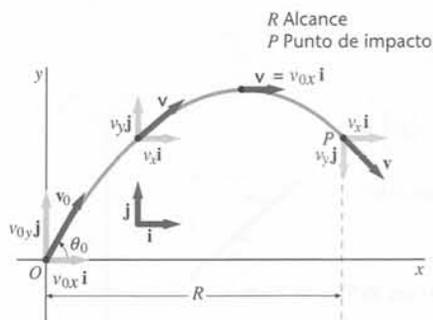


Figura 3.25 Trayectoria de un proyectil, en donde se indican los vectores velocidad.

para la trayectoria de un proyectil. Esta ecuación es de la forma  $y = ax + bx^2$ , que es la ecuación de una parábola que pasa por el origen. La figura 3.25 muestra la trayectoria de un proyectil con el vector velocidad y sus componentes indicadas en diversos puntos. Esta trayectoria se refiere a un proyectil que choca con el suelo en el punto de lanzamiento y el de impacto es el alcance  $R$ .

En el caso especial en que las elevaciones inicial y final sean iguales, puede deducirse una fórmula general para hallar el alcance de un proyectil en función de su velocidad inicial y el ángulo de proyección. Como en los ejemplos anteriores, el alcance se obtiene multiplicando la componente  $x$  de la velocidad por el tiempo total que el proyectil está en el aire. El tiempo total de vuelo  $T$  se obtiene haciendo  $y = 0$  en la ecuación 3.21b:

$$y(T) = v_{0y} T - \frac{1}{2} g T^2 = 0, \quad T > 0$$

Dividiendo por  $T$  se obtiene

$$v_{0y} - \frac{1}{2} g T = 0$$

Por lo tanto, el tiempo de vuelo del proyectil es

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0}{g} \sin \theta_0$$

- y el alcance:

$$R = v_{0x} T = (v_0 \cos \theta_0) \left( \frac{2v_0}{g} \sin \theta_0 \right) = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

Esta expresión puede simplificarse utilizando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

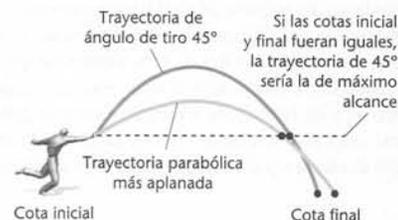
Por consiguiente,

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0 \quad (3.23)$$

ALCANCE DE UN PROYECTIL PARA ELEVACIONES INICIAL Y FINAL IGUALES

**Ejercicio** Utilizar la ecuación 3.22 de la trayectoria para deducir la ecuación 3.23. (Respuesta Hacer  $y(x) = 0$  y despejar  $x$ .)

La ecuación 3.23 es útil para determinar el alcance de proyectiles con elevaciones inicial y final iguales. Es importante destacar que esta ecuación muestra cómo el alcance depende de  $\theta$ . Como el valor máximo de  $\operatorname{sen} 2\theta$  es 1, cuando  $2\theta = 90^\circ$ , o sea,  $\theta = 45^\circ$ , el alcance del proyectil es máximo cuando  $\theta = 45^\circ$ . En muchas aplicaciones prácticas las cotas de altura inicial y final pueden no ser iguales y son importantes otras consideraciones. Por ejemplo, en el lanzamiento de peso, la bola termina su recorrido cuando choca contra el suelo, pero ha sido proyectada desde una altura inicial de unos 2 m sobre el suelo. Esto hace que el alcance sea máximo para un ángulo algo inferior a  $45^\circ$ , como se indica en la figura 3.26. Los estudios realizados de los mejores lanzadores de peso muestran que el alcance máximo tiene lugar para un ángulo inicial de unos  $42^\circ$ .



**Figura 3.26** Si un proyectil toca el suelo en una cota inferior a la de proyección, el alcance máximo se alcanza bajo un ángulo de tiro algo menor de  $45^\circ$ .

### EJEMPLO 3.9 | La caída de un paquete de aprovisionamiento

Un helicóptero deja caer un paquete con suministros a las víctimas de una inundación que se hallan en una balsa. Cuando el paquete se lanza, el helicóptero se encuentra a 100 m por encima de la balsa, volando a 25 m/s y formando un ángulo de  $36,9^\circ$  sobre la horizontal. (a) ¿Durante cuánto tiempo estará el paquete en el aire? (b) ¿Dónde caerá el paquete? (c) Si el helicóptero vuela a velocidad constante, ¿cuál será su posición en el instante en que el paquete llega al suelo?

**Planteamiento del problema** La distancia horizontal recorrida por el paquete viene dada por la ecuación 3.21a, en donde  $t$  es el tiempo que el paquete se encuentra en el aire. El valor de  $t$  puede determinarse a partir de la ecuación 3.21b. Escoger el origen directamente por debajo del helicóptero cuando el paquete se lanza. La velocidad inicial del paquete es la velocidad inicial del helicóptero.

- (a) 1. La trayectoria del paquete durante el tiempo que está en el aire se muestra en la figura 3.27.
2. Para determinar el tiempo que el paquete está en el aire escribimos  $y(t)$ .
3. Haciendo  $y_0 = 0$ , podemos aplicar la fórmula para la resolución de la ecuación de segundo grado para  $t$ :
4. Calculamos  $t$  cuando  $y(t) = -100$  m. Para ello se calcula  $v_{0y}$ , y dado que el paquete se suelta cuando  $t = 0$ , el tiempo que transcurre hasta el impacto no puede ser negativo. Por lo tanto:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{o} \quad 0 = \frac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t + y(t)$$

despejando  $t$

$$t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2gy(t)}}{g}$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 = (25 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 36,9^\circ = 15 \text{ m/s}$$

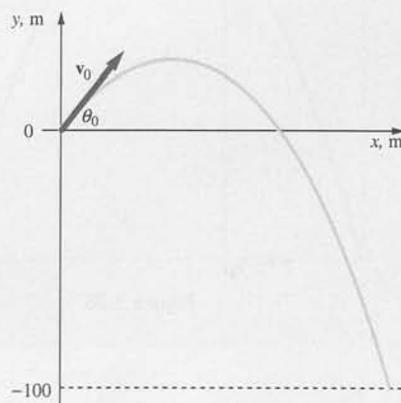
y sustituyendo

$$t = \frac{15 \text{ m/s} \pm \sqrt{(15 \text{ m/s})^2 - 2(9,81 \text{ m/s}^2)(-100 \text{ m})}}{9,81 \text{ m/s}^2}$$

hay dos soluciones

$$t = -3,24 \text{ s} \quad \text{o} \quad t = 6,30 \text{ s}$$

$$t = \boxed{6,30 \text{ s}}$$



**Figura 3.27**

(b) Cuando el paquete choca con el agua, se ha movido una distancia horizontal  $x$ , donde  $x$  es la velocidad horizontal por el tiempo de caída del paquete. Primero calculamos la velocidad horizontal:

$$v_{0y} = v_0 \cos \theta_0 = (25 \text{ m/s}) \cos 36,9^\circ = 20 \text{ m/s}$$

por lo tanto

$$x = v_{0x}t = (20 \text{ m/s})(6,30 \text{ s}) = \boxed{126 \text{ m}}$$

(c) Las coordenadas de la posición del helicóptero en el momento del impacto del paquete con el agua son:

$$x_h = v_{0x}t = (20 \text{ m/s})(6,30 \text{ s}) = \boxed{126 \text{ m}}$$

$$y_h = y_{h0} + v_{h0}t = 0 + (15 \text{ m/s})(6,30 \text{ s}) = \boxed{94,5 \text{ m}}$$

El helicóptero está 194,5 m directamente por encima del paquete.

**Observación** El tiempo positivo es el apropiado, ya que corresponde a un tiempo posterior al lanzamiento del paquete (el cual tiene lugar para  $t = 0$ ). La solución negativa del tiempo corresponde al instante en que el paquete se encontraría a  $y = 0$  si su movimiento hubiera comenzado con anterioridad, como indica la figura 3.28. Obsérvese que el helicóptero se encuentra por encima del paquete cuando éste choca contra el agua (y en cualquier momento anterior). La figura 3.29 muestra un gráfico de  $y$  en función de  $x$  para una serie de paquetes lanzados con diversos ángulos iniciales y con una velocidad inicial de 25 m/s. La curva de ángulo inicial  $36,9^\circ$  es la de este ejemplo. Obsérvese que el máximo alcance tiene lugar bajo un ángulo menor que  $45^\circ$ .

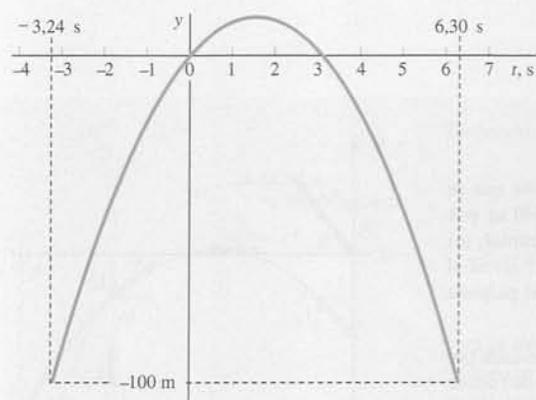


Figura 3.28

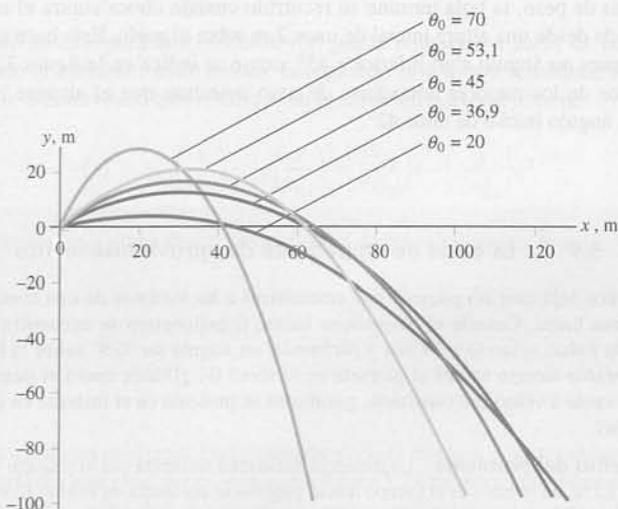


Figura 3.29

### EJEMPLO 3.10 | A la caza del ladrón

Un policía persigue a un consumado ladrón de joyas a través de los tejados de la ciudad. Ambos están corriendo a la velocidad de 5 m/s cuando llegan a un espacio vacío entre dos edificios que tiene 4 m de anchura y un desnivel de 3 m, tal como muestra la figura 3.30. El ladrón, que tiene algunos conocimientos de física, salta a 5 m/s con una inclinación de  $45^\circ$  y salva el hueco con facilidad. El policía nunca estudió física y piensa que lo mejor sería saltar con el máximo de velocidad horizontal, de modo que salta a 5 m/s horizontalmente. (a) ¿Conseguirá salvar el obstáculo? (b) ¿A qué distancia del borde del segundo edificio llegó el ladrón?

**Planteamiento del problema** El tiempo en el aire durante el salto depende sólo del movimiento vertical. Elegir como origen el punto de lanzamiento con la dirección positiva hacia arriba, para poder aplicar las ecuaciones 3.21. Utilizar la ecuación 3.21b para  $y(t)$  y deducir de ella el tiempo para  $y = -3 \text{ m}$  para  $\theta_0 = 0^\circ$  y de nuevo para  $\theta_0 = 45^\circ$ . El valor de  $x$  correspondiente a este tiempo es la distancia horizontal recorrida.

¡INTÉNELO USTED MISMO!

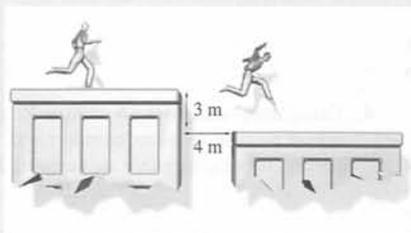


Figura 3.30

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) 1. Escribir $y(t)$ para el policía y calcular $t$ cuando $y = -3$ m.	$t = 0,782$ s
2. Determinar la distancia horizontal recorrida durante este tiempo.	$x = 3,91$ m
	Como esta distancia es menor de 4 m el policía no puede cruzar el espacio vacío entre los edificios.
(b) 1. Escribir $y(t)$ para el ladrón y sustituir $y = -3$ m. $y(t)$ es una ecuación de segundo grado con dos soluciones, pero sólo una es aceptable.	$t = -0,5$ s o $t = 1,22$ s
	Obviamente, el ladrón alcanza el techo después de saltar, de modo que
2. Calcular la distancia horizontal correspondiente al valor positivo de $t$ .	$t = 1,22$ s
	$x = v_{0x}t = 4,31$ m
3. Restar 4 m de esta distancia.	$4,31$ m $-$ $4,0$ m = $0,31$ m

**Observación** El ladrón probablemente sabía que debía saltar con una inclinación algo menor de  $45^\circ$ , pero desde luego, no tuvo tiempo para resolver exactamente el problema. El policía realmente consiguió alcanzar el segundo edificio contrayendo sus músculos abdominales antes del impacto. Con ello subió sus pies algo más de 9 cm, la distancia mínima necesaria para completar el salto sin accidentarse.

### EJEMPLO 3.11 | Lanzamiento de suministros

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

En el ejemplo 3.9, (a) determinar el tiempo  $t_1$  que tarda el paquete en alcanzar su máxima altura  $h$ , (b) calcular esta altura máxima  $h$  y (c) determinar el tiempo  $t_2$  transcurrido desde que el paquete alcanza su altura máxima hasta que llega al suelo.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) 1. Expresar $v_y(t)$ para el paquete.	$v_y(t) = v_{0y} - gt$
2. Hacer $v_y(t_1) = 0$ y despejar $t_1$ .	$t_1 = 1,53$ s
(b) 1. Determinar $v_{y,m}$ durante el tiempo en que el paquete se mueve hacia arriba.	$v_{y,m} = 7,5$ m/s
2. Utilizar $v_{y,m}$ para determinar la distancia recorrida hacia arriba. A continuación calcular $h$ .	$\Delta y = 11,5$ m, $h = 111,5$ m
(c) Hallar el tiempo transcurrido mientras el paquete cae la distancia $h$ .	$t_2 = 4,77$ s

**Observación** De acuerdo con el ejemplo 3.9,  $t_1 + t_2 = 6,3$  s.

**Ejercicio** Resolver el apartado (b) del ejemplo 3.11 usando la expresión para  $y(t)$  de la ecuación 3.21b en vez de calcular  $v_{y,m}$ .

Las ecuaciones 3.19a y 3.19b pueden expresarse en forma vectorial. Multiplicando la ecuación 3.19a por  $\mathbf{i}$  y la ecuación 3.19b por  $\mathbf{j}$  y después sumando ambas ecuaciones se obtiene  $a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = -g\mathbf{j}$ , o bien,

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \quad (3.19c)$$

donde  $\mathbf{g}$  es el vector aceleración correspondiente a la caída libre. En la superficie de la Tierra el valor de  $\mathbf{g}$  es  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Las ecuaciones 3.20a y b también pueden expresarse en forma vectorial. Multiplicando la ecuación 3.20a por  $\mathbf{i}$  y la ecuación 3.20b por  $\mathbf{j}$  y sumando ambas ecuaciones se obtiene  $(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}) = (v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}) - gt\mathbf{j}$  o bien

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t \quad \text{o} \quad \Delta\mathbf{v} = \mathbf{g}t \quad (3.20c)$$

donde  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v}_0 = v_{0x} \mathbf{i} + v_{0y} \mathbf{j}$ , y  $\mathbf{g} = -g \mathbf{j}$ . Repitiendo el proceso para las ecuaciones 3.21a y b se obtiene

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \quad \text{o} \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \quad (3.21c)$$

donde  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$  y  $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j}$ . Para determinados problemas conviene utilizar las formas vectoriales de las ecuaciones cinemáticas (ecuaciones 3.20c y 3.21c). Este es el caso del ejemplo que sigue.

### EJEMPLO 3.12 | El guardabosques y el mono

Un guardabosques con una cerbatana intenta disparar un dardo tranquilizante a un mono que cuelga de una rama (figura 3.28). El guardabosques apunta directamente al mono sin tener en cuenta que el dardo seguirá una trayectoria parabólica y pasará, por lo tanto, por debajo del mono. Sin embargo, éste, viendo salir el dardo de la cerbatana, se suelta de la rama y cae del árbol, esperando evitar el dardo. (a) Demostrar que el mono será alcanzado independientemente de cuál sea la velocidad inicial del dardo, con tal de que ésta sea lo suficientemente grande para que el dardo recorra la distancia horizontal que hay hasta el árbol antes de dar contra el suelo. Suponer que el tiempo de reacción del mono es despreciable. (b) Sea  $v_{d0}$  la velocidad del dardo al salir de la cerbatana. Encuentre la velocidad del dardo relativa al mono para un tiempo arbitrario  $t$  durante el vuelo del dardo.

**Planteamiento del problema** Se aplica la ecuación 3.21c al mono y al dardo

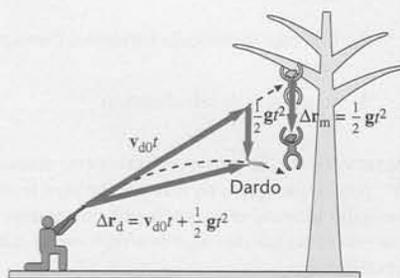


Figura 3.31

(a) 1. Se aplica la ecuación 3.21c al mono en el tiempo  $t$ ,

$$\Delta \mathbf{r}_m = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$

con la velocidad inicial del mono nula.

2. Se aplica la ecuación 3.21c al dardo en el tiempo  $t$ ,

$$\Delta \mathbf{r}_d = \mathbf{v}_{d0} t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$

donde  $\mathbf{v}_{d0}$  es la velocidad inicial del dardo cuando sale de la cerbatana.

3. La figura 3.31 refleja un esquema del mono, el dardo y la cerbatana. Se muestra el dardo y el mono en sus posiciones en el instante inicial y en el tiempo  $t$ . Los vectores muestran los diferentes términos de los pasos 1 y 2. Nótese que en el tiempo  $t$  el dardo y el mono están a una distancia  $\frac{1}{2} g t^2$  por debajo de la línea de mira de la cerbatana. El dardo dará con el mono cuando alcance la línea de caída éste.

(b) 1. La velocidad del dardo relativa al mono iguala la velocidad del dardo relativa a la cerbatana más la velocidad del arma relativa al animal:

$$\mathbf{v}_{dm} = \mathbf{v}_{dc} + \mathbf{v}_{cm}$$

2. La velocidad de la cerbatana relativa al mono es igual a la velocidad del animal relativa al arma cambiada de signo.

$$\mathbf{v}_{dm} = \mathbf{v}_{dc} - \mathbf{v}_{mc}$$

3. Con el uso de la ecuación 3.20c se consigue expresar la velocidad del dardo relativa a la cerbatana y la velocidad del animal relativa al arma

$$\mathbf{v}_{dc} = \mathbf{v}_{d0} + \mathbf{g} t$$

$$\mathbf{v}_{mc} = \mathbf{g} t$$

4. La sustitución de estas expresiones en el paso 2 del apartado b lleva a:

$$\mathbf{v}_{dm} = (\mathbf{v}_{d0} + \mathbf{g} t) - (\mathbf{g} t) = \boxed{\mathbf{v}_{d0}}$$

**Observación** Con respecto al mono, el dardo se mueve con velocidad constante  $\mathbf{v}_{d0}$  siguiendo una línea recta. El dardo impacta en el animal en el instante de tiempo  $t = L/v_{d0}$ , donde  $L$  es la distancia desde la boca del arma hasta la posición inicial del mono.

**Observación** En una experiencia magistral, un blanco se cuelga de un electroimán. Cuando el dardo sale del arma, el circuito que controla el electroimán se interrumpe y el blanco cae. La velocidad inicial del dardo se puede variar de modo que para valores de  $v_{d0}$  grandes el dardo alcanza al blanco muy cerca de su posición inicial, mientras que si  $v_{d0}$  tiene un valor pequeño, el dardo impacta con el blanco poco antes de que éste alcance el suelo.



**Ejercicio** Un jugador golpea el disco de hockey sobre hielo de forma que éste no impacta en la red de la portería ni tampoco en la valla de Plexiglass de los límites de la pista de 2,80 m de altura. El tiempo de vuelo del disco cuando pasa por encima de la valla es  $t_1 = 0,650$  s, siendo  $x_1 = 12,0$  m la distancia horizontal desde el punto donde el jugador golpea el disco. (a) Calcular la velocidad y la dirección inicial del disco. (b) ¿Cuándo alcanza el disco su altura máxima? (c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el disco? (Respuesta (a)  $\mathbf{v} = 20,0$  m/s,  $\theta_0 = 22,0^\circ$ , (b)  $t = 0,764$  s, (c)  $v_{ym} t = 2,86$  m).

### 3.5 Segundo caso particular: movimiento circular

La figura 3.32 muestra una masa sujeta a una cuerda, de modo que forma un péndulo que oscila en el plano vertical. La trayectoria que sigue la masa en su continua oscilación corresponde a una fracción de una trayectoria circular. El movimiento a lo largo de una trayectoria circular, o de una parte de ella, se denomina **movimiento circular**.

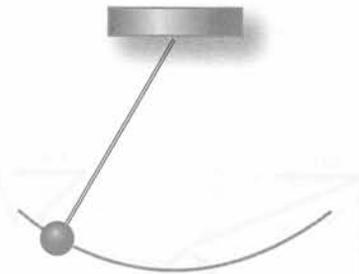


Figura 3.32

#### EJEMPLO 3.13 | El péndulo que oscila

Consideremos el movimiento de la masa del péndulo de la figura 3.32. Usando el diagrama del movimiento de la figura 3.33, determinar la dirección del vector aceleración cuando la masa está oscilando de izquierda a derecha, (a) en la porción descendente de su movimiento, (b) cuando pasa por el punto más bajo de su recorrido, y (c) en la porción ascendente de su recorrido.

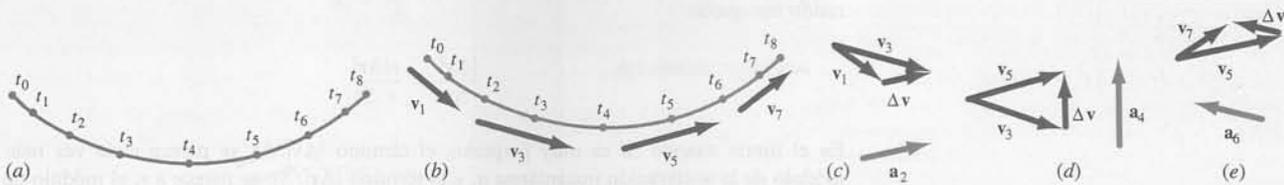


Figura 3.33

**Planteamiento del problema** Cuando la masa desciende aumenta la velocidad y cambia su dirección. La aceleración está relacionada con el cambio de la velocidad mediante  $\mathbf{a} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ . La dirección de la aceleración en un punto puede estimarse dibujando el diagrama de adición de vectores para la relación  $\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f$ , de donde se encuentra la dirección de  $\Delta\mathbf{v}$  y, por lo tanto, la dirección del vector aceleración.

1. La figura 3.33 muestra la representación de una oscilación completa de izquierda a derecha de la masa del péndulo. La distancia entre los puntos es mayor en los puntos más bajos de la trayectoria ya que en ellos la velocidad es mayor.
  2. Para un punto determinado, se determina la diferencia entre la velocidad en el punto inmediatamente anterior y en el punto inmediatamente posterior. Nótese que los vectores velocidad se dibujan tangentes a la trayectoria y que su longitud es proporcional a la velocidad.
  3. Se representa la expresión gráfica de la relación  $\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f$  y el vector aceleración, ya que dado que  $\mathbf{a} \approx \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ ,  $\mathbf{a}$  va en la misma dirección que  $\Delta\mathbf{v}$ .
- (b) Se repiten los pasos 2 y 3 para el punto más bajo de la trayectoria.  
 (c) Se repiten los pasos 2 y 3 para un punto en la porción ascendente de la trayectoria.

**Observación** En el punto más bajo de la trayectoria el vector aceleración tiene la dirección vertical, hacia arriba (figura 3.34), hacia el centro del círculo  $P$ . Cuando la velocidad aumenta (en la porción descendente), la aceleración tiene una componente dirigida hacia delante y otra componente dirigida hacia  $P$ . Cuando la aceleración disminuye tiene una componente dirigida hacia atrás y otra que apunta a  $P$ .

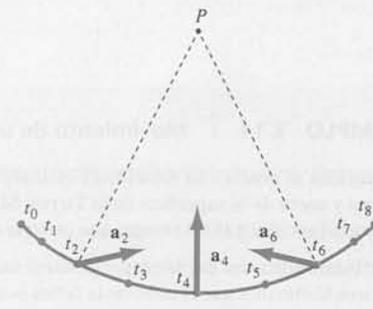
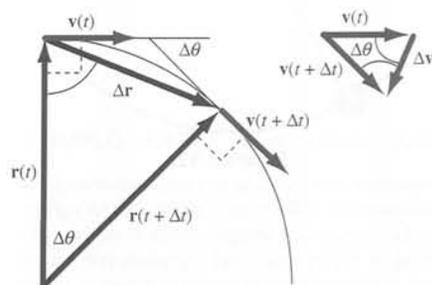


Figura 3.34

Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular, la dirección que desde la partícula señala el centro de la trayectoria se denomina **dirección centrípeta**. En el ejemplo 3.13 se ha visto que la aceleración en el punto más bajo de la trayectoria de la masa del péndulo va en la dirección centrípeta. En otros puntos la aceleración tiene una componente centrípeta y una componente tangencial.



**Figura 3.35** Vectores posición y velocidad de una partícula que se mueve en un círculo a velocidad escalar constante.

### Movimiento circular uniforme

El movimiento en un círculo a velocidad escalar constante se denomina **movimiento circular uniforme**. Usaremos el método del ejemplo 3.13 para determinar la dirección de la aceleración a fin de encontrar la expresión de la aceleración de una partícula que se mueve en un círculo a velocidad constante. Los vectores posición y velocidad de una partícula que se está moviendo en un círculo a velocidad constante se muestran en la figura 3.35. El ángulo  $\Delta\theta$  entre  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{v}(t + \Delta t)$  es el mismo que entre  $\mathbf{r}(t)$  y  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ , ya que los vectores posición y velocidad deben girar el mismo ángulo para conservar su perpendicularidad mutua. Con los dos vectores velocidad y con  $\Delta\mathbf{v}$  se forma un primer triángulo isósceles. El segundo triángulo isósceles se forma con los dos vectores posición y con  $\Delta\mathbf{r}$ . Para encontrar la dirección del vector aceleración examinamos el triángulo formado por los dos vectores velocidad y  $\Delta\mathbf{v}$ . La suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$  y los ángulos de la base de cualquier triángulo isósceles son iguales. En el límite en que  $\Delta t$  es muy pequeño,  $\Delta\theta$  también es muy pequeño por lo que en este límite los dos ángulos de la base se aproximan a  $90^\circ$ . Esto significa que  $\Delta\mathbf{v}$  es perpendicular a la velocidad. Si  $\Delta\mathbf{v}$  se dibuja en la posición de la partícula señala en la dirección centrípeta.

Los dos triángulos son semejantes, por lo que  $|\Delta\mathbf{v}|/v = |\Delta\mathbf{r}|/r$  (dado que las longitudes de formas semejantes son proporcionales). Dividiendo los dos términos por  $\Delta t$  y reorganizando nos queda

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{v|\Delta\mathbf{r}|}{r\Delta t}$$

En el límite cuando  $\Delta t$  es muy pequeño, el término  $|\Delta\mathbf{v}|/\Delta t$  se parece cada vez más al módulo de la aceleración instantánea  $a$ , y el término  $|\Delta\mathbf{r}|/\Delta t$  se parece a  $v$ , el módulo de la velocidad instantánea. Si sustituimos estas igualdades en el límite,

$$a = a_c = \frac{v^2}{r} \quad (3.24)$$

ACELERACIÓN CENTRÍPETA

Habitualmente se describe el movimiento de una partícula en un círculo con velocidad constante a partir del tiempo  $T$  requerido para realizar una vuelta completa, magnitud que se denomina **periodo**. Durante un periodo, la partícula se mueve una distancia  $2\pi r$  (donde  $r$  es el radio del círculo), por lo que la velocidad de la misma está relacionada con  $r$  y con  $T$  mediante la expresión

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (3.25)$$

### EJEMPLO 3.14 | Movimiento de un satélite

Un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor del centro de la Tierra y cerca de la superficie de la Tierra. Si su aceleración es  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , determinar (a) su velocidad escalar y (b) el tiempo que invierte en una revolución completa.

**Planteamiento del problema** Como el satélite tiene su órbita cerca de la superficie de la Tierra, consideraremos que el radio de la órbita es el radio de la Tierra,  $r = 6370 \text{ km}$ .

- (a) La aceleración centrípeta  $v^2/r$  se iguala a  $g$  y se despeja  $v$ :
- $$a = \frac{v^2}{r} = g \quad \text{o}$$
- $$v = \sqrt{rg} = \sqrt{(6370 \text{ km})(9,81 \text{ m/s}^2)}$$
- $$= \boxed{7,91 \text{ km/s}}$$
- (b) Para calcular el valor del periodo  $T$  se usa la ecuación 3.25:
- $$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6370 \text{ km})}{7,91 \text{ km/s}} = \boxed{5060 \text{ s} = 84,3 \text{ min}}$$

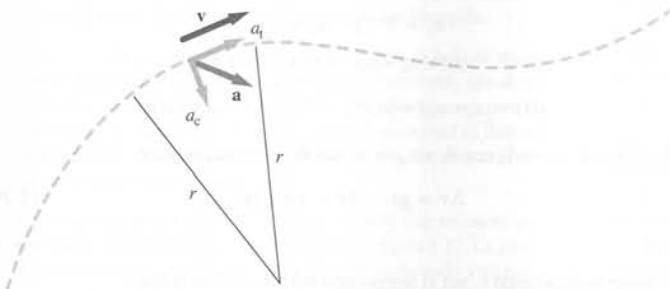
**Observación** La órbita real de los satélites se sitúa unos pocos centenares de kilómetros por encima de la superficie terrestre, es decir,  $r$  excede ligeramente el radio terrestre (6370 km). En consecuencia la aceleración centrípeta es algo inferior a  $9,81 \text{ m/s}^2$  a causa del descenso de la fuerza gravitatoria con respecto a la distancia del centro de la Tierra. Muchos satélites están en estas órbitas y sus periodos son de unos 90 minutos.

**Ejercicio** Un coche va a  $48 \text{ km/h}$  y sigue una curva de  $40 \text{ m}$  de radio. ¿Cuál es su aceleración centrípeta? (Respuesta  $4,44 \text{ m/s}^2$ )

Una partícula que se mueve en un círculo con *velocidad variable* tiene una componente de la aceleración tangente a la trayectoria,  $dv/dt$ , y una componente según el radio, la aceleración centrípeta,  $v^2/r$ . Al analizar, en general, el movimiento de una partícula a lo largo de una curva, la trayectoria se puede dividir en arcos de circunferencia (figura 3.36). La partícula en cada uno de estos arcos de circunferencia tiene una aceleración centrípeta  $v^2/r$  dirigida hacia el centro de curvatura y, si varía la velocidad, tiene además una aceleración tangencial

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (3.26)$$

ACELERACIÓN TANGENCIAL



**Figura 3.36** Cuando una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva se considera que cada pequeño intervalo de tiempo se mueve siguiendo un arco de circunferencia distinto. El vector aceleración instantánea tiene una componente  $a_c = v^2/r$  dirigida hacia el centro de curvatura del arco y una componente  $a_t = dv/dt$  tangencial a la curva.

## Resumen

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### 1. Vectores

Definición

Los vectores son magnitudes que tienen módulo y dirección. Se suman como los desplazamientos.

Componentes

La componente de un vector a lo largo de una línea en el espacio es su proyección sobre dicha línea. Si  $A$  forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ , sus componentes  $x$  e  $y$  son

$$A_x = A \cos \theta \quad (3.2)$$

$$A_y = A \sin \theta \quad (3.3)$$

Módulo

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (3.5a)$$

Suma gráfica de vectores

Dos vectores cualesquiera cuyos módulos poseen las mismas unidades pueden sumarse gráficamente situando la cola de la flecha que representa a uno de ellos en el extremo o cabeza del otro.

Suma de vectores mediante componentes

Si  $C = A + B$ , entonces

$$C_x = A_x + B_x \quad (3.6a)$$

y

$$C_y = A_y + B_y \quad (3.6b)$$

Vectores unitarios

Un vector  $\mathbf{A}$  puede escribirse en función de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  de módulo unidad dirigidos respectivamente a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (3.7)$$

Vector posición

El vector posición  $\mathbf{r}$  apunta desde el origen del sistema de coordenadas a la posición de la partícula.

Vector velocidad instantánea

El vector velocidad  $\mathbf{v}$  es la variación del vector posición respecto al tiempo. Su módulo es la velocidad y su dirección es la del movimiento.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.12)$$

Vector aceleración instantánea

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.16)$$

## 2. Velocidad relativa

Si una partícula se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{pA}$  respecto a un sistema de coordenadas  $A$ , el cual a su vez se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{AB}$  respecto a otro sistema de coordenadas  $B$ , la velocidad de la partícula respecto a  $B$  es

$$\mathbf{v}_{pB} = \mathbf{v}_{pA} + \mathbf{v}_{AB} \quad (3.14)$$

## 3. Movimientos de proyectiles

En las ecuaciones de esta sección se considera que la dirección positiva del eje  $x$  es horizontal y que la dirección positiva del eje  $y$  es vertical dirigida hacia arriba.

Independencia del movimiento

En el movimiento de proyectiles, los movimientos horizontal y vertical son independientes. Así,

$$a_x = 0 \quad \text{y} \quad a_y = -g.$$

Dependencia con el tiempo

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \quad v_y(t) = v_{0y} + a_y t \quad (2.14)$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \quad y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad (2.16)$$

donde  $a_x = 0$ ,  $a_y = -g$ ,  $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$  y  $v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$ . Alternativamente,

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{g}t, \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g}t^2 \quad (3.20c, 3.21c)$$

donde  $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$

Alcance

El alcance se obtiene multiplicando  $v_x$  por el tiempo total del proyectil en el aire.

## 4. Movimiento circular

Aceleración centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (3.24)$$

Aceleración tangencial

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (3.26)$$

donde  $v$  es la velocidad escalar

Periodo

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (3.25)$$

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

**iSOLVE** Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

**iOLV ✓** Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

## Vectores y suma de vectores

- 1 ● **SSM** ¿Puede el módulo del desplazamiento de una partícula ser menor que la distancia recorrida por la partícula a lo largo de su trayectoria? ¿Puede su módulo ser mayor que la distancia recorrida? Razonar la respuesta.
- 2 ● Dar un ejemplo en el cual la distancia recorrida es una magnitud significativa, mientras que el correspondiente desplazamiento es nulo.
- 3 ● ¿Cuál es la velocidad media aproximada de los bólidos que participan en la prueba de Indianápolis 500?
- 4 ● **RESOLVE** Verdadero o falso: El módulo de la suma de dos vectores *debe ser* mayor que el módulo de cada vector.
- 5 ● ¿Puede una componente de un vector tener un módulo mayor que el módulo del propio vector? ¿En qué circunstancias la componente de un vector puede tener un módulo igual al módulo del propio vector?
- 6 ● **SSM** ¿Puede un vector ser igual a cero y, sin embargo, tener una o más componentes distintas de cero?
- 7 ● **RESOLVE** ¿Son las componentes de  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  necesariamente superiores a las correspondientes componentes de  $\mathbf{A}$  o  $\mathbf{B}$ ?
- 8 ● **SSM** Verdadero o falso: El vector velocidad instantánea siempre señala en la dirección del movimiento.
- 9 ● Si un objeto se mueve hacia el oeste, ¿en qué dirección acelera? (a) Norte, (b) Este, (c) Oeste, (d) Sur, (e) Puede ser cualquier dirección.
- 10 ● **RESOLVE** Un jugador de golf golpea con fuerza la bola de modo que ésta describe un largo arco. Cuando la bola está en el punto más alto de su vuelo, (a) su velocidad y aceleración se anulan, (b) su velocidad es cero pero su aceleración no se anula, (c) su aceleración es cero pero su velocidad es distinta de cero, (d) su velocidad y su aceleración son ambas distintas de cero, (e) falta información para contestar correctamente.
- 11 ● La velocidad de una partícula se dirige hacia el este mientras que su aceleración se dirige hacia el noroeste como muestra la figura 3.37. La partícula, (a) está acelerando y girando hacia el norte, (b) está acelerando y girando hacia el sur, (c) está frenando y girando hacia el norte, (d) está frenando y girando hacia el sur, (e) mantiene constante su velocidad y gira hacia el sur.

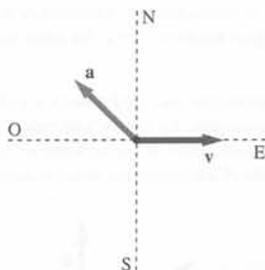


Figura 3.37 Problema 11

12 ● **SSM** Si se conocen los vectores posición de una partícula en dos puntos de su trayectoria, el tiempo que tarda en moverse de un punto a otro y se supone que la aceleración es constante, se puede calcular (a) la velocidad media de la partícula, (b) la aceleración media de la partícula, (c) la velocidad instantánea de la partícula, (d) la aceleración instantánea de la partícula, (e) no se dispone de la información suficiente para describir el movimiento de la partícula.

13 ● Considere la trayectoria de una partícula en su movimiento por el espacio. (a) ¿Cómo se relaciona geoméricamente el vector velocidad con la trayectoria de la partícula? (b) Esquematice una trayectoria y dibuje el vector velocidad de la partícula para distintas posiciones a lo largo de la trayectoria.

14 ● La aceleración de un vehículo es nula cuando (a) gira hacia la derecha a velocidad constante, (b) sube por una carretera pendiente y recta a velocidad constante, (c) corona la cima de una colina a velocidad constante, (d) llega a la parte más baja de un valle a velocidad constante, (e) aumenta su velocidad cuando baja a lo largo de una pendiente recta.

15 ● **SSM** Dar algunos ejemplos de movimiento en los cuales las direcciones de los vectores velocidad y posición las (a) opuestas, (b) las mismas y (c) mutuamente perpendiculares.

16 ● **RESOLVE** ¿Cómo es posible que una partícula que se mueva a velocidad escalar constante tenga una aceleración constante? ¿Puede una partícula con velocidad constante estar, a la vez, acelerando?

17 ● Un dardo se lanza verticalmente hacia arriba. Cuando sale de la mano del lanzador, pierde velocidad uniformemente a medida que gana altura hasta que se clava en el techo de la habitación. (a) Dibujar el vector velocidad en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , en donde  $\Delta t = t_2 - t_1$  es un intervalo pequeño. A partir del dibujo determinar la dirección del cambio de velocidad  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  y con ello la dirección del vector aceleración. (b) Poco después de chocar con el techo, el dardo cae y acelera hasta que llega al suelo. Repita el apartado (a) para encontrar la dirección del vector aceleración durante la caída. (c) Ahora imagine que tira el dardo horizontalmente. ¿Cuál es la dirección del vector aceleración después que haya dejado su mano pero antes que golpee el suelo?

18 ● **SSM** Una gimnasta salta sobre una plataforma elástica y cuando se aproxima al punto más bajo de su caída pierde velocidad. Suponiendo que cae verticalmente, haga un diagrama del movimiento para encontrar la dirección de su vector aceleración, dibujando los vectores velocidad de la saltadora en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , siendo pequeño el intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Deducir del dibujo la dirección del cambio de velocidad  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  y con ello, la dirección del vector aceleración.

19 ● La saltadora del problema 18, después de alcanzar el punto más bajo de su salto en el tiempo  $t_{\text{bajo}}$ , comienza a moverse hacia arriba aumentando su velocidad durante un corto tiempo hasta que la gravedad domina de nuevo su movimiento. Dibujar los vectores velocidad en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , en donde  $\Delta t = t_2 - t_1$  es un pequeño intervalo y  $t_1 < t_{\text{bajo}} < t_2$ . Deducir del dibujo la dirección del cambio de velocidad  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  y con ello, la dirección del vector aceleración.

20 ● Un río de orillas rectas y paralelas tiene una anchura de 0,76 km (véase la figura 3.38). La corriente del río baja a 4,0 km/h y es paralela a los márgenes. El barquero que conduce una barcaza que puede alcanzar una velocidad máxima de 4,0 km/h en aguas quietas desea ir de A a B, donde AB es perpendicular a la orilla. El barquero debe (a) dirigir la barca directamente a través del río, perpendicular a la orilla siguiendo AB, (b) poner un rumbo de  $53^\circ$  dirigido hacia aguas arriba respecto la dirección AB, (c) poner un rumbo de  $37^\circ$  dirigido hacia aguas arriba respecto la dirección AB, (d) renunciar ya que es imposible ir de A hasta B con una nave de estas características, (e) ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

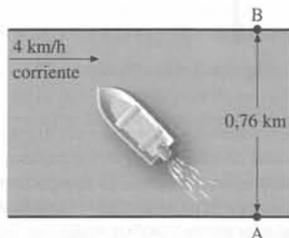


Figura 3.38 Problema 20

21 ● **SSM** Verdadero o falso: Cuando un proyectil se dispara horizontalmente, invierte el mismo tiempo en caer que un proyectil soltado en reposo desde la misma altura. Ignórese los efectos de la resistencia del aire.

22 ● **ICONT** Un proyectil se lanza con un ángulo de tiro de  $35^\circ$  por encima de la horizontal. En el punto más alto de la trayectoria, su velocidad es de 200 m/s. La velocidad inicial tenía una componente horizontal de (a) 0, (b)  $200 \cos(35^\circ)$  m/s, (c)  $200 \sin(53^\circ)$  m/s, (d)  $(200 \text{ m/s})/\cos 35^\circ$ , (e) 200 m/s. No considere los efectos de la resistencia del aire.

23 ● La figura 3.39 representa la trayectoria parabólica de una bola que va de A a E. ¿Cuál es la dirección de la aceleración en el punto B? (a) Hacia arriba y hacia la derecha. (b) Hacia abajo y hacia la izquierda. (c) Verticalmente hacia arriba. (d) Verticalmente hacia abajo. (e) La aceleración de la bola es cero.

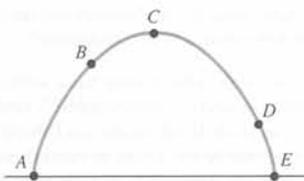


Figura 3.39 Problemas 23 y 24

24 ● (a) ¿En qué punto(s) de la figura 3.39 el módulo de la velocidad es el mayor de todos? (b) ¿En qué punto(s) el módulo de la velocidad es el menor de todos? (c) ¿En qué dos puntos el módulo de la velocidad es el mismo? ¿Es el vector velocidad el mismo en esos puntos?

25 ● **ICONT** Verdadero o falso:

- (a) Si el módulo de la velocidad es constante, la aceleración debe ser cero.  
 (b) Si la aceleración es cero, el módulo de la velocidad debe ser constante.

26 ● Las velocidades inicial y final de un objeto son las indicadas en la figura 3.40. Indicar la dirección de la velocidad media.

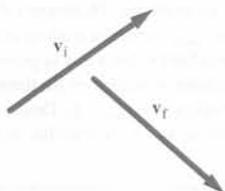


Figura 3.40 Problema 26

27 ● Las velocidades de los objetos A y B se muestran en la figura 3.41. Dibujar un vector que represente la velocidad de B relativa a A.

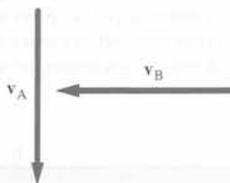


Figura 3.41 Problema 27

28 ● **SSM** Un vector  $\mathbf{A}(t)$  tiene un módulo constante, pero su dirección cambia. (a) Encontrar  $d\mathbf{A}/dt$  de la siguiente manera: dibujar los vectores  $\mathbf{A}(t + \Delta t)$  y  $\mathbf{A}(t)$  para un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$  y determinar gráficamente la diferencia  $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$ . ¿Cuál es la dirección de  $\Delta\mathbf{A}$  respecto a A para pequeños intervalos de tiempo? (b) Interpretar este resultado para los casos especiales en que A representa la posición de una partícula con respecto a un sistema de coordenadas. (c) ¿Puede A representar un vector velocidad? Explicarlo.

29 ● La figura 3.42 muestra la trayectoria de un automóvil, formada por segmentos rectilíneos y arcos de circunferencias. El coche parte del reposo en el punto A. Después que alcanza el punto B marcha con velocidad constante hasta que alcanza el punto E. Acaba en reposo en el punto F. (a) En el medio de

cada segmento (AB, BC, CD, DE, y EF), ¿cuál es la dirección del vector velocidad? (b) ¿En qué puntos el automóvil tiene aceleración? En estos casos, ¿cuál es la dirección de la aceleración? (c) ¿Qué relación tienen los módulos de la aceleración en los tramos BC y DE?

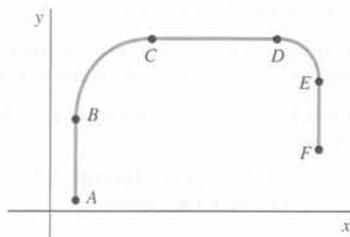


Figura 3.42 Problema 29

30 ● **SSM** Dos cañones están situados uno frente a otro, como muestra la figura 3.43. Cuando disparen las balas seguirán las trayectorias que se muestran, siendo P el punto donde las trayectorias se cruzan. Si se quiere que las balas choquen, ¿hay que disparar primero el cañón A, el cañón B o bien hay que disparar los dos cañones simultáneamente? Ignórense los efectos de la resistencia del aire.

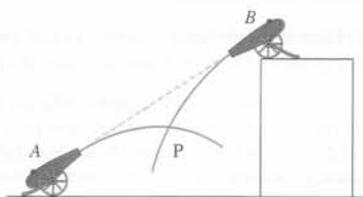


Figura 3.43 Problema 30

31 ● Galileo en su obra "Diálogo respecto los dos sistemas del mundo" escribió: "Enciérrase ... en el camarote principal situado bajo la cubierta de un barco grande y ... cuelgue una botella que se vacíe, gota a gota, en un recipiente situado debajo. Después de observar cuidadosamente el fenómeno ... y de que el barco haya seguido cualquier velocidad, siempre y cuando el movimiento haya sido uniforme y no fluctuante, las gotas siempre caen como antes sin que, en ningún caso, se dirijan hacia la dirección de la popa del buque, aunque el barco recorra un gran trecho mientras las gotas están en el aire". Explique esta cita.

32 ● Una persona mueve una piedra atada a una cuerda en un círculo horizontal a velocidad constante. La figura 3.44 representa la trayectoria del objeto visto desde arriba. (a) ¿Cuál de los vectores de la figura representan la velocidad de la piedra? (b) ¿Cuál representa la aceleración?

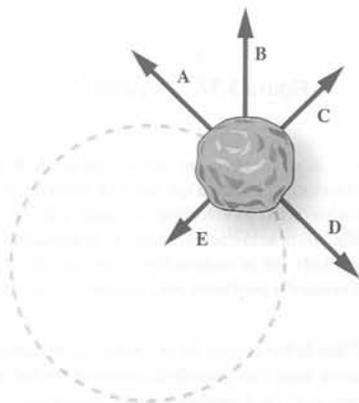


Figura 3.44 Problema 32

33 ● Verdadero o falso: Un objeto no se mueve en una trayectoria circular si no está acelerado.

34 ●● Usando un esquema del movimiento, encontrar la dirección de la aceleración de la masa de un péndulo cuando la masa está en el punto donde cambia el sentido de su movimiento.

35 ● Con un bate de béisbol se golpea una pelota a 177 km/h. Supongamos que la pelota es bateada con un ángulo de  $35^\circ$ , que es un valor muy corriente en este deporte. Usando la ecuación 3.23 para calcular la distancia que alcanza una bola golpeada en las condiciones anteriormente mencionadas se obtiene que la pelota llega hasta 232 m pero, en realidad, la pelota apenas alcanzará los 80 m. Argumente porqué la ecuación 3.23 da una predicción tan mala en este caso. Si puede, considere el concepto de *velocidad terminal* o *velocidad límite*.

**Aproximaciones y estimaciones**

36 ●● SSM Estimar qué distancia alcanza una pelota si se lanza (a) horizontalmente desde el suelo, (b) con un ángulo de  $45^\circ$  desde el suelo, (c) horizontalmente desde la azotea de un edificio situada 12 m por encima del nivel de la calle, (d) con un ángulo de  $45^\circ$  desde la azotea de un edificio situada 12 m por encima del nivel del suelo.

37 ●● **¡SOLVE!** En 1978, Geoff Capes del Reino Unido, lanzó un ladrillo pesado una distancia horizontal de 44,5 m. Determinar la velocidad aproximada del ladrillo en el punto más alto de su trayectoria, sin considerar los efectos de la resistencia del aire.

**Vectores, suma de vectores y sistemas de coordenadas**

38 ● La aguja de los minutos de un reloj de pared tiene 0,5 m de longitud y la de las horas tiene 0,25 m. Considerando el centro del reloj como origen y eligiendo un sistema de coordenadas apropiado, escribise la posición de las agujas de las horas y de los minutos con vectores cuando el reloj señala (a) 12:00, (b) 3:30, (c) 6:30, (d) 7:15. (e) Si **A** es la posición del extremo de la aguja de los minutos y **B** es la posición del extremo de la aguja de las horas, calcular **A**·**B** para las horas dadas en los apartados (a)-(d) anteriores.

39 ● SSM Un oso se mueve 12 m hacia el noreste y 12 m hacia el este. Muéstrase gráficamente cada desplazamiento y determínese gráficamente el desplazamiento total, como en el ejemplo 3.2(a).

40 ● **¡SOLVE!** Un arco circular está centrado en  $x = 0$  e  $y = 0$ . (a) Una estudiante se mueve por el arco circular desde la posición  $x = 5$  m,  $y = 0$  hasta la posición final  $x = 0$ ,  $y = 5$  m. ¿Cuál es su desplazamiento? (b) Un segundo estudiante se mueve desde la misma posición inicial siguiendo el eje  $x$  hasta el origen para seguir después a lo largo del eje  $y$  y hasta  $y = 5$  m y  $x = 0$ . ¿Cuál es su desplazamiento?

41 ● SSM **¡SOLVE!** En el caso de los dos vectores **A** y **B** indicados en la figura 3.45, hallar gráficamente como en el ejemplo 3.2(a): (a) **A** + **B**, (b) **A** - **B**, (c) 2**A** + **B**, (d) **B** - **A**, (e) 2**B** - **A**.

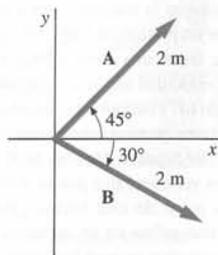
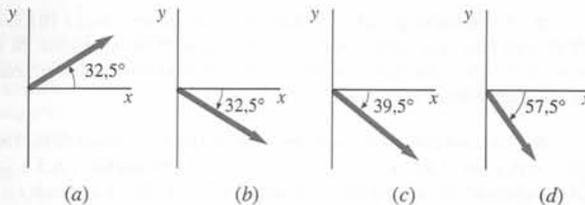


Figura 3.45 Problema 41

42 ● Un muchacho explorador pasea 2,4 km hacia el este del campamento, luego se desvía hacia su izquierda y recorre 2,4 km a lo largo de un arco de círculo centrado en el campamento. (a) ¿A qué distancia del campamento se encuentra finalmente el muchacho? (b) ¿Cuál es la dirección de la posición del muchacho medida desde el campamento? (c) ¿Cuál es el cociente entre el desplazamiento final y la distancia total recorrida?

43 ● Un vector velocidad tiene una componente  $x$  de +5,5 m/s y una componente  $y$  de -3,5 m/s. ¿Qué diagrama de la figura 3.46 representa la dirección del vector?



(e) Ninguno de los anteriores.

Figura 3.46 Problema 43

44 ● **¡SOLVE!** Tres vectores **A**, **B**, y **C** tienen las siguientes componentes  $x$  e  $y$ :  $A_x = 6$ ,  $A_y = -3$ ;  $B_x = -3$ ,  $B_y = 4$ ;  $C_x = 2$ ,  $C_y = 5$ . La magnitud de **A** + **B** + **C** es (a) 3,3, (b) 5,0, (c) 11, (d) 7,8, (e) 14.

45 ● Hallar las componentes rectangulares de los vectores **A**, que están comprendidas en el plano  $xy$  y forman un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ , como se ve en la figura 3.47, para los siguientes valores de  $A$  y  $\theta$ : (a)  $A = 10$  m,  $\theta = 30^\circ$ ; (b)  $A = 5$  m,  $\theta = 45^\circ$ ; (c)  $A = 7$  km,  $\theta = 60^\circ$ ; (d)  $A = 5$  km,  $\theta = 90^\circ$ ; (e)  $A = 15$  km/s,  $\theta = 150^\circ$ ; (f)  $A = 10$  m/s,  $\theta = 240^\circ$ ; y (g)  $A = 8$  m/s<sup>2</sup>,  $\theta = 270^\circ$ .

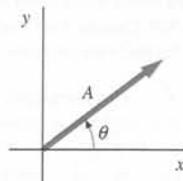


Figura 3.47 Problema 45

46 ● SSM Un vector **A** tiene el módulo de 8 m y forma un ángulo de  $37^\circ$  con el eje  $x$ ; el vector **B** = (3 m) **i** - (5 m) **j**; el vector **C** = (-6 m) **i** + (3 m) **j**. Determinar los siguientes vectores: (a) **D** = **A** + **C**; (b) **E** = **B** - **A**; (c) **F** = **A** - 2**B** + 3**C**; (d) un vector **G** tal que **G** - **B** = **A** + 2**C** + 3**G**.

47 ●● Hallar el módulo y la dirección de los siguientes vectores: (a) **A** = 5**i** + 3**j**; (b) **B** = 10**i** - 7**j**; y (c) **C** = -2**i** - 3**j** + 4**k**.

48 ● Hallar el módulo y dirección de **A**, **B** y **C** = **A** + **B** en los casos (a) **A** = -4**i** - 7**j**; **B** = 3**i** - 2**j**; y (b) **A** = 1**i** - 4**j**, **B** = 2**i** + 6**j**.

49 ● Describir los vectores siguientes utilizando los vectores unitarios **i** y **j**: (a) una velocidad de 10 m/s con un ángulo de elevación de  $60^\circ$ ; (b) un vector **A** de módulo  $A = 5$  m y  $\theta = 225^\circ$ ; y (c) un desplazamiento desde el origen al punto  $x = 14$  m,  $y = -6$  m.

50 ● En el caso del vector **A** = 3**i** + 4**j**, hallar otros tres vectores cualesquiera **B** que estén también comprendidos en el plano  $xy$  y que tengan la propiedad de que  $A = B$ , pero **A** ≠ **B**. Escribir los vectores en función de sus componentes y dibujarlos gráficamente.

51 ●● SSM Un cubo de arista 3 m tiene sus caras paralelas a los planos coordenados y un vértice en el origen. Una mosca situada en el origen se mueve a lo largo de tres aristas hasta llegar al vértice opuesto. Escribir el vector desplazamiento de la mosca utilizando los vectores **i**, **j** y **k**, y hallar el módulo de su desplazamiento.

52 ● SSM Un barco en alta mar recibe señales de radio emitidas desde dos transmisores A y B que están separados 100 km, uno al sur del otro. El localizador de direcciones detecta que la transmisión desde A está  $30^\circ$  al sudeste, mientras que la transmisión de B procede del este. Calcular la distancia entre el barco y el transmisor B.

### Vectores velocidad y aceleración

53 ● Un operador de radar fijo determina que un barco está a 10 km al sur de él. Una hora más tarde el mismo barco está a 20 km al sudeste. Si el barco se movió con velocidad constante siempre en la misma dirección, ¿cuál era su velocidad durante ese tiempo?

54 ● Las coordenadas de posición de una partícula ( $x, y$ ) son (2 m, 3 m) cuando  $t = 0$ ; (6 m, 7 m) cuando  $t = 2$  s; y (13 m, 14 m) cuando  $t = 5$  s. (a) Hallar la velocidad media  $v_m$  desde  $t = 0$  hasta  $t = 2$  s. (b) Hallar  $v_m$  desde  $t = 0$  hasta  $t = 5$  s.

55 ● SSM **ISOLVE** Una partícula que se mueve a 4,0 m/s en la dirección  $x$  positiva experimenta una aceleración de  $3,0 \text{ m/s}^2$  en la dirección  $y$  positiva durante 2,0 s. La velocidad final de la partícula es (a)  $-2,0 \text{ m/s}$ , (b)  $7,2 \text{ m/s}$ , (c)  $6,0 \text{ m/s}$ , (d)  $10 \text{ m/s}$ , (e) Ninguna de las anteriores.

56 ● Inicialmente una partícula se mueve hacia el oeste con una velocidad de 40 m/s y 5 s después se está moviendo hacia el norte a 30 m/s. (a) ¿Cuál ha sido el cambio del módulo de las velocidades de la partícula durante este tiempo? (b) ¿Cuál ha sido la variación de la dirección de la velocidad? (c) ¿Cuáles son el módulo y dirección de  $\Delta v$  en este intervalo? (d) ¿Cuáles son el módulo y dirección de  $a_m$  en este intervalo?

57 ● Cuando  $t = 0$  una partícula situada en el origen tiene una velocidad de 40 m/s con  $\theta = 45^\circ$ . Para  $t = 3$  s, la partícula está en  $x = 100 \text{ m}$ ,  $y = 80 \text{ m}$  con velocidad de 30 m/s y  $\theta = 50^\circ$ . Calcular (a) la velocidad media y (b) la aceleración media de la partícula durante este intervalo.

58 ● SSM **ISOLVE** Una partícula se mueve en un plano  $xy$  con aceleración constante. Para  $t = 0$ , la partícula se encuentra en la posición  $x = 4 \text{ m}$ ,  $y = 3 \text{ m}$  y posee la velocidad  $v = (2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (-9 \text{ m/s})\mathbf{j}$ . La aceleración viene dada por el valor  $a = (4 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$ . (a) Determinar el vector velocidad en el instante  $t = 2$  s. (b) Calcular el vector posición a  $t = 4$  s. Expresar el módulo y la dirección del vector posición.

59 ● **ISOLVE** El vector posición de una partícula viene dado por  $\mathbf{r} = (30t)\mathbf{i} + (40t - 5t^2)\mathbf{j}$ , en donde  $r$  se expresa en metros y  $t$  en segundos. Determinar los vectores velocidad instantánea y aceleración instantánea en función del tiempo  $t$ .

60 ● Una partícula tiene una aceleración constante  $a = (6 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (4 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$ . En el instante  $t = 0$ , la velocidad es cero y el vector de posición es  $\mathbf{r}_0 = (10 \text{ m})\mathbf{i}$ . (a) Hallar los vectores posición y velocidad en un instante cualquiera  $t$ . (b) Hallar la ecuación de la trayectoria en el plano  $xy$  y hacer un esquema de la misma.

61 ● **ISOLVE** Cuando sale del muelle, una barca fuera borda pone rumbo hacia el norte durante 20 s con una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$ . Posteriormente la barca vira hacia el oeste y se mueve durante 10 s con la velocidad adquirida durante los 20 s anteriores. (a) ¿Cuál es la velocidad media de la barca durante los 30 segundos de movimiento? (b) ¿Cuál es la aceleración media en el mismo intervalo de tiempo? (c) ¿Cuál es el desplazamiento de la barca desde su salida del muelle hasta pasados 30 s de iniciado el movimiento?

62 ● SSM María y Roberto deciden encontrarse en el lago Michigan. María parte en su lancha de Petoskey a las 9:00 a.m. y viaja hacia el norte a 8 mi/h. Roberto sale de su casa sobre la costa de Beaver Island, situada a 26 mi y  $30^\circ$  al oeste del norte de Petoskey a las 10:00 a.m. y viaja a una velocidad constante de 6 mi/h. ¿En qué dirección debe poner su rumbo Roberto para interceptar a María y dónde y cuándo se verificará el encuentro?

### Velocidad relativa

63 ● Un avión vuela a la velocidad de 250 km/h respecto al aire en reposo. Un viento sopla a 80 km/h en dirección noreste (es decir, en dirección  $45^\circ$  al este del norte). (a) ¿En qué dirección debe volar el avión para que su rumbo sea norte? (b) ¿Cuál es la velocidad del avión respecto al suelo?

64 ● **ISOLVE** Una nadadora intenta cruzar perpendicularmente un río nadando con una velocidad de 1,6 m/s respecto al agua tranquila. Sin embargo llega a la otra orilla en un punto que está 40 m más lejos en la dirección de la corriente. Sabiendo que el río tiene una anchura de 80 m (a) ¿cuál es la velocidad de la corriente del río? (b) ¿Cuál es la velocidad de la nadadora respecto a la orilla? (c) ¿En qué dirección debería nadar para llegar al punto directamente opuesto al punto de partida?

65 ● SSM Un pequeño avión sale del punto A y se dirige a un aeropuerto en el punto B, a 520 km en dirección norte. La velocidad del avión respecto al aire es de 240 km/h y existe un viento uniforme de 50 km/h que sopla del noroeste al sureste. Determinar el rumbo que debe tomar el avión y el tiempo de vuelo.

66 ● **ISOLVE** Dos embarcaderos están separados 2,0 km uno del otro sobre la misma orilla de un río, cuyas aguas fluyen a 1,4 km/h. Una lancha a motor hace el recorrido de ida y vuelta entre los dos embarcaderos en 50 min. ¿Cuál es la velocidad de la lancha respecto al agua?

67 ● Un concurso de aeromodelismo tiene las siguientes normas: Cada avión debe volar hasta un punto situado a 1 km de la salida y regresar de nuevo. El vencedor será el avión que realice el circuito completo en el tiempo más corto. Los competidores tienen la libertad de escoger el recorrido que desean, siempre que el avión se aleje 1 km de la salida y después regrese. El día del concurso, un viento uniforme sopla del norte a 5 m/s. Uno de los modelos puede mantener una velocidad respecto al aire de 15 m/s y se considera que los tiempos de arranque, parada y giro son despreciables. Se plantea la cuestión siguiente: ¿debe planearse el vuelo a favor del viento y contra el viento en el circuito o con viento cruzado este y oeste? Análcese el plan sobre estas dos alternativas: (1) El avión vuela 1 km al norte y después regresa; (2) el avión recorre 1 km hacia el este al arrancar y después regresa.

68 ● **ISOLVE** El piloto de un pequeño avión mantiene una velocidad con respecto al aire de 150 nudos (un nudo corresponde a la velocidad de una milla náutica por hora) y quiere volar hacia el norte ( $000^\circ$ ) con respecto a la Tierra. Si sopla un viento de 30 nudos del este ( $090^\circ$ ), calcular que rumbo (acimut) debe tomar el piloto.

69 ● SSM El coche A se mueve hacia el este a 20 m/s y se dirige a un cruce. Cuando A cruza la intersección, el coche B parte del reposo 40 m al norte del cruce y se mueve hacia el sur con una aceleración constante de  $2 \text{ m/s}^2$ . (a) ¿Qué posición ocupa B respecto a A 6 segundos después de que A cruza la intersección? (b) ¿Cuál es la velocidad de B respecto a A cuando  $t = 6$  s? (c) ¿Cuál es la aceleración de B respecto a A para  $t = 6$  s?

70 ● SSM Una pelota está por encima de una raqueta de tenis colocada en posición horizontal. Al soltar la pelota, ésta rebota en las cuerdas de la raqueta alcanzando el 64% de su altura inicial. (a) Encontrar la expresión para la velocidad de la pelota, después de rebotar, en función de la velocidad de la pelota justo antes del choque con la raqueta. (b) La misma pelota y la misma raqueta se utilizan para jugar un partido de tenis. Un jugador, al sacar, golpea la pelota (que supuestamente tiene una velocidad inicial nula) moviendo la raqueta a 25 m/s. ¿Con qué velocidad impulsa el jugador la bola? (Sugerencia): Use el resultado del apartado (a) y calcule la velocidad de la bola en el sistema de referencia de la raqueta para, posteriormente, calcular la velocidad de ésta en el sistema de referencia del jugador. (c) Una bien conocida ley de la física nos dice que nunca podemos ver como una pelota rebota hasta una altura superior de donde ha salido. A partir de este hecho, ¿puede encontrar un límite superior a la velocidad de una pelota en un servicio, independientemente del diseño de la raqueta? (Esta cuestión se podrá explicar más adelante en un contexto diferente: la idea de la conservación del ímpetu).

**Movimiento circular y aceleración centrípeta**

71 ● ¿Cuál es la aceleración del extremo de la aguja que señala los minutos en el reloj del problema 38? Expresarla como una fracción del módulo de la aceleración de la caída libre  $g$ .

72 ● Una centrifugadora gira a 15.000 rev/min. (a) Calcular la aceleración centrípeta en un tubo con una muestra situado a 15 cm del eje de rotación. (b) Para conseguir la velocidad máxima de rotación, la centrifugadora acelera durante 1 min. y 15 s. Calcular el módulo de la aceleración tangencial mientras acelera, suponiendo que ésta sea constante.

73 ● Un objeto situado en reposo en el ecuador experimenta una aceleración dirigida hacia el centro de la Tierra debido al movimiento rotacional de la Tierra alrededor de su eje y una aceleración dirigida hacia el Sol debida al movimiento orbital de la Tierra. Calcular los módulos de ambas aceleraciones y expresarlos como una fracción de la aceleración de caída libre de los cuerpos  $g$ . Usar los valores de los datos físicos que se incluye al final de este libro.

74 ● SSM Determine la aceleración que experimenta la Luna debida a la Tierra, usando para ello los valores de la distancia media y del periodo orbital que aparecen en la tabla de datos físicos al final del libro. Suponga que la órbita es circular. Expresé esta aceleración como una fracción del módulo de la aceleración de caída libre.

75 ● Un muchacho hace girar una bola atada a una cuerda en un círculo horizontal de 0,8 m de radio. ¿Cuántas revoluciones por minuto realiza la bola si el módulo de su aceleración centrípeta es  $g$  (el módulo de la aceleración de caída libre)?

**Proyectiles**

76 ● Un lanzador de béisbol lanza una pelota a 140 km/h hacia la base, que está a 18,4 m de distancia. Despreciando la resistencia del aire (no sería una buena cosa para el bateador), determinar cuánto ha descendido la pelota por causa de la gravedad en el momento en que alcanza la base.

77 ● Se lanza un proyectil con velocidad de módulo  $v_0$  y ángulo  $\theta_0$  respecto a la horizontal. Hallar una expresión que dé la altura máxima que alcanza por encima de su punto de partida en función de  $v_0$ ,  $\theta_0$  y  $g$ .

78 ● SSM Un proyectil se dispara con una velocidad inicial  $v_0$  bajo un ángulo de tiro de  $30^\circ$  sobre la horizontal desde una altura de 40 m por encima del suelo. El proyectil choca contra el suelo a una velocidad de  $1,2 v_0$ . Determinar  $v_0$ .

79 ● En la figura 3.48, si  $x$  es 50 m y  $h = 10$  m, ¿cuál es la velocidad mínima inicial del dardo para que choque contra el mono antes de llegar éste al suelo que está a 11,2 m por debajo de la posición inicial del mono?

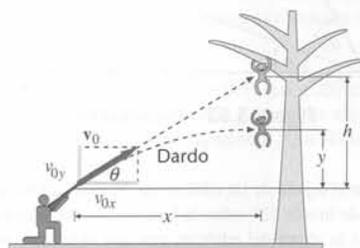


Figura 3.48 Problema 79

80 ● Un proyectil se dispara con una velocidad inicial de 53 m/s. Determinar el ángulo de proyección necesario para que la altura máxima del proyectil sea igual a su alcance horizontal.

81 ● Una bola lanzada al aire llega al suelo a una distancia de 40 m al cabo de 2,44 s. Determinar el módulo y la dirección de la velocidad inicial.

82 ● SSM **¡SOLVE!** Demostrar que si un objeto se lanza con velocidad  $v_0$  bajo un ángulo de tiro  $\theta$  por encima de la horizontal, el módulo de la velocidad a cierta altura  $h$ ,  $v(h)$ , es independiente de  $\theta$ .

83 ● A la mitad de su altura máxima, la velocidad de un proyectil es  $3/4$  de su velocidad inicial. ¿Qué ángulo forma el vector velocidad inicial con la horizontal?

84 ● **¡SOLVE!** Un avión de transporte vuela horizontalmente a una altura de 12 km con una velocidad de 900 km/h cuando un carro de combate se desprende de la rampa trasera de carga. (a) ¿Cuánto tiempo tarda el tanque en chocar contra el suelo? (b) ¿A qué distancia horizontal del punto donde cayó se encuentra el tanque cuando choca contra el suelo? (c) ¿A qué distancia está el tanque respecto al avión cuando choca contra el suelo, suponiendo que el avión sigue volando con velocidad constante?

85 ● SSM **¡SOLVE!** Dos personajes de dibujos animados responden a su argumento habitual y uno persigue al otro. El coyote Wiley (*Carnivorous hungribilous*) intenta cazar de nuevo al Correcaminos (*Speedibus cantcatchmi*). Ambos, en su frenética carrera llegan al borde de un profundo barranco de 15 m de ancho y 100 m de profundidad. El Correcaminos salta con un ángulo de  $15^\circ$  por encima de la horizontal y aterriza al otro lado del barranco sobrándole 1,5 m. (a) ¿Cuál era la velocidad del Correcaminos antes de iniciar el salto? Ignore la resistencia del aire. (b) El Coyote, con el mismo objetivo de superar el obstáculo, salta también con la misma velocidad inicial, pero con distinto ángulo de salida. Para su desgracia, le faltan 0,5 m para poder alcanzar el otro lado del barranco. ¿Con qué ángulo saltó? (Supóngase que éste fue inferior a  $15^\circ$ .)

86 ● Un cañón se ajusta con un ángulo de tiro de  $45^\circ$ . Dispara una bola con una velocidad de 300 m/s. (a) ¿A qué altura llegará la bala? (b) ¿Cuánto tiempo estará en el aire? (c) ¿Cuál es el alcance horizontal del cañón?

87 ● Una piedra lanzada horizontalmente desde lo alto de una torre choca contra el suelo a una distancia de 18 m de su base. (a) Sabiendo que la altura de la torre es de 24 m, calcular la velocidad con que fue lanzada la piedra. (b) Calcular la velocidad de la piedra justo antes de que ésta golpee el suelo.

88 ● **¡SOLVE!** Se dispara un proyectil al aire desde la cima de una montaña a 200 m por encima de un valle (figura 3.49). Su velocidad inicial es de 60 m/s a  $60^\circ$  respecto a la horizontal. Despreciando la resistencia del aire, ¿dónde caerá el proyectil?

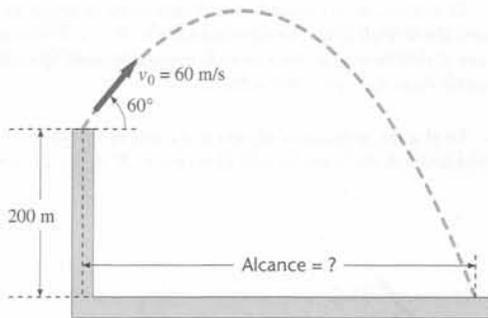


Figura 3.49 Problema 88

89 ● El alcance de un proyectil disparado horizontalmente desde lo alto de un monte es igual a la altura de éste. ¿Cuál es la dirección del vector velocidad cuando el proyectil choca contra el suelo?

90 ● Se dispara un proyectil con un ángulo de  $60^\circ$  por encima de la horizontal y con una velocidad inicial de 300 m/s. Calcular (a) la distancia horizontal recorrida por el proyectil y (b) la distancia vertical alcanzada después de transcurridos los primeros 6 s.

91 ●● Una bala de cañón se dispara con una velocidad inicial de 42,2 m/s, desde una altura de 40 m y con un ángulo de 30° por encima de la horizontal. Encontrar el alcance de la bala.

92 ●● SSM **¡SOLVE!** Un arco lanza flechas con una velocidad del orden de 45 m/s. (a) Un arquero Tártaro sentado a horcajadas en su caballo dispara una flecha elevando el arco 10° por encima de la horizontal. Si el arco está 2,25 m por encima del suelo, ¿cuál es el alcance de la flecha? Supóngase que el suelo está nivelado y no considere la resistencia del aire. (b) Supóngase ahora que el caballo se mueve a galope tendido en la misma dirección en que se dispara la flecha y que el arquero coloca el arco de la misma forma que en el apartado anterior. Si la velocidad del caballo es de 12 m/s, ¿cuál es ahora el alcance de la flecha?

93 ● **¡SOLVE!** Con el uso de un cañón de patatas (instrumento medio juguete medio real), Chuck lanza patatas horizontalmente con una velocidad inicial de 50 m/s. (a) Si Chuck mantiene el aparato 1 m por encima del suelo, ¿cuánto tiempo está el tubérculo en el aire después de su lanzamiento? (b) ¿Hasta dónde llega antes de tocar el suelo? (Se puede obtener información sobre los cañones de patata en Internet buscando *potato cannons*.)

94 ●● Calcular  $dR/d\theta$  a partir de  $R = (v_0^2/g) \sin(2\theta_0)$  y mostrar que poniendo  $dR/d\theta = 0$  nos da que para el ángulo  $\theta = 45^\circ$  se obtiene el máximo alcance.

95 ● SSM En un corto relato de ciencia ficción escrito durante los años 1970, Ben Bova describió un conflicto entre dos hipotéticas colonias en la Luna – una fundada por los Estados Unidos y la otra fundada por la Unión Soviética. En la historia, los colonos de cada colonia empiezan a dispararse entre ellos hasta que se dan cuenta, con horror, que sus armas dan suficiente velocidad inicial a las balas para que éstas se sitúen en órbita. (a) Si el módulo de la aceleración de la gravedad en la Luna es 1,67 m/s<sup>2</sup>, ¿cuál es el alcance máximo de una bala cuya velocidad inicial es de 900 m/s? (Supóngase que la curvatura de la superficie de la Luna es despreciable.) (b) ¿Cuál debería ser la velocidad inicial de una bala disparada en la superficie de la Luna para que ésta pudiera situarse en órbita alrededor del satélite? (Hay que buscar el radio de la Luna.)

96 ●●● En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es  $R = (v_0^2/g) \sin(2\theta_0)$ . Demostrar que el cambio en el alcance causado por una pequeña variación de la aceleración de la gravedad viene dado por  $\Delta R/R = -\Delta g/g$ .

97 ●●● En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es  $R = (v_0^2/g) \sin(2\theta_0)$ . Demostrar que el cambio en el alcance causado por una pequeña variación de la velocidad inicial viene dado por  $\Delta R/R = 2\Delta v_0/v_0$ .

98 ●●● En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es  $R = (v_0^2/g) \sin(2\theta_0)$ .

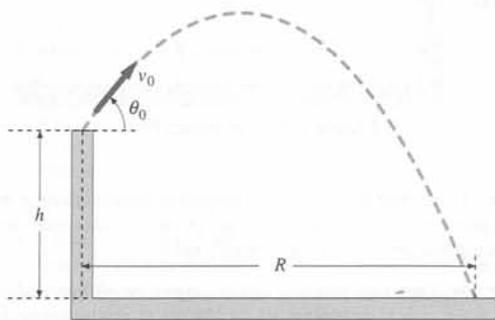


Figura 3.50 Problema 98

Demostrar que el alcance para un problema más general como el que se muestra en la figura 3.50 donde  $\Delta y \neq 0$  viene dado por

$$R = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \theta_0}}\right) \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta_0$$

99 ●● SSM Un proyectil se dispara con un ángulo de elevación  $\theta$ . Un observador situado junto a la rampa de lanzamiento sitúa la posición del proyectil midiendo el ángulo de elevación  $\phi$  que se muestra en la figura 3.51 cuando éste está en su máxima elevación. Demostrar que  $\phi = \frac{1}{2} \text{tg } \theta$ .

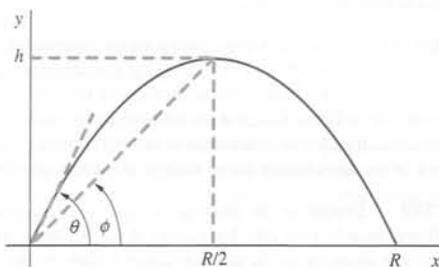


Figura 3.51 Problema 99

100 ● Un proyectil se dispara con una velocidad inicial desconocida y aterriza, 20 s más tarde, en la ladera de una colina situada a una distancia horizontal de 3000 m y a 450 m por encima del punto desde donde se ha realizado el disparo. (a) ¿Cuál es la componente vertical de su velocidad inicial? (b) ¿Cuál es la componente horizontal de su velocidad inicial?

101 ●● SSM Una piedra se lanza horizontalmente desde lo alto de una cuesta que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Si la velocidad inicial de la piedra es  $v_0$ , ¿a qué distancia caerá sobre la cuesta?

102 ●●● Un cañón de juguete se coloca en una rampa que tiene una pendiente con un ángulo  $\phi$ . (a) Si la bala se proyecta hacia arriba por una colina con un ángulo de  $\theta_0$  por encima de la horizontal (figura 3.52) y tiene una velocidad inicial  $v_0$ , demostrar que el alcance  $R$  (medido a lo largo de la rampa) viene dado por

$$R = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta_0 (\text{tg } \theta_0 - \text{tg } \phi)}{g \cos \phi}$$

Ignorar la resistencia del aire.

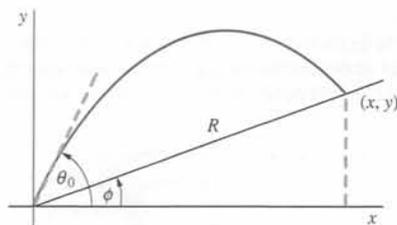


Figura 3.52 Problema 102

103 ●● Desde el tejado de un edificio de 20 m de altura se lanza una piedra con un ángulo de tiro de 53° sobre la horizontal. Si el alcance horizontal de la piedra es igual a la altura del edificio, con qué velocidad se lanzó la roca? ¿Cuál es la velocidad de ésta justo antes de chocar contra el suelo?

104 ●● Una muchacha que está a 4 m de una pared vertical lanza contra ella una pelota (figura 3.53). La pelota sale de su mano a 2 m por encima del suelo con una velocidad inicial  $v_0 = (10 \text{ m/s})(i + j)$  o  $10\sqrt{2}$  m/s a 45°. Cuando la pelota choca en la pared, se invierte la componente horizontal de su veloci-

dad mientras que permanece sin variar su componente vertical. ¿Dónde caerá la pelota al suelo? *Sugerencia: Se puede considerar que la pared actúa como un espejo. Determinar el alcance, sin considerar la pared, y una vez conocido, considerar la reflexión especular en la pared.*

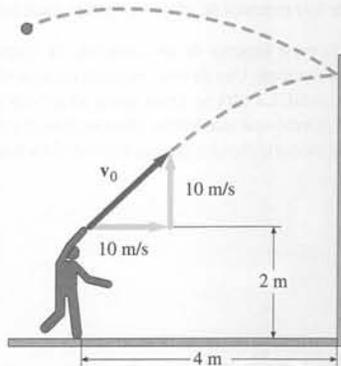


Figura 3.53 Problema 104

**Tiro al blanco y problemas relacionados**

**105** ● Un muchacho utiliza un tirachinas para lanzar una piedra desde la altura del hombro a un blanco situado a 40 m de distancia. El muchacho observa que para hacer diana debe apuntar a 4,85 m por encima del blanco. Determinar la velocidad de la piedra cuando sale del tirachinas y el tiempo de vuelo.

**106** ●● SSM La distancia del puesto del lanzador de béisbol a la base es de 18,4 m. El terraplén donde se sitúa el lanzador está 0,2 m sobre el nivel del campo. Al lanzar una pelota con una velocidad inicial de 37,5 m/s, ésta sale de la mano del lanzador a una altura de 2,3 m sobre el terraplén. ¿Qué ángulo debe formar  $v$  y la horizontal para que la pelota cruce la base a 0,7 m por encima del suelo? (Despreciar la interacción con el aire.)

**107** ●● Supongamos que un disco de hockey se lanza de tal modo que justamente sobrepasa la pared de plexiglás cuando se encuentra a su altura máxima  $h = 2,80$  m. Determinar  $v_0$ , el tiempo  $t$  que tarda en salvar la pared y  $v_{0x}$ ,  $v_0$  y  $\theta_0$  para este caso. Suponga que la distancia horizontal es  $x_1 = 12,0$  m.

**108** ●● Un muchacho se aproxima con su motocicleta al lecho de un riachuelo de 7 m de anchura. Se ha construido una rampa con una inclinación de  $10^\circ$  para la gente atrevida que quiera saltar la zanja. El muchacho circula a su máxima velocidad, 40 km/h. (a) ¿Debería el muchacho intentar el salto o pisar los frenos con energía? (b) ¿Cuál es la velocidad mínima que debe llevar la motocicleta para dar este salto? (Suponer la misma elevación en los dos lados del obstáculo.)

**109** ●● Si una bala que sale por la boca del arma a 250 m/s ha de chocar contra un blanco situado a 100 m de distancia y la misma altura que el arma, ésta debe apuntar a un punto por encima del blanco. ¿Qué distancia debe haber entre el blanco y este punto?

**Problemas generales**

**110** ● Los vectores desplazamiento  $A$  y  $B$  de la figura 3.54 tienen ambos una magnitud de 1 m. (a) Determinar sus componentes  $x$  e  $y$ . (b) Determinar las componentes, módulo y dirección de la suma  $A + B$ . (c) Determinar las componentes, módulo y dirección de la diferencia  $A - B$ .

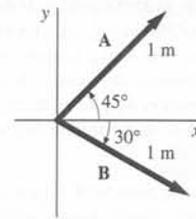


Figura 3.54 Problema 110

**111** ● SSM Un plano está inclinado un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Escoger el eje  $x$  apuntando hacia abajo según la pendiente del plano y el eje  $y$  perpendicular al plano. Determinar las componentes  $x$  e  $y$  de la aceleración de la gravedad, cuya magnitud es  $9,81 \text{ m/s}^2$  y apunta verticalmente hacia abajo.

**112** ● Dos vectores  $A$  y  $B$  corresponden al plano  $xy$ . ¿En qué condiciones la relación  $A/B = A_x/B_x$ ?

**113** ● El vector de posición de una partícula viene dado por  $r = (5 \text{ m/s})t \mathbf{i} + (10 \text{ m/s})t \mathbf{j}$ , en donde  $t$  está en segundos y  $r$  en metros. (a) Dibujar la trayectoria de la partícula en el plano  $xy$ . (b) Hallar  $v$  en forma de sus componentes y calcular su módulo.

**114** ●● **¡SOLVE!** Un albañil situado en el tejado de una casa deja caer involuntariamente su martillo, y éste resbala por el tejado con una velocidad constante de 4 m/s. El tejado forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal y su punto más bajo está a 10 m de altura sobre el suelo. ¿Qué distancia horizontal recorrerá el martillo después de abandonar el tejado de la casa y antes de que choque contra el suelo?

**115** ●● En 1940, Emanuel Zacchini voló 53 m como un obús humano, récord que todavía no ha sido superado. Su velocidad inicial fue 24,2 m/s bajo un ángulo de tiro  $\theta$ . Determinar  $\theta$  y la altura máxima,  $h$ , alcanzada por Emanuel durante este vuelo. Ignore los efectos de la resistencia del aire.

**116** ●● Una partícula se mueve en el plano  $xy$  con aceleración constante. Para  $t = 0$ , la partícula se encuentra en la posición  $r_1 = (4 \text{ m}) \mathbf{i} + (3 \text{ m}) \mathbf{j}$ , con velocidad  $v_1$ . Para  $t = 2$  s, la partícula se ha desplazado a la posición  $r_2 = (10 \text{ m}) \mathbf{i} - (2 \text{ m}) \mathbf{j}$  y su velocidad ha cambiado a  $v_2 = (5 \text{ m/s}) \mathbf{i} - (6 \text{ m/s}) \mathbf{j}$ . (a) Determinar  $v_1$ . (b) ¿Cuál es la aceleración de la partícula? (c) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en función del tiempo? (d) ¿Cuál es el vector posición de la partícula en función del tiempo?

**117** ●● SSM Una pequeña bola de acero se proyecta horizontalmente desde la parte superior de una escalera de escalones rectangulares. La velocidad inicial de la bola es de 3 m/s. Cada escalón tiene 0,18 m de altura y 0,3 m de ancho. ¿Con cuál escalón chocará primeramente la bola?

**118** ●● Una persona lanza una pelota a la distancia  $x_0$  cuando está de pie sobre un terreno nivelado. ¿A qué distancia lanzará la misma pelota desde lo alto de un edificio de altura  $h$  si lo hace con ángulos de inclinación (a)  $0^\circ$ ? (b)  $30^\circ$ ? (c)  $45^\circ$ ?

**119** ●● Darlen es una motorista acróbata de un circo ambulante. Para dar más emoción a su actuación, salta desde una rampa que posee una inclinación  $\theta$  y sobrepasa una zanja con llamas de anchura  $x$  y alcanza el otro extremo sobre una plataforma elevada (altura  $h$  respecto del lado inicial) (figura 3.55). (a) Para

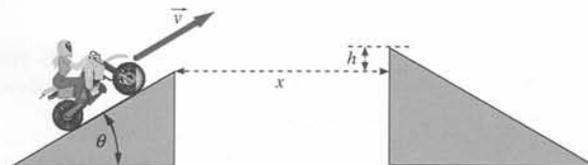


Figura 3.55 Problema 119

una determinada altura  $h$ , encuentre la velocidad de despegue mínima  $v_{\min}$  para realizar el salto con éxito. (b) ¿Cuál es  $v_{\min}$  para un ángulo de lanzamiento  $\theta = 30^\circ$  si la profundidad del pozo es de 8 m y la altura de la plataforma  $h = 4$  m? (c) Muestre que, independientemente del módulo de la velocidad de despegue, la altura máxima de la plataforma es  $h_{\max} < x \tan \theta$ . Interprete el resultado físicamente. (Desprecie los efectos de la resistencia del aire y trate la motocicleta como una partícula.)

**120 ●●●** Una pequeña lancha pone rumbo hacia un puerto situado a 32 km hacia el noroeste de su posición inicial cuando súbitamente se ve envuelta en una densa niebla. El capitán mantiene el rumbo al noroeste y una velocidad de 10 km/h relativa al agua. Tres horas más tarde, la niebla se levanta y el capitán observa que se encuentra exactamente a 4,0 km al sur del puerto. (a) ¿Cuál fue la velocidad media de la corriente durante aquellas tres horas? (b) ¿En qué dirección debería haber puesto su rumbo la lancha para alcanzar su destino en

una trayectoria lineal? (c) Si hubiera seguido esta trayectoria lineal, ¿qué tiempo habría necesitado para realizar el viaje?

**121 ●● SSM** Galileo indicó que, si se despreciaba la resistencia del aire, los alcances de los proyectiles lanzados con ángulos de tiro mayores de  $45^\circ$  en una determinada cantidad eran iguales a los alcances de proyectiles lanzados con ángulos de tiro menores de  $45^\circ$  en la misma cantidad. Demostrarlo.

**122 ●●** Desde la parte superior de un acantilado de altura  $h$  se lanzan dos pelotas con idéntica velocidad. Una de ellas se lanza hacia arriba con un ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal. La otra se lanza hacia abajo con un ángulo  $\beta$  respecto a la horizontal. Demostrar que ambas pelotas chocan contra el suelo con la misma velocidad y calcular el valor de esta velocidad en función de  $h$  y de la velocidad inicial  $v_0$ .





Este avión está acelerando antes del despegue. Las leyes de Newton relacionan la aceleración de un objeto con su masa y con las fuerzas que actúan sobre él.

Si usted fuera un pasajero, ¿cómo usaría las leyes de Newton para determinar la aceleración del avión? (Véase el ejemplo 4.9.)

- 4.1 Primera ley de Newton: ley de la inercia
- 4.2 Fuerza, masa y segunda ley de Newton
- 4.3 Fuerza debida a la gravedad: el peso
- 4.4 Las fuerzas en la naturaleza
- 4.5 Resolución de problemas: diagramas de fuerzas de sistemas aislados
- 4.6 La tercera ley de Newton
- 4.7 Problemas con dos o más objetos

Ahora que ya hemos estudiado cómo se mueven los cuerpos en una, dos y tres dimensiones, nos hacemos la siguiente pregunta, “¿por qué los objetos se ponen en movimiento?” ¿Cuáles son las causas que hacen que un cuerpo en movimiento gane velocidad o cambie la dirección?

La mecánica clásica relaciona las fuerzas que se ejercen los cuerpos entre sí, y también los cambios en el movimiento de un objeto con las fuerzas que actúan sobre él. Describe los fenómenos utilizando las tres leyes del movimiento de Newton. Mientras que ya tenemos una idea intuitiva de algunas fuerzas, como las de empuje o de tracción ejercidas por nuestros músculos o por muelles o gomas elásticas, las leyes de Newton nos permiten refinar nuestra comprensión sobre las fuerzas en general.

➤ **En este capítulo, describiremos las tres leyes del movimiento de Newton y empezaremos a utilizarlas para resolver problemas que impliquen objetos en movimiento y en reposo.**

Una versión moderna de las leyes de Newton es la siguiente:

**Primera ley** Todo cuerpo en reposo sigue en reposo *a menos que* sobre él actúe una fuerza externa. Un cuerpo en movimiento continúa moviéndose con velocidad constante *a menos que* sobre él actúe una fuerza externa.

**Segunda ley** La aceleración de un cuerpo tiene la misma dirección que la fuerza externa neta que actúa sobre él. Es proporcional a la fuerza externa neta según  $F_{\text{neto}} = ma$ , donde  $m$  es la masa del cuerpo. La fuerza neta que actúa sobre un cuerpo, también llamada fuerza resultante, es el vector suma de todas las fuerzas que sobre él actúan:  $F_{\text{neto}} = \Sigma F$ . Así pues,

$$\Sigma F = ma \quad (4.1)$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON

**Tercera ley** Las fuerzas siempre actúan por pares iguales y opuestos. Si el cuerpo A ejerce una fuerza  $F_{A,B}$  sobre el cuerpo B, éste ejerce una fuerza igual, pero opuesta  $F_{B,A}$ , sobre el cuerpo A. Así pues,

$$F_{B,A} = -F_{A,B} \quad (4.2)$$

TERCERA LEY DE NEWTON

## 4.1 Primera ley de Newton: ley de la inercia

Empujemos un trozo de hielo sobre una mesa: desliza y luego se para. Si la mesa está húmeda, el hielo recorre un espacio mayor antes de pararse. Si se trata de un trozo de hielo seco (dióxido de carbono congelado) sobre un colchón de vapor de dióxido de carbono, el deslizamiento es mucho mayor y el cambio de velocidad es muy pequeño. Antes de Galileo se creía que una fuerza, tal como un empuje o un tirón, era siempre necesaria para mantener un cuerpo en movimiento con velocidad constante. Galileo, y posteriormente Newton, reconocieron que si los cuerpos se detenían en su movimiento en las experiencias diarias era debido al rozamiento (o fricción). Si éste se reduce, el cambio de velocidad se reduce. Una capa de agua o un colchón de gas son especialmente efectivos para reducir el rozamiento, permitiendo que el objeto se deslice a gran distancia con un pequeño cambio en su velocidad. Si se eliminan todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo —razonaba Galileo— su velocidad no cambiará, una propiedad de la materia que él describía como su **inercia**. Esta conclusión restablecida por Newton como su primera ley, se llama también **ley de la inercia**.

### Sistemas de referencia inerciales

La ley primera de Newton no distingue entre un objeto en reposo y un objeto que se mueve con velocidad constante distinta de cero. El hecho de que un objeto esté en reposo o en movimiento con velocidad constante depende del sistema de referencia en el cual se observa el objeto. Consideremos una pelota situada en la bandeja de su asiento de un avión que vuela en una trayectoria horizontal. En un sistema de coordenadas ligado al avión (es decir, en el sistema de referencia del avión) la pelota está en reposo, y permanecerá en reposo relativo al avión en tanto éste vuele con velocidad constante.

Supongamos ahora que el piloto aumenta la potencia de los motores y el avión, de forma brusca, acelera (con respecto al suelo). Usted observará que la pelota, de repente, retrocede acelerando con respecto del avión incluso cuando no actúa ninguna fuerza sobre ella.

Un sistema de referencia que acelera respecto de un sistema inercial, no es un sistema de referencia inercial. Así la primera ley de Newton nos proporciona el criterio para determinar si un sistema de referencia es inercial. De hecho, es útil pensar en la primera ley de Newton como un criterio que define cuando los sistemas de referencia son inerciales.



El rozamiento se reduce grandemente mediante un colchón de aire que soporta el aerodeslizador.

Si sobre un objeto no actúa ninguna fuerza, cualquier sistema de referencia con respecto al cual la aceleración del objeto es cero es un **sistema de referencia inercial**.

#### DEFINICIÓN DE SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL

Tanto el avión, cuando se mueve a velocidad constante, como el suelo, son una buena aproximación de sistemas de referencia inerciales. Cualquier sistema de referencia que se mueve a velocidad constante con respecto a un sistema de referencia inercial también es un sistema de referencia inercial.

Un sistema de referencia ligado a la superficie de la Tierra no es totalmente un sistema de referencia inercial por la pequeña aceleración de la superficie de la Tierra debida a la rotación terrestre y a la pequeña aceleración de la propia Tierra debido a su revolución alrededor del Sol. Sin embargo, como estas aceleraciones son del orden de  $0,01 \text{ m/s}^2$  (o menos), podemos considerar que aproximadamente un sistema de referencia ligado a la superficie de la Tierra es un sistema de referencia inercial.

El concepto de sistema de referencia inercial es crucial porque las *leyes primera, segunda y tercera de Newton son únicamente válidas en sistemas de referencia inerciales*.

## 4.2 Fuerza, masa y segunda ley de Newton

La primera y segunda ley de Newton nos permiten definir el concepto de fuerza. Una **fuerza** es una influencia externa sobre un cuerpo que causa su aceleración respecto a un sistema de referencia inercial. (Se supone que no actúan otras fuerzas.) La dirección de la fuerza coincide con la dirección de la aceleración causada. El módulo de la fuerza es el producto de la masa del cuerpo por el módulo de su aceleración. Esta definición se muestra en la ecuación 4.1.

Se puede comparar fuerzas, por ejemplo, estirando gomas elásticas. Si estiramos la misma magnitud gomas elásticas idénticas, ejercerán fuerzas iguales.

Los objetos se resisten intrínsecamente a ser acelerados. Imaginemos que damos una patada a una pelota de fútbol o a una bola en la bolera. Ésta última se resiste mucho más a ser acelerada que la pelota de fútbol, lo cual se manifiesta inmediatamente en la diferente sensación que notan los dedos de nuestros pies al dar el golpe sobre ambos objetos. Esta propiedad intrínseca de un cuerpo es la **masa**. Es una medida de la inercia del cuerpo. La relación de dos masas se define cuantitativamente aplicando la misma fuerza y comparando sus aceleraciones. Si la fuerza  $F$  produce la aceleración  $a_1$  cuando se aplica a un cuerpo de masa  $m_1$  y la misma fuerza produce la aceleración  $a_2$  cuando se aplica a un objeto de masa  $m_2$ , la relación entre las masas se define por

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \quad (4.3)$$

#### DEFINICIÓN —MASA

Esta definición está de acuerdo con nuestra idea intuitiva de masa. Si la misma fuerza se aplica a dos objetos, el objeto de más masa es el que acelera menos. Experimentalmente se deduce que la relación  $a_1/a_2$ , obtenida cuando fuerzas de idéntica magnitud actúan sobre dos objetos, es independiente del módulo, dirección o tipo de fuerza utilizada. La masa de un cuerpo es una propiedad intrínseca del mismo y, por lo tanto, no depende de la localización del cuerpo. Es decir, la masa de un cuerpo continúa siendo la misma si el cuerpo está sobre la Tierra, sobre la Luna o el espacio exterior.

Si una comparación directa muestra que  $m_2/m_1 = 2$  y  $m_3/m_1 = 4$ , entonces  $m_3$  será doble que  $m_2$ , cuando se comparen entre sí directamente. Por lo tanto, podemos establecer una escala de masas eligiendo un cuerpo patrón y asignándole la masa de 1 unidad. Como ya vimos en el capítulo 1, el cuerpo elegido como patrón internacional de masa es un cilindro de una aleación de platino-iridio que se conserva cuidadosamente en la Oficina Internacional

de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia, y se asigna la masa de 1 **kilogramo**, la unidad SI de masa. La fuerza necesaria para producir una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  sobre el cuerpo patrón es por definición 1 **newton** (N). De igual forma la fuerza que produce sobre el mismo cuerpo una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$  se define como 2 N, y así sucesivamente.

### EJEMPLO 4.1 | Un paquete de helado

Una fuerza determinada produce una aceleración de  $5 \text{ m/s}^2$  sobre un cuerpo patrón de masa  $m_1$ . Cuando la misma fuerza se aplica a un paquete de helado de masa  $m_2$  le produce una aceleración de  $11 \text{ m/s}^2$ . (a) ¿Cuál es la masa del paquete de helado? (b) ¿Cuál es el módulo de la fuerza?

**Planteamiento del problema** Aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  a cada objeto y despejar la masa del paquete de helado y el módulo de la fuerza.

(a) 1. Aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  a cada objeto. Únicamente hay una fuerza, por lo que necesitamos simplemente considerar el módulo de las variables vectoriales.

$$F_1 = m_1 a_1 \quad \text{y} \quad F_2 = m_2 a_2$$

2. La relación de las masas está en razón inversa con la relación de las aceleraciones producidas por la misma fuerza:

$$F_1 = F_2 = F, \quad \text{por lo tanto} \quad m_1 a_1 = m_2 a_2$$

y

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{5 \text{ m/s}^2}{11 \text{ m/s}^2}$$

3. Despejar  $m_2$  en función de  $m_1$ , que es 1 kg.

$$m_2 = \frac{5}{11} m_1 = \frac{5}{11} (1 \text{ kg}) = \boxed{0.45 \text{ kg}}$$

(b) El módulo de la fuerza se obtiene multiplicando la masa por la aceleración de cualquiera de los cuerpos:

$$F = m_1 a_1 = (1 \text{ kg})(5 \text{ m/s}^2) = \boxed{5 \text{ N}}$$

**Ejercicio** Una fuerza de 3 N produce una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$  sobre un objeto de masa desconocida. (a) ¿Cuál es la masa del objeto? (b) Si la fuerza se incrementa a 4 N, ¿cuál es la aceleración? (Respuestas (a) 1,5 kg, (b)  $2,67 \text{ m/s}^2$ .)

Experimentalmente se encuentra que si sobre un cuerpo actúan dos o más fuerzas, la aceleración que causan es igual a la que causarían sobre el cuerpo una sola fuerza igual a la suma vectorial de las fuerzas individuales. Es decir, las fuerzas se combinan como los vectores. La segunda ley de Newton puede expresarse, por lo tanto, en la forma

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{neta}} = m\mathbf{a}$$

### EJEMPLO 4.2 | Un paseo espacial

Un astronauta se ha extraviado en el espacio lejos de su cápsula espacial. Afortunadamente posee una unidad de propulsión que le proporciona una fuerza constante  $\mathbf{F}$  durante 3 s. Al cabo de los 3 s se ha movido 2,25 m. Si su masa es 68 kg, determinar  $\mathbf{F}$ .

**Planteamiento del problema** La fuerza que actúa sobre el astronauta es constante, de modo que la aceleración  $\mathbf{a}$  también es constante. Por lo tanto, utilizaremos las ecuaciones cinemáticas del capítulo 2 para determinar  $\mathbf{a}$  y con ello obtener la fuerza, a partir de  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Escogeremos  $\mathbf{F}$  en la dirección del eje  $x$ , de modo que  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i}$  (figura 4.1): La componente de la segunda ley de Newton a lo largo del eje  $x$  es, por lo tanto,  $F_x = ma_x$ .



La unidad propulsora (que no se muestra en la fotografía) empuja al astronauta hacia la derecha

1. Aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  para relacionar la fuerza neta con la masa y la aceleración:  $F_x = ma_x$ .

$$F_x = ma_x$$

2. Para determinar la aceleración, utilizamos la ecuación 2.15 con  $v_0 = 0$ :

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$a_x = \frac{2\Delta x}{t^2} = \frac{2(2,25 \text{ m})}{(3 \text{ s})^2} = 0,500 \text{ m/s}^2$$

3. Sustituir  $a_x = 0,500 \text{ m/s}^2$  y  $m = 68 \text{ kg}$  para determinar la fuerza:

$$F_x = ma_x = (68 \text{ kg})(0,500 \text{ m/s}^2) = \boxed{34,0 \text{ N}}$$

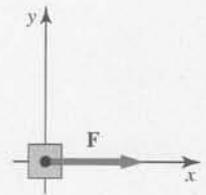


Figura 4.1

### EJEMPLO 4.3 | Fuerzas que actúan sobre una partícula

¡INTÉNELO USTED MISMO!

Una partícula de masa  $0,4 \text{ kg}$  está sometida simultáneamente a dos fuerzas  $\mathbf{F}_1 = -2 \text{ Ni} - 4 \text{ Nj}$  y  $\mathbf{F}_2 = -2,6 \text{ Ni} + 5 \text{ Nj}$ . Si la partícula está en el origen y parte del reposo para  $t = 0$ , calcular (a) su vector posición  $\mathbf{r}$  y (b) su velocidad  $\mathbf{v}$  para  $t = 1,6 \text{ s}$ .

**Planteamiento del problema** Como  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  son constantes, la aceleración de la partícula es constante. Por lo tanto, podemos utilizar las ecuaciones cinemáticas del capítulo 2 para determinar la posición de la partícula y la velocidad en función del tiempo.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

Pasos	Respuestas
(a) 1. Escribir la ecuación general del vector posición $\mathbf{r}$ en función del tiempo $t$ para una aceleración constante $\mathbf{a}$ en función de $\mathbf{r}_0$ , $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{a}$ , sustituyendo $\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 = 0$ .	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 = \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$
2. Utilizar $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para expresar la aceleración $\mathbf{a}$ en función de la fuerza resultante $\Sigma \mathbf{F}$ y la masa $m$ .	$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{m}$
3. Calcular $\Sigma \mathbf{F}$ a partir de las fuerzas dadas.	$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -4,6 \text{ Ni} + 1,0 \text{ Nj}$
4. Determinar el vector aceleración $\mathbf{a}$ .	$\mathbf{a} = \frac{\Sigma \mathbf{F}}{m} = -11,5 \text{ m/s}^2 \mathbf{i} + 2,5 \text{ m/s}^2 \mathbf{j}$
5. Determinar el vector posición $\mathbf{r}$ para un tiempo cualquiera $t$ .	$\mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 = \frac{1}{2} a_x t^2 \mathbf{i} + \frac{1}{2} a_y t^2 \mathbf{j}$ $= -5,75 \text{ m/s}^2 t^2 \mathbf{i} + 1,25 \text{ m/s}^2 t^2 \mathbf{j}$
6. Determinar $\mathbf{r}$ para $t = 1,6 \text{ s}$ .	$\mathbf{r} = \boxed{-14,7 \text{ mi} + 3,20 \text{ mj}}$
(b) Escribir el vector velocidad $\mathbf{v}$ en función de la aceleración y el tiempo y calcular sus componentes para $t = 1,6 \text{ s}$ .	$\mathbf{v} = \mathbf{a} t = (-11,5 \text{ m/s}^2 \mathbf{i} + 2,5 \text{ m/s}^2 \mathbf{j}) t$ $= \boxed{-18,4 \text{ m/s i} + 4,00 \text{ m/s j}}$

## 4.3 Fuerza debida a la gravedad: el peso

Si dejamos caer un objeto cerca de la superficie terrestre, el objeto acelera hacia la Tierra. Si podemos despreciar la resistencia del aire, todos los objetos poseen la misma aceleración, llamada aceleración de la gravedad  $\mathbf{g}$  en cualquier punto del espacio. La fuerza que causa esta aceleración es la fuerza de la gravedad sobre el objeto, llamada peso del mismo,  $\mathbf{w}$ .<sup>1</sup> Si el peso  $\mathbf{w}$  es la única fuerza que actúa sobre un objeto, se dice que éste se encuentra en **caída libre**. Si su masa es  $m$ , la segunda ley de Newton ( $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ) define el peso del cuerpo en la forma:

<sup>1</sup> Referirse a la fuerza de gravedad como “el peso” es desafortunado ya que parece implicar que “el peso” es una propiedad del objeto más que de una fuerza externa que actúa sobre él. Para evitar caer en esta interpretación aparente, cada vez que leamos “el peso” mentalmente traduciremos esta denominación como “la fuerza gravitatoria que actúa”.

$$w = mg \quad (4.4)$$

PESO

Como  $g$  es idéntico para todos los cuerpos, llegamos a la conclusión de que el peso de un cuerpo es proporcional a su masa. El vector  $g$  se denomina **campo gravitatorio** terrestre y es la fuerza por unidad de masa ejercida por la Tierra sobre cualquier objeto. Es igual a la aceleración en caída libre experimentada por un objeto.<sup>1</sup> Cerca de la superficie terrestre  $g$  tiene el valor

$$g = 9,81 \text{ N/kg} = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Medidas cuidadosas muestran que  $g$  varía con el lugar. En particular, en un punto por encima de la superficie terrestre,  $g$  apunta hacia el centro de la Tierra y varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia a dicho centro. Así pues, un cuerpo pesa ligeramente menos cuando se encuentra en lugares muy elevados respecto al nivel del mar. El campo gravitatorio también varía ligeramente con la latitud debido a que la Tierra no es exactamente esférica, sino que está achatada en los polos. Por lo tanto, el peso, a diferencia de la masa *no* es una propiedad intrínseca del cuerpo. Aunque el peso de un cuerpo varía de un lugar a otro debido a las variaciones de  $g$ , esta variación es demasiado pequeña para ser apreciada en la mayor parte de las aplicaciones prácticas sobre o cerca de la superficie terrestre.

Un ejemplo puede clarificar la diferencia entre masa y peso. Supongamos que en la Luna tenemos una bola pesada, como la de jugar a los bolos. Su peso es la fuerza gravitatoria que ejerce la Luna sobre ella, pero esta fuerza es sólo una sexta parte de la fuerza que se ejerce sobre la bola cuando está en la Tierra. En la Luna la bola pesa sólo una sexta parte de lo que pesa en la Tierra, por lo que para levantar la bola en ella se necesita una sexta parte de la fuerza. Sin embargo, lanzar la bola con cierta velocidad horizontal requiere la misma fuerza en la Luna que en la Tierra, o en el espacio libre.

Aunque el peso de un objeto puede variar de un lugar a otro, en cualquier lugar determinado, su peso es proporcional a su masa. Así pues, podemos comparar convenientemente las masas de dos objetos en un lugar determinado comparando sus pesos.

La sensación que tenemos de nuestro propio peso procede de las demás fuerzas que lo equilibran. Por ejemplo, al estar sentados en una silla, apreciamos la fuerza ejercida por ella que equilibra nuestro peso, y por lo tanto evita que nos caigamos al suelo. Cuando estamos situados sobre una balanza de muelles, nuestros pies aprecian la fuerza ejercida sobre nosotros por la balanza. Esta balanza está calibrada de modo que registra la fuerza que debe ejercer (por compresión de su muelle) para equilibrar nuestro peso. La fuerza que equilibra nuestro peso se denomina **peso aparente**. Este peso aparente es el que viene dado por una balanza de muelle. Si no existiese ninguna fuerza para equilibrar nuestro peso, como sucede en la caída libre, el peso aparente sería cero. Esta condición denominada **ingravedez**, es la que experimentan los astronautas en los satélites que giran alrededor de la Tierra. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravedad (su peso). El astronauta está también en caída libre. La única fuerza que actúa sobre él es su peso, que produce la aceleración  $g$ . Como no existe ninguna fuerza que equilibre la fuerza de la gravedad, el peso aparente del astronauta es cero.

## Unidades de fuerza y masa

La unidad SI de masa es el kilogramo. Como el segundo y el metro, el kilogramo es una unidad fundamental en el SI. La unidad de fuerza, el newton y las unidades de otras magnitudes que estudiaremos más adelante, tales como el momento lineal y la energía, se derivan de estas tres unidades fundamentales: segundo, metro y kilogramo.

<sup>1</sup>  $g$  se refiere a la aceleración de la gravedad, que es la aceleración (de un objeto en caída libre) relativa al suelo. No es completamente correcto atribuir esta aceleración únicamente a la atracción gravitatoria de la Tierra. La distinción se discutirá más adelante en el capítulo 11.

Como decíamos en la sección 4.2, el newton se define como la fuerza que produce la aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  cuando actúa sobre  $1 \text{ kg}$ . Según la segunda ley de Newton,

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad (4.5)$$

Una unidad patrón conveniente de masa en la física atómica y nuclear es la **unidad de masa unificada** ( $u$ ) que se define como la doceava parte de la masa del átomo neutro del carbono-12 ( $^{12}\text{C}$ ). La unidad de masa unificada está relacionada con el kilogramo por

$$1 u = 1,660\,540 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (4.6)$$

La masa de un átomo de hidrógeno es aproximadamente  $1 u$ .

Aunque en este texto utilizaremos generalmente unidades SI, en los EE.UU. es habitual el uso de un sistema basado en el pie, el segundo y la libra (unidad de fuerza). Este sistema difiere del SI en que se escoge como unidad fundamental una unidad de fuerza en lugar de una unidad de masa. La **libra** se definió originalmente como el peso de un cuerpo patrón determinado en un lugar concreto. Ahora se define como una fuerza igual a  $4,448222 \text{ N}$ . Redondeando a tres cifras, tenemos  $1 \text{ lb} \approx 4,45 \text{ N}$ . Como  $1 \text{ kg}$  pesa  $9,81 \text{ N}$ , su peso en libras es

$$9,81 \text{ N} = 2,20 \text{ lb} \quad (4.7)$$

PESO DE 1 KG

La unidad de masa en este sistema, llamada *slug*, se utiliza muy poco y se define como la masa de un objeto que pesa  $32,2 \text{ lb}$ . Cuando se trabaja en este sistema es más conveniente sustituir la masa  $m$  por  $w/g$ , en donde  $w$  es el peso en libras y  $g$  la aceleración de la gravedad en pies por segundo por segundo:

$$g = 32,2 \text{ pies/s}^2 \quad (4.8)$$

#### EJEMPLO 4.4 | Una estudiante acelerada

La fuerza neta que actúa sobre una estudiante de  $130 \text{ lb}$  es  $25 \text{ lb}$  fuerza. ¿Cuál es su aceleración?

**Planteamiento del problema** Aplicar  $\Sigma F = ma$  y despejar la aceleración. La masa puede determinarse a partir del peso de la estudiante.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, su aceleración es la fuerza dividida por su masa:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{w/g} = \frac{25 \text{ lb}}{(130 \text{ lb})/(32,2 \text{ pies/s}^2)} = \boxed{6,19 \text{ pies/s}^2}$$

**Ejercicio** ¿Qué fuerza es necesaria para suministrar una aceleración de  $3 \text{ pies/s}^2$  a un bloque de  $5 \text{ lb}$ ?  
(Respuesta  $0,466 \text{ lb}$ .)

## 4.4 Las fuerzas en la naturaleza

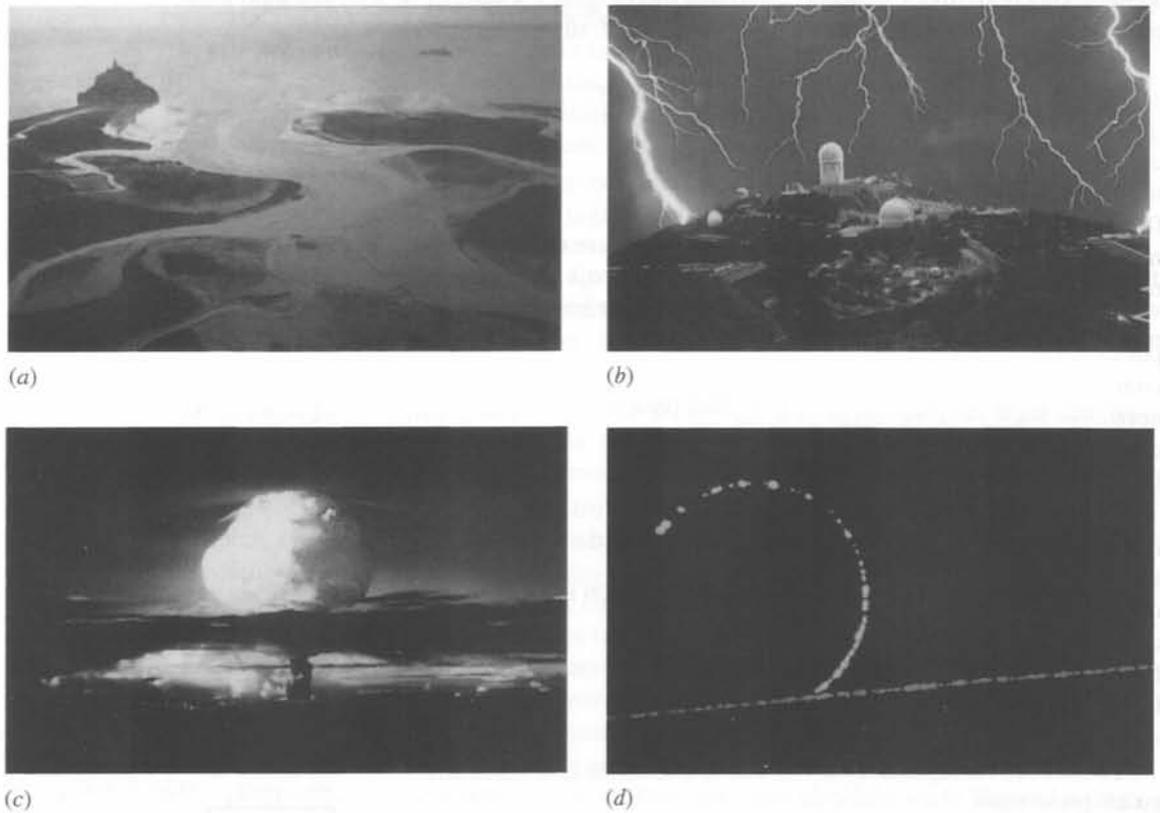
La gran potencia de la segunda ley de Newton se manifiesta cuando se combina con las leyes de las fuerzas que describen las interacciones de los objetos. Por ejemplo, la ley de Newton de la gravitación, que estudiaremos en el capítulo 11, nos expresa la fuerza gravitatoria ejercida por un objeto sobre otro en función de la distancia que separa los objetos y las masas de ambos. Esta ley de gravitación combinada con la segunda ley de Newton nos permite calcular las órbitas de los planetas alrededor del Sol, el movimiento de la Luna y las variaciones con la altura de  $g$ , aceleración de la gravedad.

## Las fuerzas fundamentales

Todas las distintas fuerzas que se observan en la naturaleza pueden explicarse en función de cuatro interacciones básicas que ocurren entre partículas elementales (ver figura 4.2):

1. La fuerza gravitatoria. La fuerza de atracción mutua entre los objetos
2. La fuerza electromagnética. La fuerza entre las cargas eléctricas
3. La fuerza nuclear fuerte. La fuerza entre las partículas subatómicas
4. La fuerza nuclear débil. La fuerza entre las partículas subatómicas durante algunos procesos de decaimiento radiactivos

Las fuerzas cotidianas que observamos entre cuerpos macroscópicos se deben a la fuerza gravitatoria o a la fuerza electromagnética.



**Figura 4.2** (a) La fuerza gravitatoria ejercida entre la Tierra y un cuerpo próximo a la superficie terrestre es el peso del cuerpo. La fuerza gravitatoria ejercida por el Sol sobre la Tierra y los demás planetas es la responsable de que éstos se mantengan en sus órbitas alrededor del Sol. De igual modo, la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna mantiene a ésta en una órbita casi circular alrededor de la Tierra. Las fuerzas gravitatorias ejercidas por la Luna y el Sol sobre los océanos de la Tierra son responsables de las mareas. El Monte Saint-Michel (Francia) mostrado en esta foto se convierte en una isla cuando sube la marea. (b) La fuerza electromagnética incluye las fuerzas eléctrica y magnética. Un ejemplo familiar de la fuerza eléctrica es la atracción entre pequeños trozos de papel y un peine que se ha electrificado al pasarlo por el cabello. Los relámpagos sobre el Observatorio Nacional Kitt Peak que se muestran en la foto resultan de la fuerza electromagnética. (c) La fuerza nuclear fuerte tiene lugar entre las partículas elementales llamadas hadrones, que incluyen los protones y neutrones, constituyentes de los núcleos atómicos. Esta fuerza resulta de la interacción de los quarks, bloques constitutivos de los hadrones y es la responsable de mantener los núcleos estables. La explosión de la bomba de hidrógeno ilustrada en esta fotografía es un ejemplo de la potencia de esta fuerza. (d) La fuerza nuclear débil ocurre entre los leptones (que incluyen electrones y muones) y también entre hadrones (protones y neutrones). Esta fotografía de la cámara de niebla (en falso color) ilustra la interacción débil entre un muón de la radiación cósmica (verde) y un electrón (rojo) arrancado de un átomo.

## Acción a distancia

Las fuerzas fundamentales gravedad y electromagnetismo actúan entre partículas separadas en el espacio. Esto crea un problema filosófico llamado **acción a distancia**. Newton consideraba la acción a distancia como un fallo de su teoría de la gravitación, pero evitaba dar cualquier otra hipótesis. Hoy el problema se evita introduciendo el concepto de campo, que actúa como un agente intermedio. Por ejemplo, la atracción de la Tierra por el Sol se considera en dos etapas. El Sol crea una condición en el espacio que llamamos campo gravitatorio. Este campo ejerce entonces una fuerza sobre la Tierra. Del mismo modo, la Tierra produce un campo gravitatorio que ejerce una fuerza sobre el Sol. Nuestro peso es la fuerza ejercida por el campo gravitatorio de la Tierra sobre nosotros mismos. Cuando estudiemos la electricidad y el magnetismo (capítulos 21–30) analizaremos los campos eléctricos, producidos por cargas eléctricas, y magnéticos, producidos por cargas eléctricas en movimiento.

## Fuerzas de contacto

La mayor parte de las fuerza ordinarias que observamos sobre los objetos se ejercen por contacto directo. Estas fuerzas son de origen electromagnético y se ejercen entre las moléculas de la superficie de cada objeto.

**Sólidos** Si empujamos una superficie, ésta devuelve el empuje. Consideremos una escalera que se apoya contra una pared (figura 4.3). En la región de contacto, la escalera empuja la pared con una fuerza horizontal, comprimiendo las moléculas de la superficie de la pared. Como los muelles de un colchón, las moléculas comprimidas de la pared empujan la escalera con una fuerza horizontal. Tal fuerza, *perpendicular* a las superficies en contacto, se denomina **fuerza normal** (la denominación *normal* significa perpendicular). La superficie soporte se deforma ligeramente en respuesta a la carga, si bien esta deformación se aprecia difícilmente a simple vista.

Las fuerzas normales pueden variar dentro de un amplio intervalo de valores. Una mesa, por ejemplo, ejerce una fuerza normal dirigida hacia arriba sobre cualquier bloque que esté colocado sobre ella. A menos que el bloque sea tan pesado que la mesa se rompa, esta fuerza normal equilibrará la fuerza del peso del bloque. Además, si presionamos hacia abajo el bloque, la mesa ejercerá una fuerza soporte mayor que el peso del bloque para evitar que acelere hacia abajo.

En ciertas circunstancias, los cuerpos en contacto ejercerán fuerzas entre sí que son *paralelas* a las superficies en contacto. Consideremos el bloque de la figura 4.4. Si se le empuja suavemente de lado no resbalará ya que la fuerza ejercida por el suelo se opone a que el bloque deslice. Si, en cambio, se empuja fuertemente, el bloque empezará a moverse en la dirección de la fuerza. Para mantener el movimiento es necesario ejercer continuamente una fuerza. A partir del instante en que se deja de empujar el bloque ralentiza su movimiento hasta que se para. La componente paralela de la fuerza de contacto ejercida por un cuerpo sobre otro se llama **fuerza de rozamiento**.

Aunque las fuerzas de rozamiento y normal se muestran en las figuras como si actuaran en un único punto, en realidad, se distribuyen sobre toda la región de contacto. Las fuerzas de rozamiento se tratan con más detalle en el capítulo 5.

**Muelles** Cuando un muelle se comprime o se alarga una pequeña cantidad  $\Delta x$ , la fuerza que ejerce, según se demuestra experimentalmente es

$$F_x = -k \Delta x \quad (4.9)$$

LEY DE HOOKE

en donde  $k$  es la constante de fuerza, una medida de la rigidez del muelle (figura 4.5). El signo negativo de la ecuación 4.9 significa que cuando el muelle se estira o comprime, la fuerza que ejerce es de sentido opuesto. Esta ecuación conocida como ley de Hooke es de gran interés. Un objeto en reposo bajo la influencia de fuerzas que se equilibran, se dice que está en equilibrio estático. Si un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza de restitución neta hacia la posición de equilibrio, se dice que el equilibrio es estable. Para pequeños desplazamientos, casi todas las fuerzas de restitución obedecen la ley de Hooke.

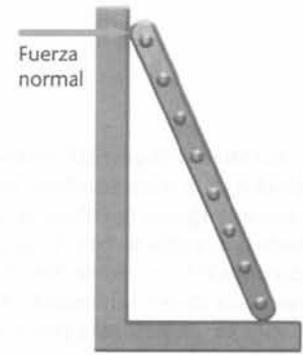


Figura 4.3 La pared sostiene la escalera ejerciendo sobre ella una fuerza normal a la pared.

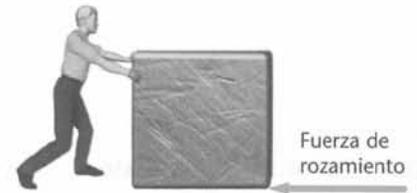


Figura 4.4 La fuerza de rozamiento ejercida por el suelo sobre el bloque se opone a su desplazamiento o a su tendencia a deslizar.

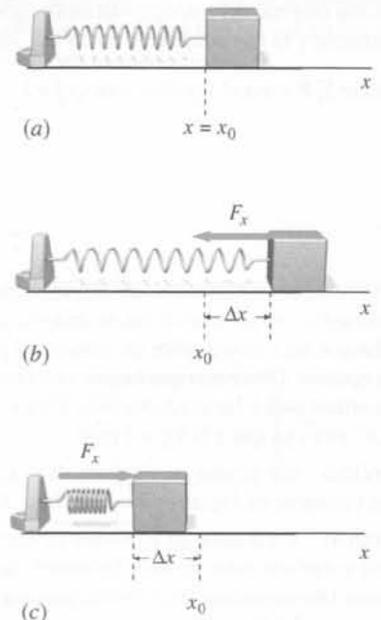
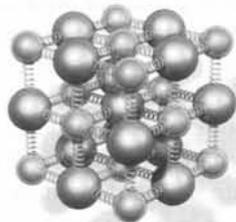
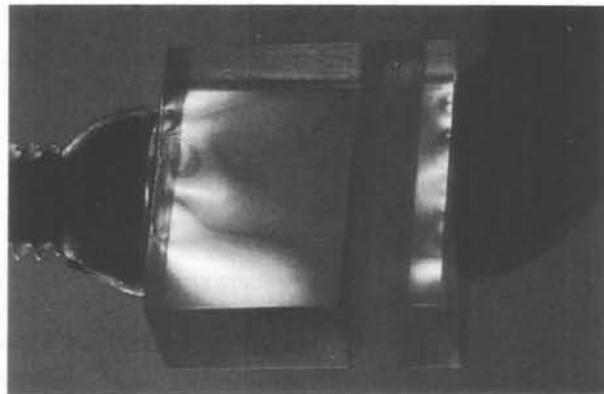


Figura 4.5 Muelle horizontal. (a) Cuando el muelle no está tenso, no ejerce ninguna fuerza sobre el bloque. (b) Cuando el muelle se estira, de modo que  $\Delta x$  es positivo, ejerce una fuerza de magnitud  $k \Delta x$  en el sentido negativo de  $x$ . (c) Cuando el muelle se comprime, de modo que  $\Delta x$  es negativo, el muelle ejerce una fuerza de magnitud  $k |\Delta x|$  en sentido positivo.



(a)



(b)

**Figura 4.6** (a) Modelo de un sólido formado por átomos conectados entre sí por muelles elásticos. Los muelles son muy rígidos (constante de fuerza grande) de modo que cuando un peso actúa sobre el sólido, su deformación no es visible. Sin embargo, la compresión producida por la mordaza sobre un bloque de plástico en (b), da lugar a procesos elásticos que se hacen visibles mediante luz polarizada.

La fuerza molecular de atracción entre los átomos de una molécula o un sólido varía de un modo aproximadamente lineal con el cambio de su separación (para pequeños cambios); la fuerza varía de modo muy parecido al de un muelle. Por ello es frecuente representar el modelo de una molécula diatómica por dos masas conectadas por un muelle y el modelo de un sólido mediante una serie de masas conectadas por muelles como se muestra en la figura 4.6.

#### EJEMPLO 4.5 | El mate

Un jugador de baloncesto de 110 kg se cuelga del aro del cesto después de un mate espectacular (figura 4.7). Antes de dejarse caer, se queda colgando en reposo, con el anillo doblado hacia abajo una distancia de 15 cm. Suponiendo que el aro se comporta como un muelle elástico, calcular su constante de fuerza  $k$ .

**Planteamiento del problema** Como la aceleración del jugador es cero, la fuerza neta ejercida sobre él es nula. La fuerza hacia arriba ejercida por el aro equilibra su peso (figura 4.6). Sea  $y = 0$  la posición original del aro, considerando  $y$  positiva hacia abajo. Por lo tanto,  $\Delta y$  es positivo, el peso  $mg$  es positivo y la fuerza ejercida por el aro,  $-k \Delta y$  es negativa.

Aplicar  $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  al jugador, y despejar  $k$ :

$$\begin{aligned}\sum F_y &= w_y + F_y = ma_y \\ mg + (-k \Delta y) &= 0 \\ k &= \frac{mg}{\Delta y} = \frac{(110 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})}{0,15 \text{ m}} \\ &= \boxed{7,19 \times 10^3 \text{ N/m}}\end{aligned}$$

**Observación** Aunque el aro del cesto no se parece mucho a un muelle, el aro está colgado por una bisagra con un muelle que se deforma cuando el aro se inclina. Como resultado, la fuerza hacia arriba que hace el aro sobre las manos del jugador es proporcional a la inclinación del aro y en sentido opuesto. Obsérvese que hemos utilizado para  $g$  las unidades N/kg, de modo que kg se cancela, y obtenemos para  $k$  las unidades N/m. Para  $g$  siempre puede usarse, a nuestra conveniencia, 9,81 N/kg o 9,81 m/s<sup>2</sup>, ya que 1 N/kg = 1 m/s<sup>2</sup>.

**Ejercicio** Un racimo de plátanos de 4 kg está suspendido en reposo de una balanza de muelle, cuya constante de fuerza es  $k = 300 \text{ N/m}$ . ¿Cuánto se ha estirado el muelle? (Respuesta 13,1 cm.)

**Ejercicio** Un muelle, de constante de fuerza 400 N/m está conectado a un bloque de 3 kg que descansa sobre una pista de aire horizontal, de modo que el rozamiento es despreciable. ¿Qué alargamiento debe experimentar el muelle para que al liberar el bloque éste posea una aceleración de 4 m/s<sup>2</sup>? (Respuesta 3,0 cm.)

**Ejercicio de análisis dimensional** Un objeto de masa  $m$  oscila en el extremo de un muelle de constante de fuerza  $k$ . El tiempo correspondiente a una oscilación completa es el periodo  $T$ . Suponiendo que  $T$  depende de  $m$  y  $k$ , utilizar el análisis dimensional para determinar la forma de la relación  $T = f(m, k)$ , prescindiendo de las constantes numéricas. El método más simple es considerar las unidades. Obsérvese que las unidades de  $k$  son N/m = (kg · m/s<sup>2</sup>)/m = kg/s<sup>2</sup> y las unidades de  $m$  son kg. (Respuesta  $T = C \sqrt{m/k}$  en donde  $C$  es una constante sin dimensiones. La expresión correcta para el periodo, como veremos en el capítulo 14 es  $T = 2\pi \sqrt{m/k}$ .)



Figura 4.7

**Cuerdas** Un cuerpo se puede arrastrar y mover mediante una cuerda. Se puede suponer que una cuerda es como un muelle pero con una constante de fuerza muy grande de forma que la deformación que adquiere al aplicar una fuerza es despreciable. Las cuerdas, sin embargo no son rígidas, ya que flexionan y se tuercen y, por lo tanto, no pueden usarse para empujar objetos como lo hacen los muelles sino que únicamente pueden tirar de ellos. La magnitud de la fuerza que un trozo de una cuerda ejerce sobre otro adyacente se denomina **tensión**. Por lo tanto, si se tira de un objeto con una cuerda, la magnitud de la fuerza coincide con la tensión. En la sección 4.7 se desarrolla con más detalle el concepto de tensión en una cuerda o en una cadena.

**Ligaduras** Un tranvía se mueve por el raíl. Un caballo de madera de una atracción se mueve en un círculo. Un trineo se mueve por la superficie de un estanque helado en un plano horizontal. Todos estos condicionantes sobre el movimiento de los objetos se denominan **ligaduras**.

## 4.5 Resolución de problemas: diagramas de fuerzas de sistemas aislados

Imaginemos un trineo tirado por un perro que avanza por un terreno helado. El perro tira de una cuerda ligada al trineo (figura 4.8) con una fuerza horizontal que hace que éste gane velocidad. Podemos pensar en el trineo y la cuerda como un único cuerpo. ¿Qué fuerzas actúan sobre el cuerpo trineo-cuerda? Tanto el perro como el hielo tocan el cuerpo, de modo que ambos ejercen fuerzas sobre él. También sabemos que la Tierra ejerce una fuerza gravitatoria sobre el trineo y la cuerda (el peso del cuerpo). Resumiendo, estas tres fuerzas actúan sobre el cuerpo (suponiendo el rozamiento despreciable):

1. El peso del cuerpo trineo-cuerda,  $w$ .
2. La fuerza de contacto  $F_n$  ejercida por el hielo (sin rozamiento, esta fuerza es perpendicular al hielo).
3. La fuerza de contacto  $F$  ejercida por el perro.

Un diagrama que muestra esquemáticamente todas las fuerzas que actúan sobre un sistema, tal como el de la figura 4.8 *b*, se denomina **diagrama del sistema aislado**. Se denomina diagrama del sistema aislado porque el objeto (el cuerpo) se dibuja sin su entorno. Para dibujar a escala los vectores fuerza en un diagrama de fuerzas de sistema aislado es necesario determinar primero, usando métodos cinemáticos, la dirección del vector aceleración. Sabemos que el objeto se mueve hacia la derecha con velocidad creciente y por lo tanto, que el vector aceleración va en la dirección de su movimiento, hacia la derecha. Obsérvese que  $F_n$  y  $w$  en el diagrama tienen magnitudes iguales. Los módulos deben ser iguales, ya que el trineo no acelera verticalmente. Como prueba de la corrección del diagrama del sistema aislado que hemos realizado, dibujamos el diagrama de la adición vectorial (figura 4.9) verificando que la suma de los vectores fuerza coincide con la dirección del vector aceleración.

La componente  $x$  de la segunda ley de Newton da

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{n,x} + w_x + F_x = ma_x \\ 0 + 0 + F &= ma_x\end{aligned}$$

$$a_x = \frac{F}{m}$$

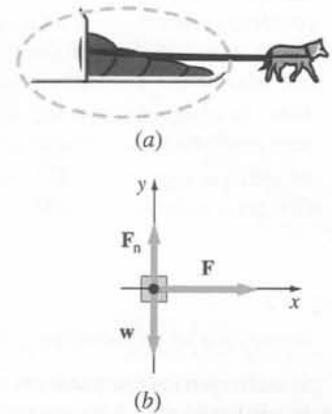
La componente  $y$  de la segunda ley de Newton expresa:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= F_{n,y} + w_y + T_y = ma_y \\ F_n - w + 0 &= 0\end{aligned}$$

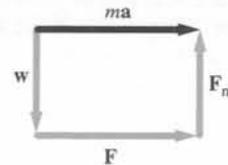
o sea,

$$F_n = w$$

En este simple ejemplo hemos determinado dos magnitudes: la aceleración horizontal ( $a_x = F/m$ ), y la fuerza vertical  $F_n$  ejercida por el hielo ( $F_n = w$ ).



**Figura 4.8** (a) Un perro tira de un trineo. El primer paso para resolver este problema es aislar el sistema que deseamos analizar. En este caso la curva cerrada de puntos aísla el cuerpo trineo-cuerda de sus alrededores. (b) Las fuerzas que actúan sobre el trineo de (a).



**Figura 4.9**

## EJEMPLO 4.6 | Una carrera de trineos

Durante las vacaciones de invierno, un joven participa en una carrera de trineos donde los estudiantes sustituyen a los perros. El joven comienza la carrera tirando de una cuerda atada al trineo con una fuerza de 150 N que forma un ángulo de  $25^\circ$  con la horizontal. La masa del cuerpo trineo-cuerda-pasajero es de 80 kg y el rozamiento entre el trineo y el hielo es despreciable. Determinar: (a) la aceleración del trineo y (b) la fuerza normal  $F_n$  ejercida por la superficie sobre el trineo.

**Planteamiento del problema** Tres fuerzas actúan sobre el cuerpo: su peso  $w$ , que actúa hacia abajo; la fuerza normal  $F_n$ , que actúa hacia arriba; y la fuerza con que el joven tira de la cuerda,  $F$ , en dirección  $25^\circ$  sobre la horizontal. Como las fuerzas no coinciden en la misma línea de dirección, estudiaremos el sistema aplicando la segunda ley de Newton a las direcciones  $x$  e  $y$  por separado. Escogemos  $x$  en la dirección del movimiento e  $y$  perpendicular al hielo.

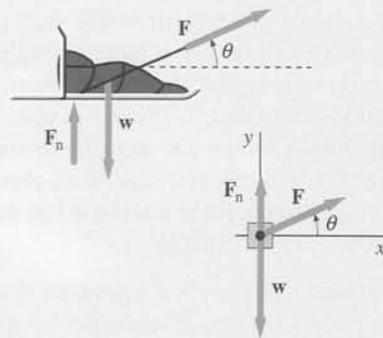


Figura 4.10

1. Dibujamos un diagrama de fuerzas (figura 4.10b) del trineo. Incluye un sistema de coordenadas en el cual uno de los ejes de coordenadas apunta en la dirección de la aceleración del trineo. El objeto se mueve hacia la derecha con velocidad creciente, por lo que sabemos que la aceleración va en esa dirección:
2. *Nota:* Se añaden los vectores fuerza en el diagrama (figura 4.11) para verificar que su suma va en la dirección de la aceleración:
3. Se aplica la segunda ley de Newton al objeto. Se escribe la ecuación tanto en forma vectorial como en sus componentes:

$$\mathbf{F}_n + \mathbf{w} + \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

o

$$F_{n,x} + w_x + F_x = ma_x$$

$$F_{n,y} + w_y + F_y = ma_y$$

$$F_{n,x} = 0, \quad w_x = 0, \quad \text{y} \quad F_x = F \cos \theta$$

$$0 + 0 + F \cos \theta = ma_x$$

$$a_x = \frac{F \cos \theta}{m} = \frac{(150 \text{ N})(\cos 25^\circ)}{80 \text{ kg}} = \boxed{1,70 \text{ m/s}^2}$$

$$a_y = 0$$

$$F_{n,y} = F_n, \quad w_y = -mg, \quad \text{y} \quad F_y = F \sin \theta$$

$$\sum F_y = F_n - mg + F \sin \theta = 0$$

$$F_n = mg - F \sin \theta$$

$$= (80 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg}) - (150 \text{ N})(\sin 25^\circ) = \boxed{721 \text{ N}}$$

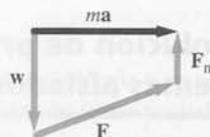


Figura 4.11

1. Se expresa la componente  $y$  de  $\mathbf{a}$ :
2. Se escriben las componentes  $y$  de  $F_n$ ,  $w$ , y  $F$ :
3. Se sustituyen los resultados de los pasos b1 y b2 en la ecuación para la componente  $y$  del paso a3. Se resuelve entonces para  $F_n$

**Observación** Sólo la componente  $x$  de  $F$ ,  $F \cos \theta$ , es la causa de la aceleración del cuerpo. Obsérvese también que el hielo soporta un peso inferior al peso total del cuerpo, pues la componente  $F \sin \theta$  es soportada por la cuerda.

**Comprobar el resultado** Si  $\theta = 0$ , el cuerpo es acelerado por una fuerza  $F$  y el hielo soporta todo su peso. Nuestros resultados concuerdan, ya que en este caso darían  $a_x = F/m$  y  $F_n = mg$ .

**Ejercicio** ¿Si  $\theta = 25^\circ$  cuál es la mayor fuerza  $F$  que puede aplicarse a la cuerda sin levantar el trineo de la superficie? (*Respuesta*  $F = 1,86 \text{ kN}$ .)

El ejemplo 4.6 ilustra un método general para resolver problemas utilizando las leyes de Newton:

1. Dibujar un diagrama claro.
2. Aislar el objeto (partícula) que nos interesa y dibujar un diagrama que muestre todas las fuerzas que actúan sobre el objeto. Si existe más de un objeto de interés en el problema, dibujar un diagrama análogo para cada uno de ellos. Elegir un sistema de coordenadas conveniente para cada objeto e incluirlo en el diagrama de fuerzas para este objeto. Si se conoce la dirección de la aceleración, se elige un eje de coordenadas que sea paralelo a ella. Para objetos que resbalan o que se deslizan por una superficie, hay que escoger un eje de coordenadas paralelo a la superficie y otro perpendicular a ella.

3. Aplicar la segunda ley de Newton,  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , en forma de componentes.
4. En problemas donde hay dos o más objetos, para simplificar las ecuaciones que se obtienen de aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  hay que usar la tercera ley de Newton,  $\mathbf{F}_{A,B} = -\mathbf{F}_{B,A}$  y todas las ligaduras.
5. Despejar las incógnitas de las ecuaciones resultantes.
6. Comprobar si los resultados tienen las unidades correctas y parecen razonables. Sustituir valores extremos en la solución es un buen sistema para comprobar si se han cometido errores.

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE LAS LEYES DE NEWTON

## EJEMPLO 4.7 | Descarga de un camión

Suponga que trabaja para una gran compañía de transporte y que debe descargar una caja enorme y frágil desde un camión usando una rampa como la que se muestra en la figura 4.12. Si la velocidad vertical con que llega la caja al final de la rampa es superior a 2,5 m/s (la velocidad que adquiere un objeto si cae desde una altura de 30,5 cm), su carga se daña. ¿Cuál es el mayor ángulo posible al que se puede instalar la rampa para conseguir una descarga segura? La rampa debe superar un metro de altura, está formada por rodillos (se puede suponer que no ejerce rozamiento) y está inclinada con la horizontal un ángulo  $\theta$ .

**Planteamiento del problema** Sobre la caja actúan dos fuerzas, el peso  $w$  y la fuerza normal  $F_n$ . Como estas fuerzas no son paralelas no pueden sumar cero, con lo cual, hay una fuerza resultante sobre el objeto que lo acelera. La rampa hace que la caja se mueva paralela a su superficie, por lo que elegimos la dirección de la pendiente de la rampa como la dirección  $x$ . Para determinar la aceleración aplicamos la segunda ley de Newton a la caja. Cuando sepamos el valor de la aceleración, podremos usar un cálculo cinemático para determinar el mayor ángulo de la pendiente para el que podemos asegurar una descarga segura.

1. Se establece una relación entre la componente hacia abajo de la velocidad de la caja y la velocidad  $v$  a lo largo de la rampa:

$$v_d = v \sin \theta$$

2. La velocidad  $v$  está relacionada con el desplazamiento  $\Delta x$  a lo largo de la rampa mediante la ecuación cinemática siguiente:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x \Delta x$$

3. Para determinar  $a_x$  aplicamos a la caja la segunda ley de Newton ( $\Sigma F_x = ma_x$ ). Dibujamos el diagrama de la figura 4.13 donde vemos que actúan dos fuerzas, el peso y la normal. Elegimos la dirección de la aceleración, en la dirección de la rampa hacia abajo, como dirección  $+x$ :

*Nota:* Como se ve en el diagrama, el ángulo entre  $w$  y el sentido negativo del eje  $y$  es el mismo que el ángulo entre la pendiente de la rampa y la horizontal. También se puede ver que  $w_x = w \sin \theta$ .

4. Se aplica la segunda ley de Newton y se obtiene:

$$F_{n,x} + w_x = ma_x$$

donde

$$F_{n,x} = 0 \quad \text{y} \quad w_x = w \sin \theta = mg \sin \theta$$

*Nota:*  $F_n$  es perpendicular al eje  $x$  y  $w = mg$ .

5. Se sustituye y despeja la aceleración obteniendo:

$$0 + mg \sin \theta = ma_x$$

por lo que

$$a_x = g \sin \theta$$

6. Se sustituye  $a_x$  en la ecuación cinemática (paso 2), haciendo  $v_0 = 0$ , con lo cual:

$$v^2 = 2g \sin \theta \Delta x$$

7. De la figura 4.12 se ve que cuando  $\Delta x$  es la longitud de la rampa,  $\Delta x \sin \theta = h$ , donde  $h$  es la altura de la rampa:

$$v^2 = 2gh$$

8. Mediante el uso de  $v_d = v \sin \theta$ , se obtiene para  $v_d$ :

$$v_d = \sqrt{2gh} \sin \theta$$

9. Se despeja el ángulo máximo y se obtiene:

$$2,5 \text{ m/s} = \sqrt{2(9,81 \text{ m/s}^2)(1,0 \text{ m})} \sin \theta_{\text{máx}}$$

$$\theta_{\text{máx}} = \boxed{34,4^\circ}$$

## ¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

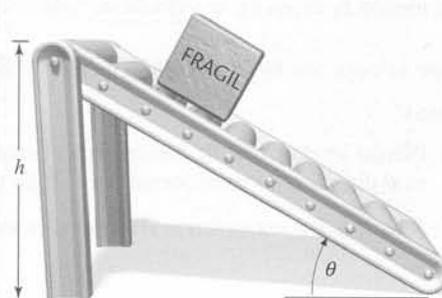


Figura 4.12

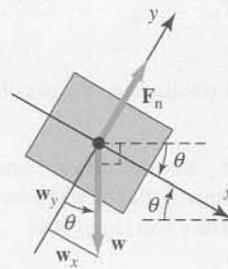


Figura 4.13

**Observación** La aceleración por la rampa hacia abajo es constante e igual a  $g \sin \theta$ . Asimismo, la velocidad  $v$  al final de la rampa ( $v = \sqrt{2gh}$ ) no depende del ángulo  $\theta$ .

**Ejercicio** Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  a la caja y demostrar que  $F_n = mg \cos \theta$ .

### EJEMPLO 4.8 | Colgando un cuadro

Un cuadro que pesa 8 N se aguenta mediante dos cables que ejercen tensiones  $T_1$  y  $T_2$ , tal como indica la figura 4.14. Determinar la tensión de los dos cables.

**Planteamiento del problema** Como el cuadro no posee aceleración, la fuerza neta que actúa sobre el mismo debe ser nula. Las tres fuerzas que actúan sobre el cuadro, su peso  $mg$ , la tensión  $T_1$  y la tensión  $T_2$  deben dar una resultante nula.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el cuadro (figura 4.15). Mostrar en el diagrama las componentes  $x$  e  $y$  de las tensiones.
2. Aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  en forma vectorial al cuadro.
3. Descomponer cada fuerza en sus componentes  $x$  e  $y$ . Así se obtienen dos ecuaciones para las incógnitas  $T_1$  y  $T_2$ .
4. Resolver la ecuación de la componente  $x$  para  $T_2$  en función de  $T_1$ .
5. Aplicar el valor de  $T_2$  en la ecuación de la componente  $y$  del paso 3 y despejar  $T_1$ .
6. Utilizar el resultado de  $T_1$  para obtener  $T_2$ .

#### Respuestas

$$T_1 + T_2 + w = ma$$

$$T_{1,x} + T_{2,x} + w_x = 0$$

$$T_{1,y} + T_{2,y} + w_y = 0$$

$$T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ + 0 = 0$$

$$T_1 \sin 30^\circ - T_2 \sin 60^\circ - w = 0$$

$$T_2 = T_1 \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = T_1 \sqrt{3}$$

$$T_1 \sin 30^\circ + (T_1 \sqrt{3}) \sin 60^\circ - w = 0$$

$$T_1 = \frac{1}{2}w = \boxed{4 \text{ N}}$$

$$T_2 = T_1 \sqrt{3} = \boxed{6,93 \text{ N}}$$

**Observación** El cable más próximo a la vertical es el que soporta la mayor contribución del peso, como era de esperar. También vemos que  $T_1 + T_2 > 8\text{ N}$ . La fuerza “extra” es debida a los cables que tiran a la derecha y a la izquierda.

*¡INTÉNTELO USTED MISMO!*

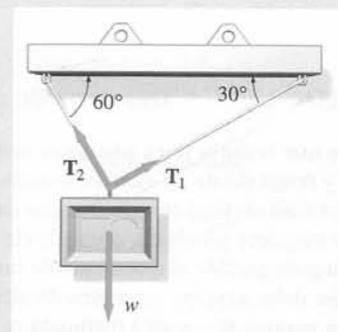


Figura 4.14

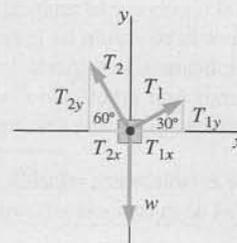


Figura 4.15

### EJEMPLO 4.9 | Un avión que acelera

Cuando un avión acelera en la pista del aeropuerto para despegar, un viajero decide determinar su aceleración mediante su yo-yo y comprueba que la cuerda del mismo forma un ángulo de  $22^\circ$  con la vertical (figura 4.16a). (a) ¿Cuál es la aceleración del avión? (b) Si la masa del yo-yo es de 40 g, ¿cuál es la tensión de la cuerda?

**Planteamiento del problema** El avión y el yo-yo tienen la misma aceleración hacia la derecha. La fuerza neta del yo-yo es en la dirección de su aceleración. Esta fuerza viene suministrada por la componente horizontal de la tensión  $T$ . La componente vertical de  $T$  equilibra el peso del yo-yo. Elegimos un sistema de coordenadas en el cual la dirección  $x$  es paralela al vector aceleración  $\mathbf{a}$  y la dirección  $y$  es vertical. Expresando la ley de Newton para ambas direcciones  $x$  e  $y$  se obtienen dos ecuaciones que nos permiten calcular las dos incógnitas,  $a$  y  $T$ .

- (a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el yo-yo (figura 4.16b). Elegir la dirección positiva del eje  $x$  en la dirección de la aceleración.

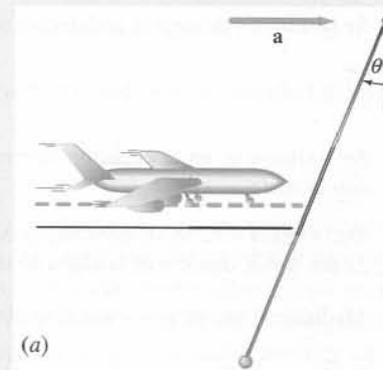


Figura 4.16

2. Aplicar  $\Sigma F = ma$  según el método de las componentes para el yo-yo:

$$T_x + w_x = ma_x$$

$$T \sin \theta + 0 = ma_x$$

$$o$$

$$T \sin \theta = ma_x$$

3. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  al yo-yo. Mediante la trigonometría y  $w = mg$ , simplificar (figura 4.16c). La aceleración apunta en la dirección positiva del eje  $x$ , por lo tanto  $a_y = 0$ :

$$T_y = w_y = ma_y$$

$$T \cos \theta - mg = 0$$

$$o$$

$$T \cos \theta = mg$$

4. Dividir el resultado del paso 2 por el del paso 3 y despejar la aceleración. El vector aceleración señala en la dirección positiva del eje  $x$ , con lo que  $a = a_x$ :

$$\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{ma_x}{mg}$$

$$o$$

$$a = g \operatorname{tg} \theta = (9,81 \text{ m/s}^2) \operatorname{tg} 22^\circ = \boxed{3,96 \text{ m/s}^2}$$

(b) Despejar la tensión, usando el resultado del paso 3:

$$T = \frac{mg}{\cos \theta} = \frac{(0,04 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)}{\cos 22^\circ} = \boxed{0,423 \text{ N}}$$

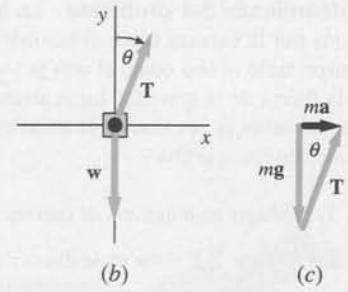


Figura 4.16

**Observación**  $T$  es mayor que el peso del yo-yo ( $mg = 0,392 \text{ N}$ ), ya que la cuerda no sólo evita que caiga el yo-yo, sino que también lo acelera en dirección horizontal. En este caso utilizaremos para  $g$  las unidades  $\text{m/s}^2$ , ya que estamos calculando una aceleración.

**Comprobar el resultado** Para  $\theta = 0$ , resulta  $T = mg$  y  $a = 0$ .

**Ejercicio** ¿Para qué aceleración  $a$  la tensión de la cuerda sería igual a  $3 \text{ mg}$ ? ¿Cuánto valdría  $\theta$  en este caso? (Respuestas  $a = 27,8 \text{ m/s}^2$ ,  $\theta = 70,5^\circ$ .)

El ejemplo siguiente aplica las leyes de Newton a objetos que están en reposo relativo respecto a un sistema de referencia acelerado.

### EJEMPLO 4.10 | Su peso en un ascensor

Un hombre de  $80 \text{ kg}$  está de pie sobre una balanza de muelle sujeta al suelo de un ascensor. La balanza está calibrada en newtons. ¿Qué peso indicará la balanza cuando (a) el ascensor se mueve con aceleración  $a$  hacia arriba; (b) el ascensor se mueve con aceleración descendente  $a'$ ; (c) el elevador se mueve hacia arriba a  $20 \text{ m/s}$ , mientras su velocidad decrece a razón de  $8 \text{ m/s}^2$ ?

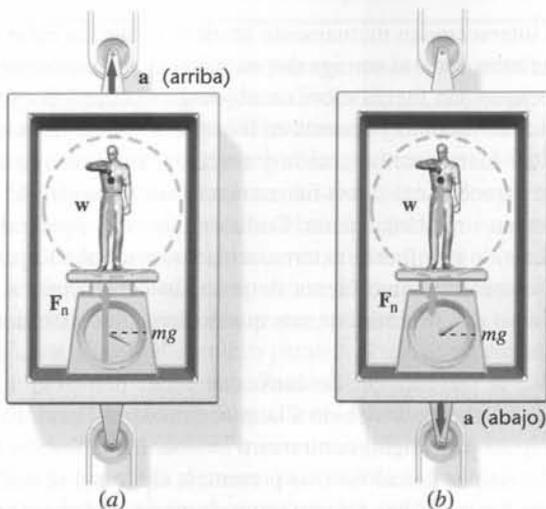


Figura 4.17

**Planteamiento del problema** La lectura de la balanza es el módulo de la fuerza normal  $F_n$  ejercida por la balanza sobre el hombre (figura 4.17). Como el hombre está en reposo respecto al ascensor, tanto el uno como el otro poseen la misma aceleración. Sobre el hombre actúan dos fuerzas: la fuerza de la gravedad hacia abajo,  $mg$  y la fuerza normal de la balanza,  $F_n$ , hacia arriba. La suma de ambas es la causa de la aceleración observada sobre el hombre. Elegiremos como positiva la dirección hacia arriba.

(a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el hombre:

2. Aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  en la dirección  $y$ :

$$F_{n,y} + w_y = ma_y$$

$$F_n - mg = ma$$

3. Despejar  $F_n$ . Esta es la lectura de la balanza (el peso aparente del hombre):

$$F_n = mg + ma = \boxed{m(g+a)}$$

(b) 1. Aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  en la dirección  $y$  para el caso en que el ascensor acelera hacia abajo con aceleración  $a'$ :

$$F_{n,y} + w_y = ma_y$$

$$F_n - mg = m(-a')$$

2. Despejar  $F_n$ :

$$F_n = mg - ma' = \boxed{m(g-a')}$$

(c) 1. Aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  en la dirección  $y$ . Obsérvese que la aceleración del ascensor está dirigida hacia abajo:

$$F_{n,y} + w_y = ma_y$$

2. Despejar  $F_n$ :

$$F_n - mg = ma_y$$

$$F_n = m(g+a_y) = (80 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2 - 8,00 \text{ m/s}^2) = \boxed{145 \text{ N}}$$



Figura 4.18

**Observación** Cuando el ascensor acelera hacia arriba, ya sea en su ascenso o descenso, el peso aparente del hombre es mayor que  $mg$  en la cantidad  $ma$ . Para el hombre todo ocurre como si la gravedad se incrementase de  $g$  a  $g+a$ . Cuando el ascensor acelera hacia abajo, el peso aparente del hombre es menor que  $mg$  en la cantidad  $ma'$ . El hombre se siente más ligero, como si la gravedad fuera  $g-a'$ . Si  $a' = g$ , el ascensor estaría en caída libre y el hombre experimentaría la ingravidez.

**Ejercicio** Un ascensor que desciende a la planta baja llega a una parada con una aceleración de  $4 \text{ m/s}^2$ . Si una persona de  $70 \text{ kg}$  se encuentra sobre una balanza en el interior de este ascensor, ¿qué peso marcará la balanza cuando el ascensor está deteniéndose? (Respuesta:  $967 \text{ N}$ .)

**Ejercicio** Un hombre está sobre una balanza dentro de un ascensor que tiene una aceleración ascensional  $a$ . La balanza mide  $960 \text{ N}$ . El hombre coge una caja de  $20 \text{ kg}$ , y la balanza mide entonces  $1200 \text{ N}$ . Determinar la masa del hombre, su peso, y la aceleración  $a$ .

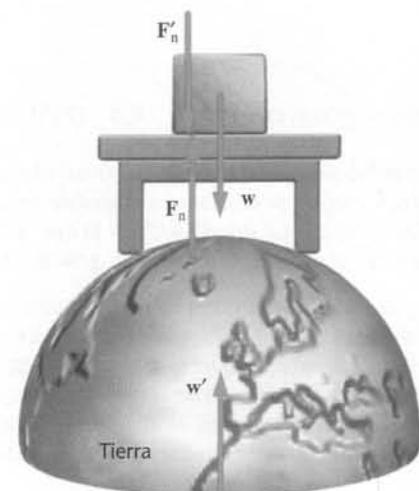


Figura 4.19

## 4.6 La tercera ley de Newton

Cuando dos cuerpos interactúan mutuamente se ejercen fuerzas entre sí. La tercera ley de Newton establece que estas fuerzas son iguales en módulo y van en direcciones opuestas. Es decir, si un objeto A ejerce una fuerza sobre un objeto B, el objeto B ejerce una fuerza sobre el objeto A que es igual en módulo y opuesta en dirección. Así las fuerzas se dan en pares. Es común referirse a estas fuerzas como acción y reacción, sin embargo esta terminología es desafortunada porque parece como si una fuerza reaccionara a la otra, lo cual no es cierto, ya que ambas fuerzas actúan simultáneamente. Cada una de ellas puede denominarse acción o bien reacción. Si cuando una fuerza externa actúa sobre un objeto particular la llamamos fuerza de acción, la correspondiente fuerza de reacción debe actuar sobre un objeto diferente. Así en ningún caso dos fuerzas externas que actúan sobre un único objeto constituyen un par acción-reacción.

En la figura 4.19 se ve una caja que descansa encima de una mesa. La fuerza hacia abajo que actúa sobre la caja es el peso  $w$  debido a la atracción de la Tierra. El bloque ejerce sobre la Tierra una fuerza igual y de signo contrario  $w' = -w$ . Estas fuerzas forman pues un par acción-reacción. Si fueran las únicas fuerzas presentes, el bloque se aceleraría hacia abajo y la Tierra se aceleraría hacia arriba. Sin embargo, la mesa ejerce sobre la caja una fuerza hacia arriba  $F_n$  que compensa el peso. La caja también ejerce una fuerza sobre la mesa  $F'_n = -F_n$  hacia abajo. Las fuerzas  $F_n$  y  $F'_n$  forman un par acción-reacción.

**Ejercicio** ¿Las fuerzas  $w$  y  $F_n$  de la figura 4.19 forman un par acción-reacción? (Respuesta No, no lo forman. Estas fuerzas son externas y ambas actúan sobre el mismo objeto, la caja. Por lo tanto no pueden constituir un par acción-reacción.)

### EJEMPLO 4.11 | El caballo y el carro

El caballo de la figura 4.20a rechaza tirar del carro porque razona: “de acuerdo con la tercera ley de Newton, cualquiera que sea la fuerza que ejerza sobre el carro, éste ejercerá una fuerza igual y de sentido contrario sobre mí, por lo que la fuerza neta será cero y no habrá ninguna opción para acelerarlo”. ¿Dónde está la incorrección en este argumento?

**Planteamiento del problema** Estamos interesados en el movimiento del carro, y, por lo tanto, dibujamos un diagrama de fuerzas para él (figura 4.20b). La fuerza ejercida por el caballo en los arreos se designa por  $F$ . (Los arreos están atados al carro, por lo que los consideramos como parte del carro.) Hay otras fuerzas que actúan sobre el carro, como el peso  $w$ , la fuerza que ejerce el suelo  $F_n$ , y la fuerza horizontal ejercida por el pavimento,  $f$  (fuerza de rozamiento).

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para el carro (véase la figura 4.20c). El carro no acelera verticalmente, por lo que la suma de fuerzas en la dirección vertical es cero. Las fuerzas horizontales son  $F$  que va hacia la derecha y  $f$  que va hacia la izquierda. El carro acelerará si  $F > f$ .
2. Nótese que la fuerza de reacción a  $F$ , que denominamos  $F'$  se ejerce sobre el caballo, no sobre el carro (figura 4.20d), y no tiene ningún efecto sobre el movimiento del carro, sino que afecta al movimiento del caballo. Si el caballo acelera hacia la derecha, debe haber una fuerza  $F_p$  (hacia la derecha) ejercida por el pavimento sobre las pezuñas del caballo mayor que  $F'$ .

**Observación** Este ejemplo ilustra la importancia de dibujar un diagrama de fuerzas cuando se resuelven problemas de mecánica. Si el caballo lo hubiera hecho, hubiera comprendido que le bastaba con empujar con fuerza sobre el pavimento para que éste le proporcionara la fuerza para moverlo hacia delante.

**Ejercicio** Colóquese frente a un amigo y pongan las palmas de sus manos una contra otra. ¿Su amigo puede ejercer sobre usted fuerza si usted no se resiste? Inténtelo.

**Ejercicio** Verdadero o falso: La fuerza ejercida por el carro sobre el caballo es igual y opuesta a la fuerza ejercida por el caballo sobre el carro, pero sólo cuando el caballo y el carro no aceleran. (Respuesta ¡Falso! Un par de fuerzas acción-reacción describe la interacción entre dos objetos. Una fuerza no puede existir sin la otra. Ambas son *siempre* iguales y opuestas.)

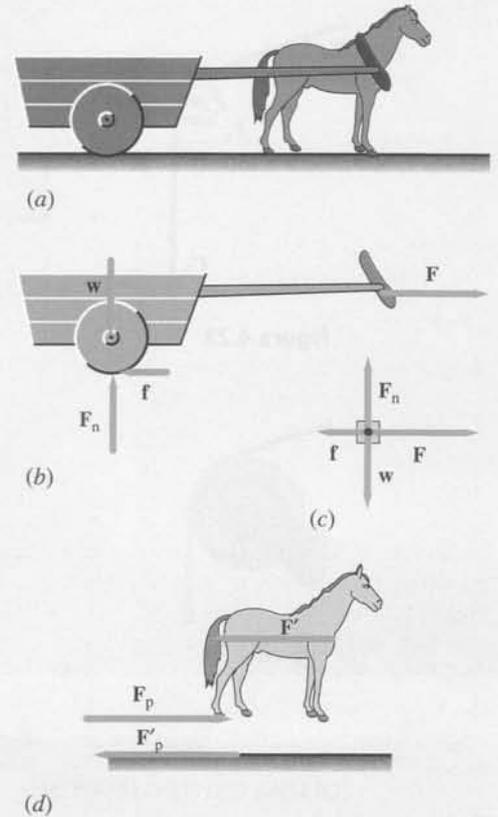


Figura 4.20

## 4.7 Problemas con dos o más objetos

Algunos problemas tratan de dos o más cuerpos que están en contacto o conectados a una cuerda o muelle. Estos problemas se resuelven dibujando un diagrama de fuerzas para cada cuerpo y después aplicando la segunda ley de Newton a cada uno de ellos. Las ecuaciones resultantes, junto con otras ecuaciones que describen las restricciones establecidas, se resuelven simultáneamente para las fuerzas o aceleraciones desconocidas. Si los cuerpos están en contacto directo, las fuerzas que se ejercen mutuamente deben ser iguales y opuestas, como establece la tercera ley de Newton. Dos cuerpos que se mueven en línea recta y que estén conectados por una cuerda tensa deben tener la misma componente de la aceleración paralela a la cuerda, ya que el movimiento paralelo a ésta de ambos cuerpos es idéntico. Si la cuerda pasa por una pinza o polea, la frase “paralela a la cuerda” significa paralela al segmento atado al objeto.

Consideremos el movimiento de Steve y Paul en la figura 4.21. La velocidad con la cual Paul baja se iguala con la velocidad con la que Steve resbala por el glaciar, es decir, la componente de la velocidad de Paul paralela al tramo de cuerda al que está sujeto se iguala con la componente de la velocidad paralela al tramo de la cuerda al que está sujeto Steve. Estas dos componentes de la velocidad deben ser siempre iguales y si Steve y Paul varían su velocidad lo deben hacer al unísono. Lo mismo ocurre con las componentes de la aceleración paralelas a la cuerda.

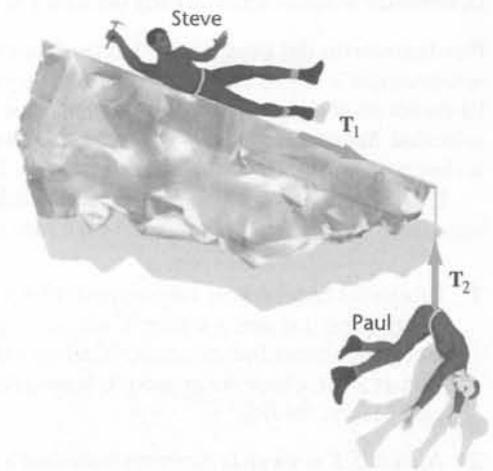


Figura 4.21

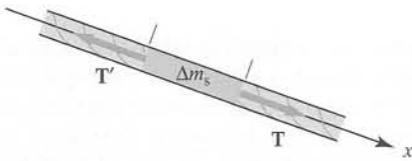


Figura 4.22

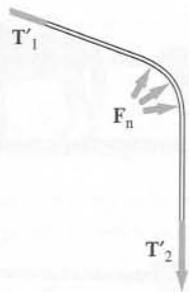


Figura 4.23



Figura 4.24

La tensión en una cadena o una cuerda es el módulo de la fuerza que un segmento de la cuerda ejerce sobre el inmediatamente contiguo. La tensión puede variar a través de la cuerda, como en el caso de una cuerda que cuelga del techo de un gimnasio, donde la tensión en el trozo que está junto al techo es mayor, ya que en esa zona se aguanta también el peso de toda la cuerda. Sin embargo, en los problemas que trataremos en este libro, no se suele considerar la masa de las cuerdas y de las cadenas, ya que se suponen pequeñas, de forma que la variación en la tensión debida al peso de la cuerda o de la cadena es despreciable y, por lo tanto, también se desprecian las variaciones en la tensión debidas a alguna aceleración de la cuerda. Para verlo, consideremos el diagrama de la figura 4.22, donde se muestra la cuerda a la que está atado Steve, donde  $\Delta m_s$  es la masa del segmento de cuerda.

Aplicando la segunda ley de Newton a este segmento se obtiene  $T - T' = \Delta m_s a_x$ . Si la masa del segmento de cuerda es despreciable, entonces  $T = T'$  y no se necesita una fuerza neta para darle una aceleración. (Es decir, sólo se necesita una diferencia de tensión despreciable para dar a un trozo de cuerda de masa despreciable una aceleración finita.)

Ahora consideramos toda la cuerda que une a Steve y Paul. Si despreciamos la gravedad, sobre la cuerda actúan tres fuerzas. Steve y Paul, cada uno, ejercen una fuerza, como también lo hace el hielo del borde del glaciar. Despreciar cualquier rozamiento entre el hielo y la cuerda significa que la fuerza ejercida por el hielo siempre es una fuerza normal (véase la figura 4.23), y una fuerza normal nunca tiene una componente a lo largo de la cuerda, por lo que no puede producir ningún cambio en la tensión. Así la tensión es la misma en toda la cuerda. En resumen, si una cuerda de masa despreciable cambia de dirección pasando por una superficie sin rozamiento, la tensión es la misma en toda la cuerda.

**Ejercicio** Supongamos que la cuerda del ejemplo anterior, en vez de pasar por el borde de un glaciar, pase por una polea que tiene unos cojinetes que no ejercen rozamiento, como se muestra en la figura 4.24. ¿La tensión será la misma a lo largo de toda la cuerda? (*Respuesta* No. Una cosa es que no haya rozamiento entre los cojinetes y la polea, pero otra cosa es que la polea tenga masa, es decir, inercia. Para cambiar la velocidad de rotación de la polea se necesita una diferencia de tensión.)

**EJEMPLO 4.12 | Los escaladores**

Paul (masa  $m_p$ ) se cae por el borde de un glaciar. Afortunadamente está atado mediante una larga cuerda a Steve (masa  $m_s$ ), que lleva un piolet. Antes de que Steve clave su piolet para detener el movimiento, desliza sin rozamiento por la superficie de hielo, atado a Paul por una cuerda (figura 4.21). Se supone que tampoco existe rozamiento entre la cuerda y el acantilado. Determinar la aceleración de cada persona y la tensión de la cuerda.

**Planteamiento del problema** Las tensiones de la cuerda  $T_1$  y  $T_2$  son de igual módulo  $T$  porque se supone que la cuerda es de masa despreciable y el acantilado se supone que carece de rozamiento. La cuerda no se alarga ni se encoge, de modo que Paul y Steve tienen siempre el mismo módulo de velocidad. Sus aceleraciones  $a_p$  y  $a_s$  son, por lo tanto, iguales en módulo, pero no en dirección. Steve acelera por la superficie del glaciar, mientras que Paul lo hace verticalmente hacia abajo.

La aceleración de cada persona está relacionada con las fuerzas que actúan sobre él por la segunda ley de Newton. Aplicar  $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  a cada una y despejar la aceleración y la tensión.

1. Dibujar los diagramas de fuerzas que actúan aisladamente sobre Paul y Steve. Poner los ejes  $x$  e  $y$  en el diagrama correspondiente a Steve, escogiendo como dirección positiva del eje  $x$  la dirección de la aceleración de Steve. Elegir la dirección de la aceleración de Paul como dirección positiva del eje  $x'$

2. Aplicar  $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  en la dirección horizontal a Steve:

$$F_{n,x} + T_{1,x} + m_s g_x = m_s a_{s,x}$$

3. Aplicar  $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  a Paul:

$$T_{2,x'} + m_p g_{x'} = m_p a_{p,x'}$$

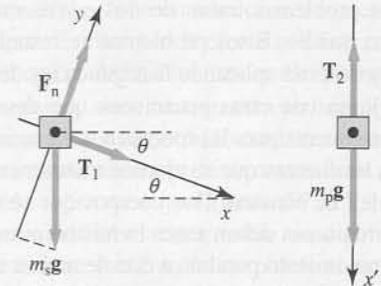


Figura 4.25

- Ambos se mueven en línea recta y están unidos por un segmento de cuerda que no se estira, por lo tanto las aceleraciones de Paul y de Steve están relacionadas. Expresar esta relación:
- Dado que la cuerda tiene una masa despreciable y resbala sobre el hielo con rozamiento despreciable, las fuerzas  $T_1$  y  $T_2$  están relacionadas. Expresar esta relación:
- Sustituir los resultados de los pasos 4 y 5 en las ecuaciones del paso 2 y del paso 3:
- Resolver las ecuaciones del paso 6 para la aceleración eliminando  $T$  y despejando  $a_x$ :
- Sustituir el resultado del paso 7 en las dos ecuaciones del paso 6 y despejar  $T$ :

$$a_{P,x} = a_{S,x} = a_x$$

$$T_2 = T_1 = T$$

$$\begin{aligned} T + m_S g \text{ sen } \theta &= m_S a_x \\ -T + m_P g &= m_P a_x \end{aligned}$$

$$a_x = \frac{m_S \text{ sen } \theta + m_P}{m_S + m_P} g$$

$$T = \frac{m_S m_P}{m_S + m_P} (1 - \text{sen } \theta) g$$

**Observación** En el paso 3 se elige la dirección hacia abajo como positiva para que la solución sea lo más simple posible. Con esta aceleración, cuando Steve se mueve en dirección positiva (hacia la derecha), Paul se mueve también en dirección positiva (hacia abajo).

**Comprobar el resultado** Si  $m_P$  es mucho mayor que  $m_S$ , es de esperar que la aceleración sea aproximadamente igual a  $g$  y la tensión aproximadamente cero. Sustituyendo  $m_S = 0$  realmente nos da  $a = g$  y  $T = 0$ . Si  $m_P$  es mucho menor que  $m_S$ , esperamos que la aceleración sea aproximadamente  $g \text{ sen } \theta$  (véase el ejemplo 4.8) y que la tensión sea cero. Sustituyendo  $m_P = 0$  en los pasos 7 y 8, obtenemos  $a_x = g \text{ sen } \theta$  y  $T = 0$ . Comprobamos nuestras respuestas en el valor límite de la pendiente ( $\theta = 90^\circ$ ) y obtenemos  $a_x = g$  y  $T = 0$ . Esto parece correcto ya que si  $\theta = 90^\circ$  Steve y Paul experimentan una caída libre.

**Ejercicio** (a) Determinar la aceleración si  $\theta = 15^\circ$  y las masas son  $m_S = 78 \text{ kg}$  y  $m_P = 92 \text{ kg}$ . (b) Determinar la aceleración si los valores de estas dos masas se intercambian. (Respuestas (a)  $a_x = 0,660g$ , (b)  $a_x = 0,599g$ .)

### EJEMPLO 4.13 | Construyendo una estación espacial

Un astronauta que construye una estación espacial empuja un bloque de masa  $m_1$  con una fuerza  $F_A$ . Este bloque está en contacto directo con un segundo bloque de masa  $m_2$  (figura 4.26). (a) ¿Cuál es la aceleración de las cajas? (b) ¿Cuál es el módulo de la fuerza ejercida por una caja sobre la otra?

**Planteamiento del problema** Sea  $F_{2,1}$  la fuerza ejercida por  $m_2$  sobre  $m_1$  y  $F_{1,2}$  la fuerza ejercida por  $m_1$  sobre  $m_2$ . Estas fuerzas son iguales y opuestas ( $F_{2,1} = -F_{1,2}$ ), de manera que  $F_{2,1} = F_{1,2}$ . Aplicar la segunda ley de Newton a cada bloque por separado y tener en cuenta que las aceleraciones  $a_1$  y  $a_2$  son iguales.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

- Pasos**
- Dibujar los diagramas de fuerzas de cada uno de los dos bloques (figura 4.27).
  - Aplicar  $\Sigma F = ma$  al primer bloque.
  - Aplicar  $\Sigma F = ma$  al segundo bloque.
  - Expresar la relación entre las dos aceleraciones y la relación entre los módulos de las fuerzas que se ejercen los bloques entre sí.
  - Sustituir estas relaciones en los resultados de los pasos 2 y 3 y despejar  $a_x$ .
- (b) Sustituir la expresión para  $a_x$  en los pasos 2 o 3 y despejar  $F$ .

#### Respuestas

$$F_A - F_{2,1} = m_1 a_{1,x}$$

$$F_{1,2} = m_2 a_{2,x}$$

$$a_{2,x} = a_{1,x} = a_x$$

$$F_{2,1} = F_{1,2} = F$$

$$a = \frac{F_A}{m_1 + m_2}$$

$$F = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F_A$$

### ¡INTÉNTELO USTED MISMO!

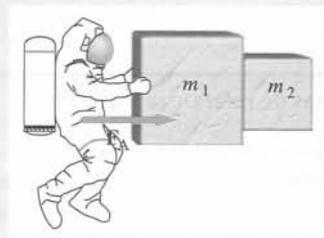


Figura 4.26

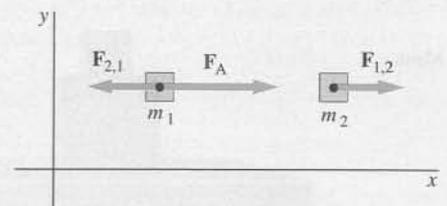


Figura 4.27

**Observación** El resultado del paso 5 es el mismo que obtendríamos si la fuerza  $F_A$  actuase sobre una sola masa igual a la suma de las masas de los dos bloques. En efecto, como las dos masas tienen igual aceleración, podemos considerarlas como un sistema único de masa  $m_1 + m_2$ .

**Ejercicio** (a) Determinar la aceleración y la fuerza de contacto si  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 3 \text{ kg}$  y  $F_A = 12 \text{ N}$ . (b) Determinar la fuerza de contacto para el caso en que los bloques se intercambian de modo que el primer bloque tiene una masa de 3 kg y el segundo bloque una masa de 2 kg. (Respuestas (a)  $a_x = 2,4 \text{ m/s}^2$ ,  $F = 7,2 \text{ N}$ , (b)  $F = 4,8 \text{ N}$ .)

## Resumen

- 1 Las leyes del movimiento de Newton son leyes fundamentales de la naturaleza que constituyen la base de la mecánica.
- 2 La masa es una propiedad *intrínseca* de todo cuerpo.
- 3 La fuerza es una importante magnitud dinámica *derivada*.

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### 1. Leyes de Newton

Primera ley

Un objeto en reposo permanece en reposo a menos que sobre él actúe una fuerza externa neta. Un objeto en movimiento continúa moviéndose con velocidad constante a menos que sobre él actúe una fuerza externa neta. (Los sistemas de referencia en los que esto ocurre se llaman sistemas de referencia inerciales.)

Segunda ley

El módulo de la aceleración es proporcional al módulo de la fuerza neta externa  $F_{\text{net}}$ , de acuerdo con  $F_{\text{net}} = ma$ , donde  $m$  es la masa del objeto. La fuerza neta que actúa sobre un objeto, también denominada fuerza resultante, es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él:  $F_{\text{net}} = \Sigma F$ . Así:

$$\Sigma F = ma \quad (4.1)$$

Tercera ley

Las fuerzas se dan siempre por pares, iguales y opuestas. Si el objeto A ejerce una fuerza sobre el objeto B, una fuerza igual y opuesta ejerce el objeto B sobre el A.

$$F_{A,B} = -F_{B,A} \quad (4.2)$$

#### 2. Sistemas de referencia inerciales

Las leyes de Newton sólo son válidas en un sistema de referencia inercial, es decir un sistema de referencia para el cual un objeto en reposo permanece en reposo si no hay una fuerza neta que actúe sobre el objeto. Cualquier sistema de referencia que se mueva con velocidad constante relativa a un sistema de referencia inercial es también un sistema de referencia inercial. Un sistema de referencia que se mueve con aceleración relativa a un sistema inercial no es un sistema de referencia inercial. Un sistema de referencia ligado a la Tierra es aproximadamente un sistema de referencia inercial.

#### 3. Fuerza, masa y peso

Fuerza

La fuerza se define en función de la aceleración que produce a un determinado objeto. Una fuerza de 1 newton (N) es la fuerza que produce una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  sobre una masa de 1 kilogramo (kg).

Masa

La masa es la propiedad intrínseca de un objeto que mide su resistencia a la aceleración. La masa no depende de la localización del objeto. Las masas de dos objetos pueden compararse aplicando la misma fuerza a cada uno de los objetos y midiendo sus aceleraciones. La relación de las masas de los objetos es igual a la relación inversa de las aceleraciones producidas por la misma fuerza:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \quad (4.3)$$

Peso

El peso  $w$  de un objeto es la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la Tierra sobre el objeto. Es proporcional a la masa  $m$  del objeto y a la intensidad del campo gravitatorio  $g$  o aceleración de la caída libre debida a la gravedad.

$$w = mg \quad (4.4)$$

El peso no es una propiedad intrínseca de un objeto; depende de la localización del objeto.

## 4. Fuerzas fundamentales

Todas las fuerzas observadas en la naturaleza pueden explicarse en función de cuatro interacciones fundamentales:

- 1 La fuerza gravitatoria.
- 2 La fuerza electromagnética.
- 3 La fuerza nuclear fuerte (llamada también fuerza hadrónica).
- 4 La fuerza nuclear débil.

## 5. Fuerzas de contacto

Las fuerzas de contacto de soporte y rozamiento y las ejercidas por muelles y cuerdas, son debidas a las fuerzas moleculares que surgen de la fuerza electromagnética básica.

Ley de Hooke

Cuando un muelle se comprime o se alarga en una pequeña cantidad  $\Delta x$ , la fuerza que ejerce es proporcional a  $\Delta x$ :

$$F_x = -k \Delta x \quad (4.9)$$

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

Usar en todos los problemas  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

### Problemas conceptuales

1 ●● SSM ¿Cómo se puede saber si un sistema de referencia determinado es un sistema de referencia inercial?

2 ●● Suponga que usted observa un objeto desde un determinado sistema de referencia y encuentra que cuando sobre él no actúan fuerzas el cuerpo tiene una aceleración  $\mathbf{a}$ . ¿Cómo puede usar esta información para encontrar un sistema de referencia inercial?

3 ● Si cuando se estudia un cuerpo desde un sistema de referencia inercial no se observa aceleración, ¿se puede concluir que sobre él no actúan fuerzas?

4 ● SSM Si sobre un objeto actúa una única fuerza distinta de cero, ¿debe tener una aceleración relativa a cualquier sistema de referencia inercial? ¿Puede tener incluso velocidad cero?

5 ● Si sobre un objeto actúa una única fuerza conocida, ¿puede decirse sin tener información adicional en qué dirección se moverá?

6 ● Se observa un objeto que se mueve a velocidad constante en un sistema de referencia inercial. Se concluye que (a) no actúan fuerzas sobre el objeto, (b) actúa una fuerza constante en la dirección del movimiento, (c) la fuerza neta que actúa sobre el objeto es cero, (d) la fuerza neta que actúa sobre el objeto es igual y opuesta a su peso.

7 ● Imagínese que un objeto se envía al espacio exterior, lejos de cualquier galaxia, estrella u otro objeto estelar. ¿Cómo cambiará su masa? ¿Y su peso?

8 ● SSM ¿Cómo podría un astronauta en una situación aparente de ingravidez ser consciente de su masa?

9 ● SSM ¿En qué circunstancias su peso aparente será mayor que su peso real?

10 ●● Explicar por qué se dice que según la primera y la segunda ley de Newton es imposible utilizar las leyes de la mecánica para saber si estamos quietos o moviéndonos a velocidad constante.

11 ● Supongamos que un bloque de masa  $m_1$  descansa sobre otro bloque de masa  $m_2$  y la combinación de ambos se apoya sobre una mesa, como se muestra en la figura 4.28. Encontrar la fuerza ejercida (a) por  $m_1$  sobre  $m_2$ , (b) por  $m_2$  sobre  $m_1$ , (c) por  $m_2$  sobre la mesa, (d) por la mesa sobre  $m_2$ .



Figura 4.28 Problema 11

12 ● SSM Verdadero o falso.

- (a) Si dos fuerzas externas que son iguales en módulo y opuestas en dirección actúan sobre un mismo objeto, nunca serán fuerzas de acción-reacción.  
 (b) La acción es igual a la reacción sólo si los cuerpos no están acelerándose.

13 ● Un hombre de 80 kg patina sobre el hielo empujando a un muchacho de 40 kg, también sobre patines, con una fuerza de 100 N. La fuerza ejercida por el muchacho sobre el hombre es de (a) 200 N, (b) 100 N, (c) 50 N, (d) 40 N.

14 ● Una muchacha sostiene un pájaro en su mano. La fuerza de reacción al peso del pájaro es (a) la fuerza gravitatoria de la Tierra sobre el pájaro, (b) la fuerza gravitatoria del pájaro sobre la Tierra, (c) la fuerza de contacto de la mano sobre el pájaro, (d) la fuerza de contacto del pájaro sobre la mano, (e) la fuerza gravitatoria de la Tierra sobre la mano.

15 ● Un jugador de béisbol golpea la pelota con un bate. Si la fuerza con que éste golpea la pelota se considera como la fuerza de acción, ¿cuál es la fuerza de reacción? (a) La fuerza que el bate ejerce sobre las manos del bateador. (b) La fuerza sobre la pelota que ejerce el guante de la persona que consigue atraparla. (c) La fuerza que la pelota ejerce sobre el bate. (d) La fuerza que el lanzador ejerce sobre la bola mientras la lanza. (e) El rozamiento, ya que la pelota está en rotación hasta que se detiene.

16 ● Considerar cualquier situación en la que se aplica una fuerza externa sobre un objeto, por ejemplo el empuje. Si la tercera ley de Newton requiere que *por cada acción haya una reacción igual y opuesta*, ¿por qué cada fuerza de reacción no anula siempre la fuerza aplicada, produciendo la inexistencia de una aceleración resultante?

17 ● SSM Un cuerpo de 2,5 kg cuelga en reposo de una cuerda sujeta al techo. (a) Dibujar un diagrama que muestre las fuerzas que actúan sobre el cuerpo e indicar cada una de las fuerzas de reacción. (b) Hacer lo mismo con las fuerzas que actúan sobre la cuerda.

18 ● ¿Cuál de los diagramas de fuerzas de la figura 4.29 representa un bloque que se desliza por una superficie inclinada sin rozamiento?

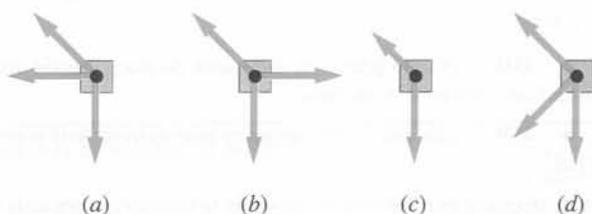


Figura 4.29 Problema 18

19 ● Identificar cuál o cuáles de las frases siguientes son verdad o son falsas suponiendo que se está en un sistema de referencia inercial.

- (a) Si no hay ninguna fuerza que actúa sobre un objeto, éste no se acelera.  
 (b) Si un objeto no se acelera, no puede haber fuerzas que actúen sobre él.  
 (c) El movimiento de un objeto va siempre en la dirección de la fuerza resultante.  
 (d) La masa de un objeto depende de su localización.

20 ● Una paracaidista de peso  $w$  salta cerca de la superficie terrestre. ¿Cuál es el módulo de la fuerza ejercida por su cuerpo sobre la Tierra? (a)  $w$ . (b) Mayor que  $w$ , (c) Menor que  $w$ . (d)  $9,8w$ . (e) 0. (f) Depende de la resistencia del aire.

21 ● SSM La fuerza neta que actúa sobre un objeto en movimiento bruscamente se hace cero. En consecuencia, el objeto (a) se para de repente, (b) se para al cabo de un cierto tiempo, (c) cambia de dirección, (d) continúa a velocidad constante, (e) cambia de dirección de una forma impredecible.

22 ● Una cuerda de tender ropa se tensa y se sujeta por sus dos extremos. Se coloca una toalla húmeda en el centro de la cuerda. ¿Es posible que la cuerda permanezca horizontal? Razonar la respuesta.

23 ● ¿Qué efecto produce la velocidad de un ascensor sobre el peso aparente de una persona en el ascensor?

### Estimaciones y aproximaciones

24 ●● Un coche que viaja a 90 km/h choca contra la parte trasera de un vehículo parado sin ocupantes. Afortunadamente el conductor llevaba puesto el cinturón de seguridad. Utilizando valores razonables para la masa del conductor y la distancia de frenado, estimar la fuerza (supuesta constante) ejercida por el cinturón sobre el conductor.

25 ●●● SSM Haciendo las consideraciones necesarias, determinar la fuerza normal y la fuerza tangencial ejercida por la carretera sobre las ruedas de una bicicleta (a) cuando el ciclista asciende por una carretera de pendiente 8% a velocidad constante y (b) cuando desciende por la misma pendiente a velocidad constante. (Una pendiente del 8% significa que el ángulo de inclinación  $\theta$  viene dado por  $\tan \theta = 0,08$ .)

### La primera y la segunda ley de Newton: Masa, inercia y fuerza

26 ● Una partícula de masa  $m$  se mueve con una velocidad inicial  $v_0 = 25,0$  m/s. Cuando una fuerza neta de 15,0 N actúa sobre ella, alcanza el reposo después de recorrer 62,5 m. ¿Cuál es el valor de  $m$ ? (a) 37,5 kg. (b) 3,00 kg. (c) 1,50 kg. (d) 6,00 kg. (e) 3,75 kg.

27 ● (a) Un objeto experimenta una aceleración de  $3$  m/s<sup>2</sup> cuando sobre él actúa una cierta fuerza  $F_0$ . ¿Cuál es su aceleración si la fuerza se duplica? (b) Un segundo objeto experimenta una aceleración de  $9$  m/s<sup>2</sup> bajo la influencia de la fuerza  $F_0$ . ¿Qué relación existe entre las masas de los dos objetos? (c) Si los dos objetos se atan juntos, ¿qué aceleración producirá la fuerza  $F_0$ ?

28 ● **SOLVE** Un remolcador arrastra un buque con una fuerza constante  $F_1$ . El incremento en la velocidad del buque en un intervalo de 10 s es de 4 km/h. Cuando un segundo remolcador aplica una segunda fuerza constante  $F_2$  en la misma dirección su velocidad crece en 16 km/h cada intervalo de 10 s. ¿Qué relación existe entre los módulos de las dos fuerzas? (Despreciar la resistencia del agua.)

29 ●● SSM **SOLVE** Una bala de  $1,8 \times 10^{-3}$  kg de masa que lleva una velocidad de 500 m/s choca contra un gran bloque de madera y se introduce 6 cm en su interior antes de pararse. Suponer que la desaceleración de la bala es constante y calcular la fuerza ejercida por la madera sobre la bala.

30 ●● SSM Una vagoneta de juguete está en una vía recta y horizontal y lleva un ventilador atado a uno de sus extremos. Se coloca la vagoneta en un extremo de la vía y se conecta el ventilador. La vagoneta, que estaba en reposo, empieza a moverse y en 4,55 s se ha movido 1,5 m. La masa de la vagoneta y del ventilador es de 355 g y suponemos que se mueve con aceleración constante. (a) ¿Cuál es la fuerza neta que se ejerce sobre la vagoneta? (b) Se van añadiendo pesos a la vagoneta hasta que tiene una masa de 722 g y se repite el experimento. ¿Cuánto le costará ahora a la vagoneta moverse los 1,5 m? Ignorar los efectos del rozamiento.

31 ● Una fuerza  $F_0$  produce una aceleración de  $3$  m/s<sup>2</sup> cuando actúa sobre un objeto de masa  $m$  que desliza sobre una superficie sin rozamiento. Hallar la aceleración del mismo objeto cuando se ve sometido a las fuerzas que se muestran en la figura 4.30a y b.

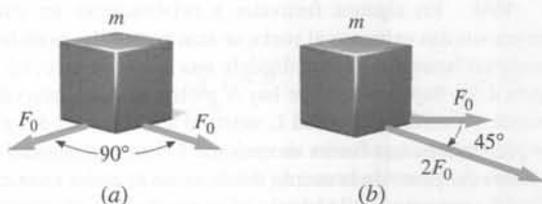


Figura 4.30 Problema 31

32 ● **SOLVE** Una fuerza  $\mathbf{F} = (6 \text{ N})\mathbf{i} - (3 \text{ N})\mathbf{j}$  actúa sobre un cuerpo de masa 1,5 kg. Calcular la aceleración  $\mathbf{a}$ . ¿Cuál es el módulo de  $\mathbf{a}$ ?

33 ● Una sola fuerza de 12 N actúa sobre una partícula de masa  $m$ . La partícula parte del reposo y se mueve sobre una recta a lo largo de una distancia de 18 m en 6 s. Hallar su masa  $m$ .

34 ● **SSM** Al y Bert están quietos en medio de un gran lago helado. Al empuja a Bert con una fuerza de 20 N durante 1,5 s. La masa de Bert es de 100 kg. (a) ¿Cuál es la velocidad a la que se mueve Bert después de ser empujado? (b) Si la masa de Al es de 80 kg, ¿qué velocidad alcanza? Considerar que no hay rozamiento.

35 ● Si se empuja un bloque de masa  $m_1$  con una fuerza horizontal determinada, éste adquiere una aceleración de  $12 \text{ m/s}^2$ . Si se empuja un bloque de masa  $m_2$  con la misma fuerza, su aceleración es de  $3 \text{ m/s}^2$ . (a) ¿Qué aceleración proporcionaría la misma fuerza a un bloque de masa  $m_2 - m_1$ ? (b) ¿Qué aceleración proporcionaría la misma fuerza a un bloque de masa  $m_2 + m_1$ ? Considerar un movimiento sin rozamiento.

36 ● Para arrastrar un tronco de 75 kg por el suelo con velocidad constante se le empuja con una fuerza de 250 N (horizontalmente). (a) ¿Cuál es la fuerza resistiva que ejerce el suelo? (b) ¿Qué fuerza deberemos ejercer si se desea dar al tronco una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$ ?

37 ● **SOLVE** Un objeto de 4 kg está sometido a la acción de dos fuerzas  $\mathbf{F}_1 = (2 \text{ N})\mathbf{i} - (3 \text{ N})\mathbf{j}$  y  $\mathbf{F}_2 = (4 \text{ N})\mathbf{i} - (11 \text{ N})\mathbf{j}$ . El objeto está en reposo en el origen en el instante  $t = 0$ . (a) ¿Cuál es la aceleración del objeto? (b) ¿Cuál es su velocidad en el instante  $t = 3 \text{ s}$ ? (c) ¿Dónde está el objeto en el instante  $t = 3 \text{ s}$ ?

## Peso y masa

38 ● **SSM** En la Luna, la aceleración debida a la gravedad es sólo 1/6 de la que existe en la Tierra. Un astronauta cuyo peso en la Tierra es 600 N se desplaza a la superficie lunar. Su masa medida en la Luna será (a) 600 kg. (b) 100 kg. (c) 61,2 kg. (d) 9,81 kg. (e) 360 kg.

39 ● **SOLVE** Especificar el peso de una muchacha de 54 kg en (a) newtons y (b) libras.

40 ● Determinar la masa de un hombre de 165 lb en kilogramos.

## Fuerzas de contacto

41 ● **SSM** **SOLVE** Un muelle vertical, cuya constante de fuerza vale 600 N/m está unido al techo por un extremo y a un bloque de 12 kg que descansa sobre una mesa horizontal por el otro, de modo que el muelle ejerce una fuerza hacia arriba sobre el bloque. El muelle se alarga 10 cm. (a) ¿Qué fuerza ejerce el muelle sobre el bloque? (b) ¿Qué fuerza ejerce la superficie sobre el bloque?

42 ● Un bloque de 6 kg se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Un muelle horizontal estira el bloque con una fuerza constante de 800 N/m. Si el muelle se alarga 4 cm desde su posición de equilibrio, ¿cuál es la aceleración del bloque?

## Diagramas de fuerzas: equilibrio estático

43 ● Un semáforo está colgado de un soporte tal como se muestra en la figura 4.31. ¿La tensión del cable más vertical es mayor o menor que la del otro cable?

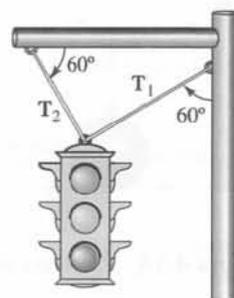


Figura 4.31 Problema 43

44 ● **SOLVE** Una lámpara de masa  $m = 42,6 \text{ kg}$  cuelga de unos alambres como indica la figura 4.32. El anillo tiene masa despreciable. La tensión  $T_1$  en el alambre vertical es (a) 209 N, (b) 418 N, (c) 570 N, (d) 360 N, (e) 730 N.

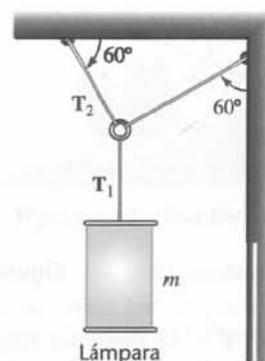


Figura 4.32 Problema 44

45 ● **SSM** **SOLVE** En la figura 4.33a se muestra un bloque de 0,500 kg que cuelga de una cuerda. Los extremos de la cuerda están sujetos al techo en unos puntos separados 1,00 m. (a) ¿Qué ángulo forma la cuerda con el techo? (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (c) Se quita el bloque de 0,500 kg y se cuelgan dos bloques de 0,250 kg cada uno de forma que la longitud de los tres tramos de cuerda es la misma, tal como se ve en la figura 4.33b. ¿Cuál es la tensión en cada segmento de la cuerda?

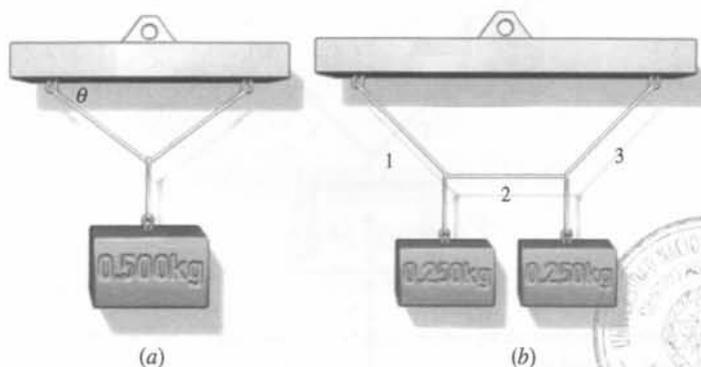


Figura 4.33 Problema 45

46 ● Un objeto de 100 N se cuelga de unas cuerdas tal como se muestra en la figura 4.34. ¿Cuál es la tensión de la cuerda horizontal?

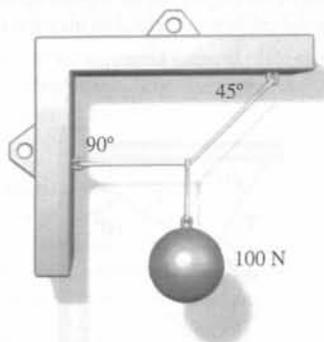


Figura 4.34 Problema 46

47 ● **CONSEJO** Un objeto de 10 kg sobre una mesa sin rozamiento está sometido a dos fuerzas horizontales  $F_1$  y  $F_2$  de módulo  $F_1 = 20$  N y  $F_2 = 30$  N, como se indica en la figura 4.35. (a) Determinar la aceleración  $a$  del objeto. (b) Una tercera fuerza  $F_3$  se aplica para que el objeto se encuentre en equilibrio estático. Determinar  $F_3$ .

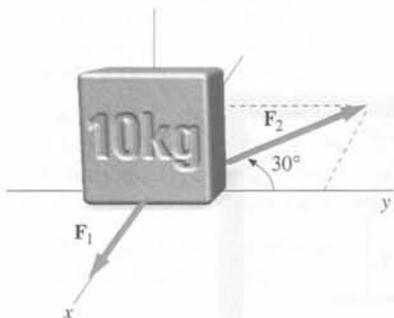


Figura 4.35 Problema 47



Figura 4.36 Problema 48

48 ● **SSM** **CONSEJO** ✓ Se ejerce una fuerza vertical  $T$  sobre un cuerpo de 5 kg cerca de la superficie de la Tierra, como indica la figura 4.36. Determinar la aceleración del cuerpo si (a)  $T = 5$  N, (b)  $T = 10$  N y (c)  $T = 100$  N.

49 ●● Un cuadro que pesa 2 kg cuelga de dos cables de igual longitud que forman un ángulo  $\theta$  con la horizontal como indica la figura 4.37. (a) Determinar la tensión  $T$  en función de  $\theta$  y del peso  $w$  del cuadro. ¿Para qué ángulo  $\theta$  es  $T$  mínimo? ¿Y máximo? (b) Si  $\theta = 30^\circ$ , determinar la tensión de los cables.

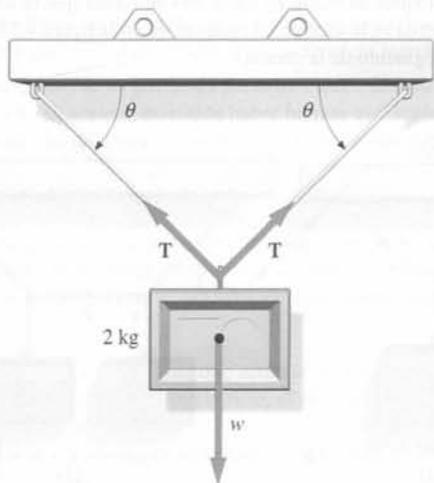
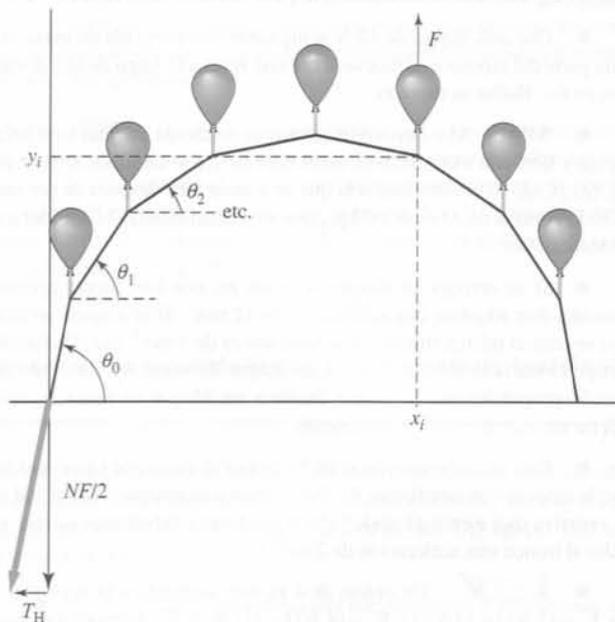
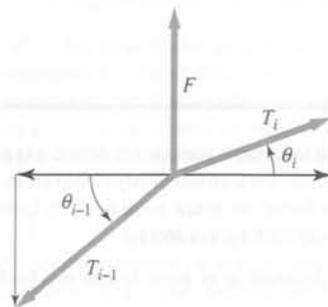


Figura 4.37 Problema 49

50 ●●● **SSM** En algunos festivales y celebraciones en una cuerda larga, sujeta por sus dos extremos al suelo, se atan globos llenos de helio cuya fuerza ascensional levanta la cuerda dándole una forma de arco, tal como se ve en la figura 4.38. Supongamos que hay  $N$  globos atados a intervalos iguales a una cuerda sin masa de longitud  $L$ , sujeta al suelo por sus dos extremos. Cada globo proporciona una fuerza ascensional  $F$ . Las coordenadas horizontales y verticales del punto de la cuerda donde se ata el globo  $i$  son  $x_i$  e  $y_i$  y  $T_i$  es la tensión del segmento  $i$  de la cuerda (el segmento 0 es el segmento entre el punto de sujeción al suelo y el primer globo y el segmento  $N$  corresponde al trozo de cuerda que une el globo  $N$  con el otro extremo al que está sujeta la cuerda)



(a)



(b)

Figura 4.38 Problema 50

(a) La figura 4.38b muestra el diagrama de fuerzas en el globo  $i$ . A partir de este diagrama demostrar que la componente horizontal de la fuerza  $T_i$  (denominada  $T_H$ ) es la misma para todos los globos, y que considerando la componente vertical de la fuerza se puede derivar la ecuación siguiente, que relaciona la tensión de los segmentos  $i$  e  $i - 1$

$$T_{i-1} \text{ sen } \theta_{i-1} - T_i \text{ sen } \theta_i = F$$

(b) Demostrar que  $\text{tg } \theta_0 = -\text{tg } \theta_{N+1} = NF/2T_H$

(c) A partir del diagrama y de las dos expresiones anteriores, demostrar que

$$\text{tg } \theta_i = (N - 2i)F/2T_H$$

y que

$$x_i = \frac{L}{N+1} \sum_{j=0}^{i-1} \cos \theta_j, \quad y_i = \frac{L}{N+1} \sum_{j=0}^{i-1} \sin \theta_j$$

- (d) Escribir un programa con una hoja de cálculo que dibuje la forma del arco teniendo en cuenta los siguientes parámetros:  $N = 10$  globos; cada uno de los globos proporciona una fuerza de 1 N; la cuerda tiene 10 m de longitud y la componente horizontal de la tensión es  $T_H = 10$  N. ¿A qué distancia están los puntos de sujeción con el suelo? ¿Cuál es la máxima altura del arco?
- (e) Obsérvese que no hemos indicado cuál es la separación entre los puntos de sujeción de la cuerda, ya que esta distancia viene determinada por otros parámetros. Variar  $T_H$  manteniendo fijos los otros parámetros hasta que pueda crear un arco cuyas sujeciones estén separadas 8 m. ¿Qué valor tiene  $T_H$ ? A medida que  $T_H$  aumenta, el arco se hace más plano. ¿El modelo con la hoja de cálculo reproduce este comportamiento?

51 ●● Una grúa sostiene un peso de 1 tonelada (1000 kg). Calcular la tensión del cable que lo soporta si (a) el peso es acelerado hacia arriba a  $2 \text{ m/s}^2$ , (b) se levanta el peso con velocidad constante, (c) el peso es levantado con una velocidad que disminuye  $2 \text{ m/s}$  en cada segundo.

52 ●● **¡SOLVE!** Determinar las tensiones y las masas desconocidas de los sistemas en equilibrio que se representan en la figura 4.39.

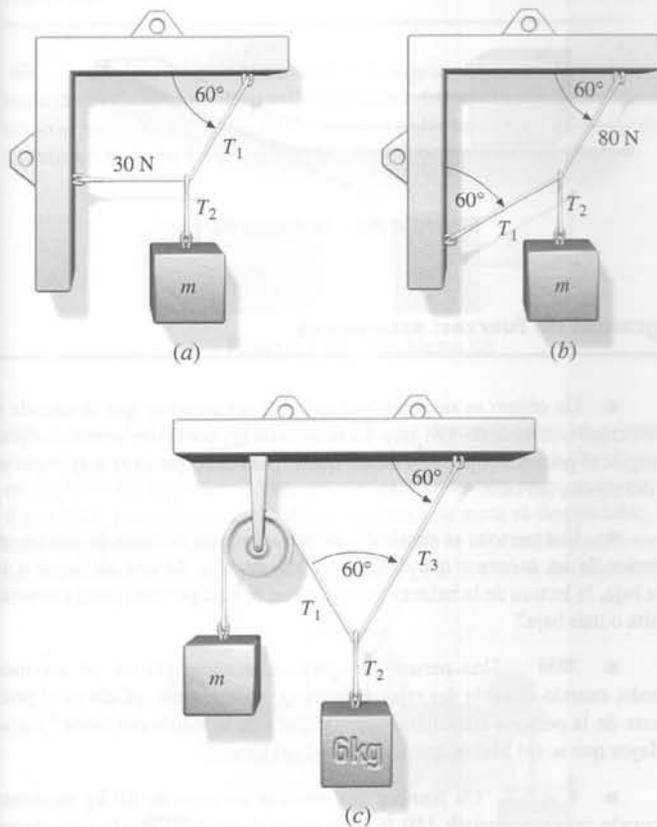


Figura 4.39 Problema 52

53 ●● **¡SOLVE!** Un coche está estancado en terreno blando. El conductor está solo pero dispone de una cuerda larga y fuerte. El conductor, que ha estudiado física, ata la cuerda a un poste telefónico y tira de ella lateralmente como indica la figura 4.40. (a) Determinar la fuerza ejercida por la cuerda sobre el coche cuando el ángulo  $\theta$  es  $3^\circ$  y el conductor tira con una fuerza de 400 N, pero el coche no se mueve. (b) ¿Qué resistencia debería tener la cuerda si se necesitara una fuerza de 600 N bajo un ángulo de  $\theta = 4^\circ$  para mover el coche?

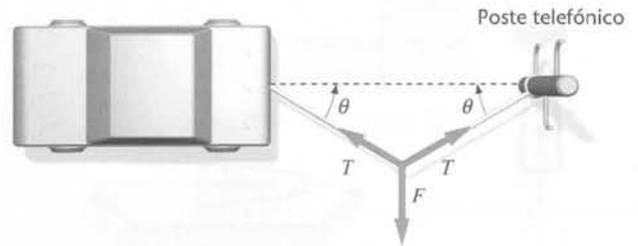


Figura 4.40 Problema 53

### Diagramas de fuerzas: Planos inclinados y fuerza normal

54 ● **SSM** **¡SOLVE!** Una caja grande de 20 kg de masa está en reposo sobre una superficie sin rozamiento. Si se tira de la caja con una fuerza de 250 N con un ángulo de  $35^\circ$  por debajo de la horizontal, ¿cuál es la aceleración de la caja en la dirección de la superficie?

55 ● **¡SOLVE!** La caja del problema 54 está situada ahora en una rampa inclinada  $15^\circ$  sobre una superficie sin rozamiento. Se tira de la caja con una fuerza que forma un ángulo de  $40^\circ$  con la horizontal (véase la figura 4.41), ¿cuál es el menor valor de la fuerza que hace que la caja suba por la rampa?

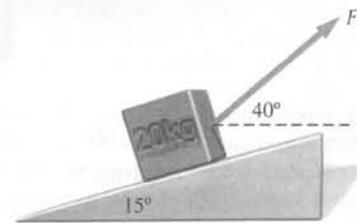


Figura 4.41 Problema 55

56 ● Un bloque se desliza por un plano inclinado sin rozamiento. Dibujar un diagrama donde se representen las fuerzas que actúan sobre el bloque. Indicar para cada fuerza del diagrama la correspondiente fuerza de reacción.

57 ● El sistema representado en la figura 4.42 se encuentra en equilibrio. El valor de la masa  $m$  es: (a) 3,5 kg, (b)  $3,5 \text{ sen } 40^\circ$  kg, (c)  $3,5 \text{ tg } 40^\circ$  kg, (d) ninguno de los anteriores.

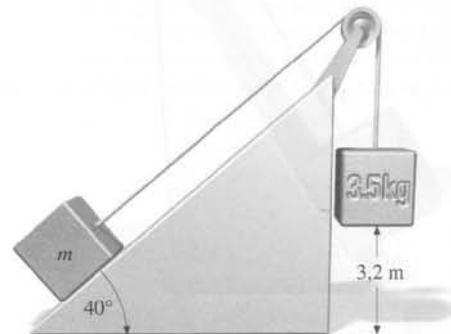


Figura 4.42 Problema 57

58 ● **SSM** En la figura 4.43, los objetos están sujetos a dinamómetros calibrados en newtons. Dar las lecturas de los dinamómetros en cada caso, suponiendo que las cuerdas carecen de masa

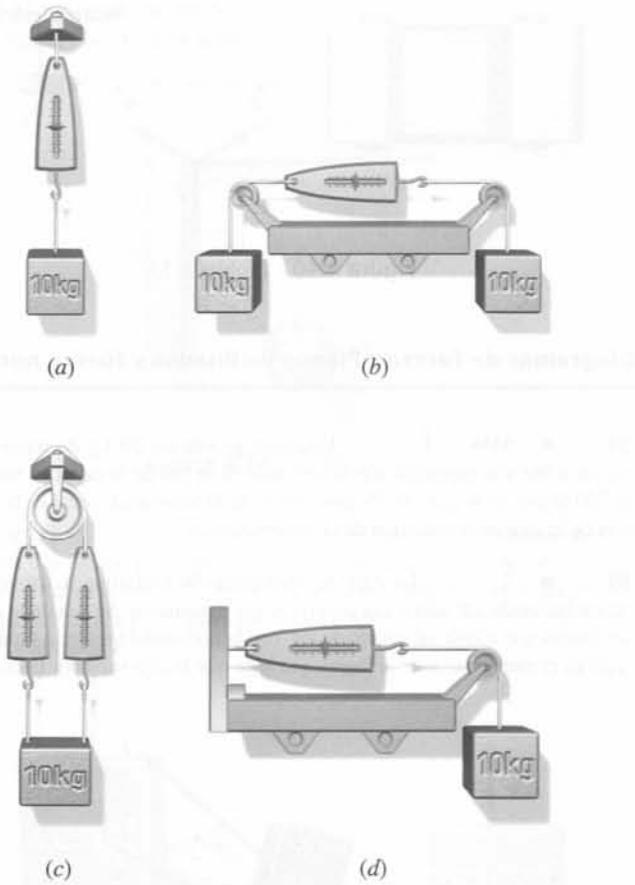


Figura 4.43 Problema 58

59 ●● Un cuerpo se mantiene en posición mediante un cable a lo largo de un plano inclinado pulido (figura 4.44). (a) Si  $\theta = 60^\circ$  y  $m = 50$  kg, determinar la tensión del cable y la fuerza normal ejercida por el plano inclinado. (b) Determinar la tensión en función de  $\theta$  y  $m$  y comprobar el resultado para  $\theta = 0$  y  $\theta = 90^\circ$ .

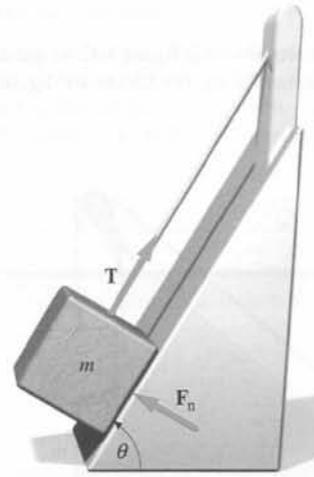


Figura 4.44 Problema 59

60 ●● Una fuerza horizontal de 100 N actúa sobre un bloque de 12 kg haciéndole subir por un plano inclinado sin rozamiento, que forma un ángulo de  $25^\circ$  con la horizontal. (a) ¿Cuál es la fuerza normal que el plano inclinado ejerce sobre el bloque? (b) ¿Cuál es la aceleración del bloque?

61 ●● SSM **¡SOLVE!** Un estudiante de 65 kg se pesa subiéndose a una balanza que está dispuesta sobre un monopatín con ruedas, que baja por un plano inclinado (figura 4.45). Suponer que no hay rozamiento y que la fuerza ejercida por el plano inclinado sobre el monopatín es perpendicular al plano inclinado. ¿Cuál es la lectura de la balanza si  $\theta = 30^\circ$ ?

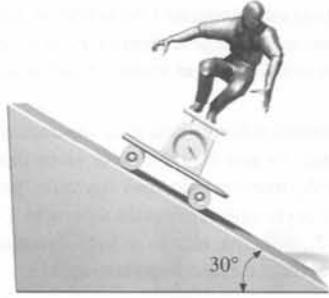


Figura 4.45 Problema 61

62 ●● Un objeto de masa  $m$  resbala por una superficie sin rozamiento que acaba con una rampa con una inclinación  $\theta$  respecto la horizontal (véase la figura 4.46). La velocidad inicial del objeto es  $v_0$ . Cuando el objeto alcanza la rampa sube hasta una altura  $h$  antes de bajar de nuevo. Demostrar que  $h$  es independiente de  $\theta$ .

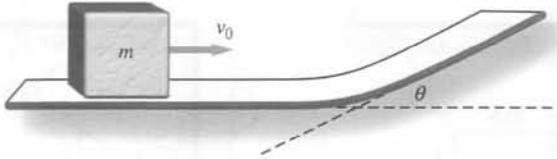


Figura 4.46 Problema 62

**Diagramas de fuerzas: ascensores**

63 ● Un objeto se suspende del techo de un ascensor que desciende a una velocidad constante de 9,81 m/s. La tensión de la cuerda que sujeta al objeto es (a) igual al peso del objeto, (b) menor que el peso del objeto, (c) mayor que el peso del objeto, (d) cero.

64 ● Una persona se encuentra de pie sobre una balanza de muelle en el interior de un ascensor que desciende. Mientras se detiene al llegar a la planta baja, la lectura de la balanza sobre el peso de esta persona ¿será correcta, más alta o más baja?

65 ● SSM Una persona de peso  $w$  se encuentra en un ascensor subiendo, cuando el cable del mismo se rompe súbitamente. ¿Cuál es el peso aparente de la persona inmediatamente después de la rotura del cable? (a)  $w$ . (b) Mayor que  $w$ . (c) Menor que  $w$ . (d)  $9,8w$ . (e) Cero.

66 ● **¡SOLVE!** Un hombre que sostiene un peso de 10 kg mediante una cuerda capaz de resistir 150 N sube en un ascensor. Cuando el ascensor arranca, la cuerda se rompe. ¿Cuál fue la aceleración mínima del ascensor?

67 ●● Un cuerpo de 2 kg cuelga de un dinamómetro (calibrado en newtons) sujeto al techo de un ascensor (figura 4.47). Determinar la lectura que indicará el dinamómetro (a) cuando el ascensor se mueve hacia arriba con velocidad constante de 30 m/s, (b) cuando el ascensor desciende con velocidad constante de 30 m/s, (c) cuando el ascensor sube a 20 m/s y acelera hacia arriba a  $10 \text{ m/s}^2$ . (d) De  $t = 0$  a  $t = 5$  s, el ascensor se mueve hacia arriba a 10 m/s. Su velocidad se reduce entonces uniformemente a cero en los siguientes 4 segundos, de modo que queda en reposo para  $t = 9$  s. Describir la lectura del dinamómetro durante el intervalo  $0 < t < 9$  s.

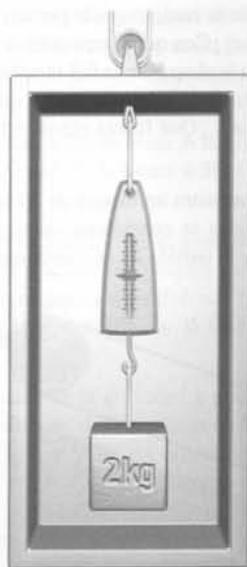


Figura 4.47 Problema 67

**Diagramas de fuerzas: Cuerdas, tensión y la tercera ley de Newton**

68 ● Dos bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  conectados entre sí por una cuerda de masa despreciable se aceleran uniformemente sobre una superficie sin rozamiento, como se indica en la figura 4.48. La relación de las tensiones  $T_1/T_2$  viene dada por (a)  $m_1/m_2$ , (b)  $m_2/m_1$ , (c)  $(m_1 + m_2)/m_2$ , (d)  $m_1/(m_1 + m_2)$ , (e)  $m_2/(m_1 + m_2)$ .



Figura 4.48 Problema 68

69 ● Un bloque de masa  $m_2 = 3,5$  kg descansa sobre un estante horizontal sin rozamiento y está conectado mediante cuerdas a dos bloques de masas  $m_1 = 1,5$  kg y  $m_3 = 2,5$  kg, que cuelgan libremente, como se muestra en la figura 4.49. Las poleas carecen de rozamiento y su masa es despreciable. El sistema se mantiene inicialmente en reposo. Cuando se deja en libertad, determinar, (a) la aceleración de cada uno de los bloques, y (b) la tensión de cada cuerda.

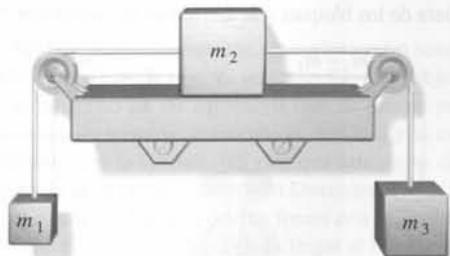


Figura 4.49 Problema 69

70 ● SSM Dos bloques están en contacto sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Una fuerza  $F$  horizontal se aplica a uno de ellos como muestra la figura 4.50 y ambos son acelerados. Determinar la aceleración y la fuerza de contacto para (a) los valores generales de  $F$ ,  $m_1$  y  $m_2$  y (b) para  $F = 3,2$  N,  $m_1 = 2$  kg y  $m_2 = 6$  kg.



Figura 4.50 Problemas 70 y 71

71 ● Repetir el problema anterior, intercambiando la posición de los dos bloques.

72 ● SOLVE Dos bloques de 100 kg son arrastrados a lo largo de una superficie sin rozamiento con una aceleración constante de  $1,0$  m/s<sup>2</sup>, como se indica en la figura 4.51. Cada cuerda tiene una masa de 1 kg. Determinar la fuerza  $F$  y la tensión de las cuerdas en los puntos A, B y C.

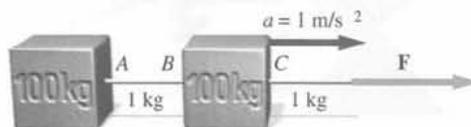


Figura 4.51 Problema 72

73 ● Se sube un objeto de masa  $m$  con una cuerda de masa  $M$  y de longitud  $L$  sujeta desde uno de sus extremos. La cuerda y el objeto se aceleran en la dirección vertical con aceleración  $a$ . La distribución de la masa en la cuerda es uniforme. Demostrar que la tensión en la cuerda a una distancia  $x$  ( $< L$ ) por encima del bloque es  $(a + g)[m + (x/L)M]$ .

74 ● SSM SOLVE Una cadena consiste de 5 eslabones, cada uno con una masa de 0,1 kg. Se sube la cadena verticalmente con una aceleración de  $2,5$  m/s<sup>2</sup>. La cadena se sujeta desde el eslabón superior y ningún punto de la cadena toca con el suelo. Encontrar (a) la fuerza  $F$  ejercida en el extremo superior de la cadena, (b) la fuerza neta en cada eslabón y (c) la fuerza que cada eslabón ejerce sobre el eslabón inmediatamente inferior.

75 ● Un objeto de 40,0 kg suspendido de una cuerda vertical está inicialmente en reposo. El objeto se acelera entonces hacia arriba. La tensión en la cuerda necesaria para que el objeto alcance una velocidad hacia arriba de 3,5 m/s en 0,700 s es (a) 590 N, (b) 390 N, (c) 200 N, (d) 980 N, (e) 720 N.

76 ● SOLVE Un helicóptero suspendido en el aire en el mismo lugar y de masa  $m_h$  está descargando un camión de masa  $m_c$ . Si la velocidad de descenso del camión se incrementa a razón de  $0,1g$ , ¿cuál es la tensión del cable que le soporta? (a)  $1,1m_c g$ , (b)  $m_c g$ , (c)  $0,9m_c g$ , (d)  $1,1(m_h + m_c)g$ , (e)  $0,9(m_h + m_c)g$ .

77 ● Dos objetos están conectados por una cuerda de masa despreciable, como se indica en la figura 4.52. El plano inclinado y la p Polea carecen de rozamiento. Determinar la aceleración de los objetos y la tensión de la cuerda para (a) valores generales de  $\theta$ ,  $m_1$  y  $m_2$  y (b)  $\theta = 30^\circ$  y  $m_1 = m_2 = 5$  kg.

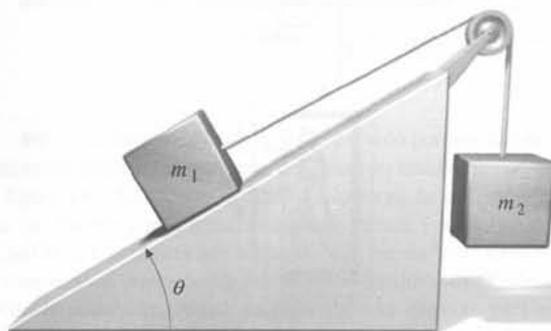


Figura 4.52 Problema 77

**78** ● **ISOLVE** En una representación escénica del cuento de Peter Pan, la actriz que hace el papel de Peter y pesa 50 kg ha de “volar” verticalmente de forma que para coincidir con el fondo musical debe bajar una distancia de 3,2 m en 2,2 s. Entre bastidores, una superficie pulida, inclinada  $50^\circ$ , soporta un contrapeso de masa  $m$ , como indica la figura 4.53. Indicar los cálculos que debe realizar el director de escena para determinar (a) la masa del contrapeso que debe utilizarse y (b) la tensión del cable.

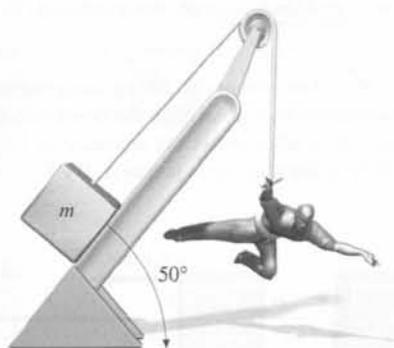


Figura 4.53 Problema 78

**79** ●● **ISOLVE** Un bloque de 8 kg y otro de 10 kg conectados por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento, deslizan por planos inclinados sin rozamiento como indica la figura 4.54. (a) Determinar la aceleración de los bloques y la tensión de la cuerda. (b) Los dos bloques se reemplazan por otros de masas  $m_1$  y  $m_2$ , de tal modo que no se produce aceleración. Determinar toda la información posible sobre las masas de estos dos nuevos bloques.

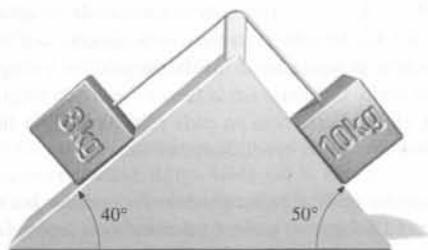


Figura 4.54 Problema 79

**80** ●● Una cuerda pesada de longitud 5 m y masa 4 kg se encuentra sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Un extremo se conecta a un bloque de 6 kg. En el otro extremo de la cuerda se aplica una fuerza horizontal constante de 100 N. (a) ¿Cuál es la aceleración del sistema? (b) Expresar la tensión de la cuerda en función de su posición a lo largo de ésta.

**81** ●● **SSM** Una pintora de 60 kg está de pie sobre un montacargas de aluminio de 15 kg. El montacargas está sujeto por una cuerda que pasa por

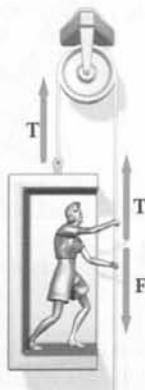


Figura 4.55 Problema 81

una polea situada en lo alto de la casa, lo que le permite elevarse a sí misma y a la plataforma (figura 4.55). (a) ¿Con qué fuerza debe tirar de la cuerda para que el conjunto ascienda con una aceleración de  $0,8 \text{ m/s}^2$ ? (b) Cuando su velocidad alcanza el valor de 1 m/s, tira de la cuerda de modo que ella y su montacargas ascienda a velocidad constante. ¿Qué fuerza ejerce entonces la cuerda? (Ignorar la masa de la cuerda.)

**82** ●●● La figura 4.56 muestra un bloque de 20 kg que desliza sobre otro de 10 kg. Todas las superficies se consideran sin rozamiento. Determinar la aceleración de cada bloque y la tensión en la cuerda que los conecta.

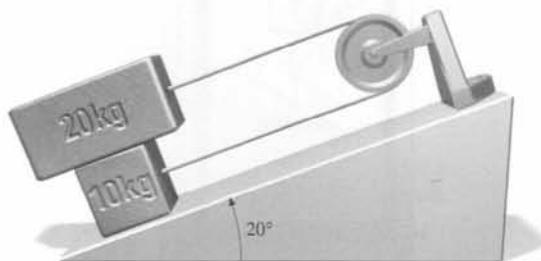


Figura 4.56 Problema 82

**83** ●●● **ISOLVE** ✓ Un bloque de 20 kg dotado de una polea se desliza a lo largo de una superficie sin rozamiento. Está conectado mediante una cuerda a un bloque de 5 kg según el dispositivo que se muestra en la figura 4.57. Determinar la aceleración de cada uno de los bloques y la tensión de la cuerda.

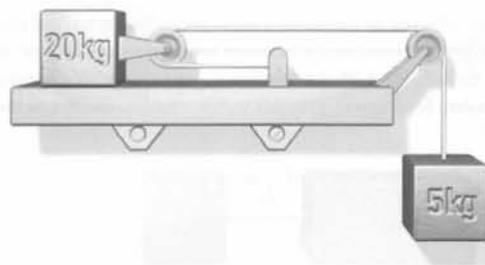


Figura 4.57 Problema 83

### Diagrama de fuerzas: máquina de Atwood

**84** ●● **SSM** El aparato de la figura 4.58 se denomina *máquina de Atwood* y se utiliza para medir la aceleración debida a la gravedad  $g$  a partir de la aceleración de los dos bloques. Suponiendo que la cuerda y la polea tienen una masa despreciable y la polea carece de rozamiento, demostrar que la aceleración de cualquiera de los bloques y la tensión de la cuerda son

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad \text{y} \quad T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$



Figura 4.58 Problemas 84-87

**85** ●● **¡SOLVE!** Si una de las masas de la máquina de Atwood de la figura 4.58 es 1,2 kg, ¿cuál sería la otra masa para que el desplazamiento de cualquiera de ellas durante el primer segundo después de comenzar el movimiento fuese 0,3 m?

**86** ●● Una pequeña piedra de masa  $m$  descansa sobre el bloque de masa  $m_2$  de la máquina de Atwood de la figura 4.58. Determinar la fuerza ejercida por la piedra sobre  $m_2$ .

**87** ●● Determinar la fuerza sobre el gancho de la polea de la máquina de Atwood de la figura 4.58 mientras los bloques aceleran. Despreciar la masa de la polea. Compruebe su respuesta considerando los valores límite apropiados de  $m_1$  y/o  $m_2$ , para los que se puede dar la respuesta razonando cualitativamente.

**88** ●●● La aceleración de la gravedad  $g$  puede determinarse midiendo el tiempo  $t$  que tarda una masa  $m_2$  de la máquina de Atwood en caer una distancia  $L$  a partir del reposo. (a) Determinar una expresión para  $g$  en función de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $L$  y  $t$ . (b) Demostrar que si se comete un pequeño error en la medida del tiempo  $dt$ , ello conducirá a un error en la determinación de  $g$ , dado por la expresión  $dg/g = -2 dt/t$ . (c) Si  $L = 3$  m y  $m_1 = 1$  kg, determinar el valor de  $m_2$ , de modo que  $g$  pueda medirse con una exactitud de  $\pm 5\%$  y una medida del tiempo con un error inferior a 0,1 s. Suponer que la única incertidumbre significativa es la medida del tiempo de caída.

**89** ●● **SSM** Tenemos una máquina de Atwood y un conjunto de pesos cuya masa total es  $M$ , y se tienen instrucciones de fijar algunos pesos a un lado de la máquina y el resto al otro. Si  $m_1$  representa la masa colocada al lado izquierdo y  $m_2$  la masa colocada al lado derecho, la tensión en la cuerda viene dada por la expresión

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

como ya se ha probado en el problema 85. Demostrar que la tensión será máxima cuando  $m_1 = m_2 = M/2$ .

**90** ●●● Una máquina de Atwood tienen una masa  $m_1$  fija en un lado y una masa variable  $m_2 (> m_1)$  en el otro lado. (a) Demostrar que el valor máximo de la tensión en la cuerda es  $2m_1g$ . (b) Interpretar este resultado físicamente, sin el uso de cálculo.

**Problemas generales**

**91** ● Un pájaro carpintero golpea la corteza de un árbol extremadamente duro —la velocidad de su cabeza alcanza aproximadamente el valor  $v = 3,5$  m/s antes del impacto. Si la masa de la cabeza del pájaro es 0,060 kg, y la fuerza media que actúa sobre la cabeza durante el impacto es  $F = 6,0$  N, determinar (a) la aceleración de la cabeza (suponiendo que es constante); (b) la profundidad de penetración en la corteza; (c) el tiempo  $t$  que tarda la cabeza del pájaro en detenerse.

**92** ●● **SSM** Puede construirse un acelerómetro sencillo colgando un cuerpo pequeño de una cuerda sujeta a un punto fijo en el objeto que se acelera, por ejemplo, en el techo de un automóvil que se mueve por una superficie plana. Cuando haya aceleración, el cuerpo se desviará y la cuerda formará un ángulo determinado con la vertical. (a) ¿En qué sentido se desviará el cuerpo suspendido respecto al de la aceleración? (b) Demostrar que la aceleración  $a$  está relacionada con el ángulo  $\theta$  que la cuerda forma con la vertical por  $a = g \tan \theta$ . (c) Supóngase que el automóvil frena hasta llegar al reposo desde la velocidad de 50 km/h en una distancia de 60 m. ¿Qué ángulo formará la aceleración? ¿La masa se moverá hacia adelante o hacia atrás?

**93** ●● **¡SOLVE!** El mástil de un balandro está sujeto a proa y a popa por dos cables de acero inoxidable con sus anclajes separados una distancia de 10 m (figura 4.59). El mástil, de 12 m de altura, pesa 800 N y se apoya verticalmente sobre la cubierta del balandro. El mástil dista 3,5 m del anclaje del cable delantero (el más próximo a la proa). La tensión de este cable es de 500 N. Determinar la tensión en el cable trasero y la fuerza que el mástil ejerce sobre la cubierta del balandro.

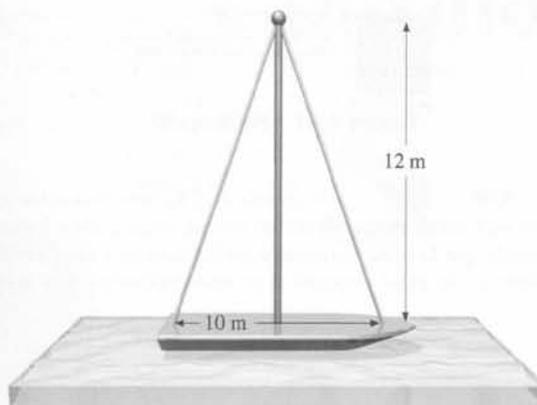


Figura 4.59 Problema 93

**94** ●● **¡SOLVE!** Una cadena larga y uniforme cuelga del techo aguantando un objeto de 50 kg de masa. La masa de la cadena es de 20 kg, y su longitud es 1,5 m. Determinar la tensión en la cadena (a) en el punto donde la cadena está sujeta al objeto, (b) en la mitad de la cadena, y (c) en el punto donde la cadena está sujeta al techo.

**95** ●●● **SSM** **¡SOLVE!** Un hombre empuja una caja inicialmente en reposo de 24 kg por una superficie sin rozamiento. Primero empuja la caja suavemente pero gradualmente va aumentando su fuerza de modo que la fuerza sigue una ecuación  $F = (8 \text{ N/s})t$ . Pasados 3 s, deja de empujar la caja. La fuerza siempre la ha ejercido en la misma dirección. (a) ¿Cuál es la velocidad de la caja pasados los primeros 3 s? (b) ¿Hasta dónde ha empujado el hombre la caja durante los tres primeros segundos? (c) ¿Cuál es la velocidad media de la caja entre 0 s y 3 s? (d) ¿Cuál es la fuerza media que ejerce sobre la caja al empujarla?

**96** ●● Supongamos que una superficie sin rozamiento está inclinada un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Un bloque de 270 g está atado a un peso de 75 g que cuelga de una polea, como se muestra en la figura 4.60. (a) Dibujar los dos diagramas de fuerza, uno para el bloque y el otro para el peso que cuelga. (b) Determinar la tensión en la cuerda y la aceleración del bloque. (c) El bloque parte del reposo, ¿cuánto le cuesta deslizarse una distancia de 1 m por la superficie?



Figura 4.60 Problema 96

**97** ●● Un bloque de masa  $m_1$  es impulsado por una fuerza  $F$  aplicada en el extremo de una cuerda que tiene una masa  $m_2$  mucho menor, como se indica en la figura 4.61. El bloque se desliza a lo largo de una superficie horizontal pulida. (a) Determinar la aceleración de la cuerda y el bloque conjuntamente. (b) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre la cuerda? (c) Determinar la tensión de la cuerda en el punto donde está atada al bloque. (d) El dibujo de la figura 4.61 con la cuerda horizontal no es totalmente correcto para esta situación. Corregirlo y determinar cómo esta corrección afecta a la solución del problema.

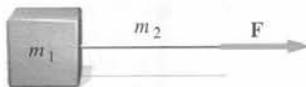


Figura 4.61 Problema 97

98 ●● SSM **SOLVE** Un cuerpo de 2 kg descansa sobre un plano inclinado  $60^\circ$  sin rozamiento que se desliza con una aceleración  $a$  hacia la derecha de tal modo que la masa permanece estacionaria con relación al plano. (a) Determinar  $a$ . (b) ¿Qué ocurriría si el plano adquiriese una aceleración superior?

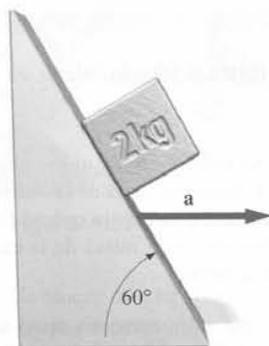


Figura 4.62 Problema 98

99 ●● **SOLVE** Las masas colocadas a cada lado de una máquina de Atwood son una pila de cinco arandelas, cada una de masa  $m$ , como se muestra en la figura 4.63. La tensión de la cuerda es  $T_0$ . Si se quita una arandela del lado izquierdo, las restantes arandelas aceleran y la tensión disminuye en 0,3 N. (a) Determinar  $m$ . (b) Calcular la nueva tensión y la aceleración de cada masa cuando se quita una segunda arandela del lazo izquierdo.



Figura 4.63 Problema 99 y 100

100 ●● Consideremos la máquina de Atwood de la figura 4.63. Cuando se transfieren  $N$  arandelas del lado izquierdo al lado derecho, este último desciende 47,1 cm en 0,40 s. Determinar  $N$ .

101 ●● Dos bloques de masas  $m$  y  $2m$  están sujetos por una cuerda (figura 4.64). (a) Si las fuerzas son constantes, determinar la tensión de la cuerda. (b) Si las fuerzas varían con el tiempo según  $F_1 = Ct$  y  $F_2 = 2Ct$ , en donde  $C$  es una constante y  $t$  el tiempo, determinar el tiempo  $t_0$  en el cual la tensión de la cuerda es  $T_0$ .



Figura 4.64 Problema 101

102 ●● SSM **SOLVE** La polea de una máquina de Atwood experimenta una aceleración hacia arriba  $a$ , como se muestra en la figura 4.65. Determinar la aceleración de cada masa y la tensión en la cuerda de la máquina. (Pista: una aceleración constante hacia arriba tiene el mismo efecto que un incremento en la aceleración debido a la gravedad)



Figura 4.65 Problema 102

# APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

## Capítulo 5



La fuerza de rozamiento estática ejercida por el asfalto sobre los neumáticos del coche evita que éste patine al tomar la curva.

¿Qué factores determinan la velocidad con la que un coche puede girar por una curva sin patinar? (Véase el ejemplo 5.10.)

En el capítulo 4 se han introducido las leyes de Newton y se las ha aplicado a situaciones donde la acción se restringía a movimientos rectilíneos y donde no se consideraba el rozamiento.

En este capítulo extenderemos las leyes de Newton al estudio del movimiento en trayectorias curvas e incluiremos los efectos cuantitativos del rozamiento.

## 5.1 Rozamiento

Ni caminar ni moverse en automóvil sería posible sin el rozamiento. Para echar a andar por una superficie horizontal hace falta el rozamiento y, una vez en marcha, para cambiar la dirección o la velocidad del movimiento también hace falta rozamiento. Se necesita rozamiento para mantener una tuerca en un tornillo o un clavo en la madera. Sin embargo, aunque el rozamiento sea muy importante, muchas veces se intenta evitarlo. Los lubricantes, como el aceite en un motor de coche o el líquido sinovial en nuestro cuerpo, son materiales que reducen el rozamiento.

### Rozamiento estático

Cuando aplicamos una pequeña fuerza horizontal a un gran bloque que descansa sobre el suelo, el bloque no se mueve debido a la fuerza de **rozamiento estático**  $f_e$  ejercida por el

- 5.1 Rozamiento
- 5.2 Movimiento a lo largo de una trayectoria curva
- \*5.3 Fuerzas de arrastre
- \*5.4 Integración numérica: el método de Euler

Figura 5.2. Un bloque que descansa sobre una superficie horizontal. Una fuerza horizontal  $F$  se aplica al bloque. El rozamiento estático  $f_e$  se opone a  $F$  y evita que el bloque se mueva. El peso  $W$  del bloque actúa verticalmente hacia abajo y la fuerza normal  $N$  actúa verticalmente hacia arriba. El bloque permanece en reposo porque la fuerza neta es cero.



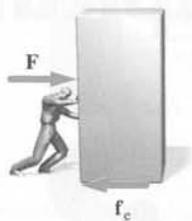


Figura 5.1

suelo sobre el bloque, que equilibra la fuerza que estamos aplicando (figura 5.1). La fuerza de rozamiento estático, que se opone a la fuerza aplicada sobre el bloque, puede variar desde cero hasta cierto valor máximo  $f_{e, \text{máx}}$ , dependiendo de la fuerza ejercida. Los experimentos muestran que  $f_{e, \text{máx}}$  es proporcional a la fuerza normal ejercida por una superficie sobre la otra:

$$f_{e, \text{máx}} = \mu_e F_n \quad (5.1)$$

DEFINICIÓN —COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ESTÁTICO

en donde la constante de proporcionalidad  $\mu_e$ , llamado **coeficiente de rozamiento estático**, depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Si ejercemos una fuerza horizontal menor que  $f_{e, \text{máx}}$  sobre el bloque, la fuerza de rozamiento equilibrará esta fuerza horizontal. En general, podemos escribir

$$f_e \leq \mu_e F_n \quad (5.2)$$

### Rozamiento cinético

Si se empuja el bloque de la figura 5.1 con fuerza suficiente, éste se deslizará sobre el suelo. Al deslizar, el suelo ejerce una fuerza de **rozamiento cinético**,  $f_c$  (también llamada de rozamiento por deslizamiento) que se opone al sentido del movimiento. Para que el bloque deslice con velocidad constante debe ejercerse una fuerza sobre el bloque igual en módulo y de sentido opuesto a la fuerza de rozamiento cinético ejercida por el suelo.

El **coeficiente de rozamiento cinético**  $\mu_c$  se define como el cociente entre los módulos de la fuerza de rozamiento cinético  $f_c$  y la fuerza normal,  $F_n$ :

$$f_c = \mu_c F_n \quad (5.3)$$

DEFINICIÓN —COEFICIENTE DE ROZAMIENTO CINÉTICO

en donde  $\mu_c$  depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Experimentalmente resulta que  $\mu_c$  es menor que  $\mu_e$ , y es aproximadamente constante para velocidades comprendidas en el intervalo de 1 cm/s a varios metros por segundo, las únicas situaciones que consideraremos.

### El rozamiento por rodadura

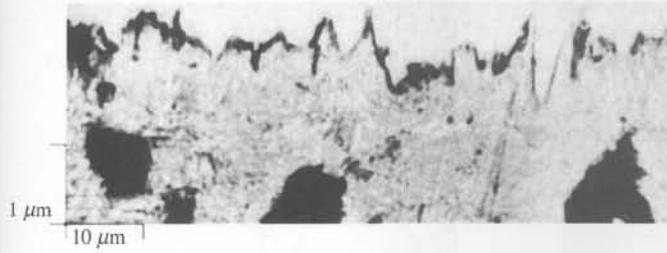
Cuando una rueda ideal rígida rueda sin deslizar a *velocidad constante* por una carretera ideal, rígida y horizontal, no hay ninguna fuerza de rozamiento que frene su movimiento. Sin embargo, los neumáticos reales y las carreteras se deforman continuamente, y la banda de rodadura del neumático y la carretera se gastan, lo cual significa que la carretera ejerce un **rozamiento de rodadura**  $f_r$  que se opone al movimiento. Para mantener la rueda rodando con velocidad constante, hay que ejercer una fuerza sobre la rueda que iguale en magnitud y que se oponga en dirección a la fuerza de rozamiento de rodadura ejercida por el asfalto.

El **coeficiente de rozamiento de rodadura**  $\mu_r$  es el coeficiente de proporcionalidad entre el módulo de la fuerza de rozamiento de rodadura  $f_r$  y el módulo de la fuerza normal  $F_n$ .

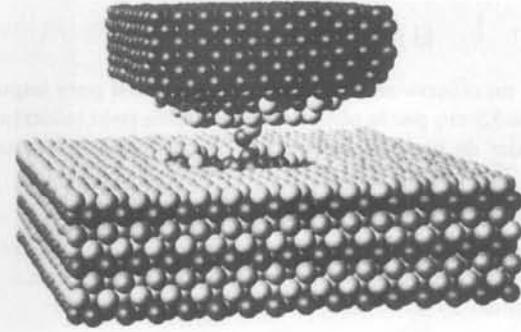
$$f_r = \mu_r F_n \quad (5.4)$$

DEFINICIÓN—COEFICIENTE DE ROZAMIENTO DE RODADURA

donde  $\mu_r$  depende de la naturaleza de las superficies de contacto y de la composición de la rueda y de la carretera. Los valores típicos de  $\mu_r$  están entre 0,01 y 0,02 para los neumáticos de caucho en hormigón, y entre 0,001 y 0,002 para ruedas de acero sobre raíles de acero.



Sección aumentada de una superficie de acero pulida que muestra las irregularidades superficiales. La altura media de estas irregularidades es del orden de  $5 \times 10^{-5}$  cm, correspondiente a varios miles de diámetros atómicos.



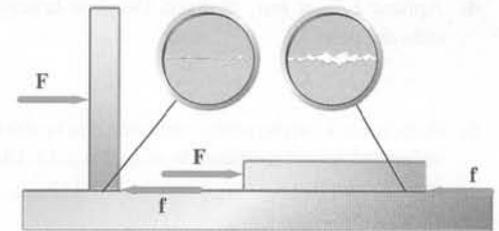
Dibujo de ordenador que muestra cómo unos cuantos átomos de oro (abajo) se adhieren a la punta fina (arriba) de una sonda de níquel que ha estado en contacto con la superficie de oro.

## ¿Cuál es la causa del rozamiento?

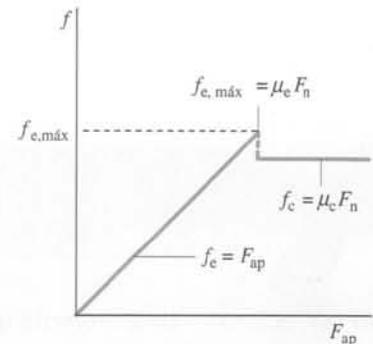
El rozamiento es un fenómeno complejo, insuficientemente conocido, que surge como consecuencia de la fuerza de atracción entre las moléculas que forman dos superficies en contacto. La naturaleza de esta atracción es electromagnética —la misma naturaleza de enlace molecular que mantiene la materia unida. Esta fuerza de atracción es de corto alcance y resulta prácticamente inapreciable a distancias de pocos diámetros atómicos.

Como se muestra en la figura 5.2, los objetos ordinarios, aunque tengan superficies muy pulidas, de aspecto liso y suave, a escala atómica son ásperos y rugosos. Cuando entran en contacto dos superficies sólo se tocan por aquellos puntos más prominentes, denominados asperezas, que se muestran en la figura 5.2. La fuerza normal ejercida por la superficie se produce precisamente en estas asperezas, donde la fuerza por unidad de área es muy grande, suficiente para allanar las protuberancias. A medida que la fuerza normal aumenta, también lo hace este aplanado, lo cual conduce a que el área de contacto microscópica aumente. En condiciones muy diversas, el área de contacto microscópica es proporcional a la fuerza normal. La fuerza de rozamiento es proporcional al área microscópica de contacto, por lo que también es proporcional a la fuerza normal.

La figura 5.3 muestra un gráfico de la fuerza de rozamiento ejercida sobre el bloque por el suelo en función de la fuerza aplicada. La fuerza de rozamiento va compensando la fuerza aplicada hasta que ésta alcanza el valor  $\mu_e F_n$ , que es cuando la caja empieza a moverse. A partir de entonces la fuerza de rozamiento es  $\mu_c F_n$ . La tabla 5.1 da una relación de algunos valores aproximados de  $\mu_e$  y de  $\mu_c$  para varias superficies.



**Figura 5.2** El área microscópica de contacto entre el bloque y el suelo es sólo una pequeña fracción del área macroscópica del bloque. Esta fracción es proporcional a la fuerza normal ejercida entre las superficies. Si el bloque descansa sobre una base mayor, el área microscópica de contacto se incrementa, pero la fuerza por unidad de área disminuye en el mismo factor, de tal modo que el área microscópica de contacto no se modifica. Tanto si el bloque descansa sobre una base o sobre otra, hay que aplicar la misma fuerza horizontal  $F$  para mantenerlo en movimiento a velocidad constante.



**Figura 5.3**

**TABLA 5.1** Valores aproximados de los coeficientes de rozamiento

Materiales	$\mu_e$	$\mu_c$
Acero sobre acero	0,7	0,6
Latón sobre acero	0,5	0,4
Cobre sobre hierro fundido	1,1	0,3
Vidrio sobre vidrio	0,9	0,4
Teflón sobre teflón	0,04	0,04
Teflón sobre acero	0,04	0,04
Caucho sobre hormigón (seco)	1,0	0,80
Caucho sobre hormigón (húmedo)	0,30	0,25
Esquí encerado sobre nieve (0 °C)	0,10	0,05

### EJEMPLO 5.1 | El juego del Shuffleboard

Un pasajero de un crucero usa un taco de shuffleboard para impulsar un disco de 0,40 kg a una velocidad de 5,5 m/s por la pista de juego situada en la cubierta del barco. El disco recorre ocho metros antes de pararse. Determinar el coeficiente de rozamiento entre el disco y la cubierta.

**Planteamiento del problema** La fuerza de rozamiento cinético es la única fuerza horizontal que actúa sobre el disco (figura 5.4). Como la fuerza de rozamiento es constante, la aceleración es también constante. Podemos determinar la aceleración a partir de las ecuaciones de aceleración constante del capítulo 2 y relacionarla con  $\mu_c$  usando  $\Sigma F_x = ma_x$ .

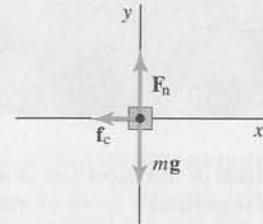


Figura 5.4

1. En la figura 5.4 se muestra el diagrama de fuerzas para el disco cuando ya lo ha soltado el taco. Las flechas en los ejes indican las direcciones positivas de los ejes  $x$  e  $y$ .
2. El coeficiente de rozamiento está relacionado con la fuerza de rozamiento y la normal:
3. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  al disco. Despejar la fuerza normal. Usando el resultado del paso 2, obtener la fuerza de rozamiento:
4. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al disco. Despejar la aceleración usando el resultado del paso 3:
5. Relacionar la aceleración constante con la distancia total recorrida y la velocidad inicial mediante la ecuación 2.15. Utilizando el resultado del paso 4, calcular  $\mu_c$ :

$$f_c = \mu_c F_n$$

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg = 0$$

por lo tanto

$$F_n = mg \quad \text{y} \quad f_c = \mu_c mg$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_c = ma_x$$

por lo tanto

$$-\mu_c mg = ma_x \quad \text{y} \quad a_x = -\mu_c g$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x \Delta x \Rightarrow 0 = v_0^2 - 2\mu_c g \Delta x$$

esto es

$$\mu_c = \frac{v_0^2}{2g \Delta x} = \frac{(5,5 \text{ m/s})^2}{2(9,81 \text{ m/s}^2)(8 \text{ m})} = \boxed{0,193}$$

**Observación** La masa  $m$  del disco se cancela. Cuanto mayor es la masa, más esfuerzo cuesta detenerla, pero una masa mayor también va acompañada de mayor rozamiento. El resultado neto es que la masa no tiene efecto alguno en este proceso.

El ejemplo 5.1 ilustra la metodología que conviene aplicar para resolver problemas que incluyen rozamiento. Es la siguiente:

1. Se escoge el eje  $y$  en la dirección normal a las superficies de contacto. Se elige el eje  $x$  paralelo a la superficie y paralelo o antiparalelo a la fuerza de rozamiento.
2. Se aplica  $\Sigma F_y = ma_y$  y se obtiene la fuerza normal  $F_n$ .
  - Si el rozamiento es *cinético*, la fuerza de rozamiento se obtiene usando  $f_c = \mu_c F_n$ .
  - Si el rozamiento es *estático*, se relaciona la fuerza de rozamiento máxima con la fuerza normal usando  $f_{e,máx} = \mu_e F_n$ .
  - Si el rozamiento es de *rodadura*, la fuerza de rozamiento se obtiene usando  $f_r = \mu_r F_n$ .
3. Se aplica  $\Sigma F_x = ma_x$  al objeto y se obtiene la variable deseada.

### EJEMPLO 5.2 | Una moneda que resbala

Sobre la cubierta superior de un libro de tapas duras que está sobre una mesa hay una moneda (véase la figura 5.5). Poco a poco se levanta la tapa del libro hasta que la moneda empieza a deslizar. El ángulo  $\theta_{máx}$  es el ángulo que forma la tapa con la horizontal en el momento en que la moneda empieza a moverse. Calcular el coeficiente de rozamiento estático  $\mu_e$  entre la tapa del libro y la moneda en función de  $\theta_{máx}$ .

**Planteamiento del problema** Las fuerzas que actúan sobre la moneda son su peso  $mg$ , la fuerza normal  $F_n$  ejercida por el plano y la fuerza de rozamiento  $f$ . Seguimos la metodología mencionada antes para resolver problemas con rozamiento estático.

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la moneda cuando la tapa del libro está inclinada un ángulo  $\theta$ , donde  $\theta \leq \theta_{\text{máx}}$  (figura 5.6):

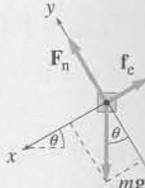


Figura 5.6

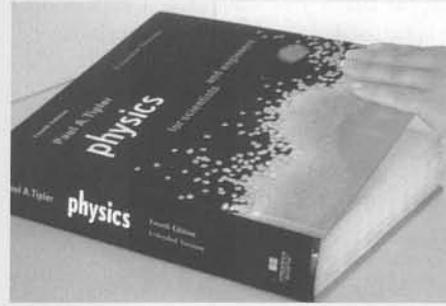


Figura 5.5

2. Aplicando  $\Sigma F_y = ma_y$  a la moneda se obtiene la fuerza normal. Entonces se determina la fuerza de rozamiento estático máxima:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg \cos \theta = 0$$

por lo tanto

$$F_n = mg \cos \theta$$

$$f_{e,\text{máx}} = \mu_e F_n \quad \text{por lo tanto} \quad f_{e,\text{máx}} = \mu_e mg \cos \theta_{\text{máx}}$$

3. Aplicando  $\Sigma F_x = ma_x$  a la moneda se obtiene la fuerza de rozamiento. Se sustituye en el resultado del paso 2:

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_{e,\text{máx}} + mg \sin \theta_{\text{máx}} = 0$$

por lo tanto

$$f_{e,\text{máx}} = mg \sin \theta_{\text{máx}} \quad \text{y} \quad mg \sin \theta_{\text{máx}} = \mu_e mg \cos \theta_{\text{máx}}$$

4. Calcular el resultado del paso 3 para  $\mu_e$ :

$$\mu_e = \frac{mg \sin \theta_{\text{máx}}}{mg \cos \theta_{\text{máx}}} = \boxed{\text{tg } \theta_{\text{máx}}}$$

**Ejercicio** El coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos de un coche y la carretera en un día determinado es 0,7. ¿Cuál es el ángulo máximo de inclinación de la carretera para que el coche pueda estar parado con sus ruedas bloqueadas y no deslizar hacia abajo? (Respuesta  $35^\circ$ )

El ejemplo 5.2 demuestra que el coeficiente de rozamiento estático está relacionado con el ángulo crítico  $\theta_{\text{máx}}$  para el cual el objeto comienza a deslizar, por la expresión

$$\mu_e = \text{tg } \theta_{\text{máx}} \quad (5.5)$$

ÁNGULO CRÍTICO

donde  $\theta_{\text{máx}} = \theta_c$  se denomina ángulo crítico.

### EJEMPLO 5.3 | Tirando de un trineo

Dos niños son arrastrados en un trineo sobre un terreno cubierto de nieve. Se tira del trineo con una cuerda que forma un ángulo de  $40^\circ$  con la horizontal, como se indica en la figura 5.7. La masa conjunta de los dos niños es de 45 kg y el trineo tiene una masa de 5 kg. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético son  $\mu_e = 0,2$  y  $\mu_c = 0,15$ . Determinar la fuerza de rozamiento ejercida por el suelo sobre el trineo y la aceleración de los niños y el trineo si la tensión de la cuerda es (a) 100 N y (b) 140 N.

**Planteamiento del problema** Determinar en primer lugar si la fuerza de rozamiento es estática o cinética. Para ello calcular la tensión máxima de la cuerda sin que el trineo se mueva.

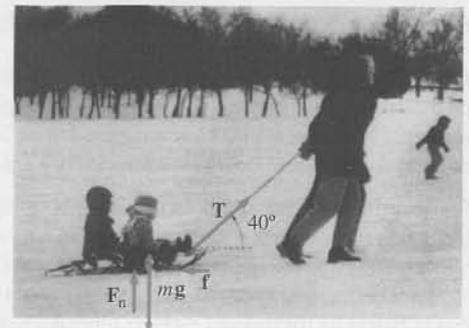


Figura 5.7

(a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el trineo (figura 5.8):

2. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  al trineo y se obtiene la fuerza normal. Entonces se obtiene la fuerza de rozamiento estático máxima:

3. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al trineo y se obtiene la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2:

4. Mediante el resultado del paso 3 obtener el valor de la tensión máxima en el caso en que no haya deslizamiento:

5. La tensión es de 100 N, que es menor que 110 N. El trineo no desliza. Para encontrar la fuerza de rozamiento, se usa la expresión obtenida en el paso 3 para  $f_c$ :

(b) 1. La tensión es de 140 N y supera  $T_{\text{máx}} = 110$  N, por lo que el trineo se desliza. La relación entre la fuerza de rozamiento cinética y la fuerza normal es:

2. En el paso (a) 2 se aplicó  $\Sigma F_y = ma_y$  al trineo y se encontró  $F_n = mg - T \text{ sen } \theta$ . Usar este resultado junto con el paso (b)1 para obtener la fuerza de rozamiento cinética:

3. Aplicando  $\Sigma F_x = ma_x$  al trineo se obtiene la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2 para  $f_c$  y se obtiene la aceleración:

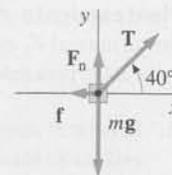


Figura 5.8

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n + T \text{ sen } \theta - mg = 0$$

por lo tanto

$$F_n = mg - T \text{ sen } \theta$$

$$f_{c,\text{máx}} = \mu_c F_n \text{ de modo que } f_{c,\text{máx}} = \mu_c (mg - T_{\text{máx}} \text{ sen } \theta)$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_{c,\text{máx}} + T_{\text{máx}} \text{ cos } \theta = 0$$

por lo tanto

$$f_{c,\text{máx}} = T_{\text{máx}} \text{ cos } \theta \text{ y } T_{\text{máx}} \text{ cos } \theta = \mu_c (mg - T_{\text{máx}} \text{ sen } \theta)$$

$$T_{\text{máx}} \text{ cos } \theta = \mu_c (mg - T_{\text{máx}} \text{ sen } \theta)$$

$$T_{\text{máx}} (\mu_c \text{ sen } \theta + \text{ cos } \theta) = \mu_c mg$$

por lo tanto

$$T_{\text{máx}} = \frac{\mu_c mg}{\mu_c \text{ sen } \theta + \text{ cos } \theta} \\ = \frac{0,2(50 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)}{0,2 \text{ sen } 40^\circ + \text{ cos } 40^\circ} = 110 \text{ N}$$

$$a_x = \boxed{0}$$

$$f_c = T \text{ cos } \theta = (100 \text{ N}) \text{ cos } 40^\circ = \boxed{76,6 \text{ N}}$$

$$f_c = \mu_c F_n$$

$$f_c = \mu_c (mg - T \text{ sen } \theta) \\ = 0,15 [(50 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg}) - (140 \text{ N}) \text{ sen } 40^\circ] \\ = \boxed{60,1 \text{ N}}$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_c + T \text{ cos } \theta = ma_x$$

por lo tanto

$$a_x = \frac{f_c + T \text{ cos } \theta}{m} \\ = \frac{(-60,1 \text{ N}) + (140 \text{ N}) \text{ cos } 40^\circ}{50 \text{ kg}} \\ = \boxed{0,943 \text{ m/s}^2}$$

**Observación** Hay que resaltar dos puntos importantes en este ejemplo: (1) La fuerza normal no es igual a la suma del peso de los niños más el trineo, pues la componente vertical de la tensión tiende a levantar el trineo del suelo. (2) En el apartado (a), la fuerza de rozamiento estático es menor que  $\mu_c F_n$ .

### EJEMPLO 5.4 | El bloque que resbala

La masa  $m_2$  de la figura 5.9 se ha ajustado de modo que el bloque de masa  $m_1$  está en el umbral de deslizamiento. (a) Si  $m_1 = 7$  kg y  $m_2 = 5$  kg, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el soporte? (b) Con un ligero toque, los bloques se mueven con aceleración  $a$ . Determinar  $a$  si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el soporte es  $\mu_c = 0,54$ .

**Planteamiento del problema** Aplicar la segunda ley de Newton a cada uno de los bloques, teniendo en cuenta que  $T$  tiene el mismo valor a lo largo de toda la cuerda, de modo que  $T_1 = T_2$ , y que las aceleraciones tienen igual magnitud, pues la cuerda no se alarga, de modo que  $a_1 = a_2 = a$ .

Para determinar el coeficiente de rozamiento estático,  $\mu_c$ , requerido en el apartado (a), expresar que la fuerza de rozamiento estático sobre  $m_1$  es igual a su valor máximo  $f_{\text{máx}} = \mu_c F_n$  y que la aceleración es igual a cero.

¡INTÉNELO USTED MISMO!

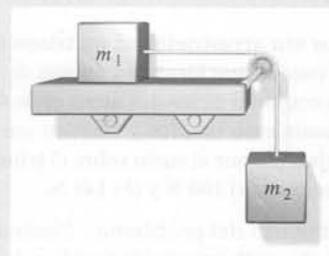


Figura 5.9

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

### Pasos

(a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada bloque aislado (véase la figura 5.10). Se eligen las direcciones de los ejes  $x$  y  $x'$  de modo que coincidan con las direcciones de las aceleraciones una vez que los bloques se mueven.

2. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  al bloque 1 y obtener la fuerza normal. Entonces se obtiene la fuerza de rozamiento estático:

3. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al bloque 1 y obtener la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2:

4. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al bloque 2 y obtener la tensión. Entonces se sustituye en el resultado del paso 3:

5. Se resuelve el resultado del paso 4 para  $\mu_c$

(b) 1. Cuando resbala, la fuerza de rozamiento es la cinética. Relacionar la fuerza de rozamiento cinética  $f_c$  con la fuerza normal. La fuerza normal se ha obtenido del paso 2 del apartado (a).

2. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al bloque 1. Obtener la fuerza de rozamiento usando el resultado del paso (b)1.

3. Aplicar  $\Sigma F_{x'} = ma_{x'}$  al bloque 2:

4. Sumar las ecuaciones obtenidas en los pasos (b) 2 y (b) 3 y obtener  $a$ .

### Respuestas

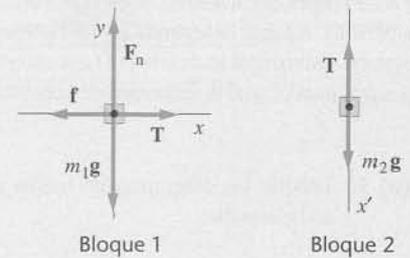


Figura 5.10

$$\Sigma F_y = m_1 a_{1y} \Rightarrow F_n - m_1 g = 0$$

por lo tanto

$$F_n = m_1 g$$

$$f_{c,\text{máx}} = \mu_c F_n \quad \text{por lo tanto} \quad f_{c,\text{máx}} = \mu_c m_1 g$$

$$\Sigma F_x = m_1 a_{1x} \Rightarrow T - f_{c,\text{máx}} = 0$$

por lo tanto

$$f_{c,\text{máx}} = T \quad \text{y} \quad T = \mu_c m_1 g$$

$$\Sigma F_{x'} = m_2 a_{2x'} \Rightarrow m_2 g - T = 0$$

por lo tanto

$$T = m_2 g \quad \text{y} \quad m_2 g = \mu_c m_1 g$$

$$\mu_c = \frac{m_2}{m_1} = \frac{5 \text{ kg}}{7 \text{ kg}} = \boxed{0,714}$$

$$f_c = \mu_c F_n$$

por lo tanto

$$f_c = \mu_c m_1 g$$

$$\Sigma F_x = m_1 a_{1x} \Rightarrow T - f_c = m_1 a$$

por lo tanto

$$T - \mu_c m_1 g = m_1 a$$

$$\Sigma F_{x'} = m_2 a_{2x'} \Rightarrow m_2 g - T = m_2 a$$

$$a = \frac{m_2 - \mu_c m_1}{m_1 + m_2} g = \boxed{0,997 \text{ m/s}^2}$$

**Comprobar el resultado** Observar que  $\mu_c = 0$  da el resultado de la aceleración deducido en el ejemplo 4.12 con  $\theta = 0$ .

**Ejercicio** ¿Cuál es la tensión de la cuerda cuando los bloques están deslizando? (Respuesta  $T = m_2(g - a) = 44,1 \text{ N}$ .)

## EJEMPLO 5.5 | El cochecillo incontrolado

Un cochecillo de niños incontrolado se desliza sin rozamiento por una charca helada hacia un agujero en el hielo (figura 5.11). Una persona sobre patines intenta alcanzar el cochecillo. Cuando lo consigue, esta persona y el cochecillo siguen deslizándose hacia el agujero con velocidad  $v_0$ . El coeficiente de rozamiento entre los patines (en la posición de frenado) y el suelo es  $\mu_c$ . La distancia al agujero en el momento de agarrar al cochecillo es  $D$ , la masa de la persona es  $m$  y la del cochecillo  $M$ . (a) ¿Cuál es el valor mínimo de  $D$  para evitar la caída en el agujero? (b) ¿Qué fuerza debe ejercer la persona sobre el cochecillo?

**Planteamiento del problema** Inicialmente la persona y el cochecillo se mueven hacia el agujero con velocidad  $v_0$  en la dirección  $x$  que tomamos como positiva. Si la persona hace una fuerza  $\mathbf{F} = -F\mathbf{i}$  sobre el cochecillo, según la tercera ley de Newton el cochecillo hará una fuerza  $\mathbf{F}' = F\mathbf{i}$  sobre la persona. Aplicar la segunda ley de Newton para determinar la aceleración. Después de hallar la aceleración, determinar la distancia  $D$  que recorre el cochecillo hasta que se detiene. El valor mínimo de  $D$  es aquél para el cual la velocidad de la persona se hace cero justo al llegar al agujero.

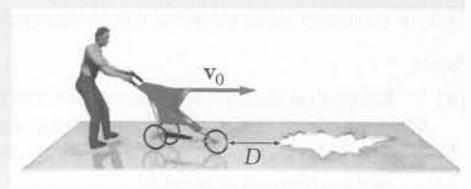


Figura 5.11

- (a) 1. Dibujar los diagramas de fuerza para la persona y el cochecillo aisladamente:

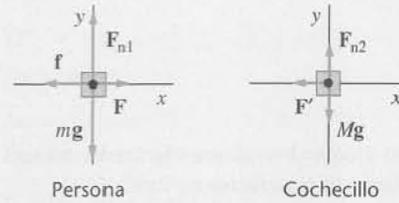


Figura 5.12

2. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  a la persona y obtener primero la fuerza normal y después la fuerza de rozamiento:
3. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  a la persona. Sustituir en el resultado del paso 2:
4. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al cochecillo. Sustituir  $F$  en el resultado del paso 3:
5. Obtener  $a_x$  con el resultado del paso 4:
6. Sustituir el resultado del paso 5 en la ecuación cinemática y obtener  $D$ :

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg = 0$$

y

$$f_c = \mu_c F_n \text{ por lo tanto } f_c = \mu_c mg$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_n - f_c = ma_x$$

con lo cual

$$F - \mu_c mg = ma_x$$

$$\Sigma F_x = Ma_x \Rightarrow -F = Ma_x$$

con lo cual

$$-Ma_x - \mu_c mg = ma_x$$

$$a_x = -\frac{\mu_c}{1 + M/m}g$$

(Como era de esperar, la aceleración es negativa.)

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x \Rightarrow 0 = v_0^2 + 2a_x D$$

por lo tanto

$$D = -\frac{v_0^2}{2a_x} = \left(1 + \frac{M}{m}\right) \frac{v_0^2}{2\mu_c g}$$

$$F = -Ma_x \Rightarrow F = \frac{\mu_c M}{1 + M/m}g$$

- (b)  $F$  resulta de la segunda ley de Newton aplicada al cochecillo:

**Observación** El valor mínimo de  $D$  es proporcional a  $v_0^2$  e inversamente proporcional a  $\mu_c$ . La figura 5.13 muestra la distancia de frenado  $D$  en función de la velocidad inicial al cuadrado para valores de  $M/m$  iguales a 0,1, 0,3 y 1,0 con  $\mu_c = 0,5$ . Obsérvese que cuando la masa del cochecillo aumenta, se requiere una mayor distancia de frenado para una determinada velocidad inicial. Esto es análogo a lo que ocurre cuando se quiere detener un vehículo que arrastra un remolque cuando éste no tiene frenos propios. La masa del remolque aumenta la distancia de parada para una determinada velocidad.

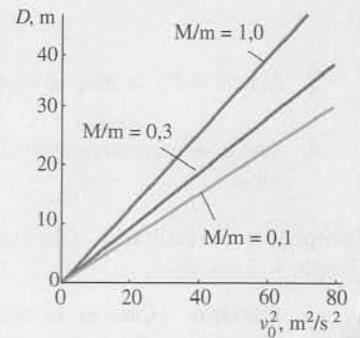


Figura 5.13

**EJEMPLO 5.6 | Tirando de una niña en un tobogán**

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Una niña de masa  $m_c$  está sentada en un tobogán de masa  $m_t$ , situado sobre un estanque helado. El tobogán se empuja con una fuerza horizontal  $F$  (figura 5.14). Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la niña y el tobogán son  $\mu_e$  y  $\mu_c$  respectivamente. (a) Determinar el valor máximo de  $F$  para el cual la niña no se desliza respecto al tobogán. (b) Determinar la aceleración del tobogán y la niña cuando  $F$  es superior a este valor máximo.

**Planteamiento del problema** La única fuerza que acelera a la niña es la fuerza de rozamiento que ejerce el tobogán sobre ella. El apartado (a) consiste en determinar  $F$  cuando esta fuerza es estática y máxima. Para hacerlo, aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  a la muchacha y despejar la aceleración cuando la fuerza de rozamiento estática es máxima. Luego aplicar  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  al tobogán y despejar  $F$ . En el apartado (b) se procede de forma similar. Sin embargo, en esta parte  $F$  viene dada y despejamos la aceleración del tobogán.



Figura 5.14

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

### Pasos

- (a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada elemento del problema (figura 5.15).

En este caso se muestran dos alternativas para el dibujo del diagrama de fuerzas del tobogán. En la primera, las dos fuerzas hacia abajo se dibujan separadas. En la segunda se dibujan una a continuación de la otra.

2. En cada diagrama se igualan los módulos de las fuerzas para cada par de fuerzas acción-reacción. Se expresa la relación entre las aceleraciones debida a la condición de ausencia de deslizamiento mutuo.
3. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  a la niña. Obtener primero la fuerza normal y después la fuerza de rozamiento:
4. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  a la niña y obtener la aceleración.
5. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al tobogán y, usando las relaciones obtenidas en el paso 2 para la aceleración y el resultado del paso 3, obtener  $F$ :

- (b) 1. Igualar las magnitudes de cada par de fuerzas acción-reacción y expresar el cambio en la relación entre las aceleraciones debido a que ahora no se da la restricción de ausencia de deslizamiento mutuo.

2. Obtener la fuerza de rozamiento cinética usando el resultado del paso (a) 3 de la fuerza normal.
3. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  a la niña y obtener su aceleración.
4. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al tobogán. Usando el resultado del apartado (b) 2, obtener su aceleración.

### Respuestas

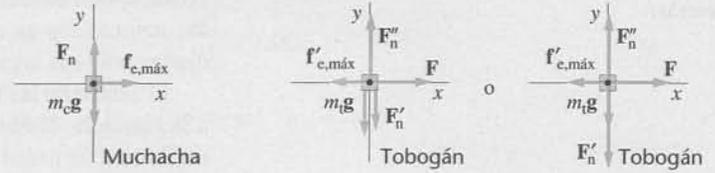


Figura 5.15

$$F'_n = F_n \quad \text{y} \quad f'_{e,máx} = f_{e,máx}$$

y

$$a_{c,x} = a_{t,x} = a_x$$

$$\Sigma F_{cy} = m_c a_y \Rightarrow F'_n - m_c g = 0$$

$$F'_n = m_c g \quad \text{y}$$

$$f_{e,máx} = \mu_c F'_n \quad \text{por lo tanto} \quad f_{e,máx} = \mu_c m_c g$$

$$\Sigma F_{cx} = m_c a_x \Rightarrow f_{e,máx} = m_c a_x$$

y

$$\mu_c m_c g = m_c a_x \quad \text{con lo cual} \quad a_x = \mu_c g$$

$$\Sigma F_{tx} = m_t a_x \Rightarrow F - f_{e,máx} = m_t a_x$$

y

$$F - \mu_c m_c g = m_t \mu_c g \quad \text{esto es} \quad F = \boxed{(m_c + m_t) \mu_c g}$$

$$F'_n = F_n \quad \text{y} \quad f'_c = f_c$$

pero

$$a_{c,x} < a_{t,x}$$

$$f_c = \mu_c F'_n \quad \text{por lo tanto} \quad f_c = \mu_c m_c g$$

$$\Sigma F_{cx} = m_c a_{cx} \Rightarrow f_c = m_c a_{cx}$$

y

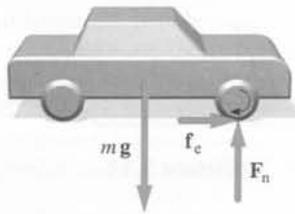
$$\mu_c m_c g = m_c a_{cx} \quad \text{con lo que} \quad a_{cx} = \mu_c g$$

$$\Sigma F_{tx} = m_t a_{tx} \Rightarrow F - f_c = m_t a_{tx}$$

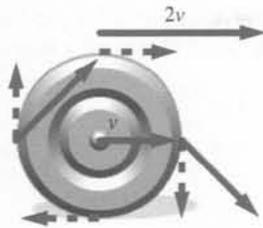
y

$$F - \mu_c m_c g = m_t a_{tx} \quad \text{esto es} \quad a_{tx} = \boxed{\frac{F - \mu_c m_c g}{m_t}}$$

**Observación** El rozamiento es una fuerza entre dos superficies en contacto, y no es correcto decir que el rozamiento siempre se opone al movimiento o a la tendencia al movimiento. En este ejemplo el rozamiento no se opone al movimiento de la niña, sino que lo produce. Es correcto decir que el rozamiento siempre se opone al movimiento, o a la tendencia al movimiento, de una superficie respecto de otra. Por ejemplo, aunque la chica se mueve hacia delante en relación al hielo, se mueve o tiende a moverse hacia atrás (hacia la izquierda) en relación al tobogán. El rozamiento se opone al movimiento relativo o a la tendencia al movimiento.



**Figura 5.16** Fuerzas que actúan sobre un coche con tracción delantera. Las fuerzas normales  $F_n$  no son generalmente iguales en las ruedas delanteras y traseras.



**Figura 5.17** Cuando una rueda gira sin deslizar, cada punto de la periferia posee una velocidad de magnitud  $v$  relativa al centro de la rueda, en donde  $v$  es la velocidad del centro de la rueda al suelo. La velocidad del punto sobre el neumático en contacto con el suelo es cero respecto al suelo. En esta figura las líneas de puntos representan velocidades respecto al centro de la rueda y las líneas continuas representan velocidades respecto al suelo.

La figura 5.16 muestra las fuerzas que actúan sobre un coche en el momento justo que parte del reposo. El peso del coche es equilibrado por la fuerza normal  $F_n$  ejercida sobre los neumáticos. Para que el coche comience a moverse, el motor suministra potencia al eje de tracción haciendo que las ruedas giren (trataremos el concepto de potencia en el capítulo 6). Si el movimiento sobre la carretera fuese sin rozamiento, las ruedas simplemente girarían sobre sí mismas. Cuando existe rozamiento, la carretera ejerce sobre los neumáticos una fuerza de rozamiento dirigida hacia adelante que proporciona la fuerza necesaria para acelerar el coche. Si la potencia suministrada por el motor es lo suficientemente pequeña para que la fuerza ejercida por la superficie de los neumáticos sobre la carretera no sea grande, las dos superficies no deslizan. Las ruedas giran sin deslizar y la superficie de los neumáticos en contacto con el suelo está en reposo relativo respecto a él. El rozamiento entre la carretera y los neumáticos es estático. La máxima fuerza de rozamiento que los neumáticos pueden ejercer sobre la carretera (y que la carretera puede ejercer sobre los neumáticos) es  $\mu_e F_n$ .

El centro de las ruedas de un coche que se desplaza en línea recta con velocidad  $v$  relativa a la carretera, también se mueve con velocidad  $v$ , como se ve en la figura 5.17. Si una rueda no desliza, la mitad superior de la rueda se mueve más rápida que  $v$  y la mitad inferior de la rueda se mueve más lenta que  $v$ . Sin embargo, cada punto del perímetro de la rueda *relativo al coche* se mueve en un círculo con la misma velocidad  $v$ . Además la velocidad instantánea del punto del neumático que está en contacto con el suelo *es cero relativo al suelo*. (De otro modo, el neumático patinaría.)

Si la potencia del motor es suficientemente grande, el neumático patinará y las ruedas girarán sobre sí mismas. Por lo tanto, la fuerza que acelera el coche es la fuerza de rozamiento cinética, que es inferior a la fuerza de rozamiento estática. Si nos encontramos con el coche atascado en hielo o nieve, para poder salir es mejor acelerar con mucha suavidad. De la misma forma, si tenemos que detener completamente un coche, la fuerza que ejerce el asfalto sobre las ruedas es estática o cinética, dependiendo de la forma como frenamos. Si frenamos tan bruscamente que las ruedas se bloquean, los neumáticos resbalarán sobre el asfalto y la fuerza que parará el coche será la fuerza de rozamiento cinética. Si, en cambio, no frenamos tan bruscamente y no se produce deslizamiento entre los neumáticos y la carretera, la fuerza que parará el coche será la fuerza de rozamiento estática. Los sistemas de frenado antibloqueo (ABS) de los coches utilizan sensores para medir la velocidad de la rueda. Si el dispositivo de control detecta que la rueda está próxima a bloquearse, el sistema modula una señal que hace que la presión del freno disminuya, para instantes después restaurar la presión sobre la rueda y así sucesivamente unas 15 veces por segundo. Esta presión variable es similar a la que se ejerce bombeando el pedal del freno pero, con el sistema ABS, únicamente se produce la sucesión de presión fuerte presión débil en aquella rueda que está a punto de bloquearse. Con este método se consigue el máximo frenado ya que se consigue el rozamiento máximo para detener el coche.

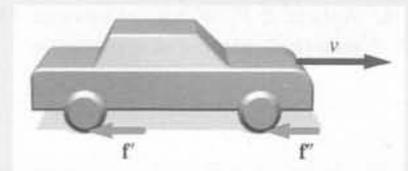
Cuando las ruedas se bloquean y los neumáticos resbalan, se dan dos cosas no deseadas. La distancia mínima necesaria para detener el vehículo aumenta y la capacidad que el conductor tiene para controlar el coche disminuye enormemente. Obviamente la disminución de la capacidad de control puede tener consecuencias graves.

### EJEMPLO 5.7 | El efecto de los frenos antibloqueo

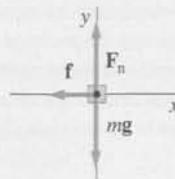
Un coche viaja a 30 m/s por una carretera horizontal. Los coeficientes de rozamiento entre la carretera y los neumáticos son  $\mu_e = 0,5$  y  $\mu_c = 0,3$ . ¿Cuánto tiempo tardará el coche en detenerse si (a) el coche se frena con un sistema antibloqueo, de modo que las ruedas no deslizen y (b) el coche se frena con dureza sin antibloqueo, y las ruedas se bloquean.

**Planteamiento del problema** La fuerza que detiene un automóvil cuando éste se frena es la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera sobre los neumáticos (figura 5.18). Entonces, aplicando la segunda ley de Newton se determina la aceleración. Utilizamos la cinemática para determinar la distancia recorrida antes de parar.

- (a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.19). Considerar las cuatro ruedas como si tuvieran un solo punto de contacto con el suelo. Suponer también que los frenos se aplican a las cuatro ruedas. Hagamos  $\mathbf{f} = \mathbf{f}' + \mathbf{f}''$ .



**Figura 5.18**



**Figura 5.19**

2. Para relacionar la distancia necesaria para parar,  $\Delta x$ , con la velocidad inicial  $v_0$  usamos la ecuación 2.15, suponiendo que la aceleración es constante. Los coeficientes de rozamiento varían con la temperatura y dado que al resbalar los neumáticos se calientan, los coeficientes de rozamiento varían también. Sin embargo no tendremos en cuenta este efecto aquí:

3. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  al coche. Primero se obtiene la fuerza normal, después la fuerza de rozamiento.

4. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al coche y se obtiene la aceleración:

5. Aplicando estos resultados en la ecuación de  $\Delta x$  en el paso 2 se obtiene la distancia de frenado:

(b) 1. Cuando las ruedas se bloquean, la fuerza ejercida por la carretera sobre el coche es el rozamiento cinético. Mediante un razonamiento semejante al del apartado (a), se obtiene para la aceleración:

2. La distancia de frenado es por lo tanto:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x \Delta x$$

Cuando  $v = 0$ ,

$$\Delta x = -\frac{v_0^2}{2a_x}$$

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg = 0, \text{ por lo tanto}$$

$$F_n = mg \quad y$$

$$f_{c,\text{máx}} = \mu_c F_n, \text{ con lo cual } f_{c,\text{máx}} = \mu_c mg$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_{c,\text{máx}} = ma_x$$

y

$$-\mu_c mg = ma_x, \text{ con lo cual } a_x = -\mu_c g$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\frac{v_0^2}{2a_x} = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} \\ &= \frac{(30 \text{ m/s})^2}{2(0,5)(9,81 \text{ m/s}^2)} = \boxed{91,8 \text{ m}} \end{aligned}$$

$$a_x = -\mu_c g$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\frac{v_0^2}{2a_x} = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} \\ &= \frac{(30 \text{ m/s})^2}{2(0,3)(9,81 \text{ m/s}^2)} = \boxed{153 \text{ m}} \end{aligned}$$

**Observación** La distancia de frenado es superior en un 50% cuando las ruedas están bloqueadas. Obsérvese también que esta distancia es independiente de la masa del coche: la distancia de frenado es igual para un pequeño coche utilitario que para un camión, siempre que los coeficientes de rozamiento sean iguales.

**Ejercicio** ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre la carretera y los neumáticos de un coche con tracción a las cuatro ruedas si el coche se acelera desde el reposo a 25 m/s en un tiempo de 8 s? (Respuesta: 0,319.)

## 5.2 Movimiento a lo largo de una trayectoria curva

En el capítulo 3 se estableció que si una partícula se mueve con una velocidad  $v$  a lo largo de una trayectoria curva con un radio de curvatura  $r$ , la partícula tiene una componente de la aceleración  $a_c = v^2/r$  en la dirección centrípeta (hacia el centro de curvatura), y una componente de la aceleración en la dirección tangencial  $a_t = dv/dt$ .

Además, la fuerza neta va en la dirección de la aceleración. La componente de la fuerza neta en la dirección centrípeta se denomina **fuerza centrípeta**. La fuerza centrípeta no es una clase de fuerza distinta de las que ya hemos estudiado, sino que meramente designa a la componente de la fuerza neta perpendicular a la dirección del movimiento que puede ejercerse mediante una cadena, un muelle o cualquier otra fuerza de contacto como la fuerza normal o la fuerza de rozamiento; también puede producir una fuerza centrípeta una fuerza de acción a distancia como la fuerza de gravitación, o puede darse como resultado de una combinación de todas. En cualquier caso, siempre apunta hacia el centro de curvatura de la trayectoria.



### EXPLORANDO

Las leyes de Newton no son válidas en los sistemas de referencia no inerciales. Explore sistemas de referencia no inerciales, pseudofuerzas, y ciclones en [www.whfreeman.com/tp1er5e](http://www.whfreeman.com/tp1er5e)

### EJEMPLO 5.8 | Dando vueltas a un cubo

Se hace girar un cubo de agua siguiendo una circunferencia vertical de radio  $r$  (figura 5.20). Si la velocidad del cubo en su parte más alta es  $v_a$ , calcular (a) la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en este punto; (b) el valor mínimo de  $v_t$  para que el agua no se salga del cubo; (c) la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en la parte más baja del círculo, en donde la velocidad del cubo es  $v_b$ .

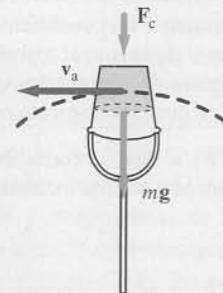


Figura 5.20

**Planteamiento del problema** Apliquemos la segunda ley de Newton para calcular la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua. Como el agua se mueve según una trayectoria circular, existirá una aceleración centrípeta  $v^2/r$  hacia el centro del círculo.

- (a) 1. Dibujar los diagramas de fuerza para el agua en la parte superior y en la parte inferior del círculo (figura 5.21). En cada caso, elegir como dirección positiva del eje  $x$  la dirección hacia el centro del círculo.

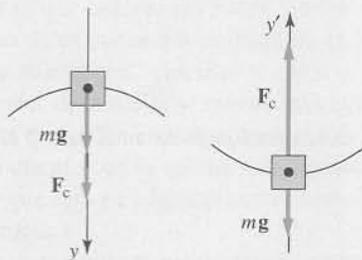


Figura 5.21

2. Aplicar  $\sum F_y = ma_y$  al agua cuando pasa por la parte más alta del círculo a velocidad  $v_a$ . Despejar la fuerza  $F_c$  que hace el cubo sobre el agua:

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow F_c + mg = m \frac{v_a^2}{r}$$

por lo tanto

$$F_c = m \left( \frac{v_a^2}{r} - g \right)$$

- (b) El cubo puede empujar el agua, pero no puede tirar de ella. La fuerza mínima que puede ejercer es cero. Haciendo  $F_p = 0$  y despejando  $v_{a, \min}$ :

$$0 = m \left( \frac{v_{a, \min}^2}{r} - g \right) \Rightarrow v_{a, \min} = \sqrt{rg}$$

- (c) Aplicar  $\sum F_{y'} = ma_{y'}$  al agua cuando pasa por la parte más baja del cubo a velocidad  $v_b$ . Despejar  $F_c$ :

$$\sum F_{y'} = ma_{y'} \Rightarrow F_c - mg = \frac{mv_b^2}{r}$$

por lo tanto

$$F_c = m \left( \frac{v_b^2}{r} + g \right)$$

**Observación** En los diagramas de fuerzas para el agua no está representada la fuerza centrípeta. La fuerza centrípeta no es un tipo de fuerza ejercida por un agente; es sólo el nombre de la fuerza resultante que debe apuntar hacia el centro del círculo para proporcionar la aceleración centrípeta. Cuando el cubo giratorio está en la parte alta del círculo, tanto la gravedad como la fuerza de contacto del cubo contribuyen a la fuerza centrípeta que actúa sobre el agua. Cuando el agua se mueve a la velocidad mínima en lo alto del círculo, su aceleración es  $g$  (aceleración en caída libre debida a la gravedad) y la única fuerza que actúa sobre ella en este punto es su peso,  $mg$ . En la parte más baja del círculo,  $F_c$  debe ser mayor que el peso  $mg$  para suministrar al agua la fuerza centrípeta necesaria.

**Comprobar el resultado** Cuando  $v = 0$  en la parte más baja del círculo,  $F_c = mg$ .

**Ejercicio** Estimar (a) la velocidad mínima en la parte alta del círculo y (b) el período máximo de revolución que evita que el líquido se derrame al hacer girar un cubo de agua en un círculo vertical a velocidad constante. (Respuestas (a) Suponiendo que  $r \sim 1$  m, resulta  $v_{a, \min} \sim 3$  m/s, (b)  $T = (2\pi/v) \sim 2$  s.)

### EJEMPLO 5.9 | Un péndulo

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Una bola de masa  $m$  está suspendida de una cuerda de longitud  $L$  y se mueve con velocidad constante  $v$  en un círculo horizontal de radio  $r$ . La cuerda forma un ángulo  $\theta = r/L$ . Determinar (a) la dirección de la aceleración, (b) la tensión de la cuerda y (c) la velocidad de la bola.

**Planteamiento del problema** Dos fuerzas actúan sobre la bola: su peso,  $mg$ , y la tensión,  $T$ , de la cuerda (véase la figura 5.22). La suma vectorial de estas fuerzas va en la dirección de la aceleración.

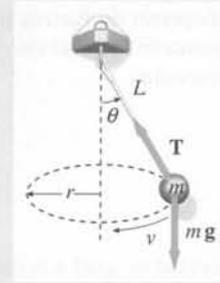


Figura 5.22

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

### Pasos

(a) La bola se mueve en un círculo horizontal dando vueltas a velocidad constante. La aceleración va en la dirección centrípeta.

(b) 1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la bola. Elegir la dirección positiva del eje  $x$  en la dirección de la aceleración de la pelota.

### Respuestas

La aceleración es horizontal y dirigida desde la bola hacia el centro del círculo por donde se mueve.

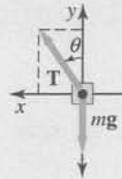


Figura 5.23

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow T \cos \theta - mg = 0$$

por lo tanto

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T \sin \theta = m \frac{v^2}{r}$$

$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{v^2}{rg}$$

por lo tanto

$$v = \sqrt{rg \operatorname{tg} \theta}$$

2. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  para la bola y obtener la tensión  $T$ .

(c) 1. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  a la bola.

2. Sustituir  $mg/\cos \theta$  para  $T$  y obtener  $v$ .

**Observación** Un objeto atado a una cuerda y moviéndose en un círculo horizontal, de modo que la cuerda forme un ángulo  $\theta$  con la vertical, se denomina *péndulo cónico*.

Cuando el coche circula por una curva de una carretera horizontal, la fuerza centrípeta se origina por la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera sobre los neumáticos del coche. Si el coche no se desliza radialmente, el rozamiento es estático. Si el coche se mueve a velocidad constante, la componente hacia delante de la fuerza de rozamiento se equilibra con las fuerzas que se oponen al movimiento del vehículo, como la fuerza de arrastre del aire y la fuerza de rozamiento a la rodadura. Si la resistencia del aire es despreciable, la componente en la dirección del movimiento de la fuerza de rozamiento es nula.

### EJEMPLO 5.10 | Una prueba de carretera

Durante un trabajo de verano, un equipo de estudiantes diseña neumáticos de automóviles. Se prueba un nuevo prototipo de neumáticos para ver si su comportamiento cumple las previsiones. En una prueba de deslizamiento, el modelo BMW 530i fue capaz de recorrer a velocidad constante un círculo de 45,7 m de radio en 15,2 s sin patinar. (a) ¿Cuál fue su velocidad  $v$ ? (b) ¿Cuál fue la aceleración centrípeta? (c) Suponiendo que la fuerza del aire y el rozamiento son despreciables, ¿cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático?

**Planteamiento del problema** La figura 5.24 muestra las fuerzas que actúan sobre el coche. La fuerza normal  $F_n$  equilibra el peso  $mg$ . La fuerza horizontal es la fuerza de rozamiento estático, que suministra la fuerza centrípeta. Cuanto más rápido circula el coche, mayor es la fuerza centrípeta requerida. La velocidad se determina a partir de la longitud de la circunferencia y del período  $T$ . Esta velocidad impone un límite inferior al valor máximo del coeficiente de rozamiento estático.

### ¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

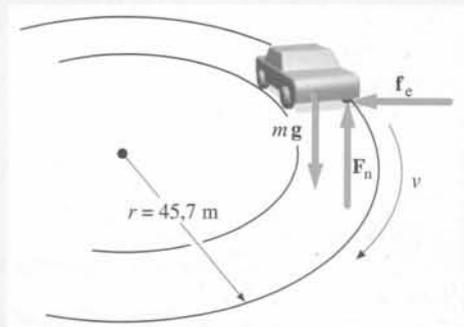


Figura 5.24

- (a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.25). La dirección positiva en la dirección  $r$  señala en la dirección opuesta al centro de curvatura.

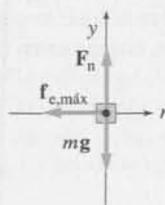


Figura 5.25

2. Usar “la velocidad es igual a la distancia dividida por el tiempo” para determinar la velocidad  $v$ :

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(45,7 \text{ m})}{15,2 \text{ s}} = \boxed{18,90 \text{ m/s}}$$

- (b) Utilizar  $v$  para calcular la aceleración:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(18,9 \text{ m/s})^2}{45,7 \text{ m}} = \boxed{7,81 \text{ m/s}^2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \boxed{0}$$

- (c) 1. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  a los movimientos vertical y radial del coche. Escoger como dirección positiva la radial hacia fuera:

La aceleración es  $7,81 \text{ m/s}^2$  en la dirección centrípeta,

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg = 0$$

por lo tanto

$$F_n = mg \quad \text{y} \quad f_{c, \text{máx}} = \mu_c mg$$

2. Aplicar  $\Sigma F_r = ma_r$  al coche. Sustituyendo el resultado obtenido en el apartado (c) 1 se obtiene para  $\mu_c$ :

$$\Sigma F_r = ma_r \Rightarrow -f_{c, \text{máx}} = m\left(-\frac{v^2}{r}\right)$$

con lo cual,

$$\mu_c mg = m \frac{v^2}{r} \quad \text{y} \quad \mu_c = \frac{v^2}{rg}$$

$$\mu_c = \frac{(18,9 \text{ m/s})^2}{(45,7 \text{ m})(9,81 \text{ m/s}^2)} = \boxed{0,796}$$

**Observación** Cuando se calculan los valores de las magnitudes con tres cifras significativas, una buena práctica es calcular los valores intermedios con cuatro cifras significativas. Por ejemplo, si se usan los valores que se muestran en el apartado (b), se obtiene  $a_c = 7,816 \text{ m/s}^2$ . Este resultado no debe redondearse a  $7,82 \text{ m/s}^2$ , ya que en el paso 2 del apartado (a), sustituyendo los valores exactos nos lleva a obtener, con cuatro cifras significativas,  $v = 18,89 \text{ m/s}$ . Calculando  $a_c$  usando  $v = 18,89 \text{ m/s}$  (en vez de  $18,9 \text{ m/s}$ ) da  $a_c = 7,808 \text{ m/s}^2$ , que redondeado lleva a  $a_c = 7,81 \text{ m/s}^2$ . Guardar en la calculadora los valores intermedios y utilizarlos en cálculos posteriores facilita este proceso.

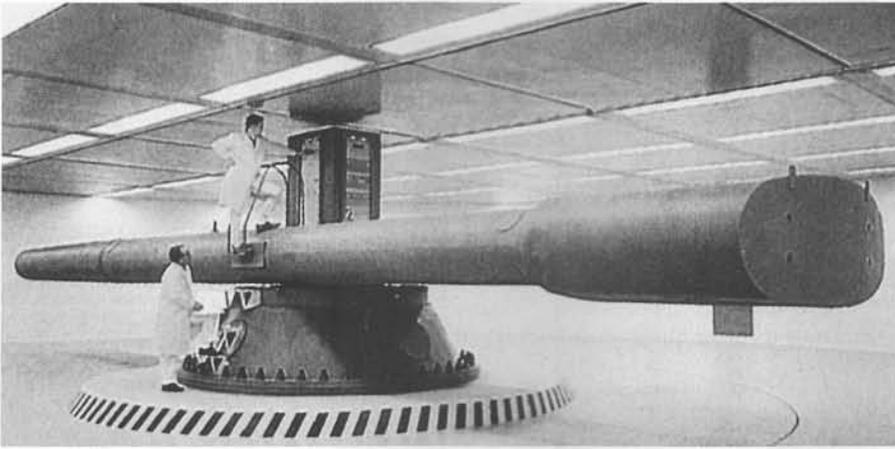
**Comprobar el resultado** Si  $\mu_c$  fuera igual a 1, la fuerza hacia dentro del círculo sería  $mg$  y la aceleración centrípeta igual a  $g$ . En el ejemplo  $\mu_c \approx 0,8$  y  $a_c \approx 0,8g$ .

### \*Curvas con pendiente (peralte)

Si una carretera curvada no es horizontal, sino inclinada, la fuerza normal de la carretera tendrá una componente dirigida hacia el centro del círculo que contribuye a la fuerza centrípeta. El ángulo de la pendiente (o peralte) puede elegirse de tal modo que, para una determinada velocidad, no sea necesario el rozamiento para tomar la curva sin patinar.



Cuando un coche coge una curva, la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera deforma los neumáticos.



Centrífuga gigantesca utilizada para investigación en Sandia National Laboratories (EE. UU.)

### EJEMPLO 5.11 | Una curva con peralte

Una curva de radio 30 m tiene un ángulo de peralte  $\theta$ . Determinar el valor de  $\theta$  para el cual un coche puede tomar la curva a 40 km/h aunque esté cubierta de hielo.

**Planteamiento del problema** En este caso existen sólo dos fuerzas sobre el coche: la gravedad y la fuerza normal. Dado que el coche se mueve en un círculo a velocidad constante, la aceleración va en la dirección centrípeta. El vector suma de las dos fuerzas va en la dirección de la aceleración.

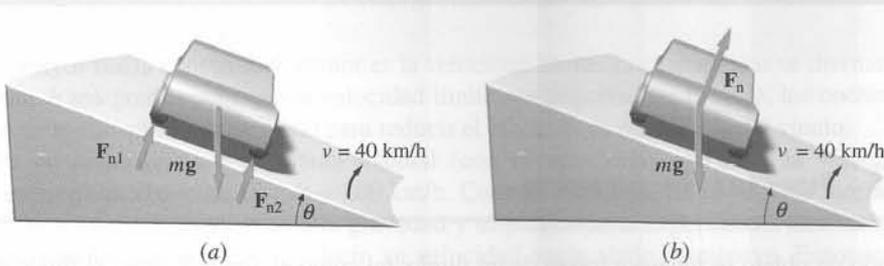


Figura 5.26

1. En la figura 5.26a las fuerzas que ejerce el asfalto sobre el coche se designan como  $F_{n1}$  y  $F_{n2}$ . Estas fuerzas se combinan y dan  $F_n$  en la figura 5.26b. El ángulo entre la fuerza normal  $F_n$  y la vertical es  $\theta$ , el mismo ángulo del peralte. Dibujar el diagrama de fuerzas para el coche.

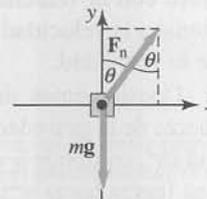


Figura 5.27

2. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$  al coche:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n \cos \theta - mg = 0$$

por lo tanto

$$F_n = \frac{mg}{\cos \theta}$$

3. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al coche. Sustituir  $F_n$  usando el resultado del paso 2 y se obtiene  $\theta$ :

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_n \sin \theta = m \frac{v^2}{r}$$

y

$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \quad \text{con lo cual} \quad \theta = \arctg \frac{v^2}{rg}$$

$$\theta = \arctg \frac{[(40000 \text{ m})/(3600 \text{ s})]^2}{(30 \text{ m})(9,81 \text{ m/s}^2)} = \boxed{22,8^\circ}$$

**Observación** El ángulo de peralte  $\theta$  depende de  $v$  y  $r$ , pero no de la masa  $m$ ;  $\theta$  aumenta con  $v$  creciente y disminuye al aumentar  $r$ . Cuando el ángulo de peralte, la velocidad y el radio satisfacen la ecuación  $\text{tg } \theta = v^2/rg$ , el coche toma la curva con suavidad sin tendencia a patinar hacia dentro o hacia afuera. Si la velocidad del coche es mayor que  $\sqrt{rg \text{ tg } \theta}$ , la carretera ejercerá una fuerza de rozamiento según la pendiente hacia abajo. Esta fuerza tiene una componente horizontal hacia el centro de la curvatura que proporciona la fuerza centrípeta adicional necesaria para evitar que el coche se mueva hacia fuera (patinar hacia arriba según la pendiente). Si la velocidad del coche es inferior a esta magnitud, la carretera ejercerá una fuerza de rozamiento hacia arriba según la pendiente.

**Solución alternativa** En la resolución del problema se ha usado el criterio de escoger como dirección de un eje de coordenadas la dirección del vector aceleración, la dirección centrípeta. Sin embargo, la solución no es más difícil si elegimos como dirección de un eje la dirección de la pendiente. Esta es la opción que hemos tomado en la solución siguiente.

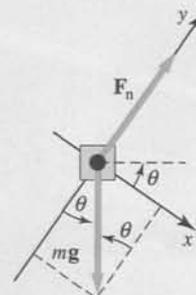


Figura 5.28

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.28). La dirección del eje  $x$  se toma en la dirección de la pendiente y el eje  $y$  se toma en la dirección perpendicular.
2. Aplicar  $\Sigma F_x = ma_x$  al coche:
3. Dibujar un esquema y usar la trigonometría para obtener una expresión para  $a_x$  en función de  $a$  y de  $\theta$  (figura 5.29):
4. Sustituir el resultado del paso 3 en el resultado del paso 2. Sustituir  $v^2/r$  por  $a$  y se obtiene  $\theta$ .

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow mg \text{ sen } \theta = ma_x$$

$$a_x = a \text{ cos } \theta$$

$$mg \text{ sen } \theta = ma \text{ cos } \theta$$

$$g \text{ sen } \theta = \frac{v^2}{r} \text{ cos } \theta$$

$$\text{tg } \theta = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow \theta = \text{arctg } \frac{v^2}{rg}$$

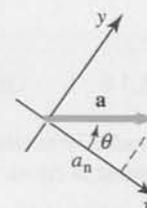


Figura 5.29

**Ejercicio** Determinar la componente de la aceleración normal a la superficie de la carretera.  
(Respuesta  $1,60 \text{ m/s}^2$ )



### \* 5.3 Fuerzas de arrastre

Cuando un objeto se mueve a través de un fluido, tal como el aire o el agua, el fluido ejerce una fuerza de resistencia o **fuerza de arrastre** que tiende a reducir la velocidad del objeto. Esta fuerza depende de la forma del objeto, de las propiedades del fluido y de la velocidad del objeto respecto al fluido. A diferencia de la fuerza de rozamiento, la fuerza de arrastre crece con la velocidad del objeto. Para pequeñas velocidades es aproximadamente proporcional a la velocidad del objeto; para velocidades superiores es casi proporcional al cuadrado de la velocidad.

Consideremos un objeto que cae libremente desde el reposo bajo la influencia de la fuerza de la gravedad, supuesta constante. Ahora agregamos una fuerza de arrastre de magnitud  $bv^n$ , en donde  $b$  y  $n$  son constantes. Así tenemos una fuerza hacia abajo constante,  $mg$ , y una fuerza hacia arriba  $bv^n$  (figura 5.30).

Si tomamos positiva la dirección hacia abajo, resulta según la segunda ley de Newton

$$\Sigma F_y = mg - bv^n = ma_y \tag{5.6}$$

Para  $t = 0$ , cuando se deja caer el objeto, la velocidad es nula, de modo que la fuerza de arrastre es cero y la aceleración es  $g$  hacia abajo. Cuando la velocidad del objeto crece, la fuerza de arrastre se incrementa y la aceleración es menor que  $g$ . Finalmente, la velocidad se hace lo suficientemente grande para que la fuerza de arrastre  $bv^n$  sea igual a la fuerza de gravedad  $mg$ , de modo que la aceleración se hace cero. El objeto continúa entonces moviéndose a la velocidad constante  $v_1$ , llamada **velocidad límite** o velocidad terminal. Haciendo  $a_y = 0$  resulta, de la ecuación 5.7

$$bv_1^n = mg$$

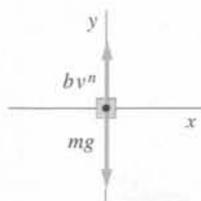


Figura 5.30 Diagrama de fuerzas de un objeto que cae libremente en el aire, que le ofrece una fuerza de resistencia.



Y por lo tanto, para la velocidad límite

$$v_l = \left(\frac{mg}{b}\right)^{1/n} \quad (5.7)$$

Cuanto mayor sea la constante  $b$ , menor es la velocidad límite. Los paracaídas se diseñan de modo que  $b$  sea grande para que la velocidad límite sea pequeña. En cambio, los coches se diseñan de modo que  $b$  sea pequeño para reducir el efecto de la resistencia del viento.

Para un paracaidista de apertura manual (con el paracaídas cerrado), la velocidad límite es aproximadamente  $60 \text{ m/s} \approx 200 \text{ km/h}$ . Cuando el paracaídas se abre, la fuerza de arrastre es mayor que la fuerza de la gravedad y el paracaidista experimenta una aceleración hacia arriba mientras cae, es decir, su velocidad hacia abajo disminuye. Entonces la fuerza de arrastre disminuye hasta que se alcanza una nueva velocidad límite, del orden de  $20 \text{ km/h}$ .

### EJEMPLO 5.12 | Velocidad límite

Un paracaidista de masa  $64 \text{ kg}$  alcanza una velocidad límite de  $180 \text{ km/h}$  con sus brazos y piernas extendidas. (a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de arrastre  $F_a$  sobre el paracaidista? (b) Si la fuerza de arrastre es igual a  $bv^2$ , ¿cuál es el valor de  $b$ ?

(a) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas:

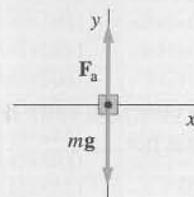


Figura 5.31

2. Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$ . Como el paracaidista se mueve con velocidad constante, la aceleración es cero:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_a - mg = 0$$

por lo tanto

$$F_a = mg = (64 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg}) = \boxed{628 \text{ N}}$$

(b) 1. Para determinar  $b$ , basta considerar que  $F_a = bv^2$ :

$$F_a = mg = bv^2$$

por lo tanto

$$b = \frac{mg}{v^2}$$

2. Determinar la velocidad en m/s y después calcular  $b$ :

$$\begin{aligned} 180 \text{ km/h} &= \frac{180 \text{ km}}{1 \text{ h}} \left( \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \left( \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \\ &= \frac{180 \text{ km}}{1 \text{ h}} \left( \frac{1 \text{ m/s}}{3,6 \text{ km/h}} \right) = 50 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$b = \frac{(64 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})}{(50 \text{ m/s})^2} = \boxed{0,251 \text{ kg/m}}$$

## \* 5.4 Integración numérica: el método de Euler

Si una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza *constante*, su aceleración es constante y para la determinación de su velocidad y de su posición se usan las fórmulas cinemáticas que, en el caso de aceleración constante, se han descrito en el capítulo 2. Consideremos ahora una partícula que se mueve en el espacio bajo la acción de una fuerza, y por consiguiente, de una aceleración, que depende de la posición y de la velocidad de la partícula. La posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en un instante de tiempo determinan la posición y la velocidad en el siguiente instante que, a su vez, determinan la aceleración. La posición, la velocidad y la aceleración real de un objeto cambian continuamente con el tiempo. Se suele aproximar esta situación mediante el **método de Euler** que consiste en reemplazar esta variación continua con el tiempo por pequeños intervalos de tiempo  $\Delta t$  de tal forma que la aceleración en cada intervalo sea constante. Si el intervalo de tiempo es suficientemente pequeño, el cambio de la aceleración es pequeño y puede despreciarse.

Sean  $x_0$ ,  $v_0$  y  $a_0$  la posición, la velocidad y la aceleración iniciales de la partícula en un instante de tiempo  $t_0$ . Si suponemos que durante  $\Delta t$  la aceleración es constante, la velocidad en el tiempo  $t_1 = t_0 + \Delta t$  viene dada por

$$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$$

Similarmente, si despreciamos cualquier cambio de la velocidad durante el intervalo de tiempo, la nueva posición viene dada por la ecuación

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

A partir de los valores de  $v_1$  y  $x_1$  calculamos la nueva aceleración  $a_1$  usando la segunda ley de Newton y, posteriormente usamos  $x_1$ ,  $v_1$ , y  $a_1$  para calcular  $x_2$  y  $v_2$ .

$$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t \quad (5.8)$$

$$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t \quad (5.9)$$

La conexión entre la posición y la velocidad en el tiempo  $t_n$  y el tiempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  viene dada por

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t \quad (5.10)$$

y

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t \quad (5.11)$$

Por lo tanto, para determinar la velocidad y la posición en un tiempo  $t$  dividimos el intervalo de tiempo  $t - t_0$  en un gran número de pequeños intervalos  $\Delta t$  y aplicamos las ecuaciones 5.10 y 5.11 empezando en el instante inicial  $t_0$ . Esto comporta un gran cantidad de cálculos simples y repetitivos que mediante un ordenador son fáciles de hacer. La técnica de dividir el intervalo de tiempo en pequeños intervalos de tiempo y calcular la aceleración, la velocidad y la posición en cada intervalo usando los valores del intervalo anterior se denomina integración numérica.

**Fuerzas de resistencia** Para ilustrar el uso de la integración numérica, consideremos el problema de un paracaidista que salta en caída libre, partiendo del reposo, desde una altura determinada, de modo que su movimiento depende únicamente de la fuerza de la gravedad y de la fuerza de resistencia del aire, que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Tenemos que calcular la velocidad  $v$  y la distancia recorrida  $x$  en función del tiempo.

La ecuación que describe el movimiento de un objeto de masa  $m$  que parte del reposo y que cae bajo la acción de la gravedad es la ecuación 5.6 con  $n = 2$

$$mg - bv^2 = ma$$

donde la dirección positiva es la dirección hacia abajo. La aceleración, en estas condiciones, vale

$$a = g - \frac{b}{m}v^2 \quad (5.12)$$

Conviene escribir la constante  $b/m$  en función de la velocidad límite  $v_l$ . Si  $a = 0$  en la ecuación 5.12, se obtiene

$$0 = g - \frac{b}{m}v_l^2$$

$$\frac{b}{m} = \frac{g}{v_l^2}$$

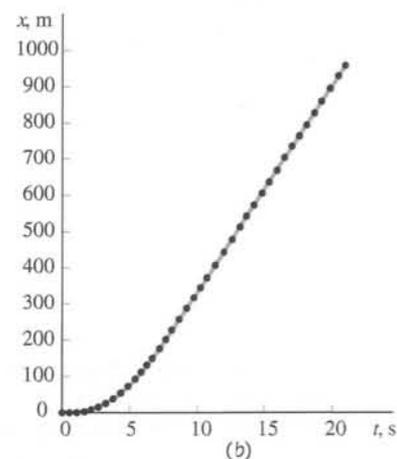
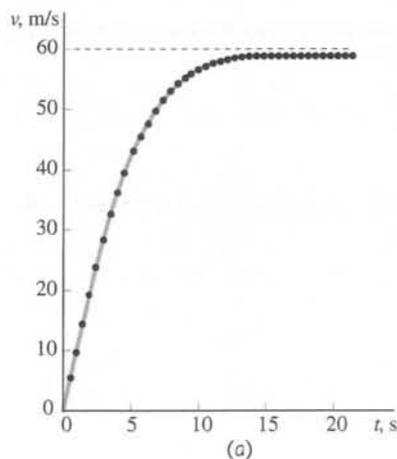
	A	B	C	D
1	$\Delta t =$	0,5	s	
2	$x_0 =$	0	m	
3	$v_0 =$	0	m/s	
4	$a_0 =$	9,81	m/s <sup>2</sup>	
5	$vt =$	60	m/s	
6				
7	<b>t</b>	<b>x</b>	<b>v</b>	<b>a</b>
8	(s)	(m)	(m/s)	(m/s <sup>2</sup> )
9	0,00	0,0	0,00	9,81
10	0,50	0,0	4,91	9,74
11	1,00	2,5	9,78	9,55
12	1,50	7,3	14,55	9,23
13	2,00	14,6	19,17	8,81
14	2,50	24,2	23,57	8,30
15	3,00	36,0	27,72	7,72
41	16,00	701,0	59,55	0,15
42	16,50	730,7	59,62	0,16
43	17,00	760,6	59,68	0,10
44	17,50	790,4	59,74	0,09
45	18,00	820,3	59,78	0,07
46	18,50	850,2	59,82	0,06
47	19,00	880,1	59,85	0,05
48	19,50	910,0	59,87	0,04
49	20,00	939,9	59,89	0,04
50				

(a)

	A	B	C	D
1	$\Delta t =$	0,5	s	
2	$x_0 =$	0	m	
3	$v_0 =$	0	m/s	
4	$a_0 =$	9,81	m/s <sup>2</sup>	
5	$vt =$	60	m/s	
6				
7	<b>t</b>	<b>x</b>	<b>v</b>	<b>a</b>
8	(s)	(m)	(m/s)	(m/s <sup>2</sup> )
9	0	=B2	=B3	=B\$4*(1-C9^2/B\$5^2)
10	=A9+B\$1	=B9+C9*B\$1	=C9+D9*B\$1	=B\$4*(1-C10^2/B\$5^2)
11	=A10+B\$1	=B10+C10*B\$1	=C10+D10*B\$1	=B\$4*(1-C11^2/B\$5^2)
12	=A11+B\$1	=B11+C11*B\$1	=C11+D11*B\$1	=B\$4*(1-C12^2/B\$5^2)
13	=A12+B\$1	=B12+C12*B\$1	=C12+D12*B\$1	=B\$4*(1-C13^2/B\$5^2)
14	=A13+B\$1	=B13+C13*B\$1	=C13+D13*B\$1	=B\$4*(1-C14^2/B\$5^2)
15	=A14+B\$1	=B14+C14*B\$1	=C14+D14*B\$1	=B\$4*(1-C15^2/B\$5^2)
41	=A40+B\$1	=B40+C40*B\$1	=C40+D40*B\$1	=B\$4*(1-C41^2/B\$5^2)
42	=A41+B\$1	=B41+C41*B\$1	=C41+D41*B\$1	=B\$4*(1-C42^2/B\$5^2)
43	=A42+B\$1	=B42+C42*B\$1	=C42+D42*B\$1	=B\$4*(1-C43^2/B\$5^2)
44	=A43+B\$1	=B43+C43*B\$1	=C43+D43*B\$1	=B\$4*(1-C44^2/B\$5^2)
45	=A44+B\$1	=B44+C44*B\$1	=C44+D44*B\$1	=B\$4*(1-C45^2/B\$5^2)
46	=A45+B\$1	=B45+C45*B\$1	=C45+D45*B\$1	=B\$4*(1-C46^2/B\$5^2)
47	=A46+B\$1	=B46+C46*B\$1	=C46+D46*B\$1	=B\$4*(1-C47^2/B\$5^2)
48	=A47+B\$1	=B47+C47*B\$1	=C47+D47*B\$1	=B\$4*(1-C48^2/B\$5^2)
49	=A48+B\$1	=B48+C48*B\$1	=C48+D48*B\$1	=B\$4*(1-C49^2/B\$5^2)
50				

(b)

**Figura 5.32** (a) Hoja de cálculo que se usa para calcular la posición y la velocidad de un paracaidista con una resistencia del aire proporcional a  $v^2$ . (b) Se muestra la misma hoja de cálculo Excel, con las fórmulas.



**Figura 5.33** (a) Gráfico  $v-t$  para un paracaidista, calculado mediante una integración numérica con  $\Delta t = 0,5$  s. La línea horizontal discontinua muestra la velocidad límite  $v_l = 60$  m/s. (b) Gráfico  $x-t$  si  $\Delta t = 0,5$  s.

Sustituyendo  $g/v_l^2$  por  $b/m$  en la ecuación 5.12, se llega a

$$a = g \left( 1 - \frac{v}{v_l} \right) \quad (5.13)$$

La aceleración en el tiempo  $t_n$  se calcula usando los valores de  $x_n$  y de  $v_n$ .

Para resolver la ecuación 5.13 numéricamente, tenemos que usar los valores numéricos de  $g$  y de  $v_l$ . Una velocidad límite razonable es 60 m/s. Si tomamos  $x_0 = 0$ , los valores iniciales son  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ , y  $a_0 = g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Para determinar la velocidad  $v$  y la posición  $x$  transcurrido un tiempo  $\Delta t = 20$  s, dividimos el intervalo de tiempo  $0 < t < 20$  s en muchos intervalos pequeños  $\Delta t$  y aplicamos las ecuaciones 5.10, 5.11, y 5.13. Lo hacemos escribiendo un programa o usando una hoja de cálculo, como la que se muestra en la figura 5.32. Esta hoja de cálculo considera  $\Delta t = 0,5$  s y para  $t = 20$  s, obtiene  $x = 59,89$  m y  $v = 939,9$  m/s.

La figura 5.33 muestra la representación gráfica de  $v$  respecto a  $t$  y de  $x$  respecto a  $t$  para estos datos.

¿Cuál es la precisión de estos cálculos? Podemos estimarla volviendo a usar el mismo programa con otro intervalo de tiempo más pequeño. Si usamos  $\Delta t = 0,25$  s, la mitad del valor utilizado en el primer cálculo, cuando  $t = 20$  s obtenemos  $v = 59,86$  m/s y  $x = 943,1$  m. La diferencia en la velocidad es de un 0,05 por ciento mientras que la de la posición es un 0,4 por ciento. Estas son pues las estimaciones de la exactitud de los cálculos iniciales.

Si la diferencia entre el valor  $a_m$  para un intervalo de tiempo y el valor de  $a$  al comienzo del intervalo se hace más pequeña a medida que el intervalo de tiempo disminuye, podríamos pensar en la conveniencia de usar intervalos de tiempo muy pequeños, como por ejemplo  $\Delta t = 0,000000001$  s. Hay dos razones que muestran que este procedimiento no conviene. Primera, cuanto más pequeño es el intervalo, mayor es el número de cálculos que hay que realizar, con lo cual el tiempo que necesita el programa aumenta. Segunda, el ordenador en cada paso del cálculo guarda un número determinado de dígitos significativos, por lo que en cada paso se produce un redondeo. Este es un proceso aditivo, con lo que cuantos más cálculos realicemos más significativo será el error del redondeo. Cuando hemos disminuido por primera vez el intervalo de tiempo, la precisión del resultado mejora porque  $a_i$  se aproxima a  $a_m$  para ese intervalo. Sin embargo, a medida que el intervalo disminuye, los errores de redondeo crecen y la exactitud del cálculo disminuye. Una buena regla en este tipo de cálculos es no usar más de  $10^4$  o  $10^5$  intervalos para una integración numérica típica.

## Resumen

Las fuerzas de rozamiento y de arrastre son fenómenos complejos que se aproximan empíricamente mediante ecuaciones simples.

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### TEMA

#### 1. Rozamiento

Rozamiento estático

$$f_c \leq \mu_e F_n \quad (5.2)$$

en donde  $F_n$  es la fuerza normal de contacto y  $\mu_e$  el coeficiente de rozamiento estático.

Rozamiento cinético

$$f_c = \mu_c F_n \quad (5.3)$$

en donde  $\mu_c$  es el coeficiente de rozamiento cinético. Este coeficiente es ligeramente menor que el de rozamiento estático.

#### 2. Movimiento a lo largo de una curva

Una partícula que se mueve a lo largo de una curva arbitraria puede considerarse que se mueve en un arco circular durante un pequeño intervalo de tiempo. Su vector aceleración instantánea tiene una componente  $a_r = v^2/r$  hacia el centro de curvatura del arco y una componente  $a_t = dv/dt$  que es tangencial a la curva. Si la partícula se mueve por una trayectoria circular de radio  $r$  a velocidad constante  $v$ ,  $a_t = 0$  y la velocidad, el radio  $r$  y el periodo  $T$  están relacionados mediante la ecuación  $2\pi r = vT$

## 3. \*Fuerzas de arrastre

Cuando un objeto se mueve a través de un fluido, experimenta una fuerza de arrastre que se opone al movimiento. Esta fuerza crece al aumentar la velocidad del objeto. Si el cuerpo se deja caer libremente desde el reposo, su velocidad crece hasta que la fuerza de arrastre iguala a la fuerza de gravedad, después de lo cual se mueve con una velocidad constante llamada velocidad límite. Esta velocidad límite depende de la forma del cuerpo y del medio a través del cual cae.

## 4. \*Integración numérica: método de Euler

Para estimar la posición  $x$  y la velocidad  $v$  en un instante de tiempo  $t$ , se divide primero  $t$  en muchos intervalos de tiempo pequeños  $\Delta t$ . La aceleración inicial  $a_0$  se calcula a partir de los valores de la posición inicial  $x_0$  y de la velocidad inicial  $v_0$ . La posición  $x_1$  y la velocidad  $v_1$  en un tiempo  $\Delta t$  posterior se estiman usando las relaciones

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t \quad (5.10)$$

y

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t \quad (5.11)$$

con  $n = 0$ . La aceleración  $a_{n+1}$  se calcula usando los valores de  $x_{n+1}$  y  $v_{n+1}$  y así sucesivamente. Este proceso continúa hasta que se obtienen la posición y la velocidad para el tiempo  $t$ .

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

### Problemas conceptuales

1 ● En el suelo de un camión que se mueve a lo largo de una carretera horizontal hay varios objetos. Si el camión acelera, ¿qué fuerza actúa sobre los objetos para que éstos se aceleren?

2 ● SSM Todo objeto situado sobre el suelo de un camión se desliza si la aceleración de éste es grande. ¿Qué relación hay entre la aceleración crítica del camión para que un objeto ligero comience a deslizarse y la que corresponde a un objeto mucho más pesado?

3 ● Un bloque de masa  $m$  descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es (a)  $\mu_c \geq g$ , (b)  $\mu_c = \tan \theta$ , (c)  $\mu_c \leq \tan \theta$ , (d)  $\mu_c \geq \tan \theta$ .

4 ● SSM Un bloque de masa  $m$  se encuentra en reposo sobre un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal, como indica la figura 5.34. ¿Cuál de las siguientes

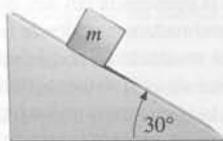


Figura 5.34 Problema 4

afirmaciones respecto a la fuerza de rozamiento estático es necesariamente cierta? (a)  $f_c > mg$ , (b)  $f_c < mg \cos 30^\circ$ , (c)  $f_c = mg \cos 30^\circ$ , (d)  $f_c = mg \sin 30^\circ$ , (e) Ninguna es cierta.

5 ●● En un día helado de invierno, el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos de un coche y la superficie de una carretera puede reducirse a la mitad de su valor en un día seco. Como resultado, la velocidad máxima a la cual puede tomarse una curva de radio  $R$  es (a) la misma que en un día seco, (b) reducida a un 71% de su valor en un día seco, (c) reducida al 50% de su valor en un día seco, (d) reducida al 25% de su valor en un día seco, (e) reducida a un valor desconocido que depende de la masa del coche.

6 ●● SSM Mostrar con un diagrama de fuerzas cómo una motocicleta puede recorrer un círculo sobre una pared vertical. Considerar parámetros razonables (coeficiente de rozamiento, radio del círculo, masa de la motocicleta, etc.) y calcular la velocidad mínima necesaria.

7 ●● Este es un experimento muy interesante que se puede realizar en casa; se coge un bloque de madera y se pone en el suelo o sobre alguna superficie plana. Se ata el bloque a un muelle y se tira de él con un movimiento suave y constante en la dirección horizontal, de modo que, a partir de un momento, el bloque empieza a moverse, pero no de forma continua, sino que se mueve, se para, se mueve, se para, etc. Explicar por qué se da este movimiento.

8 ● Verdadero o falso: visto desde un sistema de referencia inercial, un objeto no puede moverse en círculo a menos que actúe sobre él una fuerza resultante neta.

9 ●● Una partícula se mueve en un círculo vertical a velocidad constante. ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece constante? (a) La velocidad vectorial. (b) La aceleración. (c) La fuerza neta. (d) El peso aparente. (e) Ninguna de las anteriores.

10 ● SSM Coloque un pequeño trozo de hierro en una mesa y mantenga por encima suyo a una distancia de 1 cm un imán de cocina. El imán no atrae suficientemente a la pieza y ésta no se mueve. Repita el experimento pero manteniendo el imán y la pieza separados 1 cm en la mano y déjelos caer al suelo. Antes de llegar al suelo, el imán y la pieza de hierro se unen debido a fuerza magnética que ejerce el imán sobre la pieza de hierro. (a) Dibuje los diagramas de fuerzas que ilustren toda las fuerzas que actúan sobre el imán y sobre la pieza de hierro en cada caso. (b) Explique por qué el imán y la pieza de hierro se unen durante la caída por el aire, mientras que no se unen cuando están encima de la mesa.

11 ●●● SSM Boris Korsunsky, en su artículo "Brainwisters for Physics Students" (*The Physics Teacher*, 33 550 (1995)) plantea una cuestión que supone un interesante rompecabezas: Dos bloques idénticos se atan a una cuerda sin masa que pasa por una polea tal como se muestra en la figura 5.35. Inicialmente la cuerda está colocada de tal forma que su punto medio está en la polea y además el plano no ejerce rozamiento. Los dos bloques en reposo se colocan inicialmente, tal como muestra la figura, con la cuerda tensa y horizontal. Si se suelta el bloque 2, ¿chocará antes el bloque 1 con la polea que el bloque 2 con la pared? (Suponga que la distancia inicial del bloque 1 a la polea es la misma que la distancia del bloque 2 a la pared). Hay una solución que es muy sencilla.

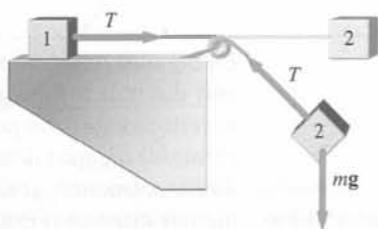


Figura 5.35 Problema 11

12 ● Verdadero o falso: La velocidad límite de un objeto que cae depende de su forma.

13 ● SSM Una paracaidista salta en caída libre por el aire. Su velocidad límite (a) depende de su masa, (b) depende de la orientación de la caída, (c) depende de la densidad del aire, (d) todas las respuestas anteriores son ciertas.

14 ●● Si está sentado en el asiento de un coche que circula a gran velocidad por una curva de un circuito, siente una fuerza que tiende a echarle del asiento hacia fuera. ¿Cuál es la dirección real de la fuerza que actúa sobre usted y de donde proviene esa fuerza? (Suponga que usted está bien atado al asiento y que, por lo tanto, no resbala por él.)

15 ● SSM La masa de la Luna es aproximadamente el 1% de la masa de la Tierra. La fuerza centrípeta que mantiene a la Luna en su órbita alrededor de la Tierra (a) es muy inferior a la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna, (b) depende de la fase de la Luna, (c) es mucho mayor que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna, (d) es la misma que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna, (e) no puedo responder; no hemos estudiado todavía la ley de Newton de la gravitación.

16 ● Un bloque se desliza sobre una superficie sin rozamiento a lo largo de un rizo como indica la figura 5.36. El bloque se mueve con la velocidad necesaria para que en ningún momento pierda el contacto con la pista. Asignar los puntos A, B, C y D a sus correspondientes diagramas de fuerza (figura 5.37).

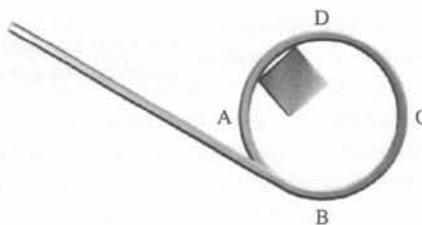


Figura 5.36 Problema 16

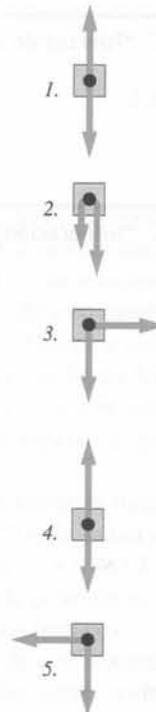


Figura 5.37

17 ●● Una piedra y una pluma están a la misma altura sobre el suelo y, al unísono, se las deja caer. La piedra llega antes al suelo. A partir de este hecho se podría concluir que la fuerza de arrastre aerodinámica que actúa sobre la pluma es mayor que la que actúa sobre la piedra, pero en realidad es al revés. Explique en detalle por qué la piedra llega antes al suelo. Suponga que la fuerza de arrastre viene dada por la expresión  $F_D = (1/2)CA\rho v^2$  (en el problema 18(c) hay una explicación de esta fórmula).

**Aproximaciones y estimaciones**

18 ● SSM Hay un método muy simple que se utiliza habitualmente para determinar la resistencia aerodinámica de los coches. Cuando un coche, en una pista larga y plana, alcanza una determinada velocidad (por ejemplo de unos 96 km/h), se pone el cambio en punto muerto y se espera que el coche se pare. Se mide el tiempo que tarda el coche en disminuir la velocidad a intervalos de 8 km/h. (a) Haciendo pruebas con un Toyota Tercel de 1020 kg de masa se observa que pasa de 96 km/h a 88 km/h en 3,92 s. ¿Cuál es la fuerza media que frena al coche? (b) Si el coeficiente de rozamiento de rodadura del coche es 0,02, ¿cuál es la fuerza de rozamiento de rodadura que actúa frenando al coche? Si suponemos que las únicas dos fuerzas que actúan sobre el coche son el rozamiento por rodadura y la resistencia aerodinámica, ¿cuál es la fuerza de resistencia aerodinámica promedio sobre el vehículo? (c) La fuerza de resistencia tiene la forma  $F_D = (1/2)CA\rho v^2$ , donde A es el área transversal del coche frente al viento,  $\rho$  es la densidad del aire y C es una constante adimensional de orden 1. Si el área transversal del coche es 1,91 m<sup>2</sup>, determinar C a partir de los datos disponibles. (La densidad del aire es 1,21 kg/m<sup>3</sup>; úsese en el cálculo que la velocidad del coche es 88 km/h.)

19 ● Usando el análisis dimensional, determinar las unidades y las dimensiones de la constante b en la fuerza de resistencia  $bv^n$  (a) si  $n = 1$  y (B) si  $n = 2$ . (c) Newton mostró que la resistencia del aire de un objeto de área circular que cae es  $(1/2)\rho\pi r^2 v^2$  aproximadamente, donde la densidad del aire es  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ . Demostrar que este resultado es consistente con el análisis dimensional del apartado (b). (d) Determinar la velocidad límite de un paracaidista de 56 kg en caída libre suponiendo que su área transversal es un disco circular de 0,30 m de radio y que la densidad del aire cerca de la superficie terrestre es 1,2 kg/m<sup>3</sup>. (e) La densidad de la atmósfera disminuye con la altura: a 8 km de

altura la densidad es de sólo  $0,514 \text{ kg/m}^3$ . ¿Cuál sería la velocidad límite del paracaidista en caída libre a esta altura?

**20** ●● Afortunadamente, la formación de bolas de granizo del tamaño de una pelota de golf no es frecuente, aunque el tamaño medio de las partículas de granizo es mayor que el de las gotas de lluvia. Estimar la velocidad límite de una gota de lluvia y de una bola de granizo del tamaño de una pelota de golf.

## Rozamiento

**21** ● **SSM** Un bloque de masa  $m$  se desliza a velocidad constante hacia abajo por un plano inclinado según un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Se verifica que (a)  $\mu_c = mg \sin \theta$ . (b)  $\mu_c = \tan \theta$ . (c)  $\mu_c = 1 - \cos \theta$ . (d)  $\mu_c = \cos \theta - \sin \theta$ .

**22** ● Un bloque de madera se arrastra mediante una cuerda horizontal sobre una superficie horizontal a velocidad constante con una fuerza de 20 N. El coeficiente de rozamiento cinético entre las superficies es 0,3. La fuerza de rozamiento es (a) imposible de determinar sin conocer la masa del bloque. (b) imposible de determinar sin conocer la velocidad del bloque. (c) 0,3 N. (d) 6 N. (e) 20 N.

**23** ● **SSM** **¡SOLVE!** Un bloque de 20 N descansa sobre una superficie horizontal. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la superficie y el bloque son respectivamente  $\mu_e = 0,8$  y  $\mu_c = 0,6$ . Una cuerda horizontal está atada al bloque con una tensión constante  $T$ . ¿Cuál es la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque si (a)  $T = 15 \text{ N}$  ó (b)  $T = 20 \text{ N}$ ?

**24** ● Un bloque de masa  $m$  se arrastra a velocidad constante sobre una superficie horizontal mediante una cuerda como se indica en la figura 5.38. La magnitud de la fuerza de rozamiento es (a)  $\mu_c mg$ . (b)  $T \cos \theta$ . (c)  $\mu_c(T - mg)$ . (d)  $\mu_c T \sin \theta$ . (e)  $\mu_c(mg - T \sin \theta)$ .

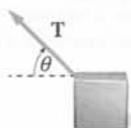


Figura 5.38

**25** ● **¡SOLVE!** Un obrero empuja con una fuerza horizontal de 500 N un cajón de 100 kg situado sobre una alfombra gruesa. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético son respectivamente 0,6 y 0,4. Determinar la fuerza de rozamiento que ejerce la alfombra sobre el cajón.

**26** ● **¡SOLVE!** Una caja que pesa 600 N es empujada a lo largo de un suelo horizontal con velocidad constante mediante una fuerza de 250 N paralela al suelo. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y el suelo?

**27** ● **¡SOLVE!** El coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos de un coche y la carretera es  $\mu_e = 0,6$ . Si la fuerza resultante que actúa sobre el coche es la fuerza de rozamiento estático ejercida por la carretera, (a) ¿cuál es la aceleración máxima que puede adquirir el coche cuando se frena? (b) ¿Cuál es la mínima distancia a la que se detendrá el coche si inicialmente llevaba una velocidad de 30 m/s?

**28** ● **SSM** La fuerza que acelera un coche a lo largo de una carretera horizontal es la fuerza de rozamiento entre la carretera y los neumáticos. (a) Explicar por qué la aceleración es mayor cuando las ruedas no giran. (b) Si un coche acelera de 0 a 90 km/h en 12 s con aceleración constante, ¿cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento entre las ruedas y la carretera? Suponer que la mitad del peso del coche lo soportan las ruedas tractoras.

**29** ● Un bloque de 5 kg se mantiene en reposo contra una pared vertical mediante una fuerza horizontal de 100 N. (a) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida por la pared sobre el bloque? (b) ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima necesaria para evitar que el bloque caiga si el coeficiente de rozamiento entre la pared y el bloque es  $\mu_e = 0,40$ ?

**30** ● Un estudiante cansado y sobrecargado intenta mantener su libro de física bajo el brazo tal como muestra la figura 5.39. El libro pesa 10,2 kg, el coeficiente de rozamiento estático entre el libro y el brazo del muchacho es 0,32 y el coeficiente de rozamiento entre el libro y el jersey del estudiante es 0,16. (a) ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima que ha de ejercer el brazo del muchacho para que el libro no caiga? (b) Si realiza sólo una fuerza de 195 N, cuál es la aceleración del libro mientras se desliza bajo el brazo del estudiante? El coeficiente de rozamiento cinético del brazo con el libro es 0,20, mientras que el del jersey con el libro es 0,09.

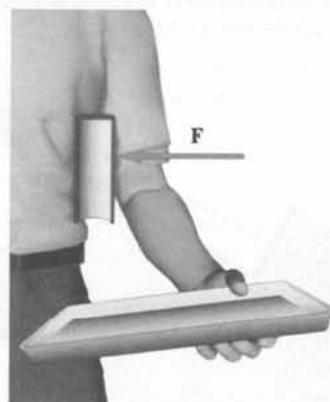


Figura 5.39 Problema 30

**31** ● En un día de nieve y con la temperatura próxima al punto de congelación el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y una carretera con hielo es de 0,08. ¿Cuál es la máxima inclinación que un vehículo con tracción a las cuatro ruedas puede vencer ascendiendo a velocidad constante?

**32** ● **SSM** Una caja de 50 kg debe arrastrarse sobre un suelo horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre la caja y el suelo es 0,6. Un método de arrastre sería empujar la caja con una fuerza que formase un ángulo  $\theta$  hacia abajo con la horizontal. Otro método sería tirar de la caja con una fuerza que formase un ángulo  $\theta$  hacia arriba con la horizontal. (a) Explicar por qué un método es mejor que otro. (b) Calcular la fuerza necesaria para mover la caja en cada uno de los métodos si  $\theta = 30^\circ$  y comparar la respuesta con los resultados que se obtendrían si el ángulo fuera  $\theta = 0^\circ$ .

**33** ● **¡SOLVE!** Una caja de 3 kg descansa sobre una plataforma horizontal y está atada a otra caja de 2 kg por una cuerda ligera como indica la figura 5.40. (a) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de rozamiento estático que permite que las dos cajas permanezcan en reposo? (b) Si el coeficiente de rozamiento estático es menor que el determinado en el apartado (a) y el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y la plataforma es 0,3, determinar el tiempo que tardará la masa de 2 kg en recorrer los 2 m que le separan del suelo, suponiendo que el sistema parte del reposo.

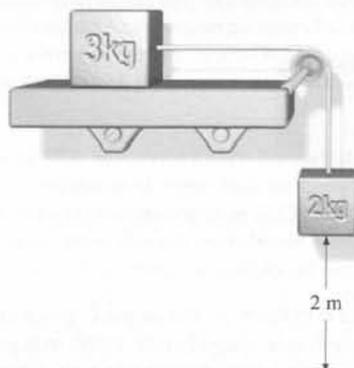


Figura 5.40 Problema 33

**34** ●● Un bloque en un plano horizontal tiene una velocidad inicial  $v$ . Si se mueve en dirección horizontal, recorre una distancia  $d$  antes de pararse. Demostrar que el coeficiente de rozamiento cinético viene dado por  $\mu_c = v^2/2gd$ .

**35** ●● SSM Un bloque de masa  $m_1 = 250$  g se encuentra en reposo sobre un plano que forma un ángulo  $\theta = 30^\circ$  sobre la horizontal (figura 5.41). El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es  $\mu_c = 0,100$ . Este bloque está unido a un segundo bloque de masa  $m_2 = 200$  g que cuelga libremente de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento y con masa despreciable. Cuando el segundo bloque ha caído 30 cm, su velocidad es (a) 83 cm/s. (b) 48 cm/s. (c) 160 cm/s. (d) 59 cm/s. (e) 72 cm/s.

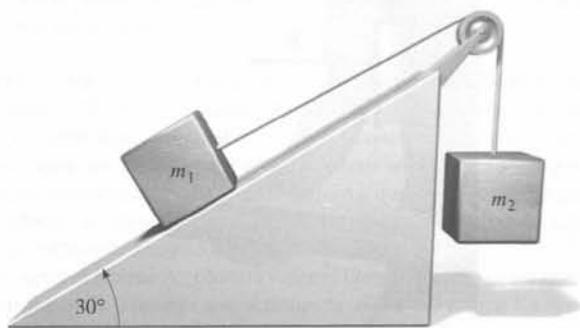


Figura 5.41 Problemas 35-37

**36** ●● Supongamos ahora que en la figura 5.41,  $m_1 = 4$  kg. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano inclinado es 0,4. (a) Determinar el intervalo de valores posibles para  $m_2$  de modo que el sistema se encuentre en equilibrio estático. (b) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento sobre el bloque de 4 kg si  $m_1 = 1$  kg?

**37** ●● Volviendo a la figura 5.41, supongamos que  $m_1 = 4$  kg,  $m_2 = 5$  kg y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el plano inclinado y el bloque de 4 kg es  $\mu_c = 0,24$ . Determinar la aceleración de las masas y la tensión de la cuerda.

**38** ●● SSM **SOLVE** El coeficiente de rozamiento estático entre el suelo de un camión y un cajón que reposa sobre él es 0,30. El camión circula a 80 km/h a lo largo de una carretera horizontal. ¿Cuál será la mínima distancia de parada del camión para que el cajón no deslice?

**39** ●● Una masa de 4,5 kg con una velocidad inicial de 14 m/s comienza a ascender por un plano inclinado  $37^\circ$  con la horizontal. Cuando su desplazamiento es de 8,0 m, su velocidad ascendente ha disminuido a 5,2 m/s. Determinar (a) el coeficiente de rozamiento cinético entre la masa y el plano, (b) el desplazamiento de la masa desde su punto de partida al momento en que alcanza momentáneamente el reposo y (c) la velocidad del bloque cuando alcanza de nuevo su posición inicial.

**40** ●● Un automóvil asciende por una carretera de pendiente  $15^\circ$  a una velocidad de 30 m/s. El coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la carretera es 0,7. (a) ¿Qué distancia mínima recorrerá el coche antes de pararse? (b) ¿Qué distancia mínima recorrerá si descendiera por la misma pendiente?

**41** ●● Un coche de tracción trasera soporta un 40% de su peso sobre sus dos ruedas de tracción y posee un coeficiente de rozamiento estático de 0,7 con una carretera horizontal. (a) ¿Cuál es la aceleración máxima del vehículo? (b) ¿Cuál es el tiempo más corto posible para que este coche alcance una velocidad de 100 km/h? (Suponer que la potencia del motor es ilimitada.)

**42** ●● SSM Un estudiante, A, afirma que él puede colocar un bloque de 2 kg sobre el lado exterior de una vagoneta, como indica la figura 5.42, y que el bloque no caerá al suelo, comprometiéndose a no utilizar ningún tipo de ganchos, cuerdas, grapas, imanes, pegamentos, adhesivos, etc. Cuando otro

estudiante, B, acepta la apuesta, el primero empuja la vagoneta en la dirección indicada. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la vagoneta es 0,6. (a) Determinar la aceleración mínima para que A gane la apuesta. (b) ¿Cuál es el módulo de la fuerza de rozamiento en este caso? (c) Determinar la fuerza de rozamiento sobre el bloque si  $a$  es dos veces la aceleración mínima necesaria para que el bloque no caiga. (d) Demostrar que un bloque de cualquier masa no caerá si la aceleración es  $a \geq g/\mu_e$ , siendo  $\mu_e$  el coeficiente de rozamiento estático.

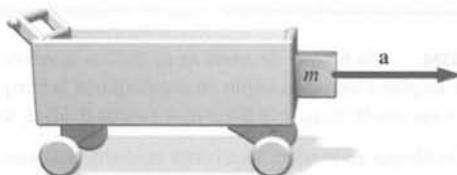


Figura 5.42 Problema 42

**43** ●● **SOLVE** Dos bloques atados por una cuerda se deslizan hacia abajo por una pendiente de  $10^\circ$  (figura 5.43). El bloque inferior tiene una masa de  $m_2 = 0,25$  kg y un coeficiente de rozamiento cinético  $\mu_c = 0,2$ . Para el bloque superior,  $m_1 = 0,8$  kg y  $\mu_c = 0,3$ . Determinar (a) el módulo y dirección de la aceleración de los bloques y (b) la tensión de la cuerda.

**44** ●● SSM Al igual que en el problema 43, dos bloques de masa  $m_1$  y  $m_2$  resbalan por el plano inclinado de la figura 5.43. Están unidos por una barra sin masa. La barra se comporta igual que una cuerda excepto que la fuerza que ejerce puede ser tanto de compresión como de tensión. El coeficiente de rozamiento cinético del bloque 1 es  $\mu_1$  y el del bloque 2 es  $\mu_2$ . (a) Determinar la aceleración de los dos bloques. (b) Determinar la fuerza que ejerce la barra sobre los dos bloques. Demostrar que la fuerza es cero cuando  $\mu_1 = \mu_2$  y encontrar un argumento no matemático sencillo que justifique por qué es cierto.

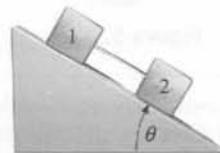


Figura 5.43 Problema 43 y 44

**45** ●● Dos bloques atados por una cuerda están en reposo sobre un plano inclinado. El bloque inferior tiene una masa de  $m_1 = 0,2$  kg y un coeficiente de rozamiento estático  $\mu_e = 0,4$ . El bloque superior tiene una masa de  $m_2 = 0,1$  kg y  $\mu_e = 0,6$ . Se va aumentando  $\theta$  poco a poco. (a) ¿Para qué ángulo  $\theta_c$  comienzan los bloques a deslizarse? (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda justo antes de que comience el deslizamiento?

**46** ●● Dos bloques conectados por una barra rígida, de masa despreciable, deslizan sobre una superficie inclinada  $20^\circ$ . El bloque inferior tiene una masa  $m_1 = 1,2$  kg, y el bloque superior  $m_2 = 0,75$  kg. (a) Si los coeficientes de rozamiento cinético son  $\mu_c = 0,3$  para el bloque inferior y  $\mu_c = 0,2$  para el bloque superior, ¿cuál es la aceleración de los bloques? (b) Determinar la fuerza transmitida por la barra a cada bloque.

**47** ●● SSM Un bloque de masa  $m$  descansa sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento estático es 0,6. El bloque está sometido a la fuerza  $F$  que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal mediante una cuerda de masa despreciable, como indica la figura 5.44. El valor mínimo de la fuerza necesaria para mover el bloque depende del ángulo  $\theta$ . (a) Analizar cualitativamente en qué forma esta fuerza depende de  $\theta$ . (b) Calcular la fuerza para los ángulos  $\theta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$  y  $60^\circ$  y hacer un gráfico de  $F$  en función

de  $\theta$  para  $mg = 400$  N. Según este gráfico, ¿cuál es el ángulo más eficaz que debe formar la dirección de la fuerza para mover el bloque?

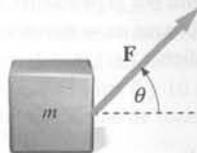


Figura 5.44 Problema 47

48 ●● Un bloque de masa  $m$  está sobre una superficie horizontal con un coeficiente estático de rozamiento con esa superficie  $\mu_e$  (utilizar el mismo dibujo del problema 47). Demostrar que, en general (a) la fuerza mínima para mover el bloque hay que aplicarla tirando con un ángulo  $\theta_{\min} = \arctg \mu_e$ , y (b) la fuerza mínima necesaria para que el bloque empiece a moverse es  $F_{\min} = (\mu_e / \sqrt{1 + \mu_e^2}) mg$ . (c) Si el bloque ya se mueve, ¿qué hay que hacer para aplicar la mínima fuerza posible y que sea suficiente para mantener el movimiento, aumentar, disminuir o mantener el ángulo que forma la fuerza con la horizontal?

49 ●● Responder a las mismas cuestiones que plantea el problema 48, pero suponer que la fuerza  $F$  está dirigida hacia abajo formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal como indica la figura 5.45.

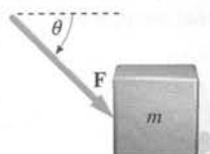


Figura 5.45 Problema 49

50 ●● Una masa de 100 kg es empujada a lo largo de una superficie sin rozamiento por una fuerza  $F$  de tal modo que su aceleración es  $a_1 = 6$  m/s<sup>2</sup> (véase figura 5.46). Una masa de 20 kg se desliza por la parte superior de la masa de 100 kg con una aceleración  $a_2 = 4$  m/s<sup>2</sup>. (Por lo tanto, se desliza hacia atrás respecto a la masa de 100 kg.) (a) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida por la masa de 100 kg sobre la masa de 20 kg? (b) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre la masa de 100 kg? ¿Cuánto vale la fuerza  $F$ ? (c) Una vez que la masa de 20 kg se ha caído de la masa de 100 kg, ¿cuál es la aceleración que adquiere esta última? (Suponer que la fuerza  $F$  no cambia.)

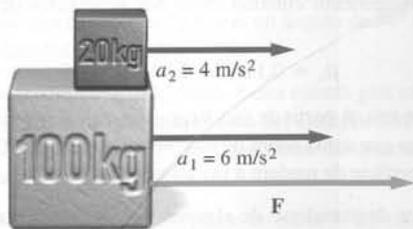


Figura 5.46 Problema 50

51 ●● **¡SOLVE!** Un bloque de 60 kg se desliza por la parte superior de otro bloque de 100 kg con una aceleración de 3 m/s<sup>2</sup> por la acción de una fuerza horizontal  $F$  de 320 N, como indica la figura 5.47. El bloque de 100 kg se apoya sobre una superficie horizontal sin rozamiento, pero hay rozamiento entre los dos bloques. (a) Determinar el coeficiente de rozamiento cinético entre los bloques. (b) Determinar la aceleración del bloque de 100 kg durante el tiempo en que el bloque de 60 kg mantiene el contacto.



Figura 5.47 Problema 51

52 ●● **SSM** **¡SOLVE!** El coeficiente de rozamiento estático entre un neumático de caucho y la superficie de la carretera es 0,85. ¿Cuál es la máxima aceleración de un camión de 1000 kg con tracción en las cuatro ruedas, si la carretera forma un ángulo de 12° con la horizontal y el camión está (a) subiendo y (b) descendiendo?

53 ●● Un bloque de 2 kg está situado sobre otro de 4 kg, que a su vez se apoya sobre una mesa sin rozamiento (figura 5.48). Los coeficientes de rozamiento entre los dos bloques son  $\mu_e = 0,3$  y  $\mu_c = 0,2$ . (a) ¿Cuál es la fuerza máxima  $F$  que puede aplicarse al bloque de 4 kg de tal modo que el bloque de 2 kg no deslice? (b) Si  $F$  es la mitad de este valor máximo, determinar la aceleración de cada bloque y la fuerza de rozamiento que actúa sobre cada uno de ellos. (c) Si  $F$  es el doble de este valor determinado en (a), calcular la aceleración de cada bloque.

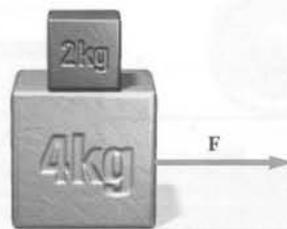


Figura 5.48 Problema 53

54 ●● En la figura 5.49 la masa  $m_2 = 10$  kg se desliza sobre una plataforma sin rozamiento. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre  $m_2$  y la masa  $m_1 = 5$  kg son respectivamente  $\mu_e = 0,6$  y  $\mu_c = 0,4$ . (a) ¿Cuál es la aceleración máxima de  $m_1$ ? (b) ¿Cuál es el valor máximo de  $m_3$  si  $m_1$  se mueve con  $m_2$  sin deslizamiento? (c) Si  $m_3 = 30$  kg, determinar la aceleración de cada masa y la tensión de la cuerda.

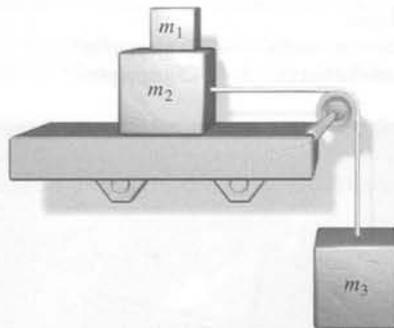


Figura 5.49 Problema 54

55 ● Mediante un contrapeso que cuelga de una polea se intenta subir un bloque de piedra arenisca por una pendiente, tal como se muestra en la figura 5.50. La masa del bloque de piedra es 1600 kg y la del contrapeso 550 kg. El coeficiente de rozamiento cinético del bloque respecto la rampa de 10° de inclinación es 0,15. (a) ¿Cuál es la aceleración del bloque de piedra arenisca cuando

sube por la rampa? (b) Tres segundos después de que el bloque haya comenzado a subir, se rompe la cuerda que lo une al contrapeso. ¿Qué distancia recorrerá el bloque de piedra antes de pararse? (c) Desafortunadamente, el bloque de piedra resbala hacia abajo por la pendiente de la rampa. ¿Con qué aceleración desciende por la rampa?

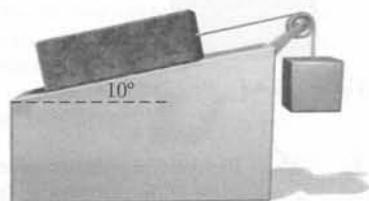


Figura 5.50 Problema 55

**56** ●●● **¡SOLVE** Un bloque de 10 kg descansa sobre un soporte de 5 kg como se muestra en la figura 5.51. Los coeficientes de rozamiento entre el bloque y el soporte son  $\mu_e = 0,40$  y  $\mu_c = 0,30$ . El soporte se apoya sobre una superficie sin rozamiento. (a) ¿Cuál es la fuerza máxima  $F$  que puede aplicarse sin que el bloque de 10 kg deslice sobre el soporte? (b) ¿Cuál es la aceleración correspondiente del soporte?

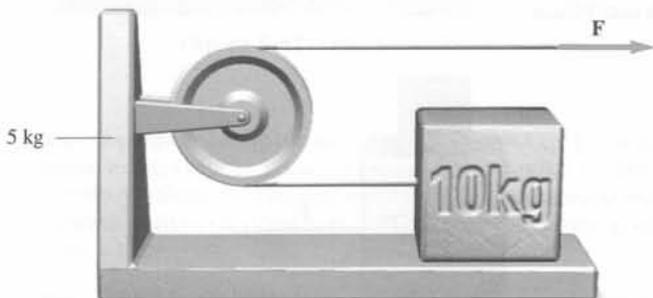


Figura 5.51 Problema 56

**57** ●● **SSM** En una clase de introducción a la física en el planeta Vulcano, se realizan diversos experimentos relacionados con el rozamiento. En uno de estos experimentos, se mide la aceleración de un bloque cuando sube o cuando baja por la pendiente de un plano inclinado como el que se muestra en la figura 5.52. Se anotan en una libreta los resultados de los experimentos que dan los resultados siguientes (el signo menos indica que la aceleración va hacia abajo del plano inclinado):

Aceleración del bloque	
hacia arriba del plano inclinado	$-1,73 \text{ glapp/plip}^2$
hacia abajo del plano inclinado	$-1,42 \text{ glapp/plip}^2$

No encuentra ninguna forma de convertir las unidades al sistema internacional. A partir de estos datos, determinar la aceleración de la gravedad en Vulcano en ( $\text{glapp/plip}^2$ ) y el coeficiente de rozamiento cinética entre el bloque y el plano.



Figura 5.52 Problema 57

**58** ●● **SSM** Un bloque de 100 kg en un plano inclinado  $18^\circ$  está atado a otro de masa  $m$  con una cuerda, tal como se muestra en la figura 5.53.

Los coeficientes de rozamiento estático y cinético del bloque y del plano son respectivamente 0,4 y 0,2. (a) Determinar el intervalo de valores de  $m$  para el cual el bloque del plano inclinado no se moverá a menos que sea perturbado por un golpe, en cuyo caso *bajar*á por la pendiente. (b) Determinar el intervalo de valores de  $m$  para el cual el bloque no se moverá a menos que sea golpeado, en cuyo caso *subir*á por la pendiente.

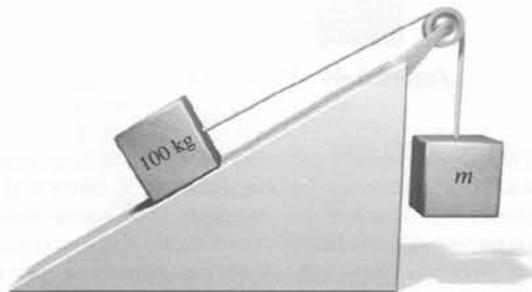


Figura 5.53 Problema 58

**59** ●●● **¡SOLVE** ✓ Un bloque de 0,5 kg de masa descansa sobre la superficie inclinada de una cuña de 2 kg como la que se muestra en la figura 5.54. Se ejerce una fuerza horizontal  $F$  sobre la cuña de modo que ésta resbala sobre una superficie sin rozamiento. (a) Si el coeficiente de rozamiento estático entre la cuña y el bloque es  $\mu_e = 0,8$  y el ángulo de la superficie inclinada es  $35^\circ$ , determinar los valores máximo y mínimo de  $F$  para los cuales el bloque no resbala. (b) Repetir el apartado (a) con  $\mu_e = 0,4$ .

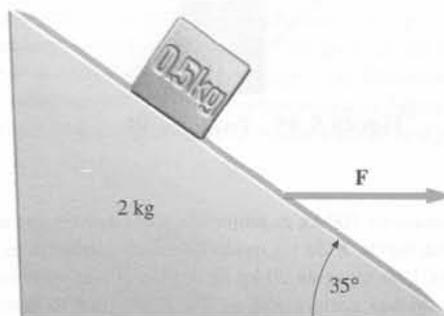


Figura 5.54 Problema 59

**60** ● En realidad, el coeficiente de rozamiento cinético entre dos superficies no es independiente de la velocidad relativa de los dos objetos en contacto. De hecho, tiende a disminuir ligeramente a medida que la velocidad relativa aumenta. Por ejemplo, mediante una serie de experimentos se vio que el coeficiente de rozamiento cinético entre dos superficies de madera puede escribirse como

$$\mu_c = 0,11 / (1 + 2,3 \times 10^{-4} v^2)$$

donde  $v$  se mide en m/s. A partir de esta expresión, calcular cuál es la fuerza de rozamiento cinético que actúa sobre un bloque de madera de 100 kg cuando se mueve por una superficie de madera a (a) 10 m/s, (b) 20 m/s.

**61** ●● Parece desprenderse de algunos experimentos que el coeficiente de rozamiento cinético no es independiente de la fuerza normal que actúa sobre el objeto. Vaclav Konecny ("On the first law of friction" *American Journal of Physics*, 41 588, (1973)) realizó experimentos en bloques de madera mostrando que la fuerza de rozamiento cinético entre dos superficies de madera viene dada por la expresión  $f_c = 0,4 F_n^{0,91}$ , donde  $f_c$  es la fuerza de rozamiento y  $F_n$  es la fuerza de normal que actúa sobre el objeto (ambas fuerzas se expresan en newtons). A causa de esta relación, la aceleración de un bloque que desciende por un plano inclinado no es independiente de la masa del bloque. Usando esta fórmula, calcular la aceleración y la distancia a la que se detiene (a) un bloque de 10 kg y (b) un bloque de 100 kg que resbala por una superficie horizontal con una velocidad inicial de 10 m/s.

**62** ●●● SSM Se empuja por un suelo de madera con una fuerza horizontal constante de 70 N un bloque también de madera de 10 kg de masa, inicialmente parado. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento cinético varía con la velocidad según  $\mu_c = 0,11/(1 + 2,3 \times 10^{-4}v^2)^2$  (véase el problema 60), escriba un programa de hoja de cálculo usando el método de Euler que calcule y represente gráficamente la velocidad del bloque y su desplazamiento en función del tiempo para  $t$  comprendido entre 0 y 10 s. Compare el resultado con el que hubiera obtenido para un coeficiente de rozamiento cinético independiente de  $v$  igual a 0,11.

**63** ●● Para determinar el coeficiente de rozamiento cinético de un bloque de madera sobre la superficie de una mesa horizontal, se reciben las instrucciones siguientes: Coger el bloque y empujarlo por la superficie. Mediante un reloj, medir el tiempo que le cuesta pararse ( $\Delta t$ ) y la distancia que recorre antes de pararse ( $\Delta x$ ). (a) Demostrar que a partir de estas medidas  $\mu_c = 2\Delta x/[g(\Delta t)^2]$ . Si el bloque resbala antes de pararse 1,37 m durante 0,97 s, calcular  $\mu_c$ . (b) ¿Cuál es la velocidad inicial del bloque?

**64** ●● SSM Los datos siguientes corresponden a la aceleración de un bloque que baja por un plano inclinado en función del ángulo de inclinación<sup>1</sup>

$\theta$ (grados)	Aceleración (m/s <sup>2</sup> )
25	1,6909
27	2,1043
29	2,4064
31	2,8883
33	3,1750
35	3,4886
37	3,7812
39	4,1486
41	4,3257
43	4,7178
45	5,1056

(a) Demostrar que si se representa gráficamente  $a/\cos \theta$  en función de  $\tan \theta$  se obtiene una línea recta de pendiente  $g$  y de ordenada en el origen  $-\mu_c g$ . (b) Usando un programa de una hoja de cálculo, representar gráficamente estos datos y ajustar una línea recta de modo que se pueda determinar  $\mu_c$  y  $g$ . ¿Cuál es el porcentaje de error en  $g$  si se compara con el valor comúnmente aceptado de 9,81 m/s<sup>2</sup>?

### Movimiento a lo largo de una trayectoria curva

**65** ●● Una piedra de masa  $m = 95$  g se hace girar en un círculo horizontal en el extremo de una cuerda de 85 cm de longitud. El tiempo necesario para que la piedra dé una revolución completa es 1,22 s. El ángulo que la cuerda forma con la horizontal es: (a) 52°, (b) 46°, (c) 26°, (d) 23°, (e) 3°

**66** ●● Una piedra de 0,20 kg atada a una cuerda de 0,8 m de longitud gira en el plano horizontal. La cuerda forma un ángulo de 20° con la horizontal. Determinar la velocidad de la piedra.

**67** ●● Una piedra de 0,75 kg atada a una cuerda gira en un círculo horizontal de 35 cm como en el péndulo cónico del ejemplo 5.9. La cuerda forma un ángulo de 30° con la vertical. (a) Determinar la velocidad de la piedra. (b) Determinar la tensión de la cuerda.

**68** ●● SSM **¡SOLVE!** Un piloto de masa 50 kg sale de un rizo vertical según un arco circular tal que su aceleración hacia arriba es de 8,5g. (a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza ejercida por el asiento del piloto en la parte más baja del arco? (b) Si la velocidad del avión es de 345 km/h, ¿cuál es el radio del arco circular?

**69** ●● **¡SOLVE!** Un piloto de avión de masa 65 kg se lanza hacia abajo para describir un rizo siguiendo un arco de circunferencia cuyo radio es 300 m. En la parte inferior de la trayectoria, donde su velocidad es de 180 km/h,

(a) ¿cuáles son la dirección y el módulo de su aceleración? (b) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre el piloto en la parte más baja del círculo? (c) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el asiento sobre el piloto?

**70** ●● **¡SOLVE!** La masa  $m_1$  se mueve con velocidad  $v$  en una trayectoria circular de radio  $r$  sobre una masa horizontal sin rozamiento (figura 5.55). Está sujeta a una cuerda que pasa a través de un orificio (sin rozamiento) situado en el centro de la mesa. Una segunda masa  $m_2$  está sujeta en el otro extremo de la cuerda. Deducir una expresión para  $r$  en función de  $m_1$  y  $m_2$  y el tiempo  $T$  de una revolución.

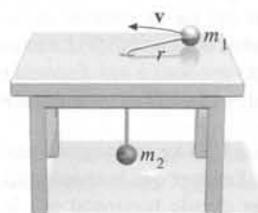


Figura 5.55 Problema 70

**71** ●● SSM Un bloque de masa  $m_1$  está sujeto a una cuerda de longitud  $L_1$  fija por un extremo. El bloque se mueve en un círculo horizontal sobre una mesa sin rozamiento. Un segundo bloque de masa  $m_2$  se une al primero mediante una cuerda de longitud  $L_2$  y se mueve también en círculo, como indica la figura 5.56. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas si el período del movimiento es  $T$ .

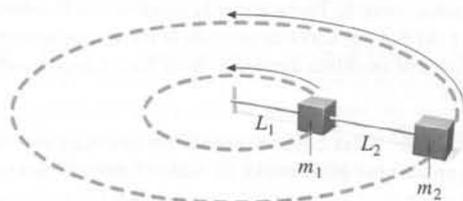


Figura 5.56 Problema 71

**72** ●● SSM Una partícula se mueve sobre una circunferencia de 4 cm de radio. Tarda 8 s en dar una vuelta completa. Dibujar la trayectoria de la partícula a escala e indicar las posiciones a intervalos de 1 s. Dibujar los vectores de desplazamiento correspondientes a estos intervalos de 1 s. Estos vectores también indican las direcciones de los vectores velocidad media durante los mismos intervalos. Hallar gráficamente el módulo de la variación de la velocidad media  $|\Delta v|$  correspondiente a dos intervalos de 1 s consecutivos. Comparar  $|\Delta v|/\Delta t$ , medida así, con la aceleración instantánea calculada a partir de  $a = v^2/r$ .

**73** ●● Un hombre hace oscilar circularmente a su hijo como indica la fotografía adjunta. Si la masa del niño es de 25 kg, el radio del círculo de 0,75 m



Figura 5.57 Problema 73

<sup>1</sup> Los datos se han tomado de Dennis W. Philips, "Science and Adventure-Part II" *The Physics Teacher*, 553 (Nov. 1990)

y el período de revolución de 1,5 s, ¿cuál es el módulo y dirección de la fuerza que debe ejercer el hombre sobre el niño? (Suponer en los cálculos que el niño es una partícula puntual.)

**74** ●● La cuerda de un péndulo cónico tiene 50 cm de longitud y la masa del cuerpo pendular es 0,25 kg. Determinar el ángulo que forman la cuerda y la horizontal cuando la tensión de la cuerda es seis veces mayor que el peso del cuerpo pendular. En estas condiciones, ¿cuál es el período del péndulo?

**75** ●● **¡SOLVE!** Una moneda de 100 g se coloca sobre una plataforma giratoria horizontal que gira a razón de una revolución por segundo. La moneda está situada a 10 cm del eje de rotación de la plataforma. (a) ¿Qué fuerza de rozamiento actúa sobre la moneda? (b) La moneda desliza y sale despedida de la plataforma cuando se coloca a una distancia radial superior a 16 cm del eje de rotación. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático?

**76** ●● Una bola de masa 0,25 kg está sujeta a una barra vertical por una cuerda de 1,2 m de longitud. Suponer que la cuerda está sujeta al centro de la bola. Si la bola se mueve en círculo horizontal con la cuerda formando un ángulo de  $20^\circ$  con la vertical, calcular (a) la tensión de la cuerda; (b) la velocidad de la bola.

**77** ●● **SSM** Un objeto situado en el ecuador tiene una aceleración dirigida hacia el centro de la Tierra debida a la rotación terrestre y una aceleración dirigida hacia el Sol debida al movimiento de la Tierra en su órbita. Calcular los módulos de ambas aceleraciones y expresarlos como fracciones de la aceleración de caída libre debida a la gravedad  $g$ .

**78** ● (a) Usando la información que aparece en este libro, calcular la fuerza neta que actúa sobre la Tierra y que la mantiene en la órbita, supuesta circular, alrededor del Sol. (b) Calcular también la fuerza que se ejerce sobre la Luna y que la mantiene en órbita alrededor de la Tierra, suponiendo también, que ésta es circular.

**79** ●● **¡SOLVE!** Una pequeña cuenta con una masa de 100 g se desliza a lo largo de un alambre semicircular de radio 10 cm que gira alrededor de un eje vertical a razón de 2 vueltas por segundo, como se indica en la figura 5.58. Determinar los valores de  $\theta$  para los cuales la cuenta permanece estacionaria respecto al alambre giratorio.

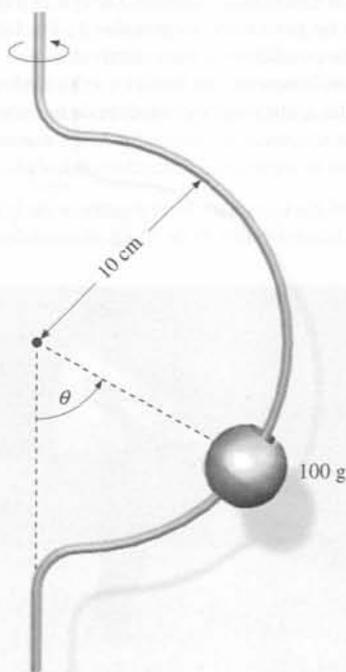


Figura 5.58 Problema 79

**80** ●●● Considerar una cuenta de masa  $m$  que puede moverse libremente sobre un alambre delgado y circular de radio  $r$ . Se da a la cuenta una velocidad inicial  $v_0$ , y el coeficiente de rozamiento cinético es  $\mu_c$ . El experimento se realiza en un vehículo espacial que se mueve por el espacio. Determinar la velocidad de la cuenta en cualquier tiempo  $t$  posterior.

**81** ●●● En el problema 80, (a) determinar la aceleración centrípeta de la cuenta. (b) Hallar la aceleración tangencial de la cuenta. (c) ¿Cuál es el módulo de la aceleración resultante?

### Concepto de fuerza centrípeta

**82** ● **SSM** Una persona está sobre un carrusel en un parque de atracciones. La vagoneta circula por la pista a velocidad constante, de modo que las fuerzas normales que ejercen los asientos son siempre hacia dentro, hacia el centro del círculo. En la parte superior de un rizo vertical, la fuerza normal ejercida por el asiento es igual al peso de la persona,  $mg$ . En la parte inferior del rizo, la fuerza ejercida por el asiento será: (a) 0, (b)  $mg$ , (c)  $2mg$ , (d)  $3mg$ , (e) mayor que  $mg$ , pero no puede calcularse el valor exacto con la información dada.

**83** ● El radio de curvatura del rizo vertical de una montaña rusa es de 12,0 m. En lo alto del rizo, la fuerza que el asiento ejerce sobre un pasajero de masa  $m$  es  $0,4mg$ . Determinar la velocidad de la vagoneta en ese punto.

**84** ● Un coche acelera a lo largo de la curva de la vía de salida de una autopista. El radio de la curva es de 80 m. Un pasajero de 70 kg se sujeta al reposabrazos de la puerta del coche con una fuerza de 200 N para no deslizarse en su asiento. (Se supone que la vía de salida no tiene peralte y se desprecia el rozamiento sobre el asiento.) ¿Cuál es la velocidad del coche? (a) 16 m/s, (b) 57 m/s, (c) 18 m/s, (d) 50 m/s, (e) 28 m/s.

**85** ●●● **SSM** Un estudiante montado en una bicicleta sobre una superficie horizontal, recorre un círculo de radio 20 m. La fuerza resultante ejercida por la carretera sobre la bicicleta (fuerza normal más fuerza de rozamiento) forma un ángulo de  $15^\circ$  con la vertical. (a) ¿Cuál es la velocidad del estudiante? (b) Si la fuerza de rozamiento es la mitad de su valor máximo, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático?

**86** ●● Un avión vuela en un círculo horizontal con una velocidad de 480 km/h. Para seguir esta trayectoria inclina las alas un ángulo de  $40^\circ$  (véase la figura 5.59). Sobre las alas se produce una fuerza ascensional que mantiene el aparato en el aire. ¿Cuál es el radio de la trayectoria del avión?

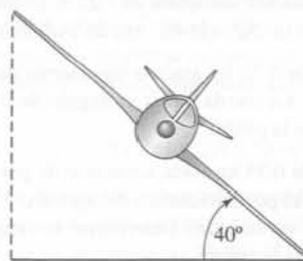


Figura 5.59 Problema 86

**87** ● **¡SOLVE!** Un coche de 750 kg toma una curva de radio 160 m a 90 km/h. ¿Cuál debe ser el ángulo de peralte de la curva para que la única fuerza entre el pavimento y los neumáticos esté en la dirección normal?

**88** ●● **SSM** Una curva de radio 150 m tiene un peralte con un ángulo de  $10^\circ$ . Un coche de 800 kg toma la curva a 85 km/h sin patinar. Determinar (a) la fuerza normal que actúa sobre los neumáticos ejercida por el pavimento, (b) la fuerza de rozamiento ejercida por el pavimento sobre los neumáticos del coche, y (c) el coeficiente de rozamiento estático mínimo entre el pavimento y los neumáticos.

89 ●● En otra ocasión el coche del problema anterior toma la curva a 38 km/h. Determinar (a) la fuerza normal ejercida por el pavimento sobre los neumáticos y (b) la fuerza de rozamiento ejercida entre el pavimento y los neumáticos.

90 ●●● SSM **¡RESOLVE!** Un ingeniero de caminos recibe la siguiente consulta. Hay que diseñar una sección curva de carretera que cumpla las siguientes condiciones: Con hielo sobre la carretera, cuando el coeficiente de rozamiento estático entre la carretera y el caucho es 0,08, un coche en reposo no debe deslizar hacia la cuneta, y un coche que circule a una velocidad inferior a 60 km/h no debe deslizar hacia el exterior de la curva. ¿Cuál debe ser el radio mínimo de curvatura de la curva y el ángulo de peralte de la carretera?

91 ●●● **¡RESOLVE!** Una carretera está peraltada de modo que un coche de 950 kg que se desplace a 40 km/h pueda tomar una curva de 30 m de radio incluso cuando la carretera esté tan helada que el coeficiente de rozamiento sea aproximadamente cero. Determinar el intervalo de velocidades a que un coche puede tomar esta curva sin patinar, si el coeficiente de rozamiento estático entre la carretera y las ruedas es de 0,3.

### Fuerzas de arrastre

92 ● Una pequeña partícula contaminante cae a tierra a través del aire en reposo con una velocidad límite de 0,3 mm/s. La partícula posee una masa de  $10^{-10}$  g y la fuerza de arrastre es de la forma  $bv$ . ¿Cuál es el valor de  $b$ ?

93 ● Una pelota de ping-pong posee una masa de 2,3 g y una velocidad límite de 9 m/s. La fuerza de arrastre es del tipo  $bv^2$ . ¿Cuál es el valor de  $b$ ?

94 ● SSM Un paracaidista de 60 kg de masa consigue descender con una velocidad constante de 90 km/h ajustando su forma de caída. (a) ¿Cuál es el módulo de la fuerza de arrastre hacia arriba sobre el paracaidista? (b) Si la fuerza de arrastre es igual a  $bv^2$ , ¿cuál es el valor de  $b$ ?

95 ●● Un automóvil de 800 kg desciende por una larga pendiente de  $6^\circ$ . La fuerza de arrastre que se opone al movimiento del coche tiene la forma  $F_a = 100 \text{ N} + (1,2 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2)v^2$ . Despreciar el rozamiento de rodadura. ¿Cuál es la velocidad límite del automóvil al descender por esta pendiente?

96 ●●● Las partículas pequeñas esféricas experimentan una fuerza de resistencia viscosa dada por la ley de Stokes,  $F_a = 6\pi\eta r v$ , en donde  $r$  es el radio de la partícula,  $v$  su velocidad y  $\eta$  la viscosidad dinámica del medio fluido donde caen las esferitas. (a) Estimar la velocidad límite de una partícula contaminante esférica de radio  $10^{-5}$  m y densidad  $2000 \text{ kg/m}^3$ . (b) Suponiendo que el aire está en reposo y que  $\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ , estimar el tiempo que esta partícula tarda en caer por una chimenea de 100 m de altura.

97 ●●● SSM Una muestra de aire que contiene partículas contaminantes del tamaño y densidad especificados en el problema 96 se toma en un tubo de ensayo de 8,0 cm de longitud. Este tubo se coloca en una centrifugadora, de modo que el punto medio del tubo de ensayo se encuentra a 12 cm del centro de la centrifugadora, la cual gira a razón de 800 revoluciones por minuto. Estimar el tiempo necesario para que prácticamente todas las partículas contaminantes se sedimenten en el fondo del tubo de ensayo y comparar este tiempo con el necesario para que una partícula contaminante caiga 8,0 cm bajo la acción de la gravedad, sometida a la fuerza de arrastre viscoso del aire.

### Método de Euler

98 ●● Desde un globo aerostático se tira una pelota de béisbol verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 35 km/h. La pelota alcanza la velocidad terminal de 150 km/h. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, use el método de Euler para estimar la

velocidad de la bola transcurridos 10 s de su lanzamiento. ¿Cuál es la incertidumbre del resultado? Si se deja caer una segunda bola, esta vez con velocidad inicial nula, ¿cuánto tiempo le cuesta alcanzar el 99% de su velocidad límite? ¿Qué distancia recorre durante este tiempo?

99 ●● SSM Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 150 km/h. Cuando cae su velocidad límite es también 150 km/h. Use el método de Euler para estimar la altura de la bola 3,5 s después del lanzamiento. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Cuánto tarda en volver al suelo? ¿El tiempo que tarda la pelota en subir es menor, igual o mayor del que tarda en bajar?

100 ●● Un bloque de 0,80 kg colocado sobre una superficie horizontal sin rozamiento mantiene comprimido 30 cm un muelle de 50 N/m de constante elástica, que se considera sin masa. El bloque se suelta y el muelle lo empuja durante 30 cm. Use el método de Euler con  $\Delta t = 0,005$  s para estimar el tiempo que tarda el muelle en empujar el bloque durante los 30 cm. ¿A qué velocidad se mueve el bloque pasado este tiempo? ¿Qué certeza se tiene sobre el valor de esta velocidad?

### Problemas generales

101 ● **¡RESOLVE!** Un bloque de 4,5 kg desliza hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo de  $28^\circ$  con la horizontal. Partiendo del reposo, el bloque se mueve una distancia de 2,4 m en 5,2 segundos. Determinar el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano.

102 ● **¡RESOLVE!** Una maqueta de avión de masa 0,4 kg está sujeta a una cuerda horizontal y vuela en un círculo horizontal de radio 5,7 m. (El peso del avión está equilibrado por la fuerza ascensional del aire sobre las alas del modelo.) El avión da 1,2 revoluciones cada 4 s. (a) Determinar la velocidad  $v$  del avión. (b) Determinar la tensión de la cuerda.

103 ●● SSM Una caja de 800 N descansa sobre una superficie plana inclinada  $30^\circ$  con la horizontal. Un estudiante de física comprueba que para evitar que la caja deslice por el plano inclinado, basta aplicar una fuerza de 200 N paralela a la superficie. (a) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre la caja y la superficie? (b) ¿Cuál es la fuerza máxima que puede aplicarse a la caja, paralelamente al plano inclinado, antes de que la caja se deslice por el mismo hacia arriba?

104 ●● La posición de una partícula viene dada por el vector  $\mathbf{r} = -10 \text{ m} \cos \omega t \mathbf{i} + 10 \text{ m} \sin \omega t \mathbf{j}$ , en donde  $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$ . (a) Demostrar que el movimiento es circular. (b) ¿Cuál es el radio del círculo? (c) ¿La partícula se mueve en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario alrededor del círculo? (d) ¿Cuál es el módulo de velocidad de la partícula? (e) ¿Cuál es el tiempo invertido en una revolución completa?

105 ●● **¡RESOLVE!** Un cajón de libros ha de subirse a un camión con la ayuda de unas planchas inclinadas  $30^\circ$ . La masa del cajón es 100 kg y el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre el cajón y las planchas es 0,5. Para esta operación varias personas empujan *horizontalmente* con una fuerza total  $F$ . Una vez que el cajón comienza a moverse, ¿qué valor debe tomar  $F$  para que el cajón siga subiendo con velocidad constante?

106 ●● Un objeto de masa 5,5 kg se deja deslizar desde el reposo hacia abajo por un plano inclinado. El plano forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal y su longitud es de 72 m. El coeficiente de rozamiento cinético entre el plano y el objeto es 0,35. La velocidad del objeto en el fondo del plano es (a) 5,3 m/s. (b) 15 m/s. (c) 24 m/s. (d) 17 m/s. (e) 11 m/s.

107 ●● SSM Un ladrillo se desliza hacia abajo por una tabla inclinada un ángulo  $\theta_0$  a velocidad constante. Si el ángulo se incrementa a  $\theta_1$ , el bloque adquiere una aceleración  $a$ . El coeficiente de rozamiento cinético es el mismo en ambos casos. Dados  $\theta_0$  y  $\theta_1$ , determinar el valor de  $a$ .

**108** ●● Sobre un objeto actúan tres fuerzas tal como se muestra en la figura 5.60. El objeto está en equilibrio estático. (a) Si  $F_1$ ,  $F_2$ , y  $F_3$  representan los módulos de las fuerzas que actúan sobre el objeto, demostrar que  $F_1/\sin \theta_{23} = F_2/\sin \theta_{31} = F_3/\sin \theta_{12}$ . (b) Demostrar que  $F_1^2 = F_2^2 + F_3^2 + 2F_2F_3 \cos \theta_{23}$ .

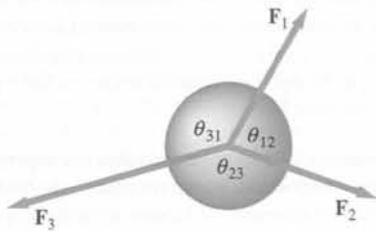


Figura 5.60 Problema 108

**109** ●● En un carrusel de feria, un pasajero se sienta en un compartimiento que gira con velocidad constante en un círculo vertical de radio  $r = 5$  m. Las cabezas de los pasajeros sentados apuntan siempre hacia el centro del círculo. (a) Si el carrusel completa un círculo en 2 s, determinar la aceleración del pasajero. (b) Determinar la velocidad más lenta de rotación (es decir, el tiempo más largo  $T_m$  para completar un círculo) del carrusel para la cual el cinturón de seguridad del asiento no ejerce fuerza alguna sobre el pasajero en la parte más alta del recorrido.

**110** ●● SSM Una carretilla de juguete se mueve sobre ruedas sin rozamiento, arrastrada por una cuerda bajo la tensión  $T$ . La masa de la carretilla es  $m_1$ . Una carga de masa  $m_2$  reposa sobre el suelo plano de la carretilla con un coeficiente de rozamiento estático  $\mu_e$ . La carretilla es arrastrada hacia arriba por una rampa que está inclinada un ángulo  $\theta$  por encima de la horizontal. La cuerda está situada paralelamente a la rampa. ¿Cuál es la máxima tensión  $T$  que puede aplicarse sin que la carga se deslice?

**111** ●● Un trineo que pesa 200 N descansa sobre un plano inclinado  $15^\circ$  y se mantiene en reposo gracias al rozamiento estático (figura 5.61). El coeficiente de rozamiento estático es 0.5. (a) ¿Cuál es el módulo de la fuerza normal sobre el trineo? (b) ¿Cuál es el módulo del rozamiento estático sobre el trineo? (c) El trineo es ahora arrastrado hacia arriba a velocidad constante por un niño. Éste pesa 500 N y tira de la cuerda con una fuerza constante de 100 N. La cuerda forma un ángulo de  $30^\circ$  con el plano inclinado y es de masa despreciable. ¿Cuál es el módulo de la fuerza de rozamiento cinético sobre el trineo? (d) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre el trineo y el plano inclinado? (e) ¿Cuál es el módulo de la fuerza ejercida sobre el niño por el plano inclinado?

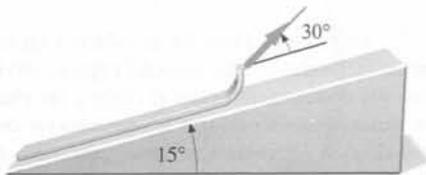


Figura 5.61 Problema 111

**112** ● En 1976, Gerard O'Neill propuso la construcción de grandes estaciones espaciales habitables situadas en órbita alrededor de la Tierra y de la Luna. Dado que permanecer en condiciones de ingravidez tiene efectos médicos adversos, propuso que las estaciones tuvieran la forma de largos cilindros que girasen alrededor de su eje, de modo que proporcionarían a sus habitantes una sensación de gravedad. Esta idea melló entre los escritores y guionistas de historias de ciencia ficción y, por ejemplo, la serie de TV *Babylon 5* contempla

una estación como la propuesta por O'Neill que tiene una longitud de 8 km y un diámetro de 1 km. A causa de la rotación, alguien que esté dentro de la colonia tendrá sensación de gravedad por el hecho de estar en un sistema de referencia acelerado. (a) Demostrar que la "aceleración de la gravedad" experimentada por un habitante hipotético de la colonia de O'Neill es igual a su aceleración centrípeta. (Pista: considere que alguien "está mirando" la colonia desde fuera) (b) Si suponemos que la estación orbital tiene varias cubiertas que están situadas a distancias distintas del eje de rotación, mostrar cómo la "aceleración de la gravedad" se hace más débil cuanto más cerca se está del eje de rotación. (c) ¿Cuántas vueltas por minuto debería dar la estación de *Babylon 5* para producir una aceleración parecida a la de la gravedad ( $9,8 \text{ m/s}^2$ ) en el punto más alejado del eje del cilindro de la estación?

**113** ●● Una niña se desliza por un tobogán inclinado  $30^\circ$  en un tiempo  $t_1$ . El coeficiente de rozamiento cinético entre ella y el tobogán es  $\mu_c$ . Un día descubre que si se sienta en un pequeño carro de ruedas sin rozamiento se desliza en el mismo tobogán en un tiempo  $t_1/2$ . Determinar  $\mu_c$ .

**114** ●● SSM La posición de una partícula de masa  $m = 0,8$  kg en función del tiempo es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = R \sin \omega t \mathbf{i} + R \cos \omega t \mathbf{j}$$

en donde  $R = 4,0$  m y  $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ . (a) Demostrar que la trayectoria seguida por esta partícula es un círculo de radio  $R$  con su centro en el origen. (b) Calcular el vector velocidad y demostrar que  $v_x/v_y = -y/x$ . (c) Determinar el vector aceleración y demostrar que su dirección es radial y su módulo  $v^2/r$ . (d) Determinar el módulo y dirección de la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

**115** ●● En un parque de atracciones, la gente se sostiene contra las paredes de un cilindro giratorio. Cuando el suelo se hunde, la fuerza de rozamiento mantiene a los participantes en contacto con la pared. Si el radio del cilindro es de 4 m, determinar el número mínimo de revoluciones por minuto necesario, si el coeficiente de rozamiento entre la espalda del participante y la pared es de 0,4.

**116** ●● **¡SOLVI** Una masa  $m_1$  situada sobre una plataforma horizontal está conectada por una cuerda delgada que pasa por una polea sin rozamiento ni masa a una masa  $m_2$  de 2,5 kg que cuelga lateralmente a una distancia de 1,5 m sobre el suelo (figura 5.62). El sistema se deja libre desde el reposo en el tiempo  $t = 0$  y la masa de 2,5 kg choca contra el suelo en el instante  $t = 0,82$  s. El sistema se sitúa de nuevo en su posición inicial, pero ahora se coloca una masa de 1,2 kg en la parte superior del bloque de masa  $m_1$ . Se libera el sistema desde el reposo y la masa de 2,5 kg choca contra el suelo 1,3 s más tarde. Determinar la masa  $m_1$  y el coeficiente de rozamiento cinético entre  $m_1$  y la plataforma.

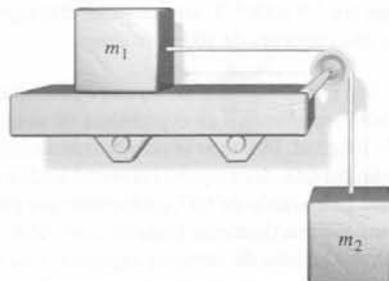


Figura 5.62 Problema 116

**117** ●● SSM (a) Demostrar que un punto de la superficie de la Tierra de latitud  $\theta$  (figura 5.63) tiene una aceleración relativa respecto a un sistema de referencia que no gira con la Tierra de valor  $3,37 \cos \theta \text{ cm/s}^2$ . ¿Cuál es la dirección y sentido de esta aceleración? (b) Estudiar la influencia de esta aceleración sobre el peso aparente de un objeto próximo a la superficie de la Tierra. (c) La aceleración de caída libre de un objeto a nivel del mar medida respecto a la

superficie de la Tierra tiene el valor  $9,78 \text{ m/s}^2$  en el ecuador y  $9,81 \text{ m/s}^2$  en latitud  $\theta = 45^\circ$ . ¿Cuáles son los valores de la aceleración de la gravedad  $g$  en estos puntos?

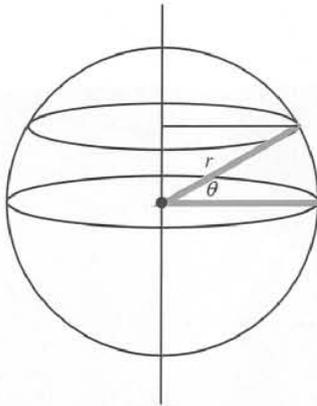


Figura 5.63 Problema 117

**118** ●●● SSM Un pequeño bloque de  $0,01 \text{ kg}$  de masa está en reposo en la cima de una esfera lisa (sin rozamiento) de  $0,8 \text{ m}$  de radio. Se le da un pequeño golpe de modo que empieza a caer por la superficie de la esfera. El bloque pierde el contacto con la esfera cuando el ángulo entre la vertical y la posición del bloque es  $\theta$ . Determinar el valor de este ángulo.



El descenso por una pendiente nevada es un divertimento o mucho trabajo, depende de cómo se interprete.

¿Sabía que, de hecho, sobre el esquiador se está realizando trabajo? (Véase el ejemplo 6.12.)

*E*l trabajo y la energía se encuentran entre los conceptos más importantes de la física, así como en nuestra vida diaria. En física, una fuerza realiza **trabajo** cuando actúa sobre un objeto que se mueve a través de una distancia y existe una componente de la fuerza a lo largo de la línea de movimiento. Si la fuerza es constante, en una sola dimensión el trabajo realizado es igual a la fuerza multiplicada por la distancia. (Esta definición difiere del concepto de trabajo en nuestro uso cotidiano. Cuando un alumno estudia en la preparación de un examen, el único trabajo que realiza desde el punto de vista de la física es el que verifica al mover su lápiz o al pasar las páginas del libro.)

Íntimamente asociado al concepto de trabajo se encuentra el concepto de **energía**. Cuando un sistema realiza trabajo sobre otro, se transfiere energía entre los dos sistemas. Por ejemplo, al empujar un columpio se realiza un trabajo y la energía química de nuestro cuerpo se transfiere al columpio y aparece en forma de energía cinética del movimiento o energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-columpio. Existen muchas formas de energía. La energía cinética está asociada al movimiento de un cuerpo. La energía potencial es energía asociada con la configuración de un sistema, tal como la distancia de separación entre dos cuerpos que se atraen. La energía térmica está asociada al movimiento aleatorio de las moléculas dentro de un sistema y está íntimamente relacionada con su temperatura.

➤ En este capítulo estudiaremos los conceptos de **trabajo, energía cinética y energía potencial**. Estos conceptos surgen de las leyes de Newton, por lo tanto, los conceptos que introduciremos en este capítulo son una continuación de los introducidos en los capítulos previos.

- 6.1 Trabajo y energía cinética
- 6.2 Producto escalar
- 6.3 Trabajo y energía en tres dimensiones
- 6.4 Energía potencial

Estos nuevos conceptos nos proporcionan métodos potentes para resolver una amplia clase de problemas. Muchos de los problemas del final de este capítulo podrían resolverse usando los conceptos y los métodos desarrollados en los capítulos previos. Sin embargo, es importante que resista la tentación de hacerlo de esta forma. Los conceptos y los métodos de este capítulo se continúan desarrollando en el capítulo 7.

## 6.1 Trabajo y energía cinética

### Movimiento en una dimensión con fuerzas constantes

El trabajo  $W$  realizado por una fuerza constante  $\mathbf{F}$  cuyo punto de aplicación se traslada una distancia  $\Delta x$ , es

$$W = F_x \Delta x = F \cos \theta \Delta x \quad (6.1)$$

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

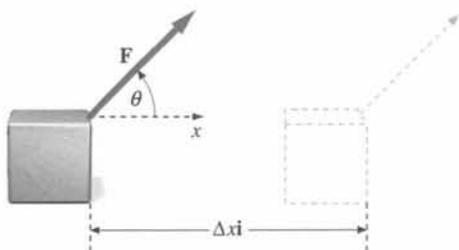


Figura 6.1

en donde  $\theta$  es el ángulo entre las direcciones de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{i}$  y  $\Delta x$  es el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza, como se indica en la figura 6.1.

El trabajo es una magnitud escalar que es positiva si  $\Delta x$  y  $F_x$  tienen signos iguales, y negativa si tienen signos opuestos. Las dimensiones del trabajo son las de una fuerza por una distancia. La unidad de trabajo y energía del SI es el **julio** (J), igual al producto de un newton por un metro:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (6.2)$$

(En el sistema habitual utilizado en los Estados Unidos la unidad de trabajo es el pie-libra:  $1 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 1,356 \text{ J}$ .) Una unidad conveniente de trabajo y energía en física atómica y nuclear es el electrón voltio (eV):

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (6.3)$$

Los múltiplos comúnmente utilizados son el keV (1000 eV) y el MeV ( $10^6$  eV). El trabajo necesario para extraer un electrón de un átomo es del orden de varios eV, mientras que el trabajo necesario para extraer un protón o un neutrón de un núcleo atómico es del orden de varios MeV.

**Ejercicio** Se ejerce una fuerza de 12 N sobre un bloque bajo un ángulo  $\theta = 20^\circ$ , como indica la figura 6.1. ¿Qué trabajo realiza la fuerza sobre el bloque, si éste se desplaza 3 m a lo largo de la mesa? (*Respuesta* 33,8 J.)

Cuando hay varias fuerzas que realizan trabajo, el trabajo total se calcula sumando el trabajo realizado por cada una de las fuerzas:

$$W_{\text{total}} = F_{1x} \Delta x_1 + F_{2x} \Delta x_2 + F_{3x} \Delta x_3 + \dots$$

Una partícula es cualquier objeto que se mueve de tal forma que todas sus partes experimentan los mismos desplazamientos durante cualquier instante de tiempo. Es decir, un objeto puede asimilarse a una partícula en tanto que todo él permanezca completamente rígido y se mueva sin girar.

Cuando varias fuerzas realizan trabajo sobre una *partícula*, los desplazamientos de los puntos de aplicación de cada una de estas fuerzas son iguales. Sea  $\Delta x$  el desplazamiento del punto de aplicación de una de las fuerzas:

$$W_{\text{total}} = F_{1x} \Delta x + F_{2x} \Delta x + \dots = (F_{1x} + F_{2x} + \dots) \Delta x = F_{\text{neta } x} \Delta x \quad (6.4)$$

Si una partícula está obligada a moverse en el eje  $x$ , la fuerza neta que experimenta únicamente tiene una componente  $x$ . Es decir,  $\mathbf{F}_{\text{neto}} = F_{\text{neto } x} \mathbf{i}$ . Por consiguiente, el trabajo total ejercido sobre una partícula puede determinarse, encontrando primero la fuerza neta y después multiplicando la fuerza neta por el desplazamiento.

### Teorema del trabajo-energía cinética

Existe una importante relación entre el trabajo neto realizado sobre una partícula y la velocidad de ésta en las posiciones inicial y final. Si  $F_{\text{neto}}$  es la fuerza neta que actúa sobre una partícula tenemos, según la segunda ley de Newton:

$$F_{\text{neto } x} = ma_x$$

Si la fuerza es constante, la aceleración es constante y el desplazamiento está relacionado con la velocidad inicial  $v_i$  y con la velocidad final  $v_f$  mediante la fórmula  $v_f^2 = v_i^2 + 2a_x \Delta x$ , válida cuando la aceleración es constante (ecuación 2.16). A partir de la expresión anterior se obtiene para  $a_x$

$$a_x = \frac{1}{2\Delta x}(v_f^2 - v_i^2)$$

Sustituyendo  $a_x$  en  $F_{\text{neto } x} = ma_x$  y multiplicando ambos miembros por  $\Delta x$  se tiene

$$F_{\text{neto } x} \Delta x = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

Reconocemos que el primer miembro es el trabajo total realizado sobre la partícula. Así

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2 \quad (6.5)$$

La magnitud  $\frac{1}{2} mv^2$  recibe el nombre de **energía cinética**  $E_c$  de la partícula:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \quad (6.6)$$

DEFINICIÓN —ENERGÍA CINÉTICA

El segundo miembro de la ecuación 6.5 representa el cambio de energía cinética experimentado por la partícula. Así,

El trabajo total realizado sobre la partícula es igual a la *variación* de energía cinética de la misma:

$$W_{\text{total}} = \Delta E_c \quad (6.7)$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA CINÉTICA

Este resultado se conoce con el nombre de **teorema trabajo-energía cinética**. Aquí sólo lo hemos deducido para una fuerza neta constante. Sin embargo, como veremos más adelante, este teorema es válido incluso cuando la fuerza neta varía y el movimiento no es en línea recta.

**Ejercicio** Una muchacha de masa 50 kg corre con una velocidad de 3,5 m/s. ¿Cuál es su energía cinética? (*Respuesta* 306 J.)

### EJEMPLO 6.1 | La grúa que carga

Un camión de masa 3000 kg se carga en un buque mediante una grúa que ejerce una fuerza ascendente de 31 kN sobre el camión. Esta fuerza, que es suficientemente grande para vencer la fuerza de la gravedad y empezar a levantar el camión, se aplica a lo largo de una distancia de 2 m. Determinar (a) el trabajo realizado por la grúa, (b) el trabajo realizado por la gravedad, y (c) la velocidad ascendente del camión después de haber subido 2 m.

**Planteamiento del problema** Hacer un dibujo esquemático del camión en sus posiciones final e inicial, eligiendo como dirección positiva de  $y$  la dirección del desplazamiento (figura 6.2). Use el teorema trabajo-energía cinética para determinar la energía cinética final del camión. La velocidad final del camión se puede obtener a partir de la energía cinética final. El trabajo total es la suma de (a) y (b).

(a) Calcular el trabajo realizado por la fuerza aplicada:

$$\begin{aligned} W_{ap} &= F_{ap,y} \Delta y = F_{ap} \cos 0^\circ \Delta y \\ &= (31 \text{ kN})(1)(2 \text{ m}) = \boxed{62,0 \text{ kJ}} \end{aligned}$$

(b) Calcular el trabajo realizado por la gravedad:

$$\begin{aligned} W_g &= mg_y \Delta y = mg \cos 180^\circ \Delta y \\ &= (3000 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})(-1)(2 \text{ m}) \\ &= \boxed{-58,9 \text{ kJ}} \end{aligned}$$

(c) Aplicar el teorema trabajo-energía cinética y obtener  $v_f$

$$\begin{aligned} W_{total} &= \Delta E_c \\ W_{ap} + W_g &= E_{c_f} - E_{c_i} \\ &= \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2 \\ v_f^2 &= v_i^2 + \frac{2(W_{ap} + W_g)}{m} \\ &= 0 + \frac{2(62,000 \text{ J} - 58,900 \text{ J})}{3000 \text{ kg}} \\ &= 2,09 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ v_f &= \boxed{1,45 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

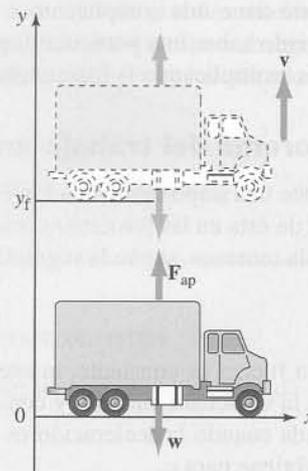


Figura 6.2

**Observación** Para el cálculo del trabajo realizado hemos tratado por separado cada una de las fuerzas. También podríamos obtener el trabajo total sumando primero las fuerzas para obtener la fuerza neta, y aplicando después la expresión  $W_{total} = F_{neta} \Delta y$ . En cualquier caso, el teorema trabajo-energía cinética sólo es válido para el trabajo total.

**Ejercicio** Determinar la velocidad final del camión si la misma fuerza ascendente se aplica durante 2 m después de haber alcanzado una velocidad ascendente de 1 m/s. (Respuesta 1,73 m/s. Obsérvese que la respuesta no es 1,4 m/s + 1 m/s. ¿Por qué?)

## EJEMPLO 6.2 | La fuerza sobre un electrón

En un tubo de televisión se acelera un electrón desde el reposo hasta una energía cinética de 2,5 keV a lo largo de una distancia de 80 cm. (La fuerza que acelera el electrón es una fuerza eléctrica debida al campo eléctrico que se genera en el tubo.) Determinar la fuerza que actúa sobre el electrón suponiendo que es constante y tiene la dirección del movimiento.

**Planteamiento del problema** Como el electrón parte del reposo, el trabajo realizado es igual a la energía cinética final.

El trabajo realizado es igual al cambio de la energía cinética. Dado que se conoce el valor de la energía cinética inicial y final, calcular la fuerza:

$$\begin{aligned} W_{total} &= \Delta E_c \\ F_x \Delta x &= E_{c_f} - E_{c_i} \\ F_x &= \frac{E_{c_f} - E_{c_i}}{\Delta x} \\ &= \frac{2500 \text{ eV} - 0}{0,8 \text{ m}} \times \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \\ &= \boxed{5,0 \times 10^{-16} \text{ N}} \end{aligned}$$

**Observación** Al tratar la electricidad veremos que el trabajo realizado por unidad de carga eléctrica se denomina diferencia de potencial y se mide en voltios. Así, 1 eV es la energía adquirida o perdida por una partícula de carga  $e$  (por ejemplo, un electrón o un protón) cuando su diferencia de potencial varía en 1 V.

## EJEMPLO 6.3 | Una carrera de trineos

Durante sus vacaciones de invierno un profesor participa en una carrera de trineos tirados por perros en un lago helado. Para iniciar la carrera tira de su trineo (masa total 80 kg) con una fuerza de 180 N que forma un ángulo de  $20^\circ$  con la horizontal. Determinar (a) el trabajo realizado y (b) la velocidad final del trineo después de un recorrido  $\Delta x = 5$  m, suponiendo que parte del reposo y que no existe rozamiento.

**Planteamiento del problema** El trabajo realizado por el profesor es  $F_x \Delta x$ , donde elegimos la dirección del desplazamiento como dirección positiva de  $x$ . Éste es también el trabajo *total* realizado sobre el trineo, ya que las otras fuerzas,  $mg$  y  $F_n$  no tienen componentes  $x$  (figura 6.3). La velocidad final del trineo se determina aplicando el teorema trabajo-energía cinética al trineo.

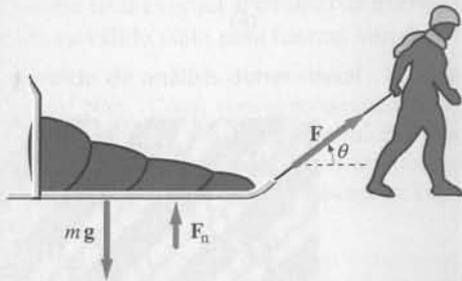


Figura 6.3

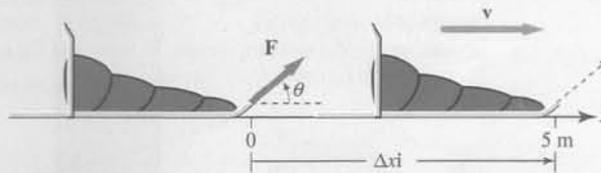


Figura 6.4

- (a) 1. Hacer un esquema del trineo en su posición inicial y en su posición después de que se ha movido 5 m. Dibujar el eje  $x$  en la dirección del movimiento (figura 6.4)
2. El trabajo realizado por el profesor sobre el trineo es  $F_x \Delta x$ . (También es el trabajo total realizado en el trineo, ya que las otras fuerzas que actúan lo hacen en la dirección perpendicular al movimiento):
- (b) Aplicar el teorema trabajo-energía cinética y resolver despejando la velocidad final:

$$W = F_x \Delta x = F \cos \theta \Delta x$$

$$= (180 \text{ N})(\cos 20^\circ)(5 \text{ m}) = \boxed{846 \text{ J}}$$

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2W_{\text{total}}}{m}$$

$$= 0 + \frac{2(846 \text{ J})}{80 \text{ kg}}$$

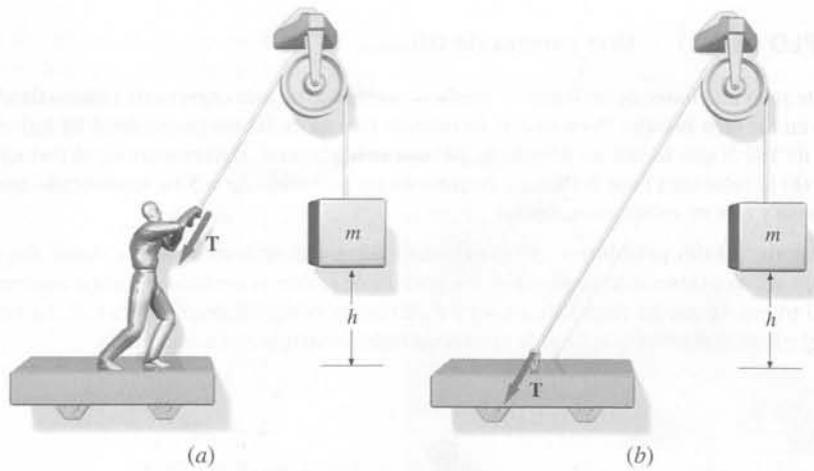
$$= 21,1 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = \boxed{4,60 \text{ m/s}}$$

**Observación** No es necesario elaborar detalladamente las unidades. Si tenemos una ecuación escrita correctamente y todas las magnitudes están expresadas en unidades del SI, el resultado vendrá dado en unidades del SI correctas. Sin embargo, como comprobación de la ecuación podemos demostrar que  $1 \text{ J/kg} = 1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . En efecto,  $1 \text{ J/kg} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{kg} = 1 (\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2)\cdot\text{m}/\text{kg} = 1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ .

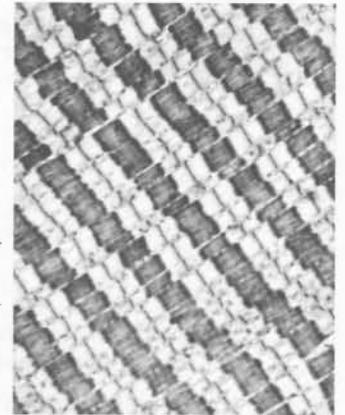
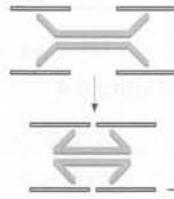
**Ejercicio** ¿Cuál será el módulo de la fuerza que deberá ejercer el profesor si el trineo parte con una velocidad de 2 m/s y su velocidad final es de 4,5 m/s después de recorrer una distancia de 5 m? (Respuesta 138 N.)

¿Qué ocurre si una persona sostiene un peso en una posición fija? Consume energía, pero, ¿realiza trabajo? De acuerdo con la definición de trabajo, la persona no realiza trabajo *sobre el peso*, porque éste no se mueve (figura 6.5). Sin embargo, sus músculos se contraen y se relajan continuamente mientras se sostiene el peso. En este proceso, la energía química interna del cuerpo de la persona se convierte en energía térmica (figura 6.6).



**Figura 6.5** (a) El hombre que sostiene el peso en una posición fija no realiza ningún trabajo. (b) La misma tarea puede realizarse atando la cuerda a un punto fijo.

En el músculo activo, las moléculas se comportan como "máquinas" moleculares.

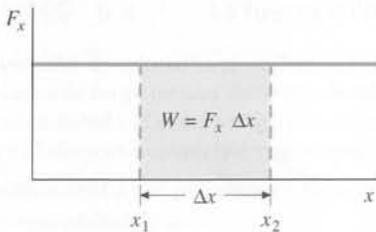


Millones de estos sucesos, que tienen lugar simultáneamente, se combinan para producir la acción muscular.

**Figura 6.6** Trabajo muscular. Aunque el hombre que sostiene el peso en la figura 6.5 no haga trabajo sobre éste, su cuerpo consume energía a nivel molecular, ya que ciertas estructuras del músculo se deslizan entre ellas durante la extensión y la contracción muscular.

### Trabajo realizado por una fuerza variable

En la figura 6.7 se representa una fuerza constante  $F_x$  en función de la posición  $x$ . El trabajo realizado sobre una partícula cuyo desplazamiento es  $\Delta x$  viene representado por el área comprendida bajo la curva fuerza en función de la posición, indicada por el sombreado de la figura 6.7.



**Figura 6.7** El trabajo realizado por una fuerza constante viene representado gráficamente por el área comprendida bajo la curva correspondiente,  $F_x$  en función de  $x$ .

Muchas fuerzas varían con la distancia. Por ejemplo, un muelle ejerce una fuerza proporcional a la distancia si se estira o se comprime. La fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre un vehículo espacial varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia que separa los dos cuerpos. Es posible (figura 6.8) aproximar una fuerza variable por una serie de fuerzas constantes. El trabajo realizado por una fuerza variable será, por lo tanto:

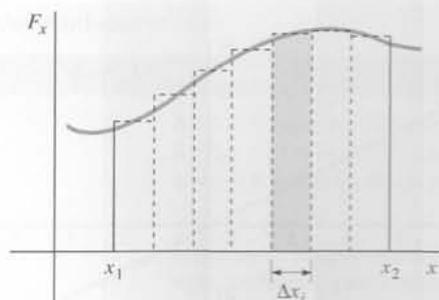
$$W = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i F_x \Delta x_i = \text{área bajo la curva de } F_x \text{ en función de } x \quad (6.8)$$

Este límite es la integral de  $F_x dx$ . Así, el trabajo realizado por una fuerza variable  $F_x$  que actúa sobre una partícula cuando ésta se desplaza de  $x_1$  a  $x_2$  es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \text{área bajo la curva de } F_x \text{ en función de } x \quad (6.9)$$

TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE

En cada intervalo de desplazamiento  $\Delta x_i$ , la fuerza es esencialmente constante. Por este motivo, el trabajo realizado es igual al área del rectángulo de altura  $F_{x_i}$  y anchura  $\Delta x_i$ . Como se demostró anteriormente en la sección 6.1, este trabajo es igual al cambio de la energía cinética en este intervalo de desplazamiento (si la fuerza es la fuerza neta). El trabajo total es



**Figura 6.8** Una fuerza variable puede aproximarse mediante una serie de fuerzas constantes en intervalos pequeños. El trabajo realizado por una fuerza constante en cada intervalo es el área del rectángulo bajo la curva de esta fuerza. La suma de estas áreas rectangulares es la suma del trabajo realizado por la serie de fuerzas constantes que aproxima la fuerza variable. En el límite de  $\Delta x_i$  infinitesimalmente pequeño, la suma de las áreas de los rectángulos es igual al área comprendida bajo la curva completa.

la suma de las áreas para todos los intervalos de desplazamiento. De aquí se deduce que el trabajo total es igual al cambio de energía cinética del desplazamiento completo. Así,  $W_{\text{total}} = \Delta E_c$  es válido tanto para fuerzas variables como para fuerzas constantes.

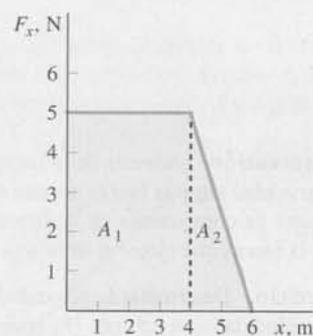
**Ejercicio de análisis dimensional** Un muelle se caracteriza por su constante de fuerza  $k$ , de dimensiones<sup>1</sup> N/m. ¿Cómo varía el trabajo necesario para estirar un muelle una distancia  $x_0$  en función de  $k$  y  $x_0$ ? (Respuesta Como el trabajo tiene dimensiones de N · m, debe depender de  $k$  y  $x_0$  según la combinación de  $kx_0^2$ . En el ejemplo 6.5 veremos que la expresión real es  $W = \frac{1}{2} kx_0^2$ . El factor  $\frac{1}{2}$  se debe a que la fuerza varía desde 0 a un valor máximo de  $kx_0$ , y por lo tanto, su valor medio<sup>2</sup> es  $\frac{1}{2} kx_0$ .)

#### EJEMPLO 6.4 | Trabajo realizado sobre una partícula

Una fuerza  $F_x$  varía en función de  $x$  como se indica en la figura 6.9. Determinar el trabajo realizado por la fuerza cuando actúa sobre una partícula que se mueve de  $x = 0$  a  $x = 6$  m.

**Planteamiento del problema** El trabajo es el área bajo una curva. Dado que la curva de la figura está formada por tramos rectos, la aproximación más directa para el cálculo del área es usar fórmulas geométricas. (Otra forma alternativa es integrar, como se hace en el ejemplo 6.5.)

1. El trabajo se determina calculando el área bajo la curva  $F_x$  en función de  $x$ :  $W = A_{\text{total}}$
2. Esta área es la suma de las dos áreas indicadas. El área de un triángulo se calcula multiplicando la base por la mitad de la altura:  $W = A_{\text{total}} = A_1 + A_2$   
 $= (5 \text{ N})(4 \text{ m}) + \frac{1}{2}(5 \text{ N})(2 \text{ m})$   
 $= 20 \text{ J} + 5 \text{ J} = \boxed{25 \text{ J}}$



**Figura 6.9**



**Ejercicio** La fuerza indicada es la única fuerza que actúa sobre una partícula de masa 3 kg. Si la partícula parte del reposo en  $x = 0$ , ¿a qué velocidad se mueve cuando alcanza el valor  $x = 6$  m? (Respuesta 4,08 m/s.)

#### EJEMPLO 6.5 | Trabajo de un muelle realizado sobre un bloque

Un bloque de 4 kg apoyado sobre una mesa sin rozamiento está sujeto a un muelle horizontal que obedece la ley de Hooke y ejerce una fuerza  $F = -kx$ , en donde  $x$  se mide desde la posición de equilibrio del bloque y  $k = 400$  N/m. El muelle está originalmente comprimido con el bloque en la posición  $x_1 = -5$  cm (figura 6.10). Calcular (a) el trabajo realizado por el muelle cuando el bloque se desplaza desde  $x_1 = -5$  cm hasta su posición de equilibrio  $x_2 = 0$  y (b) la velocidad del bloque en la posición  $x_2 = 0$ .

**Planteamiento del problema** Hacer un gráfico de  $F_x$  en función de  $x$ . El trabajo realizado sobre el bloque cuando éste se desplaza de  $x_1$  a  $x_2 = 0$  es igual al área bajo la curva de  $F_x$  en función de  $x$  entre estos límites (área sombreada en la figura 6.11), que puede calcularse integrando la fuerza sobre esta distancia. El trabajo realizado es igual a la variación de energía cinética, que coincide con la energía cinética final, ya que el valor inicial de esta magnitud es cero. La velocidad del bloque en el punto  $x = 0$  puede calcularse a partir de la energía cinética del bloque.

<sup>1</sup> Las unidades de  $k$  del SI son N/m, pero sus dimensiones son  $[M][T]^{-2}$ .

<sup>2</sup> Aquí no se trata de una media respecto del tiempo, sino de una media respecto de la distancia.

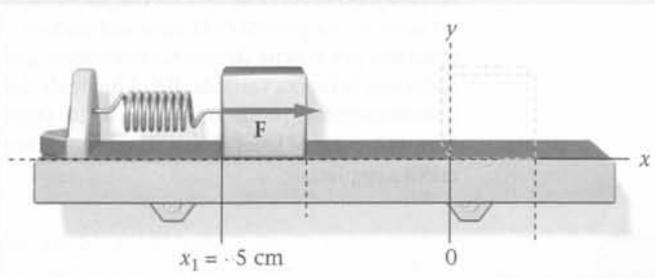


Figura 6.10

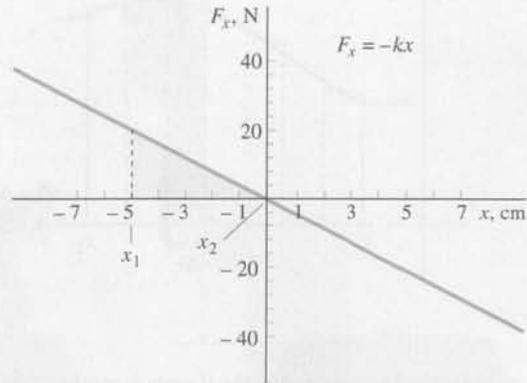


Figura 6.11

- (a) El trabajo  $W$  realizado por el muelle sobre el bloque es la integral de  $F_x dx$  desde  $x_1 = -5$  cm a  $x_2 = 0$ :

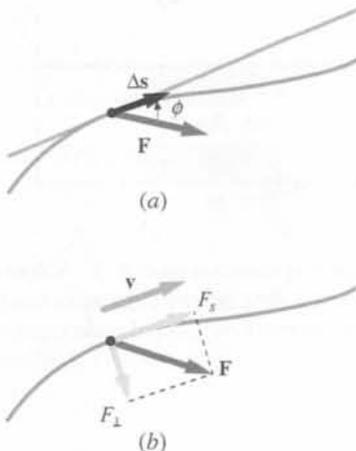
$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= -\frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} (400 \text{ N/m})(0,05 \text{ m})^2 = \boxed{0,500 \text{ J}} \end{aligned}$$

- (b) Aplicando el teorema trabajo-energía cinética y despejando  $v_2$ :

$$\begin{aligned} W_{\text{total}} &= \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \\ v_2^2 &= v_1^2 + \frac{2W_{\text{total}}}{m} = 0 + \frac{2(0,500 \text{ J})}{4 \text{ kg}} \\ &= 0,250 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ v_2 &= \boxed{0,500 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

**Observación** Además de la fuerza del muelle, sobre el bloque actúan otras dos fuerzas: la fuerza de gravedad  $mg$  y la fuerza normal de la mesa  $F_n$ . Estas dos fuerzas no realizan trabajo alguno, pues carecen de componente en la dirección del movimiento. Sólo el muelle trabaja sobre el bloque, ya que la fuerza que ejerce sí tiene una componente a lo largo de la distancia  $\Delta x$ .

**Ejercicio** Determinar la velocidad del bloque cuando alcanza la distancia  $x = 3$  m si parte de  $x = 0$  con velocidad  $v_x = 0,5$  m/s. (Respuesta 0,4 m/s.)



**Figura 6.12** (a) Una partícula se desplaza a lo largo de una curva en el espacio. (b) La componente de la fuerza  $F_t$  afecta a la dirección del movimiento, pero no a la velocidad. La componente tangencial  $F_t$  cambia el módulo de la velocidad, pero no su dirección.  $F_t$  es igual a la masa por la aceleración tangencial  $dv/dt$ . Sólo esta componente realiza trabajo sobre la partícula.

Obsérvese que el ejemplo 6.5 *no* puede resolverse determinando la aceleración y después utilizando las ecuaciones de aceleración constante. La fuerza que el muelle ejerce sobre el bloque,  $F_x = -kx$ , varía con la posición y por lo tanto, la aceleración también es variable, con lo que la condición de aceleración constante no se cumple.

## 6.2 Producto escalar

La componente  $F_s$  en la figura 6.12 está relacionada con el ángulo  $\phi$  entre  $\mathbf{F}$  y  $d\mathbf{s}$  por la expresión  $F_s = F \cos \phi$ , de tal modo que el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  en un desplazamiento  $d\mathbf{s}$  es

$$W = F_s ds = F \cos \phi ds$$

Este tipo de combinación entre dos vectores y el coseno del ángulo comprendido entre ambos es muy frecuente en física y recibe el nombre de **producto escalar** de dos vectores. El producto escalar entre dos vectores cualesquiera  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se escribe  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  y se define como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \phi \quad (6.10)$$

TABLA 6.1 Propiedades del producto escalar

si	se cumple
A y B son perpendiculares	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ (pues $\phi = 90^\circ$ , $\cos 90^\circ = 0$ )
A y B son paralelos	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$ (pues $\phi = 0^\circ$ , $\cos 0^\circ = 1$ )
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{A} = 0$ ó $\mathbf{B} = 0$ ó A y B son perpendiculares
Además	
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$	porque A es paralelo a sí mismo
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$	regla conmutativa de la multiplicación
$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$	regla distributiva de la multiplicación

en donde  $\phi$  es el ángulo comprendido entre A y B. (El ángulo entre dos vectores se define como el ángulo entre sus direcciones en el espacio.) El producto escalar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  puede considerarse como el producto de A y la componente de B en la dirección de A ( $A[B \cos \phi]$ ) o como el producto de B por la componente de A en la dirección de B ( $B[A \cos \phi]$ ) (ver figura 6.12). Las propiedades del producto escalar se resumen en la tabla 6.1.

El producto escalar también puede escribirse en función de las componentes rectangulares de los dos vectores usando vectores unitarios:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$

El producto escalar de un vector unitario por sí mismo, como  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$ , es 1, de modo que un término como  $A_x \mathbf{i} \cdot B_x \mathbf{i}$  es igual a  $A_x B_x$ . Por otro lado, como los vectores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  son mutuamente perpendiculares, el producto escalar de uno cualquiera de los otros, como  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$ , es cero. Por lo tanto, productos como  $A_x \mathbf{i} \cdot B_y \mathbf{j}$  (llamados términos cruzados) son igual a cero. El resultado es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (6.11)$$

La componente de un vector a lo largo de un eje puede escribirse como el producto escalar del vector por el vector unitario sobre dicho eje. Por ejemplo, la componente  $A_x$  se obtiene del producto:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = A_x \quad (6.12)$$

Esta relación sugiere un procedimiento algebraico para obtener una ecuación para las componentes a partir de una ecuación vectorial. Multiplicando la ecuación vectorial  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$  por  $\mathbf{i}$  se obtiene  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}$ , que conduce a  $A_x + B_x = C_x$ .

Para establecer la regla de la diferenciación del producto escalar, diferenciamos ambos miembros de la ecuación 6.11. Por brevedad lo hacemos para vectores de dos dimensiones.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d}{dt}(A_x B_x + A_y B_y) \\ &= \frac{dA_x}{dt} B_x + A_x \frac{dB_x}{dt} + \frac{dA_y}{dt} B_y + A_y \frac{dB_y}{dt} \end{aligned}$$

Reordenando los términos se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{dA_x}{dt} B_x + \frac{dA_y}{dt} B_y + A_x \frac{dB_x}{dt} + A_y \frac{dB_y}{dt} \\ &= \left( \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} \right) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}) + (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}) \cdot \left( \frac{dB_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dB_y}{dt} \mathbf{j} \right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (6.13)$$

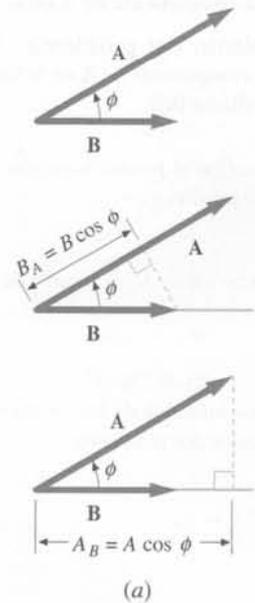
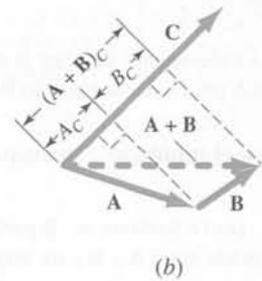


Figura 6.13 (a) El producto escalar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  es el producto de A por la proyección de B sobre A o el producto de B sobre la proyección de A sobre B. Es decir,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \phi = AB_A = BA_B$ .



(b)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})_C C$  (la proyección de  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  en la dirección de  $\mathbf{C}$  por  $\mathbf{C}$ ). Sin embargo,  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_C = A_C + B_C$ , por lo que  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (A_C + B_C)C = A_C C + B_C C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ . Es decir, en el producto escalar el producto es distributivo respecto de la suma.

## EJEMPLO 6.6 | Uso del producto escalar

(a) Hallar el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{A} = 3 \text{ mi} + 2 \text{ mj}$  y  $\mathbf{B} = 4 \text{ mi} - 3 \text{ mj}$  (figura 6.14). (b) Calcular la componente de  $\mathbf{A}$  en la dirección de  $\mathbf{B}$ .

**Planteamiento del problema** Determinar el ángulo  $\phi$  a partir de la definición del producto escalar. La componente de  $\mathbf{A}$  en la dirección de  $\mathbf{B}$  se determina a partir del producto escalar de  $\mathbf{A}$  por el vector unitario  $\mathbf{B}/B$ .

- (a) 1. Escribir el producto escalar de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  en función de  $A$ ,  $B$  y  $\cos \phi$  y despejar  $\cos \phi$ :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \phi$$

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}$$

2. Determinar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  a partir de sus componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x + A_y B_y \\ &= (3 \text{ m})(4 \text{ m}) + (2 \text{ m})(-3 \text{ m}) \\ &= 12 \text{ m}^2 - 6 \text{ m}^2 = 6 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

3. Los módulos de los vectores se obtienen del producto escalar del vector por sí mismo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= A^2 = A_x^2 + A_y^2 \\ &= (2 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2 = 13 \text{ m}^2, \text{ de modo que} \\ A &= \sqrt{13} \text{ m} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} &= B^2 = B_x^2 + B_y^2 \\ &= (4 \text{ m})^2 + (-3 \text{ m})^2 = 25 \text{ m}^2 \\ B &= 5 \text{ m} \end{aligned}$$

4. Sustituir estos valores en la ecuación obtenida en el paso 1 para  $\cos \phi$  y determinar  $\phi$ :

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{6 \text{ m}^2}{(\sqrt{13} \text{ m})(5 \text{ m})} = 0,333$$

$$\phi = \boxed{70,6^\circ}$$

- (b) La componente de  $\mathbf{A}$  en la dirección de  $\mathbf{B}$  es el producto escalar de  $\mathbf{A}$  por el vector unitario  $\mathbf{B}/B$ :

$$A_B = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} = \frac{6 \text{ m}^2}{5 \text{ m}} = \boxed{1,2 \text{ m}}$$

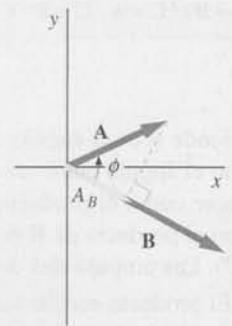


Figura 6.14

**Comprobar el resultado** La componente de  $\mathbf{A}$  en la dirección de  $\mathbf{B}$  es  $A \cos \phi = (\sqrt{13} \text{ m}) \cos 70,6^\circ = 1,2 \text{ m}$ .

**Ejercicio** (a) Determinar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  para  $\mathbf{A} = 3 \text{ mi} + 4 \text{ mj}$  y  $\mathbf{B} = 2 \text{ mi} + 8 \text{ mj}$ . (b) Determinar  $A$ ,  $B$  y el ángulo formado entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  para estos vectores. (Respuestas (a)  $38 \text{ m}^2$ , (b)  $A = 5 \text{ m}$ ,  $B = 8,25 \text{ m}$ ,  $\phi = 23^\circ$ .)

En la notación del producto escalar, el trabajo  $dW$  realizado por una fuerza  $\mathbf{F}$  sobre una partícula que experimenta un desplazamiento  $d\mathbf{s}$  es

$$dW = F \cos \phi ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (6.14)$$

DIFERENCIAL DEL TRABAJO

donde  $ds = |ds|$  (el módulo de  $ds$ ). El trabajo realizado sobre la partícula cuando se desplaza del punto 1 al 2 es

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (6.15)$$

DEFINICIÓN GENERAL DEL TRABAJO

(Si la fuerza se mantiene constante, el trabajo puede expresarse como  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ , donde  $\mathbf{s}$  es el desplazamiento neto.)

Cuando varias fuerzas  $\mathbf{F}_i$  actúan sobre una partícula cuyo desplazamiento es  $ds$ , el trabajo total es

$$dW_{\text{total}} = \mathbf{F}_1 \cdot ds + \mathbf{F}_2 \cdot ds + \dots = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) \cdot ds = (\Sigma \mathbf{F}_i) \cdot ds \quad (6.16)$$

### EJEMPLO 6.7 | Caja que hacemos subir por una pendiente

Se empuja una caja por la pendiente de una rampa con una fuerza horizontal  $F$  de 100 N. Por cada 5 m que se recorre, la caja sube 3 m. Calcular el trabajo realizado por  $F$  cada 5 m de recorrido de la caja por la rampa (a) calculando directamente el producto escalar a partir de las componentes de  $F$  y del desplazamiento  $s$ , (b) multiplicando el producto de los módulos de  $F$  y de  $s$  por el coseno del ángulo que forman sus direcciones, (c) calculando  $F_s$  (la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento) y multiplicándola por el módulo del desplazamiento, y, (d) determinando la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza y multiplicándola por el módulo de la fuerza.

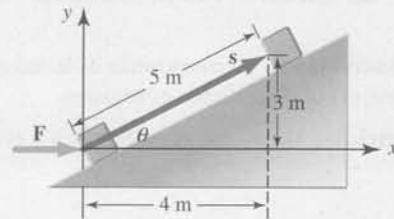


Figura 6.15

**Planteamiento del problema** Dibujar un esquema de la caja en su posición inicial y final. Utilizar un sistema de coordenadas con el eje  $x$  horizontal. Expresar los vectores fuerza y desplazamiento en sus componentes y efectuar el producto escalar. Determinar la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento y viceversa.

(a) Expresar  $\mathbf{F}$  y  $s$  mediante sus componentes y realizar el producto escalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 100 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} \\ s &= 4 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} \\ W &= \mathbf{F} \cdot s = F_x \Delta x + F_y \Delta y \\ &= (100 \text{ N})(4 \text{ m}) + 0(3 \text{ m}) = \boxed{400 \text{ J}} \end{aligned}$$

(b) Calcular  $Fs \cos \phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo entre los dos vectores. Igualar esta expresión con el resultado del apartado (a) y determinar  $\cos \phi$ ; al final, calcular el trabajo:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot s &= Fs \cos \phi \quad \text{y} \quad \mathbf{F} \cdot s = F_x \Delta x + F_y \Delta y \\ \text{por lo tanto} \\ \cos \phi &= \frac{F_x \Delta x + F_y \Delta y}{Fs} = \frac{(100 \text{ N})(4 \text{ m}) + 0}{(100 \text{ N})(5 \text{ m})} = 0,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \\ W &= Fs \cos \phi \\ &= (100 \text{ N})(5 \text{ m})0,8 = \boxed{400 \text{ J}} \end{aligned}$$

(c) Determinar  $F_s$  y multiplicarlo por  $s$ :

$$\begin{aligned} F_s &= F \cos \phi = (100 \text{ N})0,8 = 80 \text{ N} \\ W &= F_s s = (80 \text{ N})(5 \text{ m}) = \boxed{400 \text{ J}} \end{aligned}$$

(d) Multiplicar  $F$  y  $s_F$ , donde  $s_F$  es la componente de  $s$  en la dirección de  $F$ . Primero calcular  $s_F$ :

$$\begin{aligned} s_F &= s \cos \phi = (5 \text{ m})0,8 = 4 \text{ m} \\ W &= F s_F = (100 \text{ N})(4 \text{ m}) = \boxed{400 \text{ J}} \end{aligned}$$

**Observación** En este problema es más fácil calcular el trabajo usando el procedimiento del apartado (d). En otros casos puede convenir utilizar cualquiera de los otros procedimientos explicados en este problema. Conviene familiarizarse con cualquiera de estos procedimientos para poder usar el que más convenga en función del problema que se pretenda resolver.

### EJEMPLO 6.8 | Desplazamiento de una partícula

Una partícula experimenta un desplazamiento  $s = 2 \mathbf{i} - 5 \mathbf{j}$  a lo largo de una línea recta. Durante el desplazamiento, una fuerza constante  $\mathbf{F} = 3 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}$  actúa sobre la partícula. Determinar (a) el trabajo realizado por la fuerza y (b) la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

**Planteamiento del problema** El trabajo  $W$  se determina calculando  $W = \mathbf{F} \cdot s = F_x \Delta x + F_y \Delta y$ . Combinándolo con la relación  $\mathbf{F} \cdot s = F_s s$ , podemos determinar la componente de  $\mathbf{F}$  en la dirección del desplazamiento. Hacer un esquema que muestre  $\mathbf{F}$ ,  $s$  y  $|F_s|$  (figura 6.16).

¡INTÉNELO USTED MISMO!

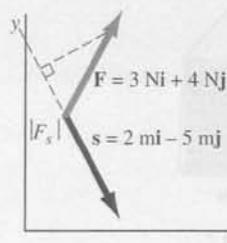


Figura 6.16

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

### Pasos

- (a) Calcular el trabajo realizado  $W$ .
- (b) 1. Calcular  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}$  y utilizar el resultado para determinar la distancia  $|\mathbf{s}|$ .
2. Usando  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_s s$ , calcular  $F_s$ .

### Respuestas

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \boxed{-14 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

$$|\mathbf{s}|^2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 29 \text{ m}^2,$$

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{29} \text{ m}$$

$$F_s = \boxed{-2,60 \text{ N}}$$

**Observación** La componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento es negativa; por lo tanto, el trabajo realizado es negativo.

**Ejercicio** Determinar el módulo de  $\mathbf{F}$  y el ángulo  $\phi$  entre  $\mathbf{F}$  y  $\Delta\mathbf{s}$ . (Respuesta:  $F = 5 \text{ N}$ ,  $\phi = 121^\circ$ .)

## EJEMPLO 6.9 | Diferenciación de un producto escalar

Demostrar que  $d(v^2)/dt = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ , donde  $\mathbf{v}$  es el vector velocidad de módulo  $v$ , y  $\mathbf{a}$  es la aceleración.

**Planteamiento del problema** Se utiliza la regla para diferenciar el producto escalar, ya que  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ .

Aplicar al producto  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  la regla para diferenciar productos escalares:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v^2) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(v^2) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}$$

**Observación** Este ejemplo atañe únicamente a parámetros cinemáticos, por lo que la relación resultante es estrictamente cinemática. Asimismo, el resultado es válido siempre, ya que sólo se ha utilizado la definición de aceleración y el cálculo de la derivada de un producto.

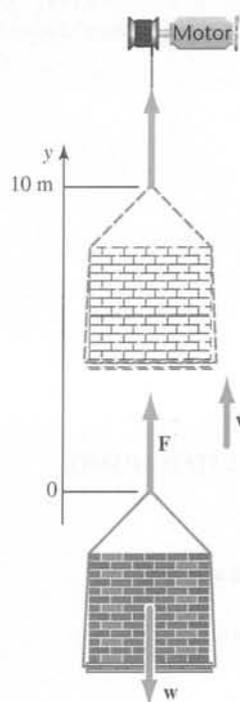


Figura 6.17

## Potencia

La **potencia**  $P$  suministrada por una fuerza es el trabajo por unidad de tiempo que realiza dicha fuerza. Consideremos una partícula con velocidad instantánea  $\mathbf{v}$ . En un intervalo corto de tiempo  $dt$ , la partícula se desplaza  $d\mathbf{s} = \mathbf{v} dt$ . El trabajo realizado por una fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre la partícula durante este intervalo de tiempo es

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$$

La potencia suministrada por la partícula es

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (6.17)$$

DEFINICIÓN — POTENCIA

La unidad del SI de potencia, julio por segundo, se denomina vatio (W):

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

Obsérvese la diferencia entre potencia y trabajo. Dos motores que elevan una determinada carga a igual distancia consumen la misma energía, pero el que lo levanta en menos tiempo es más potente. Al pagar la factura de consumo de electricidad o de gas a la compa-

ña suministradora, pagamos la energía consumida, no la potencia. La factura viene expresada normalmente en kilovatios-hora ( $\text{kW} \cdot \text{h}$ ). Un kilovatio-hora de energía es

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3,6 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{s} = 3,6 \text{ MJ}$$

En el sistema habitual de los EEUU, la unidad de energía es el pie-libra y la unidad de potencia es el pie-libra por segundo. Un múltiplo común de esta unidad es el **caballo de vapor** (HP):

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 746 \text{ W}$$

### EJEMPLO 6.10 | Potencia de un motor

Un pequeño motor mueve un ascensor que eleva una carga de ladrillos de peso  $800 \text{ N}$  a una altura de  $10 \text{ m}$  en  $20 \text{ s}$ . ¿Cuál es la potencia mínima que debe suministrar el motor?

**Planteamiento del problema** Para determinar la potencia *mínima* suponemos que los ladrillos se elevan a velocidad constante. Como la aceleración es cero, el módulo de la fuerza hacia arriba ejercida por el motor es igual al peso de los ladrillos,  $800 \text{ N}$ . La potencia transmitida por el motor es la suministrada por  $\mathbf{F}$ .

La potencia viene dada por  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta = Fv \cos 0 \\ &= (800 \text{ N}) \frac{10 \text{ m}}{20 \text{ s}} (1) = \boxed{400 \text{ W}} \end{aligned}$$

**Observación** Esta potencia mínima resultante de  $400 \text{ W}$  es algo superior a medio caballo de vapor.

**Ejercicio** (a) Determinar el trabajo total realizado por la fuerza. (b) Calcular la potencia dividiendo el trabajo total por el tiempo total. (Respuestas (a)  $8000 \text{ J}$ , (b)  $400 \text{ W}$ .)

### EJEMPLO 6.11 | Potencia y energía cinética

**Demostrar que la potencia transmitida sobre una partícula por la fuerza neta que actúa sobre ella se iguala con la tasa de cambio de la energía cinética de la partícula.**

**Planteamiento del problema** La potencia transmitida por la fuerza neta viene dada por  $\mathbf{F}_{\text{neto}} \cdot \mathbf{v}$ . Demostrar que  $\mathbf{F}_{\text{neto}} \cdot \mathbf{v} = dE_c/dt$ , donde  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ .

1. Aplicar el resultado del ejemplo 6.9 junto con  $\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{neto}}/m$  y determinar  $\mathbf{F}_{\text{neto}} \cdot \mathbf{v}$ :

$$2\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(v^2)$$

$$2\frac{\mathbf{F}_{\text{neto}}}{m} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(v^2)$$

$$\mathbf{F}_{\text{neto}} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(v^2)$$

2. La masa es constante, por lo que se puede introducir dentro del argumento de la derivada.

$$\mathbf{F}_{\text{neto}} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right)$$

$$P_{\text{neto}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{dE_c}{dt}$$

**Observación** En la sección siguiente se usan los resultados de este ejemplo para obtener el teorema trabajo-energía cinética en tres dimensiones.

En el ejemplo 6.10 se ha calculado la potencia suministrada a los ladrillos por el extremo inferior de la cuerda. En este caso la tasa de cambio de la energía cinética de la cuerda es despreciable, por lo que la potencia suministrada por el motor a la cuerda es la misma potencia que la cuerda transmite a los ladrillos.

## 6.3 Trabajo y energía en tres dimensiones

A partir del ejemplo 6.11 tenemos  $\mathbf{F}_{\text{net}} \cdot \mathbf{v} = dE_c/dt$ , donde  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ . El teorema trabajo-energía cinética en tres dimensiones puede establecerse integrando los dos términos de esta ecuación con respecto del tiempo. Esto nos conduce a

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{net}} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dE_c}{dt} dt \quad (6.18)$$

Como  $ds = \mathbf{v} dt$ , donde  $ds$  es el desplazamiento durante el tiempo  $dt$ , y teniendo en cuenta, además, que  $(dE_c/dt)dt = dE_c$ , la ecuación 6.18 puede expresarse

$$\int_1^2 \mathbf{F}_{\text{net}} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 dE_c$$

en donde la integral de la izquierda es el trabajo total  $W_{\text{total}}$  realizado sobre la partícula. (En el capítulo 7 se presentan las relaciones trabajo-energía para objetos a los que no se puede considerar como partículas.) El primer miembro de la expresión anterior puede integrarse, lo cual lleva a

$$W_{\text{total}} = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{net}} \cdot d\mathbf{s} = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c \quad (6.19)$$

ECUACIÓN TRABAJO – ENERGÍA CINÉTICA EN TRES DIMENSIONES

La ecuación 6.19 se obtiene directamente de la segunda ley de Newton del movimiento.

### EJEMPLO 6.12 | Trabajo realizado sobre una esquiadora

Dos esquiadoras visitan una estación de esquí que tiene dos pistas, una para principiantes y otra para expertos. Ambas pistas comienzan al final de un telearrastre y acaban al comienzo de esta infraestructura. Sea  $h$  la distancia vertical entre el comienzo y el final de ambas pistas. Naturalmente, la pista para principiantes es más larga y con pendientes menos pronunciadas que la pista para esquiadores expertos. Las dos esquiadoras, una de las cuales es mucho mejor esquiadora que la otra, están probando unos esquís experimentales que no tienen rozamiento. Para hacer las cosas más interesantes, la menos experta apuesta con su amiga que si una va por la pista para expertos y la otra por la de principiantes, ambas llegaran al final común de las dos pistas a la misma velocidad. La experta acepta la apuesta (olvidándose que su amiga está siguiendo un curso de física) con la condición de que ambas comiencen desde el reposo en el mismo punto al final del telearrastre y que bajen toda la pista sin frenar. ¿Quién gana la apuesta, suponiendo que la resistencia con el aire es despreciable?

**Planteamiento del problema** Dado que las dos amigas deslizan con los esquís, pueden considerarse como dos partículas. Sobre cada una de las esquiadoras actúan dos fuerzas, la gravedad  $mg$  y la fuerza normal  $\mathbf{F}_n$ . Hacer un esquema de las fuerzas que actúan sobre una cualquiera de las esquiadoras dibujando los dos vectores e incluyendo los ejes de coordenadas (figura 6.18a). El teorema trabajo-energía, con  $v_i = 0$ , relaciona la velocidad final  $v_f$  con el trabajo total. (El teorema trabajo-energía cinética sólo funciona para partículas.)

1. La velocidad final está relacionada con la energía cinética final, que a su vez está relacionada con el trabajo total por el teorema trabajo-energía cinética:
2. Para cada esquiadora, el trabajo total es el trabajo realizado por la fuerza normal más el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria:
3. La fuerza  $mg$  sobre las esquiadoras es constante pero la fuerza normal  $\mathbf{F}_n$  no lo es. Calcular primero el trabajo realizado por  $\mathbf{F}_n$ . Calcular el trabajo  $dW_n$  realizado sobre una de las esquiadoras por  $\mathbf{F}_n$  para un desplazamiento infinitesimal  $ds$  (figura 6.18b) en una posición arbitraria a lo largo del descenso.

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$W_{\text{total}} = W_n + W_g$$

$$dW_n = \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = F_n \cos \phi ds$$

### ¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

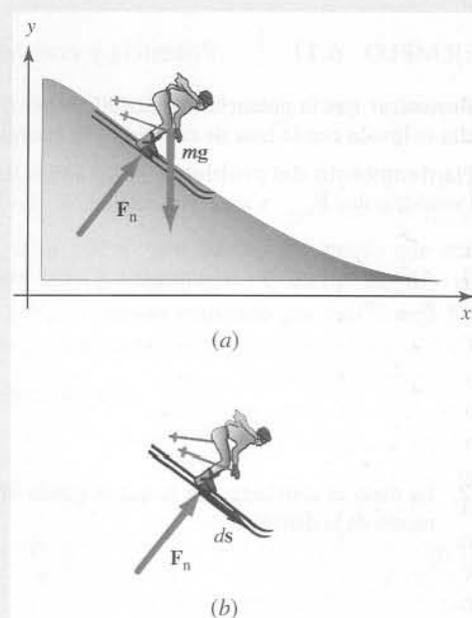


Figura 6.18

- Determinar el ángulo  $\phi$  entre las direcciones de  $\mathbf{F}_n$  y  $ds$ . El desplazamiento  $ds$  es paralelo a la pendiente:
- Calcular el trabajo realizado por  $\mathbf{F}_n$  durante todo el descenso:
- La fuerza de la gravedad es constante, por lo tanto el trabajo realizado por la gravedad es  $W_g = \mathbf{mg} \cdot \mathbf{s}$ , donde  $\mathbf{s}$  es el desplazamiento neto desde el inicio de la pista al final (figura 6.19):
- Las esquiadoras descienden por la pendiente, por lo que  $\Delta y$  es negativo. De la figura 6.18a, vemos que  $\Delta y = -h$ :
- Sustituyendo se obtiene:
- Aplicar el teorema trabajo-energía cinética para determinar  $v_f$ :
- La velocidad final depende sólo de  $h$ , que es la misma para los dos descensos. Ambas esquiadoras tendrán la misma velocidad final.

$$\phi = 90^\circ$$

$$dW_n = F_n \cos 90^\circ ds = 0,$$

$$W_n = \int dW_n = 0$$

$$W_g = \mathbf{mg} \cdot \mathbf{s} = -mg \mathbf{j} \cdot (\Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}) \\ = -mg \Delta y$$

$$\Delta y = -h$$

$$W_g = mgh$$

$$W_n + W_g = \Delta E_c$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

por lo tanto

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

La esquiadora menos experta ha ganado la apuesta ya que ambas han llegado a la misma velocidad.

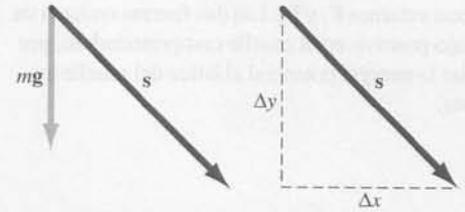


Figura 6.19

**Observación** La esquiadora más experta invertirá un tiempo menor en llegar a la línea de llegada, pero la apuesta no era ésta. Lo que se ha demostrado en este ejercicio es que el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad se iguala a  $mgh$ . No depende de la forma de la colina ni del camino tomado. Depende únicamente de la diferencia de altura entre el punto de salida y el de llegada.

En el ejemplo 6.12 hemos visto que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es independiente del camino seguido. Este hecho nos lleva al concepto de energía potencial, concepto al que dedicamos la sección que sigue.

## 6.4 Energía potencial

El trabajo total realizado sobre una partícula es igual a la variación de su energía cinética. Sin embargo, frecuentemente nos interesa el trabajo realizado por un sistema de dos o más partículas.<sup>1</sup> En muchos casos el trabajo realizado por las fuerzas externas sobre un sistema no incrementa su energía cinética, sino que se almacena como **energía potencial**, es decir, energía asociada a la configuración del sistema.

Consideremos el levantamiento de una barra de pesas de masa  $m$  a una altura  $h$ . El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria es  $-mgh$ . La barra empieza y acaba en estado de reposo. Como la energía cinética de la barra no varía, el trabajo total sobre la barra es cero. Esto significa que el atleta que levanta la barra de pesas ejerce sobre ella una fuerza de  $+mgh$ . Consideremos ahora la barra y el planeta Tierra (pero no el levantador de las pesas) como un sistema de partículas. Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema Tierra-barra son la atracción gravitatoria que el atleta ejerce sobre la Tierra, la fuerza que sus pies ejercen sobre la Tierra y la fuerza  $mg$  que sus manos ejercen sobre la barra (figura 6.20). (Puede despreciarse la fuerza gravitatoria que el levantador ejerce sobre la barra.) La barra se mueve, pero el movimiento de la Tierra es despreciable, de modo que la única fuerza externa ejercida sobre el sistema que realiza trabajo es la fuerza ejercida por el atleta sobre la barra. El trabajo total realizado sobre el sistema Tierra-barra por fuerzas externas al sistema es  $mgh$ . Este trabajo se almacena como energía potencial, la cual está asociada a la configuración del sistema Tierra-barra. Ese tipo de energía se llama energía potencial gravitatoria.

Un muelle es otro ejemplo de sistema que almacena energía mediante su configuración. Si se estira o se comprime un muelle, la energía asociada con la longitud del muelle se alma-

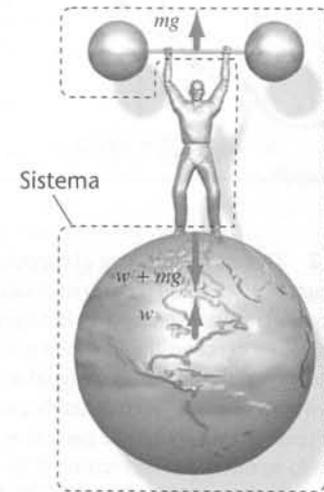
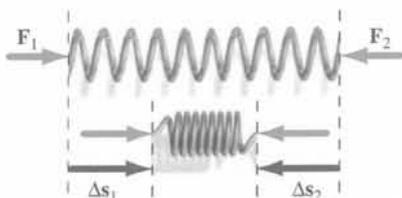
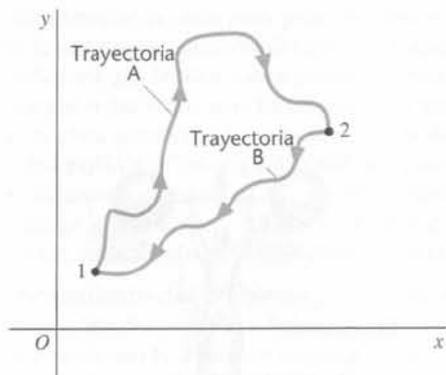


Figura 6.20 Sistema formado por una barra de pesas y la Tierra, pero no el atleta. Al levantar la barra, el atleta trabaja sobre este sistema.

<sup>1</sup> Los sistemas de partículas se tratan más ampliamente en el capítulo 8.



**Figura 6.21** El muelle es comprimido por las fuerzas externas  $F_1$  y  $F_2$ . Las dos fuerzas realizan un trabajo positivo en el muelle comprimiéndolo, por lo que la energía potencial elástica del muelle aumenta.



**Figura 6.22** Dos trayectorias en el espacio conectan los puntos 1 y 2. Si el trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de la trayectoria A de 1 a 2 es  $W$ , en el recorrido de vuelta a lo largo de la trayectoria B el trabajo debe ser igual a  $-W$  ya que el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada que termine en el punto de partida es igual a cero. Cuando se recorre la trayectoria B de 1 a 2, la fuerza es la misma en cada punto, pero el desplazamiento es opuesto al que va de 2 a 1. Por lo tanto, el trabajo realizado a lo largo de la trayectoria B de 1 a 2 es también  $W$ . De aquí se deduce que el trabajo realizado sobre una partícula que se desplaza sobre el punto 1 a 2 es el mismo para todas las trayectorias que conectan los dos puntos.

cena como energía potencial. Consideremos el muelle de la figura 6.21: si se comprime mediante fuerzas iguales y de sentido contrario,  $F_1$  y  $F_2$ , estas fuerzas suman cero y la fuerza neta que se ejerce sobre el muelle sigue siendo cero, por lo que no hay ningún cambio en la energía cinética del muelle. El trabajo que se ejerce sobre el sistema no se almacena como energía cinética sino como energía potencial elástica; la configuración de este sistema ha cambiado, como queda patente por el cambio de la longitud del muelle. El trabajo total realizado sobre el muelle es positivo porque las dos fuerzas realizan un trabajo positivo. (El trabajo realizado por  $F_1$  es positivo porque tanto la fuerza como el desplazamiento de su punto de aplicación  $\Delta s_1$  van en la misma dirección, y lo mismo puede decirse de  $F_2$  y  $\Delta s_2$ .)

### Fuerzas conservativas

Cuando un esquiador asciende mediante un telesquí a lo alto de una pista de altura  $h$ , el trabajo realizado por la máquina sobre él es  $mgh$  y el realizado por la gravedad  $-mgh$ . Cuando el esquiador se desliza desde arriba hasta el punto más bajo de la pista, el trabajo realizado por la gravedad es  $+mgh$ , independientemente de la forma de la pista (como se ha visto en el ejemplo 6.12). El trabajo total realizado por la gravedad sobre el esquiador en el viaje de ida y vuelta es cero, independientemente de la trayectoria seguida. Se dice que la fuerza de la gravedad ejercida sobre el esquiador es una **fuerza conservativa**.

Una fuerza es conservativa si el trabajo total que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula recorre un trayectoria cerrada y vuelve a su posición inicial.

DEFINICIÓN —FUERZA CONSERVATIVA

La figura 6.22 nos muestra que esta definición implica lo siguiente:

El trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria seguida por la partícula cuando se mueve de un punto a otro.

DEFINICIÓN ALTERNATIVA —FUERZA CONSERVATIVA

Consideremos ahora el esquiador y la Tierra como un *sistema de dos partículas*. (El telesquí no forma parte del sistema.) Cuando el telesquí conduce al esquiador a lo alto de la pista realiza el trabajo  $mgh$  sobre el sistema esquiador-Tierra. Este trabajo es almacenado en forma de energía potencial del sistema. Cuando el esquiador desciende por la pista, esta energía potencial se convierte en energía cinética de movimiento.

### Funciones de energía potencial

Como el trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula no depende de la trayectoria, sólo depende de los puntos extremos 1 y 2. Podemos usar esta propiedad para definir la **función energía-potencial**  $U$ , asociada a una fuerza conservativa. Obsérvese que cuando el esquiador se desliza hacia abajo por la pista, el trabajo realizado por la gravedad *disminuye* la energía potencial del sistema. En general, la función energía potencial se define de tal modo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa sea igual a la disminución de la función energía-potencial:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\Delta U$$

es decir,

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \tag{6.20a}$$

DEFINICIÓN —FUNCIÓN ENERGÍA POTENCIAL

Para un desplazamiento infinitesimal tenemos

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \tag{6.20b}$$

Podemos calcular la función energía-potencial asociada con la fuerza gravitatoria próxima a la superficie de la Tierra mediante la ecuación 6.21b. Para la fuerza  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$ , resulta

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -(-mg\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = +mg dy$$

e integrando obtenemos

$$U = \int mg dy = mgy + U_0$$

$$U = U_0 + mgy \quad (6.21)$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA PRÓXIMA A LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

en donde  $U_0$ , la constante arbitraria de integración, es el valor de la energía potencial para  $y = 0$ . Como sólo definimos la variación de energía potencial, el valor real de  $U$  no es importante. Somos libres para dar a  $U$  el valor cero en cualquier punto de referencia. Por ejemplo, si la energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-esquiador se elige igual a cero cuando el esquiador está en el fondo de la pista, su valor a la altura  $h$  sobre este nivel es  $mgh$ . También podemos elegir la energía potencial cero cuando el esquiador está en un punto  $P$  a medio camino de la pendiente, en cuyo caso su valor en cualquier otro punto sería  $mgy$ , en donde  $y$  es la altura del esquiador respecto al punto  $P$ .

**Ejercicio** Una muchacha de 55 kg se encuentra en un balcón a 8 m por encima del suelo. ¿Cuál es la energía potencial del sistema muchacha-Tierra si (a)  $U$  se elige cero en el suelo; (b)  $U$  se elige cero a 4 m por encima del suelo; y (c)  $U$  se elige cero 10 m por encima del suelo? (Respuestas (a) 4,32 kJ, (b) 2,16 kJ, (c) -1,08 kJ.)

### EJEMPLO 6.13 | La botella que cae

Una botella de 0,350 kg de masa cae desde un estante que está 1,75 m por encima del suelo. Determinar la energía potencial del sistema Tierra-botella cuando la botella está en el estante y cuando está a punto de chocar con el suelo. Determinar la energía cinética de la botella justo antes del impacto.

**Planteamiento del problema** Al caer la botella, el trabajo realizado por la Tierra sobre la botella iguala con signo contrario el cambio en la energía potencial del sistema botella-Tierra. Si se sabe cuánto vale este trabajo, se puede usar el teorema trabajo-energía cinética para determinar la energía cinética.

- Hacer un esquema que muestre la botella en el estante y la botella antes de chocar con el suelo (figura 6.23). Suponer que la energía potencial del sistema botella-Tierra es cero cuando la botella está en el suelo, y colocar el eje  $y$  con su origen en el suelo:
- La única fuerza que realiza trabajo sobre la botella mientras cae es la fuerza de la gravedad, por lo que  $W_{\text{total}} = W_g$ . Aplicar el teorema trabajo-energía cinética a la botella que cae:
- La fuerza ejercida por la Tierra sobre la botella durante su caída es una fuerza interna al sistema botella-Tierra. También es una fuerza conservativa, por lo que el trabajo realizado iguala el cambio en la energía potencial del sistema:
- Sustituir el resultado del paso 3 en el resultado del paso 2 y obtener la energía cinética final, teniendo en cuenta que la energía cinética inicial es cero.

$$W_{\text{total}} = W_g = \Delta E_c$$

$$\begin{aligned} W_g &= -\Delta U = -(U_f - U_i) = -(mgy_f - mgy_i) \\ &= mg(y_i - y_f) = mg(h - 0) = mgh \end{aligned}$$

$$mgh = \Delta E_c$$

$$mgh = E_{c_f} - E_{c_i}$$

$$E_{c_f} = E_{c_i} + mgh$$

$$= 0 + (0,350 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})(1,75 \text{ m})$$

$$= \boxed{6,01 \text{ J}}$$

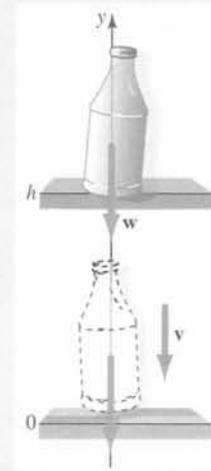
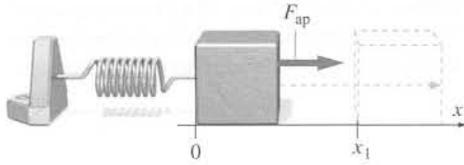


Figura 6.23

**Observación** En este ejemplo, la energía potencial perdida por el sistema botella-Tierra se convierte totalmente en energía cinética de la botella que cae. Obsérvese que en el paso 1 hemos utilizado la definición  $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

La energía potencial se asocia con la configuración de *un sistema de partículas*, pero a veces en un sistema como el de la botella-Tierra de este ejemplo, sólo se mueve una partícula (el movimiento de la Tierra es despreciable). Por simplicidad, muchas veces nos referimos a la energía potencial del sistema botella-Tierra simplemente como la energía potencial de la botella.



**Figura 6.24** La fuerza aplicada  $F_{ap}$  mueve el bloque hacia la derecha tirando del muelle hasta  $x_1$ .

**Energía potencial en un muelle** Otro ejemplo de una fuerza conservativa es la que ejerce un muelle estirado (o comprimido). Supongamos que tiramos de un bloque atado a un muelle y lo desplazamos de una posición  $x = 0$  (equilibrio) a otra  $x_1$  (figura 6.24). El muelle realiza un trabajo negativo porque su fuerza se opone a la dirección del movimiento. Si ahora dejamos el bloque en libertad, el muelle realiza un trabajo positivo, al acelerar el bloque hacia su posición inicial. El trabajo total realizado por el muelle para mover el bloque hasta su posición inicial  $x = x_1$  y devolverlo luego a  $x = 0$  es cero, independientemente del valor de  $x_1$  (siempre que el alargamiento no supere el límite de elasticidad del muelle). La fuerza que ejerce el muelle es, por lo tanto, una fuerza conservativa. Podemos calcular la función energía potencial asociada a esta fuerza a partir de la ecuación 6.20b:

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -F_x dx = -(-kx)dx = +kx dx$$

Por lo tanto,

$$U = \int kx dx = \frac{1}{2} kx^2 + U_0$$

en donde  $U_0$  es la energía potencial para  $x = 0$ , es decir, cuando el muelle está sin tensar. Haciendo  $U_0$  igual a cero resulta

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (6.22)$$

#### ENERGÍA POTENCIAL DE UN MUELLE

Cuando tiramos del bloque desde  $x = 0$  hasta  $x = x_1$ , ejercemos una fuerza aplicada sobre el muelle. Si el bloque inicia su movimiento en  $x = 0$  y lo acaba en  $x = x_1$ , en ambos casos en reposo, el cambio de su energía cinética es cero. El teorema trabajo-energía implica que el trabajo total realizado sobre el bloque es cero, es decir  $W_{ap} + W_{muelle} = 0$ , o

$$W_{ap} = -W_{muelle} = \Delta U_{muelle} = \frac{1}{2} kx_1^2 - 0 = \frac{1}{2} kx_1^2$$

Este trabajo se almacena en forma de energía potencial en el sistema muelle-bloque.

### EJEMPLO 6.14 | La energía potencial de un jugador de basquet

Consideremos el sistema formado por un jugador de basquet, el aro de una de las cestas y la Tierra. Supongamos que la energía potencial del sistema es cero cuando el jugador no está saltando y el aro está en posición horizontal. Determinar la energía potencial total de este sistema cuando el jugador se cuelga del aro como se muestra en la figura 6.25. Supongamos también que se puede describir el jugador como una masa puntual de 110 kg a 0,8 m de altura por encima del suelo cuando está de pie y a 1,3 m de altura cuando se cuelga del aro. La constante de fuerza del aro es 7,2 kN/m y la parte frontal del aro se desplaza una distancia  $s = 15$  cm.

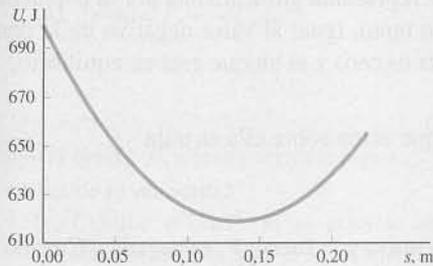
**Planteamiento del problema** En el cambio de posición del jugador, desde el suelo hasta el aro, la variación total de la energía potencial consiste en energía potencial gravitatoria,  $U_g = mgy$ , y energía almacenada por el aro desplazado, cuya energía potencial se supone análoga a la de un muelle:  $U_s = \frac{1}{2} ks^2$ . Elegimos  $y = 0$  a 0,8 m del suelo como punto de referencia de la energía potencial gravitatoria.



**Figura 6.25**

La energía potencial total es la suma de la energía potencial gravitatoria y la energía potencial elástica del aro (figura 6.26):

$$\begin{aligned} U &= U_g + U_s = mgy + \frac{1}{2} ks^2 \\ &= (110 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})(0,5 \text{ m}) + \frac{1}{2} (7,2 \text{ kN/m})(0,15 \text{ m})^2 \\ &= 540 \text{ J} + 81 \text{ J} = \boxed{621 \text{ J}} \end{aligned}$$



**Figura 6.26** El gráfico muestra la energía potencial total  $U_g + U_s$  en función de la deformación del aro.

**Observación** En este caso casi toda la energía potencial es gravitatoria, a causa del origen de energía potencial elegido.

**Ejercicio** Un bloque de 3 kg cuelga verticalmente de un muelle cuya constante de fuerza es 600 N/m. (a) ¿Cuál será el alargamiento del muelle cuando el bloque alcance el equilibrio? (b) ¿Cuánta energía potencial se almacena en el sistema muelle-bloque? (Respuestas (a) 4,9 cm, (b) 0,72 J)

## Fuerzas no conservativas

No todas las fuerzas son conservativas. Supongamos que se empuja desde un punto A hasta un punto B una caja situada encima de una mesa y que luego se vuelve de B a A, de forma que la caja acaba en el mismo sitio de donde ha salido. El rozamiento se opone al movimiento, por lo que la fuerza que se ejerce al empujar la caja, que siempre va en la dirección del movimiento, realiza un trabajo positivo en los dos tramos del trayecto. Por lo tanto, el trabajo total que ha hecho el empuje no es cero y nos encontramos ante un ejemplo de **fuerza no conservativa** para la cual no podemos definir una función energía potencial.

Algunas veces se puede demostrar que una fuerza determinada no es conservativa calculando el trabajo realizado por la fuerza alrededor de alguna curva cerrada y mostrando que éste no es cero. Consideremos la fuerza  $\mathbf{F} = F_0\boldsymbol{\phi}$ , donde  $\boldsymbol{\phi}$  es un vector unitario dirigido según la tangente a un círculo de radio  $r$ . El trabajo realizado por esta fuerza cuando nos movemos alrededor del círculo de radio  $r$  es  $+F_02\pi r$  si lo hacemos en la dirección de la fuerza (y  $-F_02\pi r$  si lo hacemos en la dirección opuesta a la fuerza). Como este trabajo no es cero, concluimos que la fuerza no es conservativa. Sin embargo, este método para saber si una fuerza es conservativa o no es limitado, ya que si el trabajo realizado alrededor de un camino determinado no es cero podemos concluir que la fuerza no es conservativa pero, en cambio, para que una fuerza sea conservativa el trabajo debe ser cero en *todas* las trayectorias cerradas posibles. Como hay infinitas trayectorias cerradas, es imposible calcular el trabajo realizado en cada una. En cursos de física más avanzados se exponen métodos matemáticos más sofisticados para probar el carácter conservativo o no de las fuerzas.

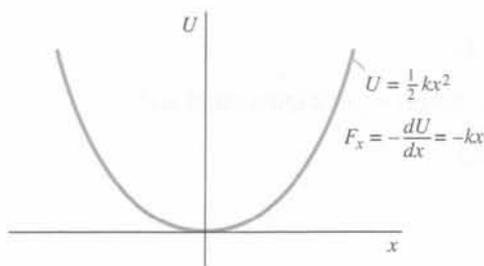
## Energía potencial y equilibrio

Para una fuerza conservativa general en una dimensión,  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i}$ , la ecuación 6.20b es:

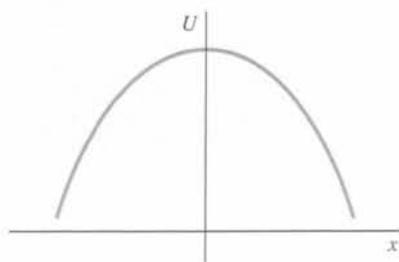
$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -F_x dx$$

La fuerza es, por lo tanto, la derivada negativa de la función energía potencial:

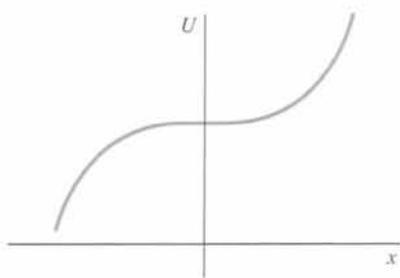
$$\bar{F}_x = -\frac{dU}{dx} \quad (6.23)$$



**Figura 6.27** Función energía-potencial  $U$  en función del desplazamiento  $x$  para un objeto sujeto a un muelle. Un mínimo en una curva de energía potencial es un punto de equilibrio estable, ya que los desplazamientos a ambos lados de este punto dan lugar a una fuerza que está dirigida hacia la posición de equilibrio.



**Figura 6.28** Una partícula en  $x = 0$  para esta curva de energía potencial se encontrará en equilibrio inestable, ya que los desplazamientos en una u otra dirección, dan lugar a una fuerza que la aleja de la posición de equilibrio.



**Figura 6.29** Equilibrio neutro. La fuerza  $F_x = -dU/dx$  es cero para  $x = 0$  y para los puntos próximos. Si una partícula se desplaza en cualquier dirección a partir de  $x = 0$ , no experimenta ninguna fuerza y por lo tanto, permanece en equilibrio.

Esta expresión general puede comprobarse para el caso de un sistema bloque-muelle diferenciando la función  $U = \frac{1}{2}kx^2$ , con lo que obtenemos

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

La figura 6.27 muestra un gráfico de  $U = \frac{1}{2}kx^2$  en función del desplazamiento  $x$  para un sistema bloque-muelle. La derivada de esta función se representa gráficamente por la pendiente de la línea tangente a la curva. La fuerza es, por lo tanto, igual al valor negativo de la pendiente de la curva. Para  $x = 0$ , la fuerza  $F_x = -dU/dx$  es cero y el bloque está en equilibrio.

Una partícula está en equilibrio si la fuerza neta que actúa sobre ella es nula.

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO

Cuando  $x$  es positiva (figura 6.27), la pendiente es positiva y la fuerza  $F_x$  es negativa. Cuando  $x$  es negativa, la pendiente es negativa y la fuerza  $F_x$  es positiva. En ambos casos, la fuerza tiene la dirección que acelera el bloque hacia los valores de energía potencial más bajos. Si el bloque se desplaza ligeramente de  $x = 0$ , la fuerza se dirige hacia atrás, es decir, hacia  $x = 0$ . El equilibrio en  $x = 0$ , es por lo tanto, un **equilibrio estable**, ya que un desplazamiento pequeño hace que una fuerza restauradora acelere la partícula de nuevo hacia su posición de equilibrio.

En el equilibrio estable un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza restauradora que acelera la partícula hacia atrás en busca de su posición de equilibrio.

En la figura 6.28 se muestra una curva para la energía potencial con un máximo para  $x = 0$  en lugar de un mínimo. Esta curva podría representar, por ejemplo, la energía potencial de un esquiador en la cumbre de una colina entre dos valles. En esta curva, cuando  $x$  es positiva, la pendiente es negativa, y la fuerza  $F_x$  es positiva; y cuando  $x$  es negativa, la pendiente es positiva y la fuerza  $F_x$  es negativa. De nuevo la fuerza tiene aquella dirección que acelera la partícula hacia la menor energía potencial, pero en este caso la fuerza se aleja de la posición de equilibrio. El máximo para  $x = 0$  en la figura 6.28 es un punto de **equilibrio inestable**, ya que un desplazamiento pequeño da lugar a una fuerza que acelera la partícula alejándola de su posición de equilibrio.

En el equilibrio inestable un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza que acelera la partícula alejándola de la posición de equilibrio.

La figura 6.29 muestra una curva de energía potencial que es plana en la región próxima a  $x = 0$  y, por lo tanto, la partícula está en equilibrio. Si la partícula se desplaza ligeramente en cualquier dirección la fuerza seguirá siendo cero. Este es un ejemplo de **equilibrio neutro**.

En el equilibrio neutro un pequeño desplazamiento no da lugar a ninguna fuerza, de modo que la partícula sigue en equilibrio.

### EJEMPLO 6.15 | Función energía potencial y fuerzas

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

La fuerza de una partícula en la región  $-a < x < a$  se representa mediante la función energía potencial

$$U = -b\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right]$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas. (a) Determinar la fuerza  $F_x$  en la región  $-a < x < a$ . (b) ¿Para qué valor de  $x$  la fuerza vale cero? (c) En el punto en que la fuerza se anula, ¿el equilibrio es estable o inestable?

**Planteamiento del problema** La fuerza es la derivada, con signo negativo, de la función energía potencial. El equilibrio es estable cuando la función energía potencial está en un mínimo e inestable cuando la función energía potencial está en un máximo.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

- (a) Calcular  $F_x = -dU/dx$ .
- (b) Igualar  $F_x$  a cero y resolver para  $x$ .
- (c) Calcular  $d^2U/dx^2$ . Si es positivo en la posición de equilibrio,  $U$  alcanza un mínimo y el equilibrio es estable. Si es negativo, entonces  $U$  es un máximo y el equilibrio es inestable.

#### Respuestas

$$F_x = -\frac{d}{dx} \left[ -b \left( \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \right]$$

$$= -b \left( \frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right)$$

$$F_x = 0 \quad \text{para} \quad \boxed{x = 0}$$

$$\text{para } x = 0, \quad \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{-4b}{a^3}$$

Por lo tanto, equilibrio inestable

**Observación** Esta función energía potencial es la que corresponde a una partícula bajo la influencia de las fuerzas gravitatorias ejercidas por dos masas fijas e idénticas, una en  $x = -a$  y la otra en  $x = +a$ . La partícula está en la línea que une las masas y en el punto medio la fuerza neta es cero. De otro modo, tendría la dirección de la masa más próxima.

## Resumen

- 1 Trabajo, energía cinética, energía potencial y potencia son magnitudes dinámicas importantes.
- 2 El teorema del trabajo-energía cinética es una relación importante deducida de las leyes de Newton aplicadas a una partícula. (En este contexto, una partícula es un objeto perfectamente rígido que se mueve sin rotar.)
- 3 El producto escalar de dos vectores es una definición matemática útil en todos los campos de la física.

#### TEMA

#### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### 1. Trabajo (definición)

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (6.15)$$

Fuerza constante

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

En una dimensión

Fuerza constante

$$W = F_x \Delta x = F \cos \theta \Delta x \quad (6.1)$$

Fuerza variable

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \text{área bajo la curva de } F_x \text{ en función de } x \quad (6.9)$$

#### 2. Energía cinética (definición)

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \quad (6.6)$$

#### 3. Teorema del trabajo-energía cinética

$$W_{\text{total}} = \Delta E_c = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2 \quad (6.7)$$

#### 4. Producto escalar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \phi \quad (6.10)$$

En función de las componentes

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (6.11)$$

Componente del vector

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_x \quad (6.12)$$

Derivada

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (6.13)$$

## 5. Potencia

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (6.17)$$

## 6. Fuerza conservativa

Una fuerza es conservativa si el trabajo total que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve a lo largo de una trayectoria que retorna a su posición inicial. El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula es independiente de la trayectoria recorrida por la partícula al pasar ésta de un punto a otro.

## 7. Energía potencial

La energía potencial de un sistema es la energía asociada con la configuración del mismo. La variación en la energía potencial de un sistema se define por el valor negativo del trabajo realizado por todas las fuerzas conservativas que actúan sobre el sistema.

Definición  $\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (6.20)$

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (6.20)$$

Gravitatoria  $U = U_0 + mgy \quad (6.21)$

Elástica (muelle)  $U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (6.22)$

Fuerza conservativa  $F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (6.23)$

Curva de energía potencial En un mínimo de la curva de la función energía potencial en función del desplazamiento, la fuerza es cero y el sistema se encuentra en equilibrio estable. En un máximo, la fuerza es cero y el sistema está en equilibrio inestable. Una fuerza conservativa siempre tiende a acelerar una partícula hacia una posición de energía potencial más baja.

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.

- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.

- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

Tomar  $g = 9,81 \text{ N/kg} = 9,81 \text{ m/s}^2$  y despreciar el rozamiento en todos los problemas a menos que se indique lo contrario.

### Problemas conceptuales

- 1 ● SSM Verdadero o falso:

- (a) Sólo la fuerza resultante que actúa sobre un objeto puede realizar trabajo.  
 (b) Ningún trabajo se realiza sobre una partícula que permanece en reposo.  
 (c) Una fuerza que en todo momento es perpendicular a la velocidad de una partícula no realiza trabajo sobre ésta.

2 ● Una caja pesada ha de moverse desde lo alto de una mesa a lo alto de otra de igual altura situada en otro lugar de la habitación. ¿Cuál es el trabajo mínimo que hay que hacer? Explíquese.

3 ● Verdadero o falso: Una persona en una rueda de Ferris se mueve en un círculo a velocidad constante, con lo cual no hay ninguna fuerza que haga trabajo sobre la persona.

4 ● SSM ¿En qué factor se modifica la energía cinética de un automóvil al duplicar su velocidad?

5 ● Una partícula se mueve en un círculo a velocidad constante. Únicamente una de las fuerzas que actúa sobre la partícula va en la dirección centrípeta. ¿La fuerza neta sobre la partícula, realiza trabajo? Explicarlo.

6 ● Inicialmente un objeto posee la energía cinética  $E_c$ . El mismo objeto se mueve después en dirección opuesta y a una velocidad triple de la inicial. ¿Cuál es ahora su energía cinética? (a)  $E_c$ , (b)  $3 E_c$ , (c)  $-3 E_c$ , (d)  $9 E_c$ , (e)  $-9 E_c$ .

7 ● SSM ¿Qué trabajo se necesita para alargar un muelle 2 cm a partir de su posición natural en comparación con el necesario para alargarlo 1 cm, también desde su posición natural?

8 ● Supongamos que sobre una partícula actúa una fuerza neta que no realiza trabajo. ¿Puede moverse la partícula en una línea recta?

9 ● La dimensión de potencia es (a)  $[M][L]^2/[T]^2$ , (b)  $[M][L]^2/[T]$ , (c)  $[M][L]^2/[T]^2$ , (d)  $[M][L]^2/[T]^3$ .

**10** ● Dos exploradores, S y J, deciden ascender a la cumbre de una montaña. S escoge el camino más corto por la pendiente más abrupta, mientras que J, que pesa lo mismo que S, sigue un camino más largo, de pendiente suave. Al llegar a la cima comienzan a discutir sobre cuál de los dos ganó más energía potencial. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- S gana más energía potencial que J.
- S gana menos energía potencial que J.
- S gana la misma energía potencial que J.
- Para comparar las energías debemos conocer la altura de la montaña.
- Para comparar las energías debemos conocer la longitud de los dos trayectorias.

**11** ● Verdadero o falso:

- Sólo las fuerzas conservativas realizan trabajo.
- Si únicamente se ejercen fuerzas conservativas, la energía cinética de una partícula no varía.
- El trabajo realizado por una fuerza conservativa coincide con la disminución de la energía potencial asociada con esa fuerza.

**12** ●● SSM La figura 6.30 muestra una función energía potencial  $U$  en función de  $x$ . (a) En cada punto indicado, establecer si la fuerza  $F_x$  es positiva, negativa o cero. (b) ¿En qué punto la fuerza posee el módulo máximo? (c) Identificar los puntos de equilibrio y establecer si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

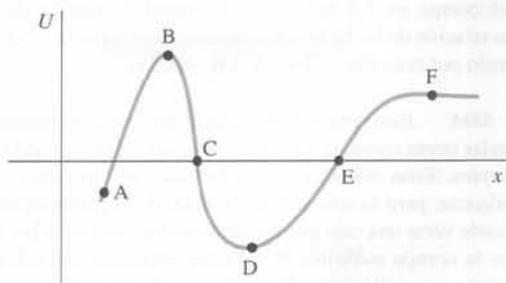


Figura 6.30 Problema 12

**13** ● Verdadero o falso:

- La fuerza gravitatoria no puede realizar trabajo ya que actúa a distancia.
- El trabajo es el área bajo la curva fuerza-tiempo.

**14** ● Un trabajo negativo significa que (a) la energía cinética del objeto aumenta, (b) la fuerza aplicada es variable, (c) la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento, (d) el ángulo entre la fuerza aplicada y el desplazamiento es mayor de  $90^\circ$ , (e) nada, no existe el trabajo negativo.

### Estimaciones y aproximaciones

**15** ●● SSM Una artista de circo de 50 kg camina por una cuerda floja sostenida por dos soportes que están separados 10 m. La tensión en la cuerda es de 5000 N y la cuerda está a 10 m del suelo. Estimar (a) cuánto se afloja la cuerda cuando la artista está en el centro, y (b) el cambio en la energía potencial gravitatoria de la artista desde antes de caminar en la cuerda hasta el momento que está en el centro de la misma.

**16** ● Calcular (a) el cambio en la energía potencial cuando una persona sube a un ascensor que le lleva desde la planta baja hasta el último piso del Empire State de Nueva York (102 pisos), (b) la fuerza media que ejerce el ascensor sobre la persona mientras la lleva hasta lo más alto del edificio, y (c) la potencia media ejercida por el ascensor.

**17** ● Sin contar el Sol, las estrellas más cercanas están a años luz de la Tierra. (Un año luz es la distancia recorrida por la luz durante un año:  $9,47 \times 10^{15}$  m.) Aun así, si queremos enviar naves espaciales para investigar las estrellas, éstas han de tener velocidades que sean una fracción apreciable de la velocidad de la luz. Calcular la energía cinética de una nave de 10 000 kg que viaje a un 10% de la velocidad de la luz y compararla con la energía consumida durante un año por los Estados Unidos (unos  $5 \times 10^{20}$  J). NOTA Cuando una velocidad se aproxima a la velocidad de la luz la teoría de la relatividad nos dice que la fórmula de la energía cinética  $\frac{1}{2}mv^2$  no es válida, aunque, sin embargo, la corrección en este caso es de un 1% de la velocidad real (0,1c).

**18** ●● SSM La masa de la lanzadera espacial es de unos  $8 \times 10^4$  kg y el periodo de su órbita es de 90 minutos. Calcular (a) la energía cinética de la lanzadera cuando está en órbita, (b) el cambio en su energía potencial comparando cuando está en órbita (320 km por encima de la superficie terrestre) y cuando está en la superficie de la Tierra. (c) ¿Por qué el cambio en la energía potencial es mucho menor que el de su energía cinética? (d) ¿Deberían ser iguales?

**19** ● Hay que limpiar de nieve el camino de 15 m que conduce al aparcamiento, ya que durante la noche han caído 25 cm de nieve (figura 6.31). Estimar cuánto trabajo hay que realizar sobre la nieve para llevar a cabo este trabajo. Para ello hacer y justificar las hipótesis que convenga (por ejemplo, la anchura del camino).

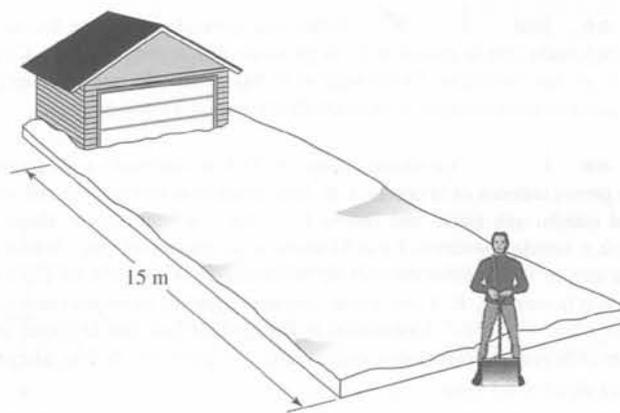


Figura 6.31 Problema 19

### Trabajo y energía cinética

**20** ● SSM Una bala de 15 g posee una velocidad de 1,2 km/s. (a) ¿Cuál es su energía cinética en julios? (b) Si la velocidad se reduce a la mitad, ¿cuál será su energía cinética? (c) ¿Y si la velocidad se duplica?

**21** ● Determinar la energía cinética en julios de (a) una pelota de béisbol de 0,145 kg que lleva una velocidad de 45 m/s y (b) un corredor de 60 kg que recorre una milla en 9 minutos a un ritmo constante.

**22** ● Una masa de 6 kg en reposo se eleva a una altura de 3 m con una fuerza vertical de 80 N. Determinar (a) el trabajo realizado por la fuerza, (b) el trabajo realizado por la gravedad y (c) la energía cinética final de la masa.

**23** ● Una fuerza constante de 80 N actúa sobre una caja de masa 5,0 kg que se está moviendo en la dirección de la fuerza aplicada con una velocidad de 20 m/s. Tres segundos después la caja se mueve con una velocidad de 68 m/s. Determinar el trabajo realizado por esta fuerza.

**24** ●● SSM Un alumno compite en una carrera con su amiga. Al principio ambos tienen la misma energía cinética, pero el alumno observa que su amiga le está venciendo. Incrementando su velocidad en un 25% él corre a la misma velocidad que ella. Si la masa del joven es 85 kg, ¿cuál es la masa de la muchacha?

**Trabajo realizado por una fuerza variable**

**25** ●● Una partícula de 3 kg se desplaza con una velocidad de 2 m/s cuando se encuentra en  $x = 0$ . Esta partícula se encuentra sometida a una única fuerza  $F_x$  que varía con la posición del modo indicado en la figura 6.32. (a) ¿Cuál es su energía cinética para  $x = 0$ ? (b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde  $x = 0$  m a  $x = 4$  m? (c) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando se encuentra en  $x = 4$  m?

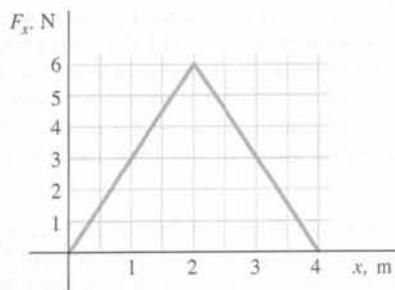


Figura 6.32 Problema 25

**26** ●● SSM **¡SOLVE!** Sobre una partícula actúa una fuerza que está relacionada con la posición de la partícula por la fórmula  $F_x = Cx^3$ , en donde  $C$  es una constante. Determinar el trabajo realizado por esta fuerza al actuar sobre la partícula que se desplaza desde  $x = 1,5$  a  $x = 3$  m.

**27** ●● **¡SOLVE!** La última invención de Lou destinada a los propietarios de perros urbanos es la correa X-R. Está construida con un material semejante al caucho que ejerce una fuerza  $F_x = -kx - ax^2$  cuando se alarga una distancia  $x$ , siendo constantes  $k$  y  $a$ . El anuncio del invento afirma: "Nunca volverás a usar tu vieja correa después de haber tenido la emoción de una experiencia con la correa X-R. Y observarás una nueva mirada de respeto en los ojos de tu orgulloso cachorro". Determinar el trabajo realizado por la correa sobre un perro si la persona permanece estacionaria y el perro tira de ella, alargando la correa de  $x = 0$  a  $x = x_1$ .

**28** ●● Un objeto de 3 kg se mueve con una velocidad de 2,40 m/s en la dirección  $x$ . Al pasar por el origen actúa sobre este objeto una única fuerza  $F_x$  que varía con  $x$  como indica la figura 6.33. (a) Determinar el trabajo realizado por la fuerza desde  $x = 0$  hasta  $x = 2$  m. (b) ¿Cuál es la energía cinética del objeto en el punto  $x = 2$  m? (c) ¿Cuál es la velocidad del objeto en dicho punto? (d) Determinar el trabajo realizado sobre el objeto desde  $x = 0$  a  $x = 4$  m. (e) ¿Cuál es la velocidad del objeto para  $x = 4$  m?

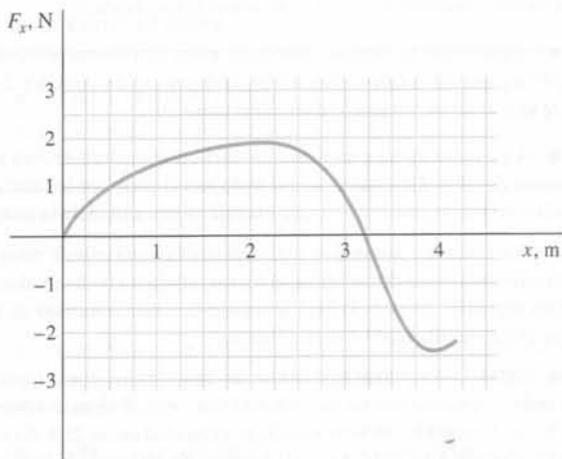


Figura 6.33 Problema 28

**29** ●● SSM Cerca de la cabaña de Margaret hay una torre de agua de 20 m de altura que atrae muchos pájaros durante los meses de verano. El año pasado fue tan cálido que la torre se secó y Margaret tuvo que transportar el agua que necesitaba. Como se sentía muy sola sin los pájaros visitantes, decidió transportar algo de agua a la torre para que volviesen. Su cubo tiene una masa de 10 kg y una capacidad de 30 kg cuando está lleno. Sin embargo, el cubo tenía un agujero y cuando Margaret subía a velocidad constante, el agua se derramaba también con ritmo uniforme. Cuando ella llegaba a lo alto de la torre, sólo quedaban 10 kg para el baño de los pájaros. (a) Escribir una expresión que indique la masa del cubo más el agua en función de la altura ( $y$ ) trepada. (b) Determinar el trabajo realizado por Margaret sobre el cubo.

**Trabajo, energía y máquinas sencillas**

**30** ● **¡SOLVE!** Un bloque de masa 6 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin rozamiento. El ángulo del plano inclinado es  $60^\circ$ . (a) Hacer una relación de todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y determinar el trabajo realizado por cada fuerza cuando el bloque se desliza 2 m (medidos a lo largo del plano). (b) ¿Cuál es el trabajo total realizado sobre el bloque? (c) ¿Cuál es la velocidad del bloque después de recorrer 1,5 m si parte del reposo y (d) parte con una velocidad inicial de 2 m/s?

**31** ● Un cuerpo de 2 kg sujeto al extremo de una cuerda se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento en un círculo de 3 m de radio. La velocidad del cuerpo es 2,5 m/s. (a) Determinar la tensión de la cuerda. (b) Hacer una relación de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y determinar el trabajo realizado por cada fuerza durante 1 revolución.

**32** ● SSM Para reducir la fuerza que hay que suministrar para realizar determinadas tareas como, por ejemplo, levantar un peso pesado, se utilizan *máquinas simples*. Estas máquinas están formadas por tornillos, sistemas de bloqueo y palancas, pero la más simple de todas es el plano inclinado. En la figura 6.34 puede verse una caja que hay que subir a un camión por una rampa. (a) Definimos la *ventaja mecánica*  $M$  del plano inclinado como la razón de la fuerza que habría que realizar para llevar la caja al camión directamente desde el suelo (a velocidad constante) con respecto de la fuerza que hay que realizar para llevarla por la rampa (a velocidad constante). Si el plano inclinado no ejerce rozamiento, demostrar que  $M = 1/\sin \theta = L/H$ , donde  $H$  es la altura de la plataforma del camión y  $L$  es la longitud de la rampa. (b) Demostrar que el trabajo que se realiza moviendo la caja es el mismo si se levanta el objeto directamente o bien si se le empuja por la rampa.

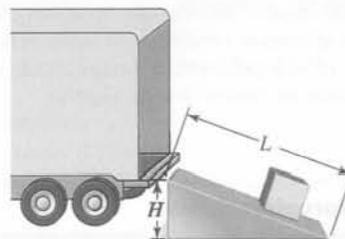


Figura 6.34 Problema 32

**33** ●● Un tornillo, de algún modo, es una especie de plano inclinado. La figura 6.35 muestra esquemáticamente un gato, un dispositivo que se utiliza para levantar los coches cuando hay que cambiar un neumático pinchado. El tornillo del gato de la figura tiene un paso de rosca  $p$  y una manivela de radio  $R$ . Cuando la manivela da una vuelta completa, el gato ha subido un peso  $w$  una altura  $p$ . Suponiendo que no hay rozamiento, el trabajo realizado durante una vuelta de la manivela es el mismo que el incremento de la energía potencial del coche que está levantando. Demostrar que la ventaja mecánica de este dispositivo (véase el problema 32) es  $2\pi R/p$ .

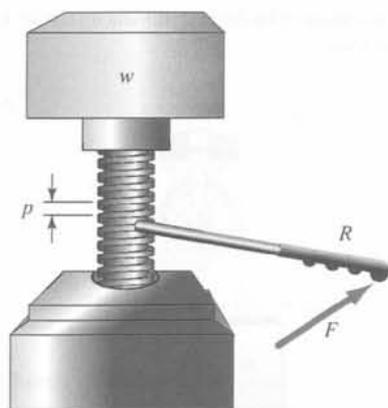


Figura 6.35 Problema 33

- 34 ● La figura 6.36 muestra dos poleas dispuestas para elevar con ventaja una carga pesada. Una cuerda rodea la garganta de dos poleas sin rozamiento y sin masa y el peso  $w$  cuelga de una de ellas. Una fuerza de módulo  $F$  actúa sobre el extremo libre de la cuerda. (a) Si el peso ha de elevarse una distancia  $h$ , ¿qué distancia debe recorrer el punto de aplicación de la fuerza? (b) ¿Qué trabajo se realiza sobre el peso? (c) ¿Qué trabajo realiza el agente? ¿Cuál es la ventaja mecánica (definida en el problema 32) del sistema?

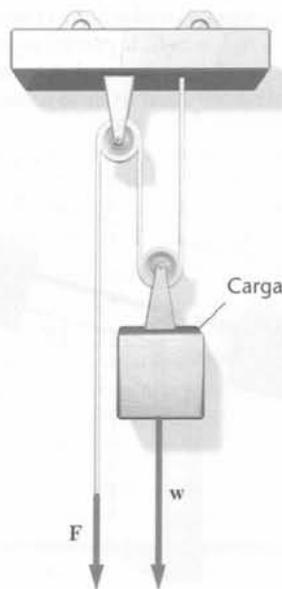


Figura 6.36 Problema 34

### Productos escalares

- 35 ● SSM ¿Qué ángulo forman los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  si  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -AB$ ?
- 36 ● Dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  poseen módulos de 6 m y forman un ángulo de  $60^\circ$  entre sí. Determinar el producto  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ .
- 37 ● Determinar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  para los siguientes vectores: (a)  $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ . (b)  $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ . (c)  $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ .
- 38 ● Determinar los ángulos comprendidos entre los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  definidos en el problema 37.
- 39 ● **SOLVE** Un cuerpo de 2 kg experimenta un desplazamiento  $\Delta \mathbf{s} = 3 \text{ m } \mathbf{i} + 3 \text{ m } \mathbf{j} - 2 \text{ m } \mathbf{k}$  a lo largo de una línea recta. Durante el desplazamiento actúa sobre el cuerpo una fuerza constante  $\mathbf{F} = 2 \text{ N } \mathbf{i} - 1 \text{ N } \mathbf{j} + 1 \text{ N } \mathbf{k}$ .

- (a) Determinar el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  en este desplazamiento. (b) Determinar la componente de  $\mathbf{F}$  en la dirección y sentido del desplazamiento.

- 40 ●● (a) Determinar el vector unitario que es paralelo al vector  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ . (b) Determinar la componente del vector  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$  en la dirección del vector  $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ .

- 41 ●● SSM Dados dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , demostrar que si  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$ , entonces  $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ .

- 42 ●●  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son dos vectores unitarios en el plano  $xy$ . Forman ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con el eje  $x$  positivo, respectivamente. (a) Determinar las componentes  $x$  e  $y$  de los dos vectores. (b) Considerando el producto escalar de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , demostrar que  $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$ .

- 43 ● ¿Si  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ? Si la respuesta es negativa, dar un contraejemplo y si es positiva, explicar la razón.

- 44 ●● (a) Sea  $\mathbf{A}$  un vector constante con su extremo en el origen de coordenadas. Sea  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  un vector en el plano  $xy$  que satisface la relación  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = 1$ . Demostrar que los puntos  $(x, y)$  están alineados. (b) Si  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ , encontrar la pendiente y la ordenada en el origen de la línea. (c) Si ahora  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{r}$  son vectores en el espacio tridimensional, demostrar que la relación  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = 1$  especifica un plano.

- 45 ●● SSM Cuando una partícula se mueve en un círculo centrado en el origen y con velocidad constante, los módulos de su vector posición y de los vectores velocidad son constantes. (a) Derivar respecto al tiempo la expresión  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 = \text{constante}$  para demostrar que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$  y, por lo tanto,  $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$ . (b) Derivar respecto al tiempo la expresión  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 = \text{constante}$  para demostrar que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$  y, por lo tanto,  $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$ . ¿Qué muestran los resultados de (a) y (b) respecto a la dirección de  $\mathbf{a}$ ? (c) Derivar  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$  respecto al tiempo y demostrar que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + v^2 = 0$  y, por lo tanto,  $a_r = -v^2/r$ .

### Potencia

- 46 ●● La fuerza  $\mathbf{A}$  realiza un trabajo de 5 J en 10 s. La fuerza  $\mathbf{B}$  realiza un trabajo de 3 J en 5 s. ¿Cuál de las dos fuerzas suministra mayor potencia?

- 47 ● Un cuerpo de 5 kg es elevado por una fuerza igual al peso del cuerpo. El cuerpo se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 2 m/s. (a) ¿Cuál es la potencia de la fuerza? (b) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza en 4 segundos?

- 48 ● Un gato ha cazado un ratón y decide arrastrarle hasta la habitación para que la dueña de la casa pueda admirar su acción cuando despierte. Para arrastrar el ratón por la alfombra a velocidad constante  $v$  basta aplicar una fuerza horizontal constante de 3 N. Si la fuerza del gato le permite realizar este trabajo con una potencia de 6 W, (a) ¿cuál es su velocidad  $v$ ? (b) ¿Qué trabajo realiza el gato en 4 s?

- 49 ● Una fuerza simple de 5 N actúa en la dirección  $x$  sobre un objeto de 8 kg. (a) Si el objeto parte del reposo en la posición  $x = 0$  en el tiempo  $t = 0$ , determinar la velocidad  $v$  en función del tiempo  $t$ . (b) Escribir una expresión para la potencia desarrollada por la fuerza en función del tiempo. (c) ¿Cuál es la potencia desarrollada por la fuerza en el tiempo  $t = 3$  s?

- 50 ● **SOLVE** Determinar la potencia suministrada por una fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre una partícula que se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$  en los casos (a)  $\mathbf{F} = 4 \text{ N } \mathbf{i} + 3 \text{ N } \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} = 6/\text{ms } \mathbf{i}$ . (b)  $\mathbf{F} = 6 \text{ N } \mathbf{i} - 5 \text{ N } \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v} = -5 \text{ m/s } \mathbf{i} + 4 \text{ m/s } \mathbf{j}$ . (c)  $\mathbf{F} = 3 \text{ N } \mathbf{i} + 6 \text{ N } \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v} = 2 \text{ m/s } \mathbf{i} + 3 \text{ m/s } \mathbf{j}$ .

- 51 ● SSM Un pequeño ascensor de un restaurante funciona mediante una polea que está conectada a un motor, tal como se muestra en la figura 6.37. El motor sube y baja la caja de 35 kg a una velocidad 0,35 m/s sin acelerarla, excepto un breve instante de tiempo durante la puesta en marcha del motor. Calcular la potencia de entrada del motor si su potencia de salida es el 27 por ciento de su potencia de entrada. Supongamos que las poleas funcionan sin rozamiento.

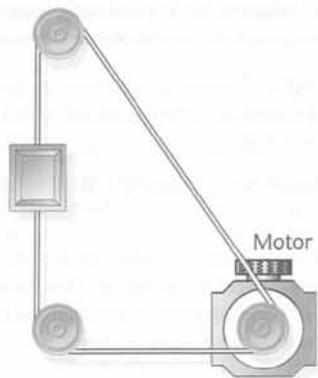


Figura 6.37 Problema 51



Figura 6.38 Problema 60

52 ●● Una paracaidista antes de abrir el paracaídas cae en caída libre con una velocidad constante, su velocidad límite, de 192 km/h. (a) Si su masa es de 55 kg, calcular la magnitud de la potencia producida por la fuerza de arrastre. (b) Después de la apertura del paracaídas, su velocidad disminuye hasta 24 km/h. ¿Cuál es ahora la potencia disipada por la fuerza de arrastre?

53 ●● SSM Un cañón colocado en la cima de un acantilado de altura  $H$ , dispara directamente hacia arriba en el aire una bala con una velocidad inicial  $v_0$ . La bala sube, vuelve a caer, pasa muy cerca del cañón y cae por el acantilado. Si se desprecia la resistencia del aire, calcular para cualquier instante de tiempo la velocidad  $v(t)$  de la bala, y demostrar explícitamente que la integral de  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  durante el tiempo que la bala está en el aire es igual al cambio de la energía cinética de la bala.

54 ●● Una partícula de masa  $m$  se mueve desde el tiempo  $t = 0$  partiendo del reposo bajo la influencia de una fuerza constante  $\mathbf{F}$ . Demostrar que la potencia suministrada por la fuerza durante un tiempo  $t$  es  $P = F^2 t/m$ .

80 J y cada una de las masas se ha desplazado una distancia de 6,0 m. Determinar los valores de  $m_1$  y  $m_2$ .

61 ●● Una barra recta de masa despreciable se monta sobre un pivote sin rozamiento como indica la figura 6.39. Las masas  $m_1$  y  $m_2$  se acoplan a la barra a las distancias  $\ell_1$  y  $\ell_2$ . (a) Expresar la energía potencial gravitatoria de las masas en función del ángulo  $\theta$  formado por la barra y la horizontal. (b) ¿Para qué ángulo  $\theta$  es mínima la energía potencial? ¿Es compatible el resultado obtenido con la expresión "los sistemas tienden hacia el mínimo de energía potencial"? (c) Demostrar que si  $m_1 \ell_1 = m_2 \ell_2$ , la energía potencial es la misma para todos los valores de  $\theta$ . (Cuando esto ocurra el sistema se equilibrará bajo el ángulo  $\theta$ . Este resultado se conoce como *ley de la palanca de Arquímedes*.)

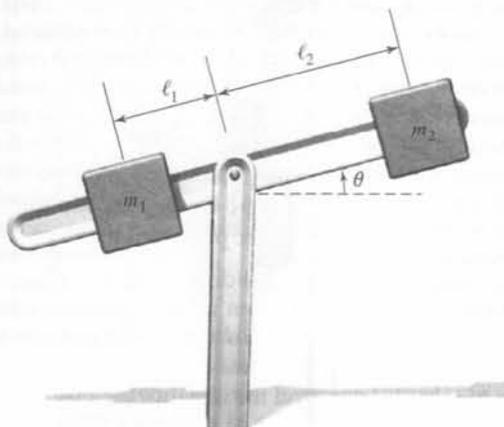


Figura 6.39 Problema 61

**Energía potencial**

55 ● **OLVE** Un hombre de 80 kg asciende por una escalera de 6 m de altura. ¿Cuál es el incremento de energía potencial gravitatoria del sistema hombre-Tierra?

56 ● **OLVE** En las Cataratas Victoria, de 128 m de altura, el agua cae con un caudal medio de  $1,4 \times 10^6$  kg/s. Si la mitad de la energía potencial del agua se convirtiera en energía eléctrica, ¿cuánta potencia se produciría en el salto?

57 ● **OLVE** Un libro de 2 kg se desliza por un plano inclinado de pendiente  $30^\circ$  sin rozamiento. Parte del reposo en el tiempo  $t = 0$  desde lo alto del plano inclinado, a una altura de 20 m sobre el suelo. (a) ¿Cuál es la energía potencial original del libro relativa al suelo? (b) A partir de las leyes de Newton, determinar la distancia recorrida por el libro en el intervalo  $0 < t < 1$  y su velocidad para  $t = 1$  s. (c) Calcular la energía potencial, y la energía cinética del libro para  $t = 1$  s. (d) Calcular la energía cinética y la velocidad del libro un instante antes de que choque contra el suelo.

58 ● Una fuerza  $F_x = 6$  N es constante. (a) Determinar la función energía potencial  $U(x)$  asociada con esta fuerza para una posición de referencia arbitraria  $x_0$  en la cual  $U = 0$ . (b) Determinar  $U(x)$  de modo que  $U = 0$  para  $x = 4$  m. (c) Determinar  $U$  de modo que  $U = 14$  J para  $x = 6$  m.

59 ● **OLVE** Un muelle tiene una constante de fuerza  $k = 10^4$  N/m. ¿Cuánto debe alargarse para que su energía potencial sea (a) 50 J y (b) 100 J?

60 ●● SSM **OLVE** Una máquina de Atwood sencilla utiliza dos masas,  $m_1$  y  $m_2$  (figura 6.38). Partiendo del reposo, la velocidad de las dos masas es 4,0 m/s al cabo de 3,0 s. En ese instante, la energía cinética del sistema es de

**Fuerza, energía potencial y equilibrio**

62 ● (a) Determinar la fuerza  $F_x$  asociada con la función energía potencial  $U = Ax^4$ , en donde  $A$  es una constante. (b) ¿En qué punto (o puntos) la fuerza es nula?

63 ●● Una función energía potencial viene dada por  $U = C/x$ , en donde  $C$  es una constante positiva. (a) Determinar la fuerza  $F_x$  en función de  $x$ . (b) ¿Está dirigida esta fuerza hacia el origen o se aleja de él? (c) ¿Crece o decrece la energía potencial cuando  $x$  crece? (d) Responder a los apartados (b) y (c) para el caso en que  $C$  es una constante negativa.

64 ●● SSM En la curva de energía potencial  $U$  en función de  $y$  indicada en la figura 6.40, los segmentos  $AB$  y  $CD$  son líneas rectas. Representar la fuerza  $F_y$  en función de  $y$ .

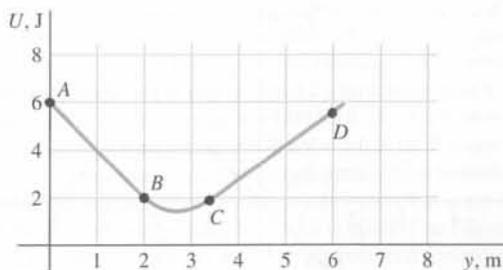


Figura 6.40 Problema 64

65 ●● La fuerza que actúa sobre un objeto viene dada por  $F_x = ax^2$ . Determinar la energía potencial del objeto en función de  $x$ .

66 ●● La energía potencial de un objeto viene dada por  $U(x) = 3x^2 - 2x^3$ , donde  $U$  se expresa en julios y  $x$  en metros. (a) Determinar la fuerza que actúa sobre este cuerpo. (b) ¿En qué posiciones está el objeto en equilibrio? (c) ¿Cuáles de estas posiciones de equilibrio son estables y cuáles inestables?

67 ●● La energía potencial de un objeto viene dada por  $U(x) = 8x^2 - x^4$ , en donde  $U$  se expresa en julios y  $x$  en metros. (a) Determinar la fuerza que actúa sobre este objeto. (b) ¿En qué posiciones el objeto se encuentra en equilibrio? (c) ¿Cuáles de estas posiciones de equilibrio son estables y cuáles son inestables?

68 ●● La fuerza que actúa sobre un objeto viene dada por la expresión  $F(x) = x^3 - 4x$ . Localizar las posiciones de equilibrio estable e inestable y demostrar que en estos puntos  $U(x)$  es respectivamente un máximo o un mínimo local.

69 ●● La energía potencial de un objeto de 4 kg viene dada por  $U = 3x^2 - x^3$  para  $x \leq 3$  m, y  $U = 0$  para  $x \geq 3$  m, en donde  $U$  se expresa en julios y  $x$  en metros. (a) ¿En qué posiciones se encuentra este objeto en equilibrio? (b) Hacer un gráfico de  $U$  en función de  $x$ . (c) Analizar la estabilidad del equilibrio para los valores de  $x$  obtenidos en (a). (d) Si la energía de la partícula es 12 J, ¿cuál es su velocidad para  $x = 2$  m?

70 ●● Una fuerza viene dada por  $F_x = Ax^{-3}$ , siendo  $A = 8 \text{ N} \cdot \text{m}^3$ . (a) Para valores positivos de  $x$ , ¿crece o decrece la energía potencial asociada con esta fuerza al crecer  $x$ ? (Para responder a esta cuestión imagínese lo que le ocurriría a una partícula si se la dejara en reposo en algún punto  $x$  y luego se la liberara.) (b) Determinar la función energía potencial  $U$  asociada con esta fuerza, de modo que  $U$  se aproxime a cero cuando  $x$  tiende a infinito. (c) Representar  $U$  en función de  $x$ .

71 ●●● SSM Un reloj de masa  $m$ , como el que se muestra en la figura 6.41, cuelga de dos cables ligeros que pasan por dos poleas de las que cuelgan dos contrapesos de masa  $M$ . (a) Determinar la energía potencial del sistema en función de la distancia  $y$ . (b) Determinar el valor de  $y$  para el cual la energía potencial del sistema es mínima. (c) Si la energía potencial es mínima, el sistema está en equilibrio. Aplicar la segunda ley de Newton al reloj y demostrar que está en equilibrio (la suma de las fuerzas sobre él es cero) para el valor de  $y$  obtenido en el apartado (b). ¿Es éste un punto de equilibrio estable o inestable?

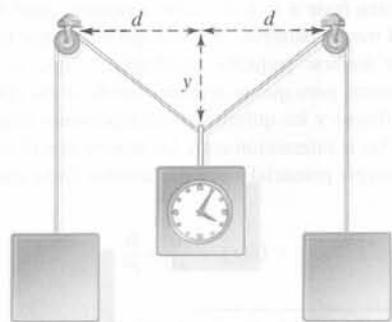


Figura 6.41 Problema 71

Problemas generales

72 ● SSM El mes de febrero de 2002, las plantas nucleares de los Estados Unidos generaron 60 700 millones de kWh. La población de los Estados Unidos por las mismas fechas era de 287 millones de personas. Si un americano medio tiene una masa de 60 kg y si toda la potencia de las centrales nucleares se invirtiera en proporcionar energía para un ascensor gigante, estimar la altura  $h$  a la que el ascensor podría levantar a toda la población americana. En los cálculos suponer que el 25 por ciento de la energía se utiliza para levantar a las personas y que  $g$  es constante para cualquier  $h$ .

73 ● SOLVE Una de las más poderosas grúas del mundo, que funciona en Suiza, es capaz de levantar lentamente una carga de  $M = 6000$  ton a una altura de  $h = 12,0$  m (1 ton = 1000 kg). (a) ¿Cuánto trabajo realiza la grúa? (b) Determinar la potencia desarrollada por la grúa sabiendo que tarda 1,00 min en elevar la carga a velocidad constante a dicha altura.

74 ● SOLVE En Austria existía un telesquí de 5,6 km de longitud. Una góndola tardaba 60 min en recorrer todo el camino hasta el punto más alto. Si existieran 12 góndolas ascendiendo simultáneamente, cada con una carga de 550 kg, 12 góndolas descendiendo, y el ángulo de ascenso fuese de  $30^\circ$ , estimar la potencia  $P$  de la máquina necesaria para operar el telesquí.

75 ● SOLVE Un objeto de 2,4 kg atado a una cuerda horizontal se mueve con velocidad constante en un círculo de radio  $R$  sobre una superficie horizontal sin rozamiento. La energía cinética del objeto es de 90 J y la tensión de la cuerda es 360 N. Calcular  $R$ .

76 ● SSM Un grupo de actores se disponen a filmar una escena cinematográfica. Según el guión, un coche ha de estrellarse contra la pared vertical de una roca a 100 km/h. Sin embargo, llegado el momento, el coche no arranca y no disponen de ningún mecánico. Cuando están a punto de regresar el estudio y someterse a la ira del productor, el cámara tiene una idea. Utilizarán una grúa para elevar el coche por su parte trasera y luego lo dejarán caer, filmando la caída bajo un ángulo tal que el coche aparecerá como si se moviera horizontalmente. ¿A qué altura deberá elevarse el coche, de 800 kg, para que alcance la velocidad de 100 km/h en la caída?

77 ●●● Las cuatro cuerdas de un violín pasan por encima del puente del instrumento tal como se muestra en la figura 6.42. El ángulo que las cuerdas forman con la normal al plano del instrumento es de  $72^\circ$  en cada lado. La fuerza normal total que presiona el puente en el violín es de 103 N y la longitud de las cuerdas desde el puente a las clavijas a las que están atadas es de 32,6 cm. (a) Determinar la tensión de las cuerdas del violín, suponiendo que es la misma para todas las cuerdas. (b) Una de las cuerdas está punteada una distancia de 4 mm, como se muestra en la figura. Dibujar un diagrama que muestre todas las fuerzas que actúan sobre la cuerda en ese punto, y determinar la fuerza que tira de la cuerda para que recupere su posición de equilibrio suponiendo que la tensión de la cuerda permanece constante. (c) Determinar el trabajo realizado sobre la cuerda al puntearla la distancia indicada. Recordar que la fuerza neta que tiende a volver a la cuerda a su posición de equilibrio depende de la posición de la misma, pero supóngase en este caso que es constante.

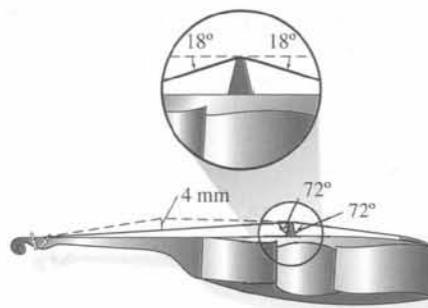


Figura 6.42 Problema 77

**78** ●● La fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo del eje  $x$  viene dada por  $F_x = -ax^2$ , siendo  $a$  una constante. Calcular la función energía potencial  $U$  sabiendo que  $U = 0$  para  $x = 0$  y representar un gráfico de  $U$  en función de  $x$ .

**79** ●● SSM **¡SOLVE!** Una fuerza actúa sobre un carro de masa  $m$  de tal modo que la velocidad  $v$  del carro se incrementa con la distancia  $x$  según la expresión  $v = Cx$ , en donde  $C$  es una constante. (a) Determinar la fuerza que actúa sobre el carro en función de la posición. (b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza al moverse el carro de  $x = 0$  a  $x = x_1$ ?

**80** ●● **¡SOLVE!** Una fuerza  $\mathbf{F} = (2 \text{ N/m}^2)x^2 \mathbf{i}$  se aplica a una partícula. Determinar el trabajo realizado por la partícula cuando se mueve a lo largo de una distancia total de 5 m (a) paralelamente al eje  $y$  desde el punto (2 m, 2 m) hasta el punto (2 m, 7 m) y (b) en línea recta desde (2 m, 2 m) a (5 m, 6 m).

**81** ●● Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo del eje  $x$ . Su posición varía con el tiempo según la ecuación  $x = 2t^3 - 4t^2$ , en donde  $x$  se mide en metros y  $t$  en segundos. Determinar (a) la velocidad y aceleración de la partícula en cualquier instante  $t$ ; (b) la potencia suministrada a la partícula en cualquier instante  $t$ ; (c) el trabajo realizado por la fuerza de  $t = 0$  a  $t = t_1$ .

**82** ●● **¡SOLVE!** Una partícula de 3 kg parte del reposo en  $x = 0$  y se mueve bajo la influencia de una sola fuerza  $F_x = 6 + 4x - 3x^2$  en donde  $F_x$  se mide en newtons y  $x$  en metros. (a) Determinar el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza de  $x = 0$  a  $x = 3$  m. (b) Determinar la potencia suministrada a la partícula cuando se encuentra en  $x = 3$  m.

**83** ●● SSM **¡SOLVE!** La energía cinética inicial impartida a una bala de 0,020 kg es de 1200 J. Despreciando la resistencia del aire, determinar el alcance de este proyectil cuando se dispara bajo un ángulo tal que el alcance es igual a la altura máxima de la trayectoria.

**84** ●● **¡SOLVE!** La figura 6.43 nos muestra la fuerza  $F_x$  que actúa sobre una partícula en función de  $x$ . (a) A partir del gráfico calcular el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde  $x = 0$  a los siguientes valores de  $x$ : -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y 4 m. (b) Representar la energía potencial  $U$  en función de  $x$  para un intervalo de  $x$  que oscila de -4 m a +4 m suponiendo que  $U = 0$  para  $x = 0$ .

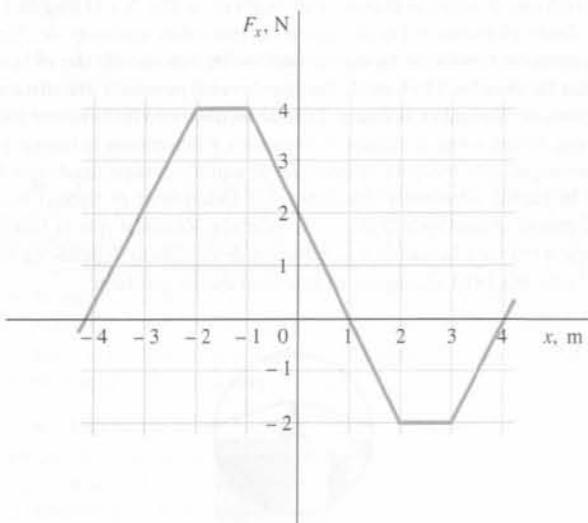


Figura 6.43 Problema 84

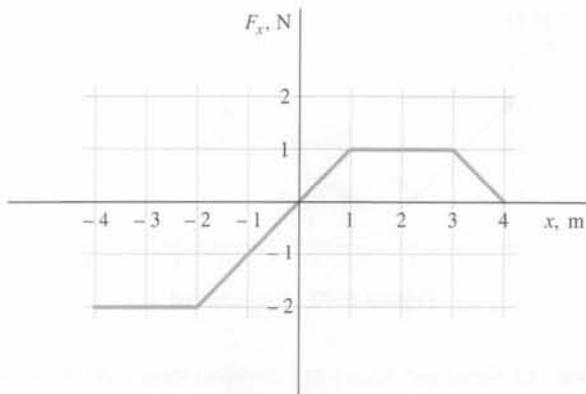


Figura 6.44 Problema 85

**86** ●● **¡SOLVE!** Una caja de masa  $M$  se encuentra en la parte más baja de un plano inclinado sin rozamiento (figura 6.45). La caja está atada a una cuerda que tira de ella con una tensión constante  $T$ . (a) Determinar el trabajo realizado por la tensión  $T$  cuando la caja se ha desplazado una distancia  $x$  a lo largo del plano. (b) Determinar la velocidad de la caja en función de  $x$  y  $\theta$ . (c) Determinar la potencia desarrollada por la tensión en la cuerda en función de  $x$  y  $\theta$ .

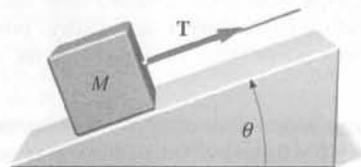


Figura 6.45 Problema 86

**87** ●●● Una fuerza en plano  $xy$  viene dada por  $\mathbf{F} = (F_0/r)(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$ , en donde  $F_0$  es una constante y  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . (a) Demostrar que el módulo de esta fuerza es  $F_0$  y su dirección es perpendicular a  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ . (b) Determinar el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve en un círculo de radio 5 m centrado en el origen. ¿Es conservativa esta fuerza?

**88** ●●● SSM Una fuerza en el plano  $xy$  viene dada por:  $\mathbf{F} = -(b/r^3)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ , donde  $b$  es una constante y  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . (a) Demostrar que el módulo de la fuerza varía según el inverso del cuadrado de la distancia al origen, y que su dirección es antiparalela (opuesta) al vector radio  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ . (b) Si  $b = 3 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ , determinar el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta entre una posición inicial  $x = 2 \text{ m}$ ,  $y = 0 \text{ m}$  y una posición final  $x = 5 \text{ m}$ ,  $y = 0 \text{ m}$ . (c) Determinar el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve por un círculo de radio  $r = 7 \text{ m}$  centrado en el origen. (d) Si esta fuerza es la única fuerza que actúa sobre la partícula, ¿cuál es la velocidad de la partícula cuando se mueve por el círculo? Suponer que la masa de la partícula es  $m = 2 \text{ kg}$ .

**89** ●●● Según Richard Feynman, uno de los más brillantes físicos del siglo XX, "Si en algún cataclismo se destruyera todo el conocimiento científico, y sólo pasara una frase a la generación siguiente, ¿qué frase contendría más información en menos palabras? Yo creo que es .... que todos los objetos están formados por átomos: pequeñas partículas ... que se atraen entre sí cuando están muy cerca, pero que se repelen cuando se las aprieta una contra otra."<sup>1</sup> Cuando los físicos y los químicos contemporáneos describen la fuerza entre átomos, modelan la interacción entre los átomos con el potencial "6-12", donde la función energía potencial entre dos átomos viene dada por la forma funcional

$$U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}$$

<sup>1</sup> Richard P. Feynman, Matthew L. Sands, y Robert B. Leighton, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1, p. 1.1. Boston: Addison-Wesley (1970).

**85** ●● Repetir el problema 84 para la fuerza  $F_x$  que se muestra en la figura 6.44.

en donde  $r$  es la distancia entre los núcleos atómicos y en donde  $a$  y  $b$  son constantes que se determinan espectroscópicamente. Al no formarse enlaces atómicos, los átomos de los gases nobles tienen funciones de energía potencial que se modelan adecuadamente con el potencial 6-12 y responden bien a las medidas experimentales. En el caso del argón,  $a = 1,09 \times 10^{-7}$  J y  $b = 6,84 \times 10^{-5}$ , si  $r$  se mide en nm ( $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ) y  $U$  en eV ( $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ) (a) Usando una hoja de cálculo, representar la función energía potencial en función de su separación para dos átomos de argón, con valores de  $r$  entre 0,3 nm y 0,7 nm. ¿La forma de la función energía potencial, ¿apoya la opinión de Feynman? Explicarlo. (b) ¿Cuál es el valor mínimo de la energía potencial (comparada con átomos que están muy separados)? ¿A qué distancia se da el mínimo? ¿El mínimo es estable o inestable? (c) A partir del gráfico o de la fórmula, estimar la fuerza de atracción entre dos átomos de argón separados una distancia de  $5 \text{ \AA}$  y la fuerza de repulsión para una separación de  $3,5 \text{ \AA}$ . Asegurarse de convertir las unidades al sistema internacional.

**90** ●●● SSM El potencial de Yukawa  $U(r) = -U_0(a/r)e^{-r/a}$ , en donde  $U_0$  y  $a$  son constantes, y  $r$  es la separación entre dos nucleones, es una fórmula teórica para la función energía potencial asociada con la fuerza nuclear entre dos nucleones. (a) Usando una hoja de cálculo, como Microsoft Excel™ por ejemplo, representar gráficamente  $U$  frente a  $r$ , usando  $U_0 = 4 \text{ pJ}$  (un picojoule, pJ, es  $1 \times 10^{-12} \text{ J}$ ) y  $a = 2,5 \text{ fm}$  (un femtometro, fm, es  $1 \times 10^{-15} \text{ m}$ ). (b) Determinar la fuerza  $F(r)$  en función de la separación entre dos nucleones. (c) Comparar el módulo de la fuerza cuando la separación es  $r = 2a$  con la que se da cuando  $r = a$ . (d) Comparar el módulo de la fuerza para la separación  $r = 5a$  con la que se da cuando  $r = a$ .

# CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

## Capítulo

# 7



- 7.1 Conservación de la energía mecánica
- 7.2 Conservación de la energía
- 7.3 Masa y energía
- 7.4 Cuantización de la energía

La energía se puede transformar de una forma en otra. Esta montaña rusa convierte la energía eléctrica comprada a la empresa suministradora en energía potencial gravitatoria de los pasajeros y de la vagoneta. Posteriormente la energía potencial se transforma en energía cinética, parte de la cual vuelve a convertirse en energía potencial. Finalmente, el rozamiento transforma la energía cinética y la energía potencial en energía térmica. La energía química almacenada en los músculos de los pasajeros se convierte en energía sonora cada vez que alguien grita.

El principio de conservación de la energía mecánica nos permite determinar hasta donde ha de subir un coche para que cuando baje por la pendiente adquiera suficiente velocidad para realizar una vuelta vertical completa (Véase el ejemplo 7.5.)

Un sistema es un conjunto de partículas. Las fuerzas que las partículas que no pertenecen al sistema ejercen sobre las partículas del sistema son fuerzas externas, mientras que las fuerzas que se ejercen mutuamente las partículas del sistema son fuerzas internas. Las formas en que cambia la energía total de un sistema se pueden clasificar en dos categorías: trabajo y calor. La energía total cambia si fuerzas externas realizan trabajo sobre el sistema o bien si a causa de la diferencia de temperatura entre el sistema y su entorno se transfiere energía. (La energía transportada como consecuencia de la diferencia de la temperatura se denomina calor.) Como no analizaremos los sistemas donde el calor interviene de manera significativa hasta el capítulo 18, de momento consideraremos únicamente que los cambios de energía de un sistema se deben al trabajo total realizado sobre él por las fuerzas externas. Se define la energía potencial de un sistema como el cambio en la energía potencial del sistema que iguala, con signo opuesto, el trabajo total realizado por todas las fuerzas conservativas internas. Si no hay fuerzas externas que realicen trabajo sobre el sistema y si las fuerzas conservativas internas son las únicas fuerzas internas que realizan trabajo, el trabajo que realizan es igual al cambio en la energía cinética del sistema. Además, como la variación de la energía potencial del sistema coincide con la variación de la energía cinética cambiada de signo, la suma de las energías potencial y cinética no puede cambiar. Esta relación se conoce con el nombre de principio de conservación de la energía mecánica. Este principio se deduce de las leyes de Newton y es una alternativa útil para resolver muchos problemas de mecánica.

La utilidad de la conservación de la energía mecánica está limitada por la presencia de fuerzas no conservativas, como el rozamiento. Cuando en un sistema está presente el rozamiento, la energía mecánica del sistema no se conserva, sino que disminuye. Como a menudo la energía mecánica no se conserva, la importancia de la conservación de la energía<sup>1</sup> no se apreció hasta el siglo XIX, cuando se descubrió que la desaparición de la energía mecánica siempre viene acompañada por la aparición de otro tipo de energía, a menudo energía térmica, que se indica por un aumento de la temperatura o por un cambio de fase (como la fusión del hielo). Se sabe que esta energía térmica está asociada con las energías cinética y potencial a escala microscópica.

Existen distintas formas de energía, como la energía química, la energía sonora, la energía electromagnética y la energía nuclear. Siempre que la energía de un sistema cambia, podemos explicar el cambio por la aparición o desaparición de energía en algún otro lugar. Esta observación experimental es la **ley de conservación de la energía**, una de las más importantes y fundamentales leyes de toda ciencia. Aunque la energía se transforme de una forma en otra, nunca se crea o se destruye.

➤ En este capítulo se sigue con el estudio de la energía iniciado en el capítulo 6, describiendo y aplicando la ley de conservación de la energía y examinando distintas clases de energía, incluida la energía térmica. También se analiza la famosa relación de Einstein entre la masa y la energía, y se descubre que los cambios de la energía en un sistema no son continuos, sino que se dan a “porciones” denominadas cuantos. Aunque en un sistema macroscópico la energía cuántica típica es tan pequeña que pasa desapercibida, su presencia tiene consecuencias profundas para los sistemas microscópicos como los átomos y las moléculas.

## 7.1 Conservación de la energía mecánica

El trabajo total realizado sobre cada partícula de un sistema es igual al cambio de la energía cinética  $\Delta E_{c_i}$  de esa partícula, por lo que el trabajo total realizado por todas las fuerzas  $W_{\text{total}}$  es igual al cambio en la energía cinética del sistema  $\Delta E_{c_{\text{sist}}}$

$$W_{\text{total}} = \sum \Delta E_{c_i} = \Delta E_{c_{\text{sist}}} \quad (7.1)$$

Las fuerzas internas pueden ser conservativas y no conservativas. El trabajo total, cambiado de signo, realizado por todas las fuerzas internas conservativas  $-W_c$  es igual al cambio de la energía potencial del sistema  $\Delta U_{\text{sist}}$ :

$$-W_c = \Delta U_{\text{sist}} \quad (7.2)$$

El trabajo total realizado por todas las fuerzas es igual a la suma del trabajo realizado por todas las fuerzas externas  $W_{\text{ext}}$ , más el trabajo realizado por todas las fuerzas internas no conservativas  $W_{\text{nc}}$ , más el trabajo realizado por todas las fuerzas internas conservativas  $W_c$ :

$$W_{\text{total}} = W_{\text{ext}} + W_{\text{nc}} + W_c$$

de donde reordenando los términos queda  $W_{\text{ext}} + W_{\text{nc}} = W_{\text{total}} - W_c$ . Sustituyendo de las ecuaciones 7.1 y 7.2 tenemos

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{nc}} = \Delta E_{c_{\text{sist}}} + \Delta U_{\text{sist}} \quad (7.3)$$

El término de la derecha puede simplificarse de modo que

$$\Delta E_{c_{\text{sist}}} + \Delta U_{\text{sist}} = \Delta(E_{c_{\text{sist}}} + U_{\text{sist}}) \quad (7.4)$$

<sup>1</sup> Puede haber otros factores en el sistema que aumenten la energía mecánica, por ejemplo cuando una batería hace funcionar un motor. Por lo tanto, la presencia del rozamiento no significa necesariamente que la energía mecánica del sistema disminuya.

La suma de la energía cinética  $E_{c_i}$  y la energía potencial  $U_{sist}$  de un sistema se denomina **energía mecánica total**,  $E_{mec}$ :

$$E_{mec} = E_{c_i} + U_{sist} \quad (7.5)$$

DEFINICIÓN —ENERGÍA MECÁNICA TOTAL

Combinando las ecuaciones 7.4 y 7.5, y sustituyendo en la ecuación 7.3 se obtiene

$$W_{total} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$

La energía mecánica de un sistema se conserva ( $E_{mec} = \text{constante}$ ) si el trabajo total realizado por todas las fuerzas no conservativas es cero.

$$E_{mec} = E_{c_i} + U_{sist} = \text{constante} \quad (7.6)$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Esta es la **ley de conservación de la energía mecánica** y es el origen de la expresión “fuerza conservativa”.

Si  $E_{mec\ i} = E_{c_i} + U_i$  es la energía mecánica inicial del sistema y  $E_{mec\ f} = E_{c_f} + U_f$  es la energía mecánica final, la conservación de la energía mecánica implica que

$$E_{mec\ f} = E_{mec\ i} \quad (\text{o } E_{c_f} + U_f = E_{c_i} + U_i) \quad (7.7)$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Muchos problemas mecánicos pueden resolverse estableciendo que la energía mecánica final de un sistema es igual a su energía mecánica inicial.

## Aplicaciones

Consideremos una esquiadora que parte del reposo en un punto de altura  $h_0$  por encima del punto más bajo de una colina nevada que suponemos sin rozamiento. ¿Cuál es la velocidad de la esquiadora a la altura  $h$  sobre el fondo? La energía mecánica del sistema Tierra-esquiadora se conserva, porque la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza conservativa, interna, de la gravedad. Si elegimos  $U = 0$  en el fondo de la colina, la energía potencial original es  $mgh_0$ . Esta es también la energía mecánica total, ya que la energía cinética inicial es cero. Así,

$$E_{mec\ i} = E_{c_i} + U_i = 0 + mgh_0$$

A la altura  $h$ , la energía potencial es  $mgh$  y la velocidad es  $v$ . Por lo tanto,

$$E_{mec\ f} = E_{c_f} + U_f = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

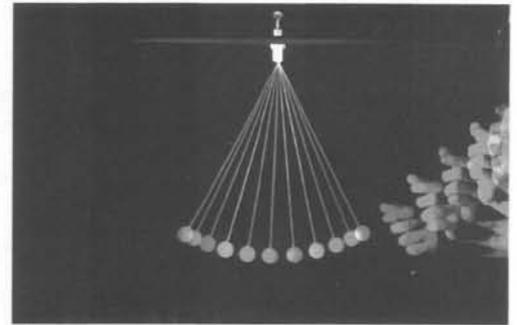
Igualando  $E_{mec\ f} = E_{mec\ i}$  resulta

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_0$$

es decir,

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h)}$$

El módulo de la velocidad de la esquiadora es el mismo que habría alcanzado si hubiese caído en caída libre una distancia  $h_0 - h$ . Sin embargo, durante el descenso por la colina nevada la esquiadora recorre una distancia mayor que la correspondiente a la caída libre y tarda más en recorrerla.



Fotografía de un péndulo con flash múltiple. Cuando la masa desciende, la energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética y la velocidad aumenta, como indica la distancia entre las posiciones del péndulo, cada vez mayor. La velocidad disminuye cuando la masa alcanza los extremos, y la energía cinética entonces pasa a energía potencial.

## EJEMPLO 7.1 | Golpeando un balón

Próximo al borde del tejado de un edificio de 12 m de altura, un joven golpea con el pie un balón con una velocidad inicial  $v_i = 16 \text{ m/s}$  y un ángulo de tiro de  $60^\circ$  por encima de la horizontal (figura 7.1). Despreciando la resistencia del aire, determinar (a) la altura por encima del edificio que alcanza el balón y (b) su velocidad justo antes de chocar contra el suelo.

**Planteamiento del problema** Como la gravedad es la única fuerza que realiza trabajo sobre el sistema balón-Tierra, la energía mecánica se conserva. En la parte más alta de su trayectoria, el balón se mueve horizontalmente con velocidad,  $v_{\text{cima}}$ , igual a la componente horizontal  $v_{ix}$  de su velocidad inicial. Elegimos  $y = 0$  en el tejado del edificio.

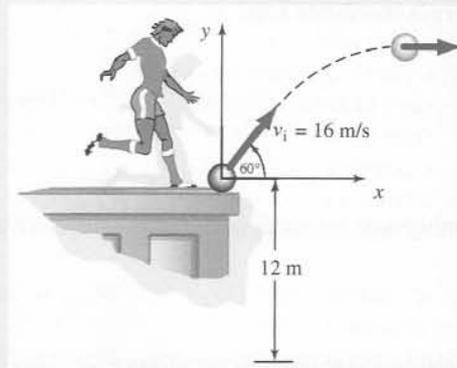


Figura 7.1

- (a) 1. La conservación de la energía mecánica relaciona la altura por encima del tejado con la velocidad inicial  $v_i$  y la velocidad en el punto más alto de su trayectoria  $v_{\text{cima}}$ :

$$E_{\text{mec cima}} = E_i$$

$$\frac{1}{2}mv_{\text{cima}}^2 + mgy_{\text{cima}} = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$

$$\frac{1}{2}mv_{\text{cima}}^2 + mgh_{\text{cima}} = \frac{1}{2}mv_i^2 + 0$$

2. Despejar  $h_{\text{cima}}$ :

$$h_{\text{cima}} = \frac{v_i^2 - v_{\text{cima}}^2}{2g}$$

3. La velocidad en la cima es igual a su velocidad horizontal inicial:

$$v_{\text{cima}} = v_{ix} = v_i \cos \theta$$

4. Sustituir el resultado del paso 3 en el paso 2 y despejar  $h_{\text{cima}}$ :

$$h_{\text{cima}} = \frac{v_i^2 - v_{\text{cima}}^2}{2g} = \frac{v_i^2 - v_i^2 \cos^2 \theta}{2g} = \frac{v_i^2(1 - \cos^2 \theta)}{2g}$$

$$= \frac{(16 \text{ m/s})^2 - (16 \text{ m/s})^2 \cos^2 60^\circ}{2(9,81 \text{ m/s}^2)} = \boxed{9,79 \text{ m}}$$

- (b) 1. Si  $v_f$  es la velocidad del balón justo antes de chocar contra el suelo, donde  $y = y_f = -12 \text{ m}$  su energía será:

$$E_{\text{mec f}} = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

2. Establecer que la energía mecánica final sea igual a la inicial:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + 0$$

3. Despejando  $v_f$  y haciendo  $y = -12 \text{ m}$ , se determina la velocidad final:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 - 2gy}$$

$$= \sqrt{16(\text{m/s})^2 - 2(9,81 \text{ m/s}^2)(-12 \text{ m})} = \boxed{22,2 \text{ m/s}}$$

## EJEMPLO 7.2 | El péndulo

Un péndulo es un dispositivo en el que una lenteja de masa  $m$  se ata a una cuerda de longitud  $L$ . Si ésta se mueve lateralmente de modo que la cuerda forme un ángulo  $\theta_0$  con la vertical y luego se deja caer desde el reposo, ¿cuál es (a) el módulo de la velocidad  $v$  en la parte inferior de la oscilación y (b) la tensión de la cuerda en esa posición? La resistencia del aire es despreciable.

**Planteamiento del problema** El sistema consiste en el péndulo, la Tierra y los soportes del péndulo. No hay fuerzas externas actuando sobre el sistema. Las únicas dos fuerzas internas que actúan sobre la lenteja (se desprecia la resistencia del aire) son la fuerza de gravedad  $mg$ , que es conservativa, y la tensión  $T$ . El trabajo que hace  $T$  aumenta a razón de  $T \cdot v$ . Como  $T$  es perpendicular a  $v$ , sabemos que  $T \cdot v = 0$ . Sólo  $mg$  realiza trabajo, con lo que sabemos que la energía mecánica del sistema lenteja-Tierra se conserva. Para encontrar el módulo de la velocidad de la lenteja, igualamos las energías mecánicas inicial y final. La tensión de la cuerda se obtiene usando la segunda ley de Newton.

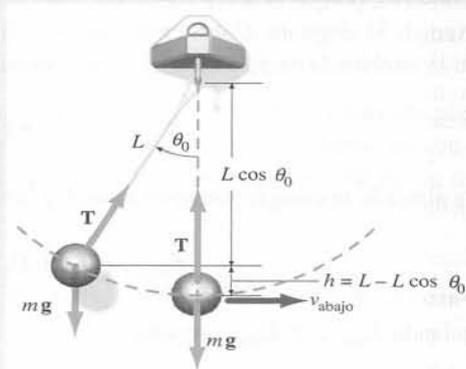


Figura 7.2

- (a) 1. Hacer un esquema del sistema en sus configuraciones inicial y final (figura 7.2). Elegimos  $y = 0$  en la posición más baja de la oscilación y  $y = h$  en la posición inicial:

2. Aplicar el principio de conservación de la energía mecánica. Inicialmente la lenteja está en reposo

$$E_{\text{mec f}} = E_{\text{mec i}}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$

$$\frac{1}{2}mv_{\text{abajo}}^2 + 0 = 0 + mgh$$

3. La conservación de la energía mecánica relaciona la velocidad  $v$  con la altura  $h$ :

$$\frac{1}{2}mv_{\text{abajo}}^2 = mgh$$

4. Despejar la velocidad  $v_{\text{abajo}}$ :

$$v_{\text{abajo}} = \sqrt{2gh}$$

5. Expresar esta velocidad en función del ángulo inicial  $\theta_0$  exige relacionar  $h$  con  $\theta_0$ . Véase figura 7.2:

$$L = L \cos \theta_0 + h$$

por lo tanto

$$h = L - L \cos \theta_0 = L(1 - \cos \theta_0)$$

6. Reemplazar  $h$  por el valor obtenido para expresar la velocidad en la parte más baja en función de  $\theta_0$ :

$$v_{\text{abajo}} = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_0)}$$

(b) 1. Cuando la lenteja está en la parte más baja del círculo, las fuerzas que actúan sobre ella son  $mg$  y  $T$ . Aplicar  $\Sigma F_y = ma_y$ :

$$T - mg = ma$$

2. En su posición más baja, la lenteja tiene una aceleración centrípeta  $v_{\text{abajo}}^2/L$  hacia el centro del círculo, dirigida hacia arriba:

$$a_y = \frac{v_{\text{abajo}}^2}{L} = \frac{2gL(1 - \cos \theta_0)}{L} = 2g(1 - \cos \theta_0)$$

3. Sustituir este valor de  $a_y$  en la ecuación obtenida en el paso 1 de (b) para deducir  $T$ :

$$\begin{aligned} T &= mg + ma_y = m(g + a_y) \\ &= m[g + 2g(1 - \cos \theta_0)] \\ &= \boxed{(3 - 2 \cos \theta_0)mg} \end{aligned}$$

**Observaciones** 1. La tensión de la cuerda en la parte más baja de la oscilación es mayor que el peso de la lenteja, ya que ésta está acelerando hacia arriba. 2. El paso 4 del apartado (b) muestra que para  $\theta_0 = 0$ ,  $T = mg$ , el resultado que se esperaría para una lenteja estacionaria colgando de una cuerda. 3. El paso 4 del apartado (a) muestra que el módulo de la velocidad en la parte más baja es el mismo que si la lenteja hubiese caído desde una altura  $h$ . Éste también se puede determinar usando directamente las leyes de Newton (ver problema 7.92), pero esta resolución es más difícil porque la componente de la aceleración tangencial al círculo cambia con la posición, y por lo tanto con el tiempo, de manera que no se pueden aplicar las fórmulas para aceleración constante.

### EJEMPLO 7.3 | Bloque que comprime un muelle

Se empuja un bloque de 2 kg contra un muelle cuya constante de fuerza es 500 N/m. Después de comprimirlo 20 cm, el muelle se suelta y proyecta el bloque primero por una superficie horizontal sin rozamiento, y luego por un plano inclinado  $45^\circ$ , también sin rozamiento, como se indica en la figura 7.3. ¿Qué distancia recorre el bloque antes de alcanzar momentáneamente el reposo?

**Planteamiento del problema** Hacer que el sistema incluya el bloque, la Tierra, la superficie horizontal, la rampa y la pared vertical a la cual está ligado el muelle. Después de liberar el muelle no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema; las únicas fuerzas que realizan trabajo son la fuerza ejercida por el muelle y la fuerza de la gravedad. Como ambas fuerzas son conservativas, la energía mecánica total del sistema se conserva. Determinar  $h$  a partir de la conservación de la energía mecánica y después determinar la distancia  $s$  recorrida por el bloque hacia arriba sobre el plano inclinado a partir de  $\sin 45^\circ = h/s$ .

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

- Hacer un esquema del sistema con la configuración inicial y la configuración final (véase la figura 7.3).
- Expresar la energía mecánica inicial en función de la distancia de compresión  $x$ .
- Expresar la energía mecánica final en función de la altura  $h$ .
- Aplicar el principio de conservación de la energía mecánica y despejar  $h$ .

#### Respuestas

$$E_{\text{mec } i} = U_{m i} + U_{g i} + E_{c i} = \frac{1}{2}kx^2 + 0 + 0$$

$$E_{\text{mec } f} = U_{m f} + U_{g f} + E_{c f} = 0 + mgh + 0$$

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2$$

$$h = \frac{kx^2}{2mg} = 0,51 \text{ m}$$

### ¡INTÉNTELO USTED MISMO!

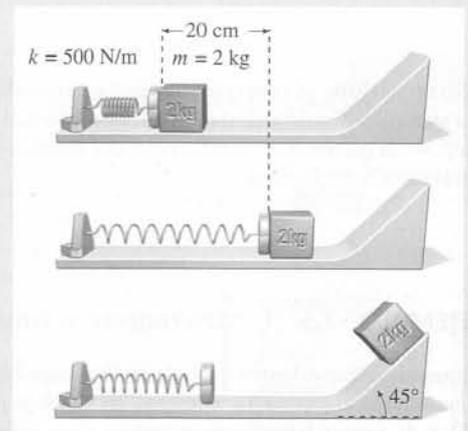


Figura 7.3

5. Determinar la distancia  $s$  a partir de  $h$  y el ángulo de inclinación

$$h = s \operatorname{sen} \theta$$

$$s = \boxed{0,72 \text{ m}}$$

**Observación** En este problema la energía mecánica inicial del sistema es la energía potencial del muelle. Esta energía se convierte primero en energía cinética y después en energía potencial gravitatoria.

**Ejercicio** Determinar el módulo de la velocidad del bloque en el momento justo en que se separa del muelle. (*Respuesta* 3,16 m/s.)

### EJEMPLO 7.4 | Caída de un bloque atado a un muelle

Un muelle de constante de fuerza  $k$  cuelga verticalmente. Un bloque de masa  $m$  se ata al extremo del muelle sin deformar y se le deja caer desde el reposo. Determinar la máxima distancia que cae el bloque antes de que comience a moverse hacia arriba.

**Planteamiento del problema** Cuando el bloque cae, al principio su velocidad crece, alcanza un valor máximo y después decrece hasta que se hace cero de nuevo cuando llega al punto más bajo. Como sólo actúan fuerzas conservativas, podemos aplicar la conservación de la energía mecánica al sistema Tierra-muelle-bloque.

- Hacemos un dibujo del sistema que muestre las posiciones inicial y final del bloque y el muelle (figura 7.4). Incluimos un eje  $y$ , eligiendo la dirección positiva hacia arriba. Elegimos la energía potencial gravitatoria del bloque igual a cero en su posición original  $y = 0$ , donde el muelle no está deformado. Sea  $d$  la distancia recorrida por el bloque al caer.
- Aplicamos la conservación de la energía mecánica para relacionar las posiciones inicial ( $y = 0$ ) y final ( $y = -d$ ):
- Calculamos  $d$ . Hay dos soluciones: una da  $d = 0$  y la otra es la solución que buscamos, es decir, la distancia máxima que recorre el bloque antes de comenzar de nuevo el movimiento hacia arriba.

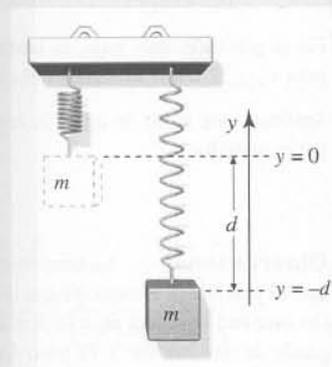


Figura 7.4

$$mgy_i + \frac{1}{2}ky_i^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 = mgy_f + \frac{1}{2}ky_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$mg(-d) + \frac{1}{2}k(-d)^2 + 0 = 0 + 0 + 0$$

$$\frac{1}{2}kd^2 - mgd = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}kd^2 - mg\right)d = 0$$

$$\text{Como } d \neq 0, d = \boxed{\frac{2mg}{k}}$$

**Observación** La energía potencial gravitatoria se convierte en la energía cinética del bloque más la energía potencial del muelle. En su punto más bajo, cuando el bloque está momentáneamente en reposo, la ganancia de energía potencial elástica del muelle es igual a la pérdida de energía potencial gravitatoria del sistema.

### EJEMPLO 7.5 | De regreso al futuro

Imaginemos que hemos viajado en el tiempo hasta finales del siglo XIX y estamos contemplando como unos antepasados nuestros, en su viaje de novios, se montan en las montañas rusas Flip Flap de Coney Island, que tienen un tramo que realiza un bucle, una vuelta vertical completa. Un saco de arena de 40 kg procedente de una zona en obras de la atracción cae en el asiento trasero de la vagoneta donde van nuestros familiares antes de entrar en el bucle. El impacto no causa ningún daño físico pero, en cambio, disminuye la velocidad del vehículo un 25%. La vagoneta había empezado a moverse, partiendo del reposo, desde un punto situado el doble de alto que el punto más alto del bucle. Despreciar cualquier pérdida debida al rozamiento o a la resistencia del aire. ¿Completará la vagoneta su recorrido sin caer?

**Planteamiento del problema** La vagoneta debe tener en el punto más alto del bucle una velocidad suficiente para mantenerse en las vías. Utilizar el principio de conservación de la energía mecánica para determinar la velocidad que lleva la vagoneta justo antes de la caída del saco y también para determinar la velocidad que tiene en el punto más alto del bucle. Usar la segunda ley de Newton para determinar la fuerza normal ejercida por el vehículo sobre los raíles.

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

1. Se dibuja la vagoneta y el recorrido que debe seguir en la atracción, con la posición de la vagoneta en el punto de salida y en el punto más alto del bucle (figura 7.5):
2. Se aplica la segunda ley de Newton para relacionar la velocidad en el punto más alto del bucle con la fuerza normal:
3. Usando la conservación de la energía mecánica, se determina la velocidad antes del impacto. La altura inicial es  $4R$ , donde  $R$  es el radio del bucle.
4. El impacto del saco de arena produce la reducción de la velocidad un 25%. La velocidad después del impacto es:
5. Usando la conservación de la energía mecánica, la velocidad en el punto más alto del bucle es:
6. Sustituyendo  $v_{\text{arriba}}^2$  en el paso 2 resulta:
7. Se obtiene  $F_n$ :
8.  $F_n$  es el módulo de la fuerza normal. No puede ser negativo:

$$F_n + mg = m \frac{v_{\text{arriba}}^2}{R}$$

$$U_1 + E_{c1} = U_0 + E_{c0}$$

$$0 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mg4R + 0$$

por lo tanto

$$v_1 = \sqrt{8Rg}$$

$$v_2 = 0,75v_1 = 0,75\sqrt{8Rg}$$

$$U_{\text{arriba}} + E_{c\text{arriba}} = U_2 + E_{c2}$$

$$mg2R + \frac{1}{2}mv_{\text{arriba}}^2 = 0 + \frac{1}{2}m(0,75^2 \cdot 8Rg)$$

por lo tanto

$$v_{\text{arriba}}^2 = (0,75^2 \cdot 8 - 4)Rg = 0,5Rg$$

$$F_n + mg = 0,5mg$$

$$F_n = -0,5mg$$

¡Ojo! La vagoneta cae.

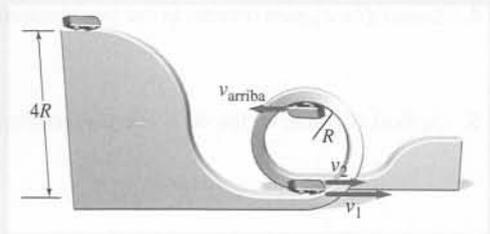


Figura 7.5

**Observación** Una pérdida del 25% de la velocidad supone perder casi un 44% de la energía cinética. Afortunadamente hay sistemas de seguridad que evitan que las vagonetas caigan, por lo que nuestros antepasados probablemente habrían sobrevivido. La mayor preocupación entre los usuarios de la atracción era la rotura del cuello. En el bucle, los viajeros estaban sometidos a aceleraciones del orden de 12g. Aquel bucle del Flip Flap fue el último de los bucles circulares en montañas rusas. Los bucles actuales tienen forma oval, más altos que anchos.

## EJEMPLO 7.6 | Dos bloques en una cuerda

Dos bloques se atan a los extremos de una cuerda ligera que pasa por una polea sin rozamiento, de masa despreciable. Los dos bloques tienen masas  $m_1$  y  $m_2$ , siendo  $m_2 > m_1$ , y están inicialmente en reposo. Determinar la velocidad de cada bloque cuando el más pesado ha caído una distancia  $h$ .

**Planteamiento del problema** Considerar que el sistema está formado por los dos bloques, la cuerda, la polea, sus soportes y la Tierra. No actúan fuerzas externas sobre el sistema, por lo que no hay trabajo realizado por fuerzas externas. Además, tampoco hay rozamiento cinético. Por lo tanto la energía mecánica del sistema se conserva.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

### Pasos

1. Dibujar un esquema del sistema mostrando tanto sus configuraciones inicial como final (figura 7.6). Sea  $h$  la distancia que cae la masa  $m_2$ .
2. Inicialmente, la energía cinética total del sistema es cero. Escribir la energía cinética total  $E_c$  del sistema cuando los bloques se mueven con velocidad  $v$ .
3. Suponemos que inicialmente la energía potencial gravitatoria total del sistema  $U$  es cero. Escribir la expresión para  $U$  cuando  $m_1$  ha subido una distancia  $h$  (y  $m_2$  ha bajado la misma distancia).

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

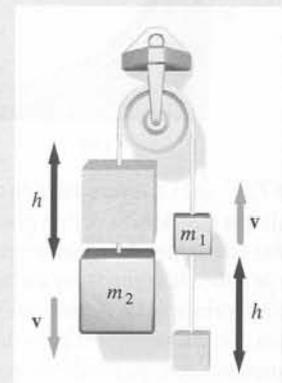


Figura 7.6

### Respuestas

$$E_c = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$U = m_1gh - m_2gh = (m_1 - m_2)gh$$

4. Sumar  $U$  y  $E_c$  para obtener la energía mecánica total  $E$ .

$$E = \bar{E}_c + U \\ = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + (m_1 - m_2)gh$$

5. Aplicar la conservación de la energía mecánica.

$$E = E_i \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + (m_1 - m_2)gh = 0$$

6. Despejar  $v$ .

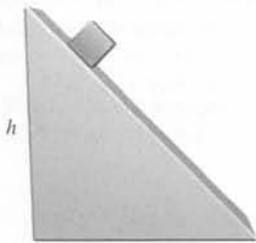
$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2}}$$

7. Determinar la aceleración  $a$  mediante  $dv/dt$ . Usar el resultado obtenido en el paso 6 y aplicar la regla de la cadena para la derivada. Notar que  $v = dh/dt$ .

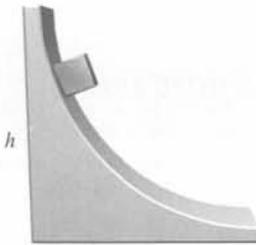
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \frac{dh}{dt} = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}g$$

**Comprobar el resultado** Este dispositivo, denominado *máquina de Atwood*, ya ha sido estudiado en los problemas 84-90 del capítulo 4. Allí vemos que la aceleración coincide con la obtenida del paso 7 de este ejercicio.

**Ejercicio** ¿Cuál es el módulo de la aceleración de cualquiera de los bloques si las masas son  $m_1 = 3 \text{ kg}$  y  $m_2 = 5 \text{ kg}$ ? (Respuesta  $a = 0,25g = 2,45 \text{ m/s}^2$ .)



(a)



(b)

**Figura 7.7** (a) La determinación de la velocidad de un bloque que desliza por un plano inclinado de pendiente constante, sin rozamiento, es sencilla, tanto si se aplica la segunda ley de Newton, como si se utiliza el principio de conservación de la energía mecánica. Sin embargo, si el plano inclinado carece de rozamiento, pero su pendiente no es constante, como ocurre en (b), el problema puede resolverse fácilmente utilizando el principio de conservación de la energía mecánica, mientras que la segunda ley de Newton requiere para su solución conocer la pendiente en cada uno de los puntos de la superficie de caída, y el cálculo es realmente tedioso.

Como hemos visto, la ley de conservación de la energía puede utilizarse como una alternativa a las leyes de Newton para resolver ciertos problemas de mecánica. Cuando no se está interesado en la magnitud tiempo  $t$ , la conservación de la energía mecánica es frecuentemente mucho más fácil de usar que la segunda ley de Newton (figura 7.7). Como la conservación de la energía mecánica se deduce de las leyes de Newton, los problemas que pueden resolverse con aquella propiedad también pueden deducirse directamente de las leyes de Newton, aunque frecuentemente siguiendo un camino mucho más difícil.

## 7.2 Conservación de la energía

En el mundo macroscópico siempre existen, en algún grado, fuerzas no conservativas, como la fuerza de rozamiento cinético, que disminuyen la energía mecánica de un sistema. Sin embargo, toda disminución de este tipo viene acompañada del incremento de energía térmica correspondiente. (Tenga en cuenta como se calientan los neumáticos de un coche después de un largo recorrido.) Otro tipo de fuerza no conservativa es la implicada en la deformación de los objetos. Cuando doblamos arriba y abajo una percha de alambre realizamos un trabajo, pero éste no aparece como energía mecánica. En su lugar, el alambre se calienta. El trabajo realizado al deformar la percha se disipa en forma de energía térmica. De igual modo, cuando una bola de masilla cae al suelo, ésta se calienta a medida que se deforma como consecuencia del impacto; la energía cinética disipada aparece en forma de energía térmica. Para el sistema bola-suelo-Tierra la energía total es la suma de la energía térmica y la energía mecánica. La energía total del sistema se conserva aunque individualmente no se conserven ni la energía mecánica total ni la energía térmica total.

Un tercer tipo de fuerza no conservativa está asociado a las reacciones químicas. Cuando tratamos sistemas en los cuales tienen lugar reacciones químicas, la suma de la energía mecánica más la energía térmica no se conserva. Por ejemplo, supongamos que una persona comienza a correr desde el reposo. Originalmente no posee energía cinética. Al correr, la energía química interna de sus músculos se convierte en energía cinética del cuerpo y se produce energía térmica. Es posible identificar y medir la energía química consumida. En este caso, la suma de la energía mecánica, térmica y química se conserva.

Incluso cuando se incluyen las energías térmica y química, la energía total del sistema no permanece siempre constante. La energía de un sistema puede cambiar por alguna forma de radiación, tal como las ondas sonoras o las ondas electromagnéticas. Sin embargo, *el*

aumento o disminución de la energía total de un sistema puede siempre explicarse por la aparición o desaparición de energía en algún otro lugar. Este resultado experimental se conoce como **ley de conservación de la energía** y es una de las leyes más importantes de la ciencia. Sea  $E_{\text{sist}}$  la energía total de un determinado sistema,  $E_{\text{entrada}}$  la energía absorbida por el sistema y  $E_{\text{salida}}$  la energía cedida por el mismo. La ley de conservación de la energía establece:

$$E_{\text{entrada}} - E_{\text{salida}} = \Delta E_{\text{sist}} \quad (7.8)$$

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Alternativamente,

La energía total del universo es constante. La energía puede transformarse de una forma en otra o ser transmitida de una región a otra, pero la energía no puede nunca ser creada o destruida.

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La energía total  $E$  de muchos sistemas familiares de nuestra vida diaria pueden explicarse completamente mediante la energía mecánica,  $E_{\text{mec}}$ , la energía térmica,  $E_{\text{térm}}$ , y la energía química,  $E_{\text{quím}}$ . Si queremos incluir cualquier otra forma posible de la energía, como son la electromagnética y la nuclear, añadiremos otro término,  $E_{\text{otras}}$ , y escribiremos de modo general

$$E_{\text{sist}} = E_{\text{mec}} + E_{\text{térm}} + E_{\text{quím}} + E_{\text{otras}} \quad (7.9)$$

### Teorema trabajo-energía

Una forma común de transferir energía (absorbida o cedida) de un sistema es intercambiando trabajo con el exterior. Si ésta es la única fuente de energía transferida<sup>1</sup>, la ley de conservación de la energía se expresa así:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sist}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{otras}} \quad (7.10)$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

en donde  $W_{\text{ext}}$  es el trabajo realizado sobre el sistema por fuerzas externas y  $\Delta E_{\text{sist}}$  es la variación de la energía total experimentada por el sistema. Este teorema trabajo-energía es un instrumento poderoso para estudiar una amplia variedad de sistemas. Obsérvese que si el sistema está formado por una sola partícula, su energía sólo puede ser cinética de modo que la ecuación 7.10 es equivalente al teorema trabajo-energía cinética estudiado en el capítulo 6.

### EJEMPLO 7.7 | La bola de masilla que cae

Una bola de masilla de masa  $m$  en reposo a una altura  $h$  sobre el suelo, perfectamente liso, se deja caer libremente. Analizar la aplicación de la ley de conservación de la energía (a) al sistema formado por la bola aislada, y (b) al sistema formado por la Tierra y la bola.

**Planteamiento del problema** Dos fuerzas actúan sobre la bola: la gravedad y la fuerza de contacto del suelo. Como el suelo no se mueve, la fuerza que ejerce no realiza ningún trabajo. No hay energía química u otros cambios energéticos de modo que podemos prescindir de los términos  $\Delta E_{\text{quím}}$  y  $\Delta E_{\text{otras}}$ . Si despreciamos la energía sonora emitida al chocar la bola contra el suelo, la única energía transferida hacia el sistema o desde él es el trabajo realizado por la gravedad, de modo que podemos utilizar el teorema trabajo-energía.



#### EXPLORANDO

Los transductores son dispositivos que transforman una forma de energía en otra. Para ver las características comunes del oído interno, de un micrófono, del sentido del tacto, por ejemplo, visite la dirección [www.whfreeman.com/tipler5e](http://www.whfreeman.com/tipler5e).

<sup>1</sup> La energía puede transferirse también cuando se intercambia calor entre un sistema y sus alrededores. Los intercambios de calor que se producen cuando hay una diferencia de temperatura entre un sistema y sus alrededores se tratan en el capítulo 19.

- (a) 1. Escribir el teorema trabajo-energía:
2. Las dos fuerzas externas sobre el sistema son la gravedad y la fuerza ejercida por el suelo. Éste no se mueve y por lo tanto no realiza trabajo. El único trabajo hecho sobre la bola es por gravedad:
3. Como la bola aislada es nuestro sistema, su energía mecánica es enteramente cinética, la cual es cero, tanto inicialmente como finalmente. Así, el cambio de energía mecánica es cero:
4. Sustituir  $mgh$  en  $W_{\text{ext}}$  y 0 en  $\Delta E_{\text{mec}}$  en el paso 1:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sist}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}}$$

$$W_{\text{ext}} = mgh$$

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0$$

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}}$$

$$mgh = 0 + \Delta E_{\text{térm}}$$

por lo tanto

$$\Delta E_{\text{térm}} = mgh$$

- (b) 1. No hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema bola-Tierra-suelo (la fuerza de la gravedad y el suelo son ahora internas al sistema), de modo que no hay trabajo externo realizado:

$$W_{\text{ext}} = 0$$

2. Expresar el teorema trabajo-energía con  $W_{\text{ext}} = 0$ :

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sist}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} = 0$$

$$0 = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}}$$

3. La energía mecánica inicial del sistema bola-Tierra es la energía potencial gravitatoria inicial y la energía mecánica final es cero:

$$E_{\text{mec } i} = mgh$$

$$E_{\text{mec } f} = 0$$

4. El cambio de energía mecánica del sistema bola-Tierra es, por lo tanto:

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0 - mgh = -mgh$$

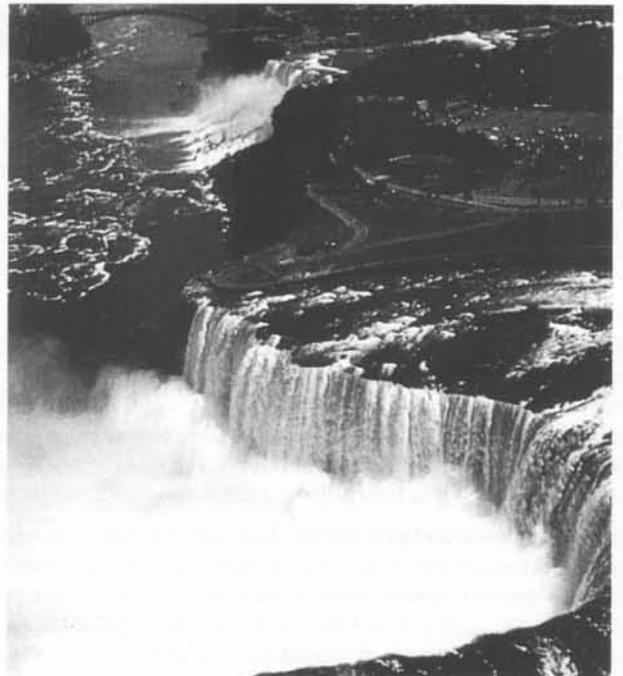
5. El teorema trabajo-energía nos da el mismo resultado encontrado en (a):

$$\Delta E_{\text{térm}} = -\Delta E_{\text{mec}} = mgh$$

**Observación** En (a) la energía se transfiere a la bola en virtud del trabajo realizado por la gravedad. Esta energía aparece en forma de energía cinética de la bola antes de que choque contra el suelo y como energía térmica después. La bola se calienta ligeramente y finalmente la energía se transfiere a los alrededores en forma de calor. En (b) la energía potencial inicial del sistema bola-Tierra-suelo se convierte en energía cinética de la bola antes de que choque contra el suelo y después en energía térmica.



En esta central de producción de energía eléctrica de Kansas (EE.UU), la energía química almacenada en el carbón fósil (montículo negro que aparece en la fotografía en la parte inferior derecha) es liberada por combustión para producir vapor de agua; este vapor impulsa las turbinas para generar electricidad. El calor no aprovechado se disipa en torres de refrigeración.



La energía potencial del agua en la parte superior de las Cataratas del Niágara se utiliza para producir energía eléctrica.

## Problemas en los que interviene el rozamiento cinético

Las fuerzas de rozamiento cinético ejercidas por una superficie sobre otra, cuando las superficies deslizan en contacto mutuo, disminuyen la energía mecánica total de un sistema e incrementan la energía térmica. Consideremos un bloque que comienza a moverse con velocidad inicial  $v_i$  y se desliza sobre una mesa hasta que se detiene (figura 7.8). Sean el bloque y la mesa nuestro sistema. Por lo tanto,  $\Delta E_{\text{quím}} = \Delta E_{\text{otras}} = 0$  y ningún trabajo externo se realiza sobre este sistema. El teorema trabajo-energía nos dice que

$$0 = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}}$$

La energía mecánica perdida es la energía cinética inicial del bloque

$$\Delta E_{\text{mec}} = -\frac{1}{2} m v_i^2 \quad (7.11)$$

Relacionemos ahora la pérdida de energía mecánica con la fuerza de rozamiento. Si  $f$  es el módulo de la fuerza de rozamiento, la segunda ley de Newton expresa que

$$-f = ma$$

Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por  $\Delta s$  se obtiene

$$-f \Delta s = ma \Delta s = m\left(\frac{1}{2}v_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2\right) = -\frac{1}{2} m v_i^2 \quad (7.12)$$

en donde  $\Delta s$  es el desplazamiento del bloque y hemos utilizado la fórmula de aceleración constante  $2a \Delta s = v_f^2 - v_i^2$  (con  $v_f = 0$ ). Comparando las ecuaciones 7.11 y 7.12 resulta

$$f \Delta s = -\Delta E_{\text{mec}} \quad (7.13)$$

Obsérvese que la magnitud  $-f \Delta s$  no es trabajo realizado por rozamiento sobre el bloque deslizando, puesto que un análisis cuidadoso muestra que el desplazamiento real de la fuerza de rozamiento cinético no es, en general, igual al desplazamiento del bloque.<sup>1</sup> Sin embargo, puede demostrarse que  $f \Delta s$  es igual al incremento de energía térmica del sistema bloque-mesa debido a la disipación de energía mecánica del sistema. Esta energía térmica se produce en la superficie inferior del bloque y en la superior de la mesa cuando el bloque se desliza sobre ésta. Así,

$$f \Delta s = \Delta E_{\text{térm}} \quad (7.14)$$

ENERGÍA DISIPADA POR ROZAMIENTO

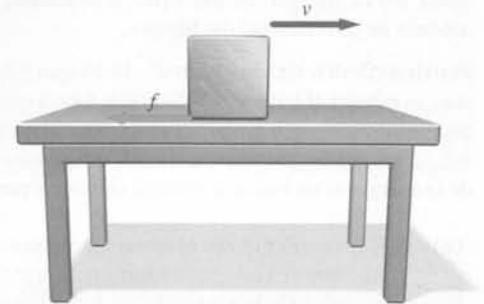
Sustituyendo este resultado en el teorema trabajo-energía (con  $E_{\text{quím}} = E_{\text{otras}} = 0$ ) se obtiene

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} = \Delta E_{\text{mec}} + f \Delta s \quad (7.15)$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA PARA PROBLEMAS CON ROZAMIENTO

donde  $\Delta s$  es la distancia a lo largo de la cual una superficie se desliza respecto a la otra. Si sobre el sistema no se realiza trabajo externo, la energía disipada por rozamiento es igual a la disipación de energía mecánica:

$$\Delta E_{\text{térm}} = f \Delta s = -\Delta E_{\text{mec}} \quad (W_{\text{ext}} = 0) \quad (7.16)$$



**Figura 7.8** Un bloque desliza sobre una mesa rugosa. La fuerza de rozamiento reduce la energía mecánica del sistema bloque-mesa.



Central de energía eólica irlandesa en construcción. El proyecto Arklow Banks en el Mar de Irlanda tendrá 200 turbinas y producirá 520 MW de potencia eléctrica (tres veces la capacidad de todas las “granjas” eólicas marinas juntas que hasta el momento funcionan en el mundo).

<sup>1</sup> El trabajo realizado por el rozamiento cinético se estudia en detalle en B. A. Sherwood y W. H. Bernard, “Work and Heat Transfer in the Presence of Sliding Friction” *American Journal of Physics*, **52**, 1001 (1984).

### EJEMPLO 7.8 | Un bloque en una mesa

Una persona empuja con una fuerza horizontal de 25 N un bloque de 4 kg, inicialmente en reposo sobre una mesa horizontal, una distancia de 3 m. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la mesa es 0,35. Determinar (a) el trabajo externo sobre el sistema bloque-mesa, (b) la energía disipada por rozamiento, (c) la energía cinética final del bloque y (d) el módulo de la velocidad del bloque.

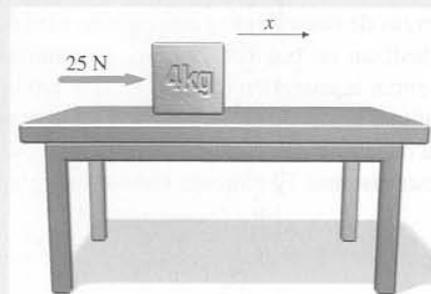


Figura 7.9

**Planteamiento del problema** El bloque y la mesa constituyen el sistema (figura 7.7). La persona es externa al sistema, por lo que la fuerza que ejerce es externa. La velocidad final del bloque se deduce de su energía cinética final, la cual determinamos mediante el teorema trabajo-energía con  $\Delta E_{\text{quím}} = 0$  y  $\Delta E_{\text{térm}} = f \Delta s$ . La energía del sistema aumenta por el trabajo externo. Parte del aumento de la energía es en forma de energía cinética y parte en forma de energía térmica.

- (a) Hay cuatro fuerzas externas que actúan sobre el sistema, aunque sólo hay una que realiza trabajo. El trabajo externo realizado es el producto de la fuerza de la persona por la distancia que se ha movido el bloque.

$$\begin{aligned}\Sigma W_{\text{ext}} &= W_{\text{persona sobre el bloque}} + W_{\text{gravedad sobre el bloque}} \\ &\quad + W_{\text{gravedad sobre la mesa}} + W_{\text{suelo sobre la mesa}} \\ &= F_{\text{persona}} \Delta x + 0 + 0 + 0 = (25 \text{ N})(3 \text{ m}) \\ &= \boxed{75 \text{ J}}\end{aligned}$$

- (b) La energía disipada por rozamiento es  $f \Delta x$  (el módulo de la fuerza normal es  $mg$ ):

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{térm}} &= f \Delta x = \mu_c F_n \Delta x = \mu_c mg \Delta x \\ &= (0,35)(4 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})(3 \text{ m}) = \boxed{41,2 \text{ J}}\end{aligned}$$

- (c) 1. Aplicar el teorema trabajo-energía para determinar la energía cinética final:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}}$$

2. Como no hay fuerzas conservativas internas que hagan trabajo, el cambio en la energía potencial es cero. El cambio en la energía cinética es igual a la variación de la energía mecánica:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{mec}} &= \Delta U + \Delta E_c \\ &= 0 + (E_{c_f} - 0) = E_{c_f}\end{aligned}$$

3. Sustituir este resultado en el teorema trabajo-energía:

$$W_{\text{ext}} = E_{c_f} + \Delta E_{\text{térm}}$$

por lo tanto

$$E_{c_f} = W_{\text{ext}} - \Delta E_{\text{térm}} = 75,0 \text{ J} - 41,2 \text{ J} = \boxed{33,8 \text{ J}}$$

- (d) El módulo de la velocidad final del bloque está relacionado con su energía cinética. Despejar la velocidad final del bloque:

$$E_{c_f} = \frac{1}{2} m v_f^2$$

con lo cual

$$v_f = \sqrt{\frac{2E_{c_f}}{m}} = \sqrt{\frac{2(33,8 \text{ J})}{4 \text{ kg}}} = \boxed{4,11 \text{ m/s}}$$

### EJEMPLO 7.9 | Un trineo en la nieve

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un trineo se desliza por una superficie horizontal cubierta de nieve con una velocidad inicial de 4 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el trineo y la nieve es 0,14, ¿qué distancia recorrerá hasta alcanzar el reposo?

**Planteamiento del problema** Elegimos el trineo y la nieve como nuestro sistema y aplicamos el teorema trabajo-energía.

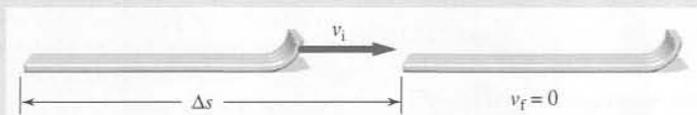


Figura 7.10

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

1. Dibujar el sistema en sus configuraciones inicial y final (figura 7.10).
2. Aplicar el teorema trabajo-energía.

#### Respuestas

$$\begin{aligned}W_{\text{ext}} &= \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} \\ &= (\Delta U + \Delta E_c) + f \Delta s\end{aligned}$$

- Determinar  $f$ . La fuerza normal es igual al peso.
- No hay fuerzas conservativas que realicen trabajo y no hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema. Eliminar dos términos del resultado del paso 2 teniendo en cuenta estas dos observaciones.
- Expresar el cambio en la energía cinética en función de la masa y de la velocidad inicial, y obtener  $\Delta s$ .

$$f = \mu_c F_n = \mu_c mg$$

$$W_{\text{ext}} = \Delta U = 0$$

y

$$W_{\text{ext}} = \Delta U + \Delta E_c + f \Delta s$$

$$0 = 0 + \Delta E_c + \mu_c mg \Delta s$$

$$\Delta s = \frac{v_f^2}{2\mu_c g} = \boxed{5,82 \text{ m}}$$

## EJEMPLO 7.10 | Un tobogán

Una niña de masa 40 kg se desliza hacia abajo por un tobogán de 8 m de largo inclinado  $30^\circ$ . El coeficiente de rozamiento cinético entre la niña y el tobogán es  $\mu_c = 0,35$ . Si la niña parte del reposo desde el punto más alto del tobogán, a una altura de 4 m sobre el suelo, ¿qué velocidad tiene al llegar al suelo?

**Planteamiento del problema** Cuando la niña se desliza hacia abajo, parte de su energía potencial se convierte en cinética y parte en energía térmica debido al rozamiento. Nuestro sistema es niña-tobogán-Tierra. Aplicamos el teorema trabajo-energía.

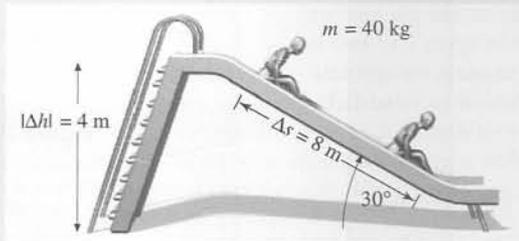


Figura 7.11

- Se dibuja un esquema del sistema mostrando sus configuraciones inicial y final (figura 7.11).
- Se escribe la ecuación de conservación de la energía:
- La energía cinética inicial es cero. La velocidad al final del tobogán está relacionada con la energía cinética final.
- Sobre el sistema no actúan fuerzas externas:
- El cambio de la energía potencial está relacionado con el cambio de altura  $\Delta h$  (que es negativo).
- Para determinar  $f_c$  aplicamos la segunda ley de Newton a la niña. Primero se dibuja el diagrama de fuerzas (figura 7.12):
- Después se aplica la segunda ley de Newton. La componente normal de la aceleración es cero. Para determinar  $F_n$  tenemos en cuenta las componentes en la dirección normal y obtenemos  $f_c$  teniendo en cuenta que  $f_c = \mu_c F_n$ :
- La relación entre  $\Delta s$  y  $\Delta h$  es trigonométrica:
- Sustituyendo en el resultado del paso 2:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} \\ &= (\Delta U + \Delta E_c) + f \Delta s \end{aligned}$$

$$\Delta E_c = E_{c_f} - 0 = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$W_{\text{ext}} = 0$$

$$\Delta U = mg \Delta h$$

$$F_n - mg \cos \theta = 0$$

por lo tanto

$$f_c = \mu_c F_n = \mu_c mg \cos \theta$$

$$|\Delta h| = \Delta s \sin \theta$$

$$0 = mg \Delta h + \frac{1}{2} m v_f^2 + \mu_c mg \cos \theta \Delta s$$

$$= -mg \Delta s \sin \theta + \frac{1}{2} m v_f^2 + \mu_c mg \cos \theta \Delta s$$

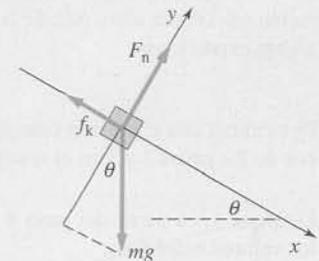


Figura 7.12

10. Despejando para  $v_f$  se obtiene:

$$\begin{aligned} v_f^2 &= 2g \Delta s (\sin \theta - \mu_c \cos \theta) \\ &= 2(9,81 \text{ m/s}^2)(8 \text{ m})(\sin 30^\circ - 0,35 \cos 30^\circ) \\ &= 30,9 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

y entonces

$$v_f = \boxed{5,60 \text{ m/s}}$$

**Observación** Nótese que el resultado es independiente de la masa de la niña.

**Ejercicio** Para el sistema Tierra-niña-tobogán, calcular (a) la energía mecánica inicial, (b) la energía mecánica final y (c) la energía disipada por rozamiento. (Respuestas (a) 1570 J, (b) 618 J (c) 952 J.)

### EJEMPLO 7.11 | Dos bloques y un muelle

Un bloque de 4 kg cuelga de una cuerda ligera que a través de una polea sin rozamiento y sin masa está conectada a un bloque de 6 kg que descansa sobre una plataforma. El coeficiente de rozamiento cinético es  $\mu_c = 0,2$ . El bloque de 6 kg se empuja contra un muelle. El muelle tiene una constante de fuerza de 180 N/m y se comprime 30 cm. Determinar la velocidad (módulo) de los bloques cuando el muelle se libera y el bloque de 4 kg cae una distancia de 40 cm.

**Planteamiento del problema** La velocidad de los bloques se deduce de su energía cinética final. Consideremos que el sistema está formado por todo lo que se muestra en la figura 7.13 más la Tierra. Este sistema tiene energía potencial gravitatoria y elástica. Aplicar el teorema trabajo-energía. Conociendo la energía cinética de los bloques se puede determinar el módulo de su velocidad.

¡INTÉNELO USTED MISMO!

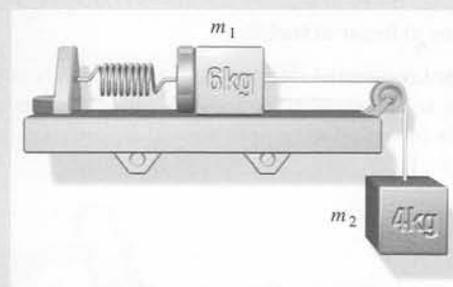


Figura 7.13

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

- Plantear la ecuación de la conservación de la energía del sistema.
- Sobre el sistema no hay fuerzas externas.
- Construir una tabla donde se incluyan los términos de la energía mecánica iniciales, cuando el muelle está comprimido 30 cm; y finales, cuando el bloque se ha movido una distancia  $\Delta s = 40$  cm y el muelle se ha extendido. Hacer que la energía potencial gravitatoria de la configuración inicial sea cero. Añadir la diferencia (final menos inicial) entre ambas expresiones.
- Determinar una expresión para  $f_c$  que incluya  $\mu_c$ . Sustituya los resultados de los pasos 2 y 3 en el resultado del paso 1.
- Despejar  $v_f^2$  a partir del paso 4 y, finalmente obtener  $v_f$  sustituyendo los valores numéricos:

#### Respuestas

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} \\ &= (\Delta U_m + \Delta U_g + \Delta E_c) + f \Delta s \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = 0$$

	$U_m$	$U_g$	$E_c$
Final	0	$-m_2 g \Delta s$	$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$
Inicial	$\frac{1}{2}kx_i^2$	0	0
Diferencia	$-\frac{1}{2}kx_i^2$	$-m_2 g \Delta s$	$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$

$$0 - \frac{1}{2}kx_i^2 - m_2 g \Delta s + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 + \mu_c m_1 g \Delta s$$

$$v_f^2 = \frac{kx_i^2 + 2m_2 g \Delta s - 2\mu_c m_1 g \Delta s}{m_1 + m_2}$$

por lo tanto

$$v_f = \boxed{1,95 \text{ m/s}}$$

**Observación** Esta solución supone que la cuerda permanece tensa en todo momento. Esto será cierto si la aceleración de  $m_1$  es menor que  $g$ , es decir, si la fuerza neta sobre  $m_1$  es menor que  $m_1 g = (6 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg}) = 58,9 \text{ N}$ . Inicialmente, la fuerza ejercida por el muelle sobre  $m_1$  tiene el módulo  $k \Delta x_i = (180 \text{ N/m})(0,3 \text{ m}) = 54,0 \text{ N}$ , y la fuerza de rozamiento  $f_c = \mu_c m_1 g = 0,2(58,9 \text{ N}) = 11,8 \text{ N}$ . Estas fuerzas se cambiarán para realizar una fuerza de 42,2 N dirigida hacia la derecha. Como la fuerza del muelle decrece a medida que el bloque  $m_1$  se mueve hacia delante, la aceleración del bloque de 6 kg siempre será menor que  $g$  y la cuerda permanecerá tensa en todo momento.

## Sistemas con energía química

A veces la energía química interna de un sistema se transforma en energía mecánica y térmica sin que ningún agente exterior realice trabajo. Por ejemplo, al andar empujamos con los pies el suelo hacia atrás y el suelo nos empuja hacia delante con la fuerza de rozamiento estático. Esta fuerza nos acelera, pero *no* realiza trabajo. El desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es cero (suponiendo que los zapatos no deslizan sobre el suelo) y por lo tanto, no se realiza ningún trabajo y ninguna energía se transfiere del suelo a nuestro cuerpo. La energía cinética del cuerpo procede de la conversión de energía química del mismo, que a su vez procede de los alimentos que ingerimos. Consideraremos un caso análogo en el ejemplo siguiente.



Esta pizza contiene aproximadamente 16 MJ de energía, aproximadamente la mitad de energía de 1 L (0,26 galones) de gasolina.

### EJEMPLO 7.12 | Subiendo escaleras

Un hombre de masa  $m$  sube por una escalera hasta una altura  $h$ . Analizar la aplicación del principio de conservación de la energía al sistema formado por el hombre aislado.

**Planteamiento del problema** Dos fuerzas actúan sobre el hombre: la gravedad y la fuerza de contacto de los peldaños sobre sus pies. La fuerza de gravedad realiza un trabajo negativo sobre el hombre. Para determinar el trabajo realizado por la fuerza de la escalera sobre los pies del hombre, hay que considerar la fuerza de contacto que ejerce un peldaño sobre cada uno de los pies. Sin embargo, la suela del zapato no se mueve mientras está en contacto con el peldaño y, por lo tanto, no se realiza trabajo.

1. Expresar el teorema trabajo-energía:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sist}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{tér}} + \Delta E_{\text{quím}}$$

2. Hay dos fuerzas externas que actúan sobre el sistema, la fuerza de la gravedad y la fuerza de los peldaños sobre los pies. La fuerza de gravedad realiza un trabajo negativo ya que su dirección es la opuesta al desplazamiento de la persona que sube por la escalera. La fuerza de los peldaños no hace trabajo porque el punto de aplicación, las suelas de los zapatos del hombre, no se mueve mientras se aplica la fuerza:

$$W_{\text{ext}} = -mgh$$

3. Como nuestro sistema está formado por el hombre aislado, su energía mecánica es enteramente cinética, la cual es cero, tanto inicial como finalmente:

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0$$

4. Aplicando estos resultados en el teorema trabajo-energía:

$$-mgh = \Delta E_{\text{tér}} + \Delta E_{\text{quím}}$$

**Observación** Si no se realizaran cambios de energía térmica, la energía química del hombre disminuiría en  $mgh$ . Como el rendimiento del cuerpo es relativamente bajo, la cantidad de energía química convertida en el cuerpo del hombre es considerablemente mayor que  $mgh$ . El exceso de energía será posiblemente transferido en forma de calor a los alrededores.

**Ejercicio** Analizar la conservación de la energía en el sistema hombre más Tierra. (*Respuesta* En este sistema no se realiza ningún trabajo externo, de modo que la energía total, que ahora incluye la energía potencial, se conserva. La variación de energía mecánica es ahora  $mgh$ , de modo que el teorema trabajo-energía nos da  $0 = mgh + \Delta E_{\text{tér}} + \Delta E_{\text{quím}}$ .)

### EJEMPLO 7.13 | Yendo cuesta arriba

Un coche de 1000 kg se mueve a una velocidad constante de 100 km/h = 28 m/s por una pendiente hacia arriba del 10%. (Es decir, la carretera se eleva 1 m por cada 10 m de distancia horizontal, lo que equivale a un ángulo de inclinación  $\theta$ , tal que  $\text{tg } \theta = 0,1$  (figura 7.14)). (a) Si la eficiencia es del 15%, ¿cuál es la tasa de consumo de energía química del sistema coche-Tierra-atmósfera? (La eficiencia es la fracción de energía química consumida que aparece en forma de energía mecánica.) (b) ¿A qué ritmo se produce energía térmica?

**Planteamiento del problema** Parte de la energía incrementa la energía potencial del coche cuando éste asciende por la cuesta, y otra parte aumenta la energía térmica, mucha de la cual se expulsa por el tubo de escape. Aplicar el teorema trabajo-energía al sistema que forman el coche, la cuesta, el aire y la Tierra.

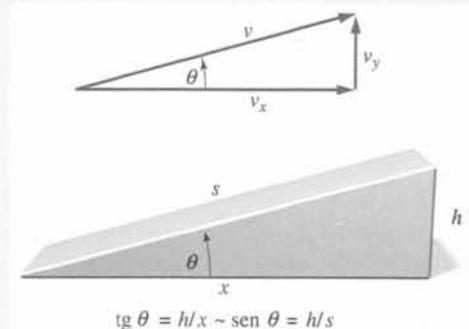


Figura 7.14

- (a) 1. La tasa con que se pierde energía química, es decir, la potencia suministrada por el motor, es la disminución (signo negativo) de energía por unidad de tiempo:
2. El incremento de energía mecánica es igual al 15% de la disminución de la energía química:
3. Determinar la tasa de consumo de energía química.
4. El coche se mueve a velocidad constante, por lo que  $\Delta E_c = 0$  y  $\Delta E_{mec} = \Delta U$ . Relacionar el cambio de la energía mecánica con la variación de altura  $\Delta h$  y sustituir en el resultado del paso 3:
5. Convertir los incrementos en derivadas, es decir, hacer el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero:
6. La tasa de cambio de  $h$  es  $v_y$ , que está relacionada con el módulo de la velocidad  $v$  tal como se muestra en la figura 7.14:
7. Como el ángulo  $\theta$  es pequeño podemos aproximar  $\text{sen } \theta$  por  $\text{tg } \theta$ :
8. Calcular la tasa de consumo de energía química:

$$\text{Tasa de consumo de energía química} = \frac{-\Delta E_{quím}}{\Delta t}$$

$$\Delta E_{mec} = 0,15 |\Delta E_{quím}| = -0,15 \Delta E_{quím}$$

$$\frac{-\Delta E_{quím}}{\Delta t} = \frac{1}{0,15} \frac{\Delta E_{mec}}{\Delta t}$$

$$\Delta E_{mec} = mg \Delta h$$

por lo tanto

$$\frac{-\Delta E_{quím}}{\Delta t} = \frac{mg \Delta h}{0,15 \Delta t}$$

$$\frac{dE_{quím}}{dt} = \frac{mg dh}{0,15 dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = v_y = v \text{ sen } \theta$$

$$\text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_{quím}}{dt} &= \frac{mg}{0,15} v \text{ sen } \theta \approx \frac{mg}{0,15} v \text{ tg } \theta \\ &= \frac{(1000 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})}{0,15} (27,8 \text{ m/s}) 0,1 \\ &= \boxed{182 \text{ kW}} \end{aligned}$$

- (b) 1. Plantear la relación trabajo-energía cinética:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térn} + \Delta E_{quím}$$

2. Convertir los incrementos a derivadas y calcular  $dE_{térn}/dt$ :

$$0 = \frac{dE_{mec}}{dt} + \frac{dE_{térn}}{dt} + \frac{dE_{quím}}{dt}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{dE_{térn}}{dt} &= -\frac{dE_{mec}}{dt} - \frac{dE_{quím}}{dt} = 0,15 \frac{dE_{quím}}{dt} - \frac{dE_{quím}}{dt} \\ &= -0,85 \frac{dE_{quím}}{dt} = 0,85 (182 \text{ kW}) = \boxed{155 \text{ kW}} \end{aligned}$$

**Observación** Los vehículos propulsados por motores de gasolina suelen tener una eficiencia del 15%. Alrededor del 85% de la energía química se transforma en energía térmica, la mayor parte de la cual sale por el tubo de escape. También se produce energía térmica a causa del rozamiento por rodadura y de la resistencia del aire. El contenido energético de la gasolina es de 31,8 MJ/L.

## 7.3 Masa y energía

En 1905, Albert Einstein publicó su teoría especial de la relatividad, que incluye su famosa ecuación

$$E_0 = mc^2 \quad (7.17)$$

en donde  $c = 3 \times 10^8$  m/s es la velocidad de la luz en el vacío. En capítulos posteriores estudiaremos esta teoría con detalle.

De acuerdo con la ecuación 7.17, una partícula o sistema de masa  $m$  posee la energía en “reposo”  $mc^2$ . Esta energía es intrínseca a la partícula. Consideremos el positrón, partícula emitida en un proceso nuclear llamado desintegración beta. Los positrones y los electrones tienen masa idénticas, pero carga eléctrica igual y opuesta. Cuando un positrón choca con un electrón en la materia tiene lugar la aniquilación electrón-positrón, las dos partículas desapa-

TABLA 7.1 Energías en reposo de algunas partículas elementales y núcleos ligeros

Partícula	Símbolo	Energía en reposo (MeV)	
Electrón	e <sup>-</sup>	0,5110	
Positrón	e <sup>+</sup>	0,5110	
Protón	p	938,280	
Neutrón	n	939,573	
Deuterón	d	1875,628	
Tritón	t	2808,944	
Helio-3	<sup>3</sup> He	2808,39	
Partícula alfa	α	3727,409	

recen, y su energía aparece en forma de radiación electromagnética. Si las dos partículas están inicialmente en reposo, la energía de la radiación electromagnética es igual a la energía en reposo del electrón más la del positrón.

En física atómica y nuclear las energías se expresan normalmente en unidades de electrón-voltios (eV) o megaelectrón-voltios (1 MeV = 10<sup>6</sup> eV). Una unidad conveniente para las masas de las partículas atómicas es eV/c<sup>2</sup> o MeV/c<sup>2</sup>. La tabla 7.1 relaciona las energías en reposo (y por lo tanto, las masas) de algunas partículas elementales y núcleos ligeros. La energía total en reposo de un positrón más un electrón es 2(0,511 MeV), que es la energía radiante emitida en el proceso de aniquilación.

La energía en reposo de un sistema puede consistir en la energía potencial u otras energías internas del sistema, además de las energías en reposo intrínsecas de las partículas que lo forman. Si el sistema en reposo absorbe energía, ΔE, su energía en reposo crece y su masa se incrementa en

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \quad (7.18)$$

Consideremos dos bloques de 1 kg conectados por un muelle de constante de fuerza  $k$ . Si estiramos el muelle una distancia  $x$ , la energía potencial del sistema crece en  $\Delta U = \frac{1}{2}kx^2$ . De acuerdo con la ecuación 7.18, la masa del sistema se incrementa también en  $\Delta M = \Delta U/c^2$ . Como  $c$  es un número extraordinariamente grande, este incremento de masa no puede observarse en sistemas macroscópicos. Por ejemplo, supongamos  $k = 800$  N/m y  $x = 10$  cm = 0,1 m. La energía potencial del sistema formado por el muelle es, por lo tanto,  $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(800 \text{ N/m})(0,1 \text{ m})^2 = 4$  J. El incremento de masa del sistema es

$$\Delta M = \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{4 \text{ J}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 4,44 \times 10^{-17} \text{ kg}$$

El incremento relativo de masa  $\Delta M/M \approx 2 \times 10^{-17}$  es demasiado pequeño para poder ser observado.

## Energía nuclear

En las reacciones nucleares, los cambios energéticos constituyen frecuentemente una fracción apreciable de la energía en reposo del sistema. Consideremos, por ejemplo, el deuterón o núcleo del deuterio, que es un isótopo del hidrógeno, llamado también hidrógeno pesado. El deuterón está formado por un protón y un neutrón ligados conjuntamente. Según la tabla 7.1, la masa del protón es 938,28 MeV/c<sup>2</sup> y la masa del neutrón 939,57 MeV/c<sup>2</sup>. La suma de

ambas masas es  $1877,85 \text{ MeV}/c^2$ . Sin embargo, la masa del deuterón es  $1875,63 \text{ MeV}/c^2$ , o sea, inferior a la suma de las dos partículas que lo constituyen en  $2,22 \text{ MeV}/c^2$ . Obsérvese que esta diferencia de masa es  $\Delta M/M \approx 1,2 \times 10^{-3}$ , mucho mayor que las incertidumbres inherentes a las medidas de estas masas y casi 14 órdenes de magnitud por encima del  $2 \times 10^{-17}$  tratado anteriormente para el sistema muelle-bloques.

Las moléculas de agua dura (óxido de deuterio) se producen en el agua previamente enfriada de un reactor nuclear, cuando neutrones chocan con los núcleos de hidrógeno (protones) de las moléculas de agua. Cuando un neutrón lento es capturado por un protón, se libera una energía de  $2,22 \text{ MeV}$  en forma de radiación electromagnética. Así, la masa de un átomo de deuterio es  $2,22 \text{ MeV}/c^2$  menor que la suma de las masas de un átomo de hidrógeno y un neutrón aislados.

Este proceso puede invertirse, rompiendo un deuterón en sus partes constituyentes, si se transfieren por lo menos  $2,22 \text{ MeV}$  de energía al deuterón con radiación electromagnética o mediante colisiones con otras partículas energéticas. Toda la energía transferida que sobrepase los  $2,22 \text{ MeV}$  aparece como energía cinética del protón y del neutrón resultantes.

La energía necesaria para romper un núcleo en sus partes constituyentes se denomina **energía de enlace** del núcleo.

El deuterón es un ejemplo de un sistema ligado. Su energía en reposo es menor que la energía en reposo de sus partes constituyentes, de tal modo que es necesario añadir energía al sistema para romperlo. Si la energía en reposo de un sistema es superior a la energía en reposo de sus partes, se dice que el sistema no está ligado. Un ejemplo es el uranio-236, que se rompe o **fisiona** en dos núcleos más pequeños.<sup>1</sup> La suma de las masas de las partes resultantes es inferior a la masa del núcleo original. Así, la masa del sistema decrece y se libera energía.

En la fusión nuclear, dos núcleos muy ligeros, tales como el deuterón y el tritón (núcleo del isótopo del hidrógeno llamado tritio) se unen (se fusionan) entre sí. La masa en reposo del núcleo resultante es inferior a la masa de las partes originales y se libera energía de nuevo. En una reacción química que produce energía, como por ejemplo la combustión del carbón, el decrecimiento de la masa es del orden de  $1 \text{ eV}/c^2$  por átomo. Este valor es más de un millón de veces más pequeño que las variaciones de masa en las reacciones nucleares y no se observa fácilmente.

## EJEMPLO 7.14 | Energía de enlace

Un átomo de hidrógeno formado por un protón y un electrón tiene una energía de enlace de  $13,6 \text{ eV}$ . ¿En qué porcentaje la masa del protón más la del electrón es superior a la del átomo de hidrógeno?

1. La diferencia fraccional entre la masa del átomo de hidrógeno y las masas de sus constituyentes es el cociente entre la energía de enlace  $E_b$  dividida por  $c^2$  y  $m_e + m_p$ :

$$\text{Diferencia fraccional} = \frac{E_b/c^2}{m_e + m_p} = \frac{13,6 \text{ eV}/c^2}{m_e + m_p}$$

2. Tomar las masas en reposo del protón y el electrón de la tabla 7.1:

$$m_p = 938,28 \text{ MeV}/c^2, \quad m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$$

3. Sumar estas masas:

$$m_p + m_e = 938,79 \text{ MeV}/c^2$$

4. La masa en reposo del átomo de hidrógeno es inferior a este valor en  $13,6 \text{ eV}/c^2$ . La diferencia porcentual es:

$$\begin{aligned} \text{Diferencia fraccional} &= \frac{13,6 \text{ eV}/c^2}{938,79 \times 10^6 \text{ eV}/c^2} = 1,45 \times 10^{-8} \\ &= \boxed{1,45 \times 10^{-6}\%} \end{aligned}$$

**Observación** Esta diferencia de masa es demasiado pequeña para ser medida directamente. Sin embargo, las energías de enlace pueden medirse exactamente y en consecuencia, la diferencia de masa resulta de la expresión  $E_b = \Delta m/c^2$ .

<sup>1</sup> El uranio-236, que también puede escribirse en la forma  $^{236}\text{U}$ , se produce en un reactor nuclear cuando el isótopo estable uranio-235 absorbe un neutrón.

**EJEMPLO 7.15** | Fusión nuclear

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

En una reacción típica de fusión nuclear, un núcleo de tritio ( ${}^3\text{H}$ ) y un núcleo de deuterio ( ${}^2\text{H}$ ) se fusionan para formar un núcleo de helio ( ${}^4\text{He}$ ) más un neutrón, según la reacción  ${}^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{n}$ . Si la energía cinética inicial de las partículas es despreciable, ¿cuánta energía se libera en esta reacción de fusión?

**Planteamiento del problema** Como en este proceso se libera energía, la energía en reposo total de las partículas iniciales debe ser mayor que el de las partículas finales. Esta diferencia es igual a la energía liberada.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

**Pasos**

1. Tomar los valores de las energías en reposo del  ${}^2\text{H}$  y  ${}^3\text{H}$  de la Tabla 7.1 y sumarlos para conocer la energía en reposo total inicial.
2. Hacer lo mismo con el  ${}^4\text{He}$  y el n para determinar la energía en reposo final.
3. La energía liberada se determina a partir de  $E_{\text{liberada}} = E_0(\text{inicial}) - E_0(\text{final})$ .

**Respuestas**

$$E_0(\text{inicial}) = 1875,628 \text{ MeV} + 2808,944 \text{ MeV} = 4684,572 \text{ MeV}$$

$$E_0(\text{final}) = 3727,409 \text{ MeV} + 939,573 \text{ MeV} = 4666,982 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{liberada}} = 4684,572 \text{ MeV} - 4666,982 \text{ MeV} = \boxed{17,59 \text{ MeV} = 17,6 \text{ MeV}}$$

**Observación** Esta y otras reacciones de fusión tienen lugar en el Sol. La energía liberada alcanza la Tierra y es la responsable primordial de la vida en el planeta. La energía emitida constantemente por el Sol va acompañada por una disminución constante de su masa en reposo.

**Mecánica Newtoniana y relatividad**

Cuando la velocidad de una partícula se aproxima a la de la luz, la segunda ley de Newton deja de cumplirse y debemos modificar la mecánica newtoniana según la teoría einsteiniana de la relatividad. El criterio de validez de la mecánica newtoniana también puede establecerse en función de la energía de una partícula. En la mecánica newtoniana, la energía cinética de una partícula que se mueve con velocidad  $v$  es

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mc^2 \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} E_0 \frac{v^2}{c^2}$$

en donde  $E_0 = mc^2$  es la energía en reposo de la partícula. Por lo tanto,

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E_c}{E_0}}$$

La mecánica newtoniana es válida si la velocidad de la partícula es mucho menor que la velocidad de la luz o, alternativamente, si la energía cinética de la partícula es mucho menor que su energía en reposo.

**7.4 Cuantización de la energía**

Cuando un sistema que permanece en reposo absorbe energía, su energía interna aumenta. Parece lógico que el sistema pueda absorber cualquier cantidad arbitraria de energía. Sin embargo, esto no es cierto para sistemas microscópicos como átomos o moléculas. La energía interna de un sistema microscópico sólo puede aumentar en cantidades discretas.

Si tenemos dos bloques conectados a un muelle por sus extremos y tiramos de ellos, realizamos trabajo sobre el sistema muelle-bloques y su energía potencial crece. Si a continuación liberamos los bloques, éstos oscilan hacia atrás y adelante. La energía de oscilación  $E$ ,

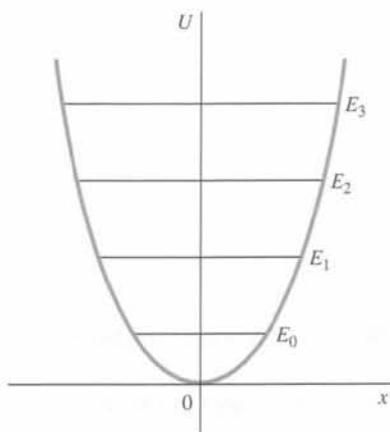


Figura 7.15 Diagrama de niveles energéticos de un oscilador.

que es la energía cinética de movimiento de los bloques, más la energía potencial debida al alargamiento de muelle, es igual a la energía potencial original. Con el tiempo, la energía del sistema decrece a causa de los efectos de amortiguación producidos por el rozamiento y la resistencia del aire. Con la precisión de nuestras medidas, la energía decrece continuamente. Finalmente, toda la energía se disipa y la energía de oscilación se hace cero.

Consideremos ahora una molécula diatómica tal como el oxígeno molecular,  $O_2$ . La fuerza de atracción entre los dos átomos de oxígeno varía casi linealmente con el cambio en la separación (para pequeños cambios) de una forma muy parecida a lo que ocurre en un muelle. Si una molécula diatómica se hace oscilar con cierta energía  $E$ , ésta decrece con el tiempo cuando la molécula irradia o interacciona con los alrededores, pero el decrecimiento *no es continuo*. La energía disminuye en saltos finitos y el estado energético más bajo, llamado estado fundamental, no es cero. Se dice que la energía de vibración de una molécula diatómica está **cuantizada**; es decir, la molécula sólo puede absorber o ceder energía en ciertas cantidades, llamadas *cuantos*.

Cuando los bloques unidos por un muelle o las moléculas diatómicas oscilan, el tiempo transcurrido durante una oscilación se denomina periodo,  $T$ . La inversa del periodo es la frecuencia de oscilación  $f = 1/T$ . Como veremos en el capítulo 14, el periodo y la frecuencia de un oscilador no dependen de la energía de oscilación. Cuando disminuye la energía, la frecuencia no se modifica. La figura 7.15 muestra un **diagrama de niveles energéticos** de un oscilador. Las energías permitidas están casi igualmente espaciadas y vienen dadas por<sup>1</sup>

$$E_n = (n + \frac{1}{2})hf, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.19)$$

en donde  $f$  es la frecuencia de oscilación y  $h$  una constante fundamental de la naturaleza llamada constante de Planck:<sup>2</sup>

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (7.20)$$

El número entero  $n$  se denomina **número cuántico**. La energía más baja posible es la **energía del estado fundamental**,  $E_0 = \frac{1}{2}hf$ .

Los sistemas microscópicos frecuentemente ganan o pierden energía absorbiendo o emitiendo radiación electromagnética. Por el principio de conservación de la energía, si  $E_i$  y  $E_f$  son las energías inicial y final del sistema, la energía emitida o absorbida es

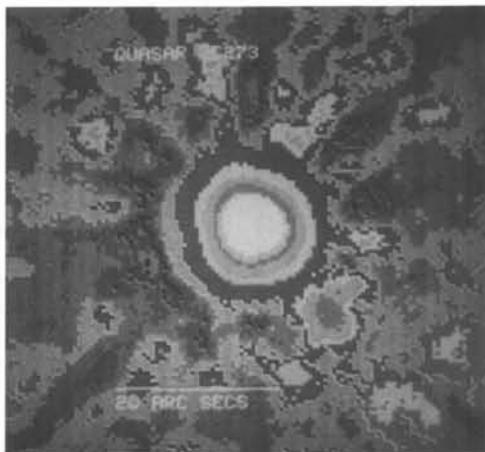
$$E_{\text{rad}} = E_i - E_f$$

Como las energías  $E_i$  y  $E_f$  del sistema están cuantizadas,<sup>3</sup> la energía irradiada también lo está. El cuanto de la energía de radiación se llama **fotón**. La energía de un fotón viene dada por

$$E_{\text{fotón}} = hf \quad (7.21)$$

en donde  $f$  es la frecuencia de la radiación electromagnética.<sup>4</sup>

Por lo que sabemos, todos los sistemas ligados presentan cuantización de la energía. En los sistemas ligados macroscópicos los saltos entre niveles energéticos son tan pequeños que resultan inobservables. Por ejemplo, las frecuencias de oscilación típicas de dos bloques sobre un muelle son del orden de 1 a 10 veces por segundo. Si  $f = 10$  oscilaciones por segundo, el espaciado entre los niveles energéticos es  $hf = (6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \times (10/\text{s}) \approx 6 \times 10^{-33} \text{ J}$ . Como la energía de un sistema macroscópico es del orden de julios, un salto cuántico de  $10^{-33} \text{ J}$  es



En la figura se muestra la imagen de rayos X del cuasar 3C 273. La energía emitida en la banda de los rayos X por este cuasar es superior en un millón de veces a la emitida por la Vía Láctea completa.

<sup>1</sup> Una molécula diatómica también puede tener energía rotacional. Esta energía, como era de esperar, está también cuantizada, pero los niveles energéticos no están igualmente espaciados y la energía más baja posible es cero. En los capítulos 9 y 10 estudiaremos la energía rotacional.

<sup>2</sup> En 1900 el físico alemán Max Planck introdujo esta constante como un instrumento de cálculo para explicar las discrepancias entre los resultados experimentales y teóricos sobre el espectro de la radiación del cuerpo negro. El significado de la constante de Planck no fue apreciado por Planck ni por sus contemporáneos científicos, hasta que Einstein en 1905 postuló que la energía de la radiación electromagnética no es continua, sino que tiene lugar en paquetes de tamaño  $hf$ .

<sup>3</sup> Históricamente, la cuantización de la radiación electromagnética propuesta por Max Planck y Albert Einstein fue el primer "descubrimiento" de la cuantización de la energía.

<sup>4</sup> La radiación electromagnética incluye la luz, las microondas, las ondas de radio y de televisión, los rayos X y los rayos gamma. Todas estas radiaciones difieren entre sí en su frecuencia.

demasiado pequeño para ser observado. Dicho de otro modo, si la energía de un sistema es 1 J, el valor de  $n$  es del orden de  $10^{32}$  y los cambios de una o dos unidades cuánticas no serán observables.

Para una molécula diatómica, la frecuencia de vibración típica es del orden de  $10^{14}$  vibraciones por segundo, y una energía típica es  $10^{-19}$  J. El espaciado entre los niveles permitidos es, por lo tanto,

$$E_{n+1} - E_n = hf \approx (6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(10^{14} \text{ s}) \approx 6 \times 10^{-20} \text{ J}$$

Es decir, los cambios en la energía de oscilación son del mismo orden que la energía de la molécula y la cuantización es claramente observable.

## Resumen

- 1 La conservación de la energía mecánica es una relación importante deducida de las leyes de Newton para las fuerzas conservativas. Es útil para resolver muchos problemas.
- 2 El teorema trabajo-energía y la conservación de la energía son leyes fundamentales de la naturaleza que tienen aplicaciones en todas las áreas de la física.
- 3 La ecuación de Einstein  $E_0 = mc^2$  es una relación fundamental entre la masa y la energía.
- 4 La cuantización es una propiedad fundamental de la energía en sistemas ligados.

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### 1. Energía mecánica

La suma de las energías cinética y potencial de un sistema se denomina energía mecánica total

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{cin}} + U_{\text{sist}} \quad (7.5)$$

Conservación de la energía mecánica

Si no hay fuerzas externas que realicen trabajo sobre un sistema, y todas las fuerzas internas son conservativas, la energía mecánica total del sistema permanece constante

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{cin}} + U_{\text{sist}} = \text{constante} \quad (7.6)$$

$$E_{\text{ci}} + U_{\text{f}} = E_{\text{c}} + U_{\text{i}} \quad (7.7)$$

#### 2. Energía total de un sistema

La energía de un sistema consiste en energía mecánica,  $E_{\text{mec}}$ , energía térmica,  $E_{\text{térm}}$ , energía química,  $E_{\text{quím}}$  y otros tipos de energía,  $E_{\text{otras}}$ , tales como radiación sonora y radiación electromagnética.

$$E_{\text{sist}} = E_{\text{mec}} + E_{\text{térm}} + E_{\text{quím}} + E_{\text{otras}} \quad (7.9)$$

#### 3. Conservación de la energía

Universo

La energía total del universo es constante. La energía puede transformarse de una forma en otra o transmitirse de una región a otra, pero nunca crearse o destruirse.

Sistema

La energía de un sistema puede modificarse por trabajo realizado sobre el sistema y por transmisión de energía en forma de calor. (Está incluye la emisión o absorción de radiación.) El aumento o disminución de la energía del sistema puede explicarse siempre por la aparición o desaparición de algún tipo de energía en otra parte.

$$E_{\text{entrada}} - E_{\text{salida}} = \Delta E_{\text{sist}} \quad (7.8)$$

Teorema trabajo-energía

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sist}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{otras}} \quad (7.10)$$

#### 4. Energía disipada por rozamiento

Para un sistema formado por un par de superficies deslizantes, la energía total disipada por rozamiento sobre ambas superficies es igual al incremento de energía térmica del sistema y viene expresada por

$$f \Delta s = \Delta E_{\text{térm}} \quad (7.14)$$

en donde  $\Delta s$  es el desplazamiento de una superficie respecto a la otra.

5. Resolución de problemas	La conservación de la energía mecánica y el teorema trabajo-energía pueden utilizarse como una alternativa de las leyes de Newton para resolver problemas mecánicos que requieren la determinación del módulo de la velocidad de una partícula en función de su posición.
6. Masa y energía	<p>Una partícula de masa <math>m</math> posee una energía en reposo intrínseca <math>E_0</math> dada por</p> $E_0 = mc^2 \quad (7.17)$ <p>en donde <math>c = 3 \times 10^8</math> m/s es la velocidad de la luz en el vacío.</p> <p>Un sistema de masa <math>M</math> posee también una energía en reposo <math>E_0 = Mc^2</math>. Si un sistema gana o pierde energía interna <math>\Delta E</math>, simultáneamente gana o pierde masa, <math>\Delta M = \Delta E/c^2</math>.</p> <p>La energía requerida para descomponer un sistema en sus partes constituyentes se denomina energía de enlace. Esta energía es <math>\Delta Mc^2</math>, en donde <math>\Delta M</math> es la suma de las masas de sus partes constituyentes menos la masa del sistema ligado.</p>
7. Mecánica newtoniana y teoría de la relatividad	Cuando la velocidad de una partícula se aproxima a la velocidad de la luz en el vacío, $c$ (cuando la energía cinética de la partícula se aproxima a su energía en reposo), la mecánica newtoniana deja de cumplirse y debe reemplazarse por la teoría especial de la relatividad de Einstein.
8. Cuantización de la energía	<p>La energía interna de un sistema microscópico sólo puede tener una serie discreta de valores posibles. Para un sistema que oscila con frecuencia <math>f</math> los valores energéticos permitidos están separados por una cantidad <math>hf</math>, en donde <math>h</math> es la constante de Planck:</p> $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (7.20)$ <p>Los sistemas microscópicos con frecuencia intercambian energía con sus alrededores emitiendo o absorbiendo radiación electromagnética, que también está cuantizada. El cuanto de la energía radiante se llama fotón:</p> $E_{\text{fotón}} = hf \quad (7.21)$ <p>en donde <math>f</math> es la frecuencia de la radiación electromagnética.</p>

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

 Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

  Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

Tomar  $g = 9,81 \text{ N/kg} = 9,81 \text{ m/s}^2$  y despreciar el rozamiento en todos los problemas a menos que se indique lo contrario.

### Problemas conceptuales

1 ● SSM Dos objetos de masas desiguales están conectados por una cuerda sin masa que pasa por un polea sin rozamiento. Una vez liberados del reposo, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? ( $U$  = energía potencial gravitatoria,  $E_c$  = energía cinética del sistema.) (a)  $\Delta U < 0$  y  $\Delta E_c > 0$ . (b)  $\Delta U = 0$  y  $\Delta E_c > 0$ . (c)  $\Delta U < 0$  y  $\Delta E_c = 0$ . (d)  $\Delta U = 0$  y  $\Delta E_c = 0$ . (e)  $\Delta U > 0$  y  $\Delta E_c < 0$ .

2 ● Dos piedras se lanzan con la misma velocidad inicial y en el mismo instante desde el tejado de un edificio. Una piedra se lanza bajo un ángulo de  $30^\circ$  por encima de la horizontal; la otra se lanza horizontalmente. (Despreciar la resistencia del aire.) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- (a) Las piedras chocan contra el suelo al mismo tiempo y con iguales velocidades.
- (b) Las piedras chocan contra el suelo al mismo tiempo y con diferentes velocidades.

- (c) Las piedras chocan contra el suelo en tiempos distintos y con velocidades iguales.  
 (d) Las piedras chocan contra el suelo en tiempos distintos y con velocidades diferentes.

3 ● Verdadero o falso:

- (a) La energía total de un sistema no puede variar.  
 (b) Cuando una persona salta en el aire, el suelo trabaja sobre ella incrementando su energía potencial.

4 ● Un hombre se encuentra de pie sobre patines de ruedas junto a una pared rígida. Para iniciar el movimiento se apoya y empuja contra la pared. Analizar los cambios energéticos que tienen lugar en esta situación.

5 ● SSM En la obra "¿Está Vd. de broma, Mr. Feynman?"<sup>1</sup> Richard Feynman describe su enojo por la forma cómo se introduce en un libro de texto para niños el concepto de energía. "Había un libro que comenzaba con cuatro fotografías: un juguete de cuerda, un automóvil, un niño montando en bicicleta y alguna cosa más que no recuerdo. Bajo cada fotografía se leía: ¿Qué es lo que lo hace funcionar?... y al girar la página el libro decía: La respuesta es ... en todos los casos, la energía... No es cierto que la energía lo haga funcionar porque si se para, también puede decirse que lo ha parado la energía... En estos ejemplos, la energía no ha aumentado ni ha disminuido sino que, simplemente, ha cambiado de una forma a otra." Describa cómo cambia la energía de una forma a otra cuando una niña sube una colina pedaleando su bicicleta, desciende de la misma sin pedales y, finalmente, frena hasta parar.

6 ● SSM Un cuerpo que cae a través de la atmósfera (la resistencia del aire está presente) aumenta su energía cinética en 20 J. La cantidad de energía potencial gravitatoria perdida es (a) 20 J, (b) más de 20 J, (c) menos de 20 J, (d) imposible de conocer sin saber la masa del cuerpo, (e) imposible de conocer sin saber la distancia recorrida por el cuerpo.

7 ● Supóngase que al frenar se ejerce una fuerza de rozamiento constante sobre las ruedas de un coche. Si esto es así, se deduce que (a) la distancia que el coche recorre antes de pararse es proporcional a la velocidad que tenía antes de accionar los frenos, (b) la energía cinética del coche disminuye a una tasa constante, (c) la energía cinética del coche es inversamente proporcional al tiempo que ha pasado desde la aplicación de los frenos, (d) ninguna de las respuestas anteriores es cierta.

8 ● Un bloque resbala por encima de dos plataformas como las que se muestran en la figura 7.16. Una plataforma tiene la forma de un plano inclinado de altura  $H$  y longitud  $L$  y la otra tiene la forma de un arco de circunferencia, pero también tiene una altura  $H$  y una longitud  $L$ . Se mide el tiempo que el bloque, inicialmente parado, tarda en resbalar por ambas plataformas y recorrer la distancia  $L$ . Se encuentra que (a) el bloque tarda lo mismo independientemente de la plataforma, (b) al llegar al final del recorrido el bloque tiene la misma velocidad independientemente de la plataforma, (c) ambas respuestas son correctas, (d) ninguna respuesta es correcta.

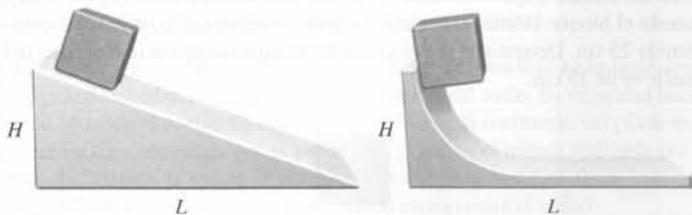


Figura 7.16 Problema 8

9 ● Una piedra atada al extremo de una barra sin masa y rígida se mueve en una circunferencia vertical a velocidad constante. La energía total del movimiento no es constante, pero la energía cinética del movimiento sí lo es. En cambio, la energía potencial cambia continuamente. ¿Ejerce la barra una fuerza tangencial sobre la piedra?

## Estimaciones y aproximaciones

10 ● SSM La *tasa metabólica* es el ritmo con que el cuerpo usa energía química para sustentar sus funciones vitales. Experimentalmente se ve que la tasa metabólica media es proporcional al área total superficial del cuerpo. El área superficial de un varón de 1,78 m de altura y 80 kg de peso es de unos 2,0 m<sup>2</sup>, mientras que el de una mujer de 1,62 m de altura y 50 kg de peso es 1,5 m<sup>2</sup>. Hay un cambio de un 1% en el área superficial por cada 1,2 kg por encima o por debajo de los pesos y de un 1% por cada 7,5 cm por encima o por debajo de las alturas que aquí se señalan. (a) Estime su tasa metabólica usando la siguiente guía para la actividad física: tasa metabólica de: dormir: 40 W/m<sup>2</sup>; caminar: 160 W/m<sup>2</sup>; actividad física moderada: 175 W/m<sup>2</sup>; ejercicio aeróbico moderado: 300 W/m<sup>2</sup>. Compararlo con la potencia de una bombilla de 100 W. (b) Exprese su tasa metabólica media en kcal/día (1 kcal = 4190 J). (Una kcal es la "caloría alimentaria" usada por los expertos en nutrición) (c) Un valor estimado por los dietistas es que una persona estándar debe comer entre 25-32 kcal/kg para mantener su peso. A partir de los cálculos del apartado (b) estimar si este valor es razonable.

11 ● Suponga que la tasa máxima a la que su cuerpo puede gastar energía es 250 W. Suponiendo que la conversión de energía química en energía mecánica tiene una eficiencia máxima del 20%, estimar a qué velocidad se puede subir cuatro tramos de escalera, cada uno de los cuales tiene 3,5 m de altura.

12 ● ¿Cuánta masa en reposo se consume en el núcleo de una planta nuclear de generación de energía eléctrica si se produce, (a) 1 J de energía térmica, (b) suficiente energía eléctrica para mantener una bombilla de 100 W funcionando durante 10 años? (Por cada julio de energía eléctrica producida por el generador, el núcleo del reactor debe producir 3 J de energía nuclear.)

13 ● SSM La energía química consumida cuando se quema 1 litro de gasolina es aproximadamente  $684 \times 10^5$  J. Estimar la energía total usada por todos los coches de los Estados Unidos durante un año. ¿Qué fracción representa del total de energía usada en los Estados Unidos en 1 año (unos  $5 \times 10^{20}$  J)?

14 ● En un panel de energía solar la eficiencia máxima de conversión en energía eléctrica es del orden del 12 por ciento. Usando el valor conocido de la intensidad solar que llega a la superficie de la Tierra ( $1,3 \text{ kW/m}^2$ ), ¿qué área debería cubrirse para suministrar los requerimientos energéticos de Europa ( $5 \times 10^{20}$  J/año)? Supóngase que el cielo no tiene nubes.

15 ● Las plantas de producción de energía hidroeléctrica transforman la energía potencial gravitatoria del agua en otras formas más útiles de energía. Para ello hacen pasar un flujo de agua, corriente abajo, a través de una turbina que genera energía eléctrica. La central de Hoover en el río Colorado tiene una altura de 211 m y genera 4000 millones de kW·h por año ( $1 \text{ W} \cdot \text{h} = 3,6 \times 10^3 \text{ J}$ ). ¿Con qué caudal (en l/s) fluye el agua a través de las turbinas para generar esta potencia? La densidad del agua es 1 kg/l. Supóngase que la transformación de la energía potencial del agua en energía eléctrica tiene una eficiencia del 20%.

## Conservación de la energía mecánica

16 ● Un bloque de masa  $m$  comprime un muelle hasta una distancia  $x$  y luego se deja en libertad. El muelle proyecta el bloque a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad  $v$ . El mismo muelle proyecta un segundo bloque de masa  $4m$  con una velocidad  $3v$ . ¿A qué distancia se comprimió el muelle en este último caso?

17 ● Una muchacha en bicicleta que circula por una carretera horizontal a 10 m/s deja de pedalear cuando comienza a subir una cuesta inclinada  $3,0^\circ$  respecto a la horizontal. Ignorando las fuerzas de rozamiento, ¿qué distancia recorrerá sobre la colina antes de detenerse? (a) 5,1 m (b) 30 m (c) 97 m (d) 10,2 m (e) La respuesta depende de la masa de la muchacha.

<sup>1</sup> Richard P. Feynman y Ralph Leighton, "¿Está Vd. de broma, Mr. Feynman?" Alianza Editorial, 2003, Madrid.

**18** ● **SSM** Un péndulo de longitud  $L$  con una lenteja de masa  $m$  se separa lateralmente hasta que la lenteja se encuentra a una distancia  $L/4$  por encima de su posición de equilibrio. La lenteja se deja entonces en libertad. Determinar la velocidad de la lenteja cuando sobrepasa la posición de equilibrio.

**19** ● **ISOLVE** Un bloque de 3 kg se desliza a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad de 7 m/s (figura 7.17). Después de recorrer una distancia de 2 m, encuentra una rampa sin rozamiento inclinada un ángulo de  $40^\circ$  con la horizontal (la transmisión es suave). ¿Qué distancia recorrerá el bloque en la rampa ascendente antes de detenerse?



Figura 7.17 Problemas 19 y 46

**20** ● **ISOLVE** Un objeto de 3 kg en reposo (figura 7.18) se deja libre a una altura de 5 m sobre una rampa curva y sin rozamiento. Al pie de la rampa hay un muelle cuya constante es  $k = 400$  N/m. El objeto se desliza por la rampa y choca contra el muelle, comprimiéndolo una distancia  $x$  antes de alcanzar momentáneamente el reposo. (a) Determinar  $x$ . (b) ¿Qué ocurre con el objeto después de alcanzar el reposo?

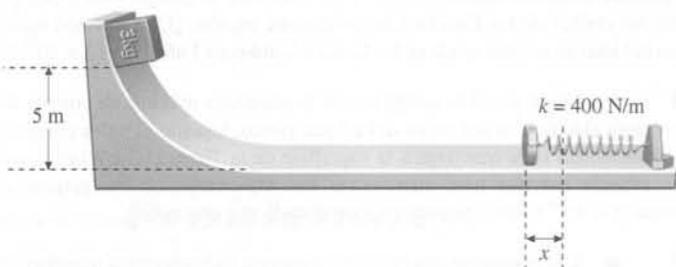


Figura 7.18 Problema 20

**21** ● **ISOLVE** Se lanza una pequeña pelota de 15 g mediante una pistola de juguete que posee un muelle cuya constante de fuerza es de 600 N/m. El muelle puede comprimirse hasta 5 cm. ¿Qué altura puede alcanzar la pelota si se apunta verticalmente?

**22** ● **ISOLVE** Una grúa de un puerto levanta un contenedor de 4000 kg hasta una altura de 30 m, lo lleva oscilando sobre la cubierta de un buque de carga y finalmente lo deposita en la bodega, que está 8 m por debajo del nivel del suelo del puerto. ¿Cuánto trabajo ha realizado la grúa? (Despreciar las pérdidas por rozamiento.)

**23** ● **ISOLVE** Un muchacho de 16 kg sobre un columpio de jardín lleva una velocidad de 3,4 m/s cuando el columpio, de 6 m de longitud, se encuentra en el punto más bajo de sus oscilaciones. ¿Qué ángulo forma el columpio con la vertical cuando el niño se encuentra en el punto más elevado?

**24** ●● **SSM** El sistema que se muestra en la figura 7.19 está en reposo cuando se corta la cuerda inferior. Determinar la velocidad de los objetos cuando están a la misma altura. En la polea no hay rozamiento y su masa es despreciable.

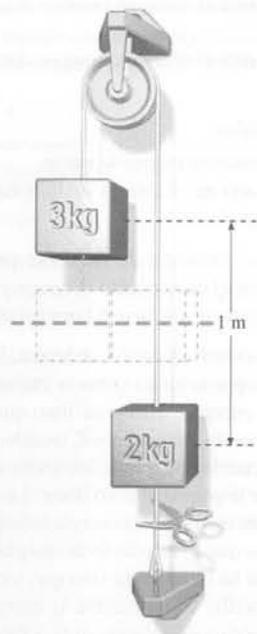


Figura 7.19 Problema 24

**25** ●● Un bloque reposa sobre un plano inclinado como indica la figura 7.20. Por medio de una polea, el bloque está conectado a un muelle del cual se tira hacia abajo con una fuerza gradualmente creciente. El valor de  $\mu_c$  es conocido. Determinar la energía potencial  $U$  del muelle en el momento que el bloque comienza a moverse.

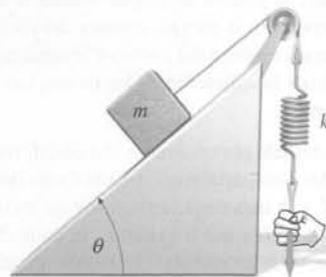


Figura 7.20 Problema 25

**26** ●● **ISOLVE** Un bloque de 2,4 kg se lanza desde una altura de 5,0 m sobre un muelle cuya constante de fuerza es de 3955 N/m (figura 7.21). Cuando el bloque alcanza momentáneamente el reposo, el muelle se ha comprimido 25 cm. Determinar la velocidad del bloque cuando la compresión del muelle es de 15 cm.

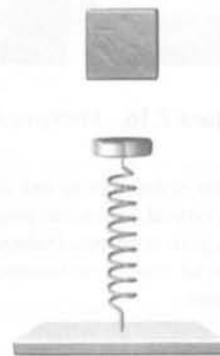


Figura 7.21 Problemas 26 y 91

27 ●● SSM Una pelota en el extremo de una cuerda se mueve en un círculo vertical con energía constante  $E$ . ¿Qué diferencia existe entre la tensión en la parte más baja del círculo y la tensión en la parte más alta del mismo?

28 ●● Una muchacha de masa  $m$  lleva una cesta de comida a su abuela. Para cruzar un riachuelo ata una cuerda de longitud  $R$  a la rama de un árbol y comienza a oscilar desde el reposo en un punto que se encuentra a una distancia  $R/2$  por debajo de la rama. ¿Cuál es la tensión mínima de rotura de la cuerda para que ésta no se rompa y la muchacha no caiga en el arroyo?

29 ●● **OLVE** La vagoneta de una montaña rusa de masa 1500 kg parte de un punto situado a una altura  $H$  de 23 m sobre la parte más baja de un rizo de 15 m de diámetro (figura 7.22). Si el rozamiento es despreciable, la fuerza hacia abajo de los carriles sobre la vagoneta cuando los viajeros están cabeza abajo en lo alto del rizo es (a)  $4,6 \times 10^4$  N, (b)  $3,1 \times 10^4$  N, (c)  $1,7 \times 10^4$  N, (d) 980 N, (e)  $1,6 \times 10^3$  N.



Figura 7.22 Problema 29

30 ● Una vagoneta de una montaña rusa desciende 5 m para subir, a continuación, hasta un tramo del recorrido que está 9,5 m por encima del punto más bajo. (a) ¿Cuál es la velocidad inicial mínima necesaria para que la vagoneta supere esta altura, suponiendo que en todo el recorrido no hay rozamiento? (b) ¿Se puede modificar esta velocidad cambiando la posición del punto más bajo de modo que la vagoneta adquiera mayor velocidad al pasar por este punto?

31 ●● Las vagonetas de la montaña rusa Graviton pasan por un bucle construido con el objetivo de la que las personas que vayan montadas en ellas se sientan perfectamente ingravídas cuando lleguen a la cima del arco. ¿Qué peso sentirán cuando lleguen al punto más bajo de la trayectoria, es decir, cuál es la fuerza normal que los hunde en el fondo de sus asientos al llegar al fondo del bucle? Expresar la respuesta en función del peso normal de una persona. Supóngase que la trayectoria es perfectamente circular y que sobre la vagoneta no hay fuerzas de rozamiento.

32 ●● SSM **OLVE** Una piedra se lanza hacia arriba bajo un ángulo de  $53^\circ$  por encima de la horizontal. Su altura máxima durante la trayectoria es de 24 m. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la piedra?

33 ●● **OLVE** Una pelota de béisbol de masa 0,17 kg se lanza desde el tejado de un edificio situado a 12 m por encima del suelo. Su velocidad inicial es de 30 m/s y el ángulo de lanzamiento  $40^\circ$  sobre la horizontal. (a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota? (b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la gravedad cuando la pelota se mueve desde el tejado hasta su altura máxima? (c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo?

34 ●● Un péndulo de 80 cm de longitud con una lenteja de 0,6 kg se suelta desde el reposo cuando forma un ángulo inicial  $\theta_0$  con la vertical. En la parte más baja de su oscilación, la velocidad de la lenteja es 2,8 m/s. (a) ¿Cuál era el ángulo inicial del péndulo? (b) ¿Qué ángulo formará el péndulo con la vertical cuando la velocidad de la lenteja sea de 1,4 m/s?

35 ●● SSM **OLVE** El puente Royal Gorge sobre el río Arkansas tiene una altura aproximada de  $L = 310$  m. Un saltador de masa 60 kg tiene una cuerda elástica de longitud  $d = 50$  m atada a sus pies. Suponer que la cuerda actúa como un muelle de constante de fuerza  $k$ . El saltador se lanza, apenas toca el agua y después de numerosas subidas y bajadas se detiene a una

altura  $h$  sobre el agua. (a) Determinar  $h$ . (b) Determinar la velocidad máxima alcanzada por el saltador.

36 ●● Un péndulo está formado por una lenteja de 2 kg atada a una cuerda ligera de longitud 3 m. La lenteja se golpea horizontalmente, de modo que alcanza una velocidad horizontal inicial de 4,5 m/s. En el punto en que la cuerda forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical (a) ¿cuál es el módulo de la velocidad de la lenteja? (b) ¿Cuál es su energía potencial? (c) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (d) ¿Qué ángulo forma la cuerda con la vertical cuando la lenteja alcanza su máxima altura?

37 ●● Un péndulo está formado por una cuerda de longitud  $L$  y una lenteja de masa  $m$ . La cuerda se dispone en posición horizontal y se da a la lenteja la velocidad inicial mínima para que el péndulo de una vuelta completa en el plano vertical. (a) ¿Cuál es la máxima energía cinética  $E_c$  de la lenteja? (b) ¿Cuál es en ese momento la tensión de la cuerda?

38 ●● **OLVE** Un muchacho de peso 360 N se balancea sobre una charca de agua con una cuerda atada a la rama de un árbol en el borde de la charca. La rama está a 12 m por encima del nivel del suelo y la superficie del agua de la charca está a 1,8 m por debajo del suelo. El muchacho coge la cuerda con la mano en un punto a 10,6 m de la rama y se mueve hacia atrás hasta que la cuerda forma con la vertical un ángulo de  $23^\circ$ . Entonces se lanza y cuando la cuerda está en posición vertical se suelta de la cuerda y cae en la charca. Determinar el módulo de la velocidad del muchacho en el momento de caer en el agua.

39 ●● SSM **OLVE** Paseando junto a un estanque, un muchacho encuentra una cuerda atada a la rama de un árbol a 5,2 m del suelo y decide utilizarla para balancearse sobre el estanque. La cuerda está algo deteriorada, pero soporta su peso. El muchacho estima que la cuerda se romperá si la tensión supera en 80 N su propio peso, que es de unos 650 N. Agarra la cuerda en un punto que está a 4,6 m de la rama y se mueve hacia atrás para balancearse sobre el estanque. (a) ¿Cuál es el ángulo inicial máximo entre la cuerda y la vertical que permite al muchacho balancearse con seguridad sin que se rompa la cuerda? (b) Si el muchacho comienza con este ángulo máximo y la superficie del estanque está 1,2 m por debajo del nivel del suelo, ¿con qué módulo de la velocidad entrará en el agua si se suelta de la cuerda cuando ésta pasa por la posición vertical?

40 ●● Un péndulo de longitud  $L$  tiene una lenteja de masa  $m$  atada a una cuerda ligera y conectada a un muelle de constante de fuerza  $k$ . Con el péndulo en la posición indicada en la figura 7.23, el muelle se encuentra en su posición natural. Si ahora tiramos lateralmente de la lenteja hasta que la cuerda forme un ángulo pequeño  $\theta$  con la vertical, ¿cuál será la velocidad de la lenteja después de soltarla cuando pase por la posición de equilibrio?

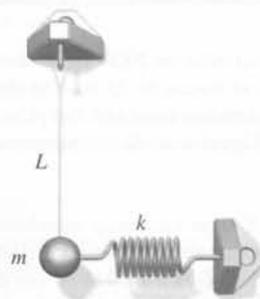


Figura 7.23 Problema 40

41 ●●● Un péndulo está suspendido del techo y conectado a un muelle fijo en el extremo opuesto justo por debajo del soporte del péndulo (figura 7.24). La masa de la lenteja es  $m$ , la longitud del péndulo,  $L$  y la constante del muelle,  $k$ . La longitud del muelle sin deformar es  $L/2$  y la distancia entre la parte más baja del muelle y el techo es  $1,5 L$ . El péndulo se desplaza lateralmente hasta formar un pequeño ángulo  $\theta$  con la vertical y después se deja en libertad desde el reposo. Obtener una expresión para la velocidad de la lenteja cuando  $\theta = 0$ .

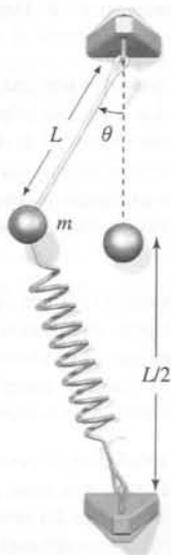


Figura 7.24 Problema 41

### Conservación de la energía

**42** ● **¡SOLVE!** En una erupción volcánica se elevó una montaña de  $4 \text{ km}^3$  de  $1600 \text{ kg/m}^3$  de densidad hasta una altura media de  $500 \text{ m}$ . (a) ¿Cuánta energía en julios se liberó en esta erupción? (b) La energía liberada en una bomba termonuclear se mide en megatonnes de TNT, siendo  $1 \text{ megatón de TNT} = 4,2 \times 10^{15} \text{ J}$ . Expresar la respuesta de (a) en megatonnes de TNT.

**43** ●● **¡SOLVE!** Un estudiante de física de  $80 \text{ kg}$  sube a un monte de  $120 \text{ m}$  de altura. (a) ¿Cuál es el incremento de energía potencial gravitatoria del estudiante al llegar a la cumbre del monte? (b) ¿De dónde procede esta energía? (c) El organismo del estudiante tiene un rendimiento del 20 por ciento, es decir por cada  $100 \text{ J}$  de energía interna consumida,  $20 \text{ J}$  se convierten en energía mecánica y  $80 \text{ J}$  se pierden en forma de calor. ¿Cuánta energía química consume el estudiante durante el ascenso al monte?

### Rozamiento cinético

**44** ● **¡SOLVE!** Un coche de  $2000 \text{ kg}$  se mueve sobre una carretera horizontal con una velocidad inicial de  $25 \text{ m/s}$ . Se detiene a los  $60 \text{ m}$  por la acción de una fuerza de rozamiento constante. (a) ¿Cuánta energía se disipa por rozamiento? (b) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre los neumáticos y la carretera?

**45** ● Un trineo de  $8 \text{ kg}$  se encuentra inicialmente en reposo sobre una carretera horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el trineo y la carretera es  $0,4$ . El trineo se empuja a lo largo de una distancia de  $3 \text{ m}$  con una fuerza de  $40 \text{ N}$  que forma un ángulo de  $30^\circ$  hacia arriba con la horizontal. (a) Determinar el trabajo realizado por la fuerza aplicada. (b) Determinar la energía disipada por rozamiento. (c) Calcular la variación de energía cinética experimentada por el trineo. (d) Determinar la velocidad del trineo después de recorrer la distancia de  $3 \text{ m}$ .

**46** ● **SSM** Suponer que las superficies del problema 19 poseen rozamiento y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y las superficies es  $0,30$ . Determinar (a) la velocidad del bloque cuando alcanza la rampa y (b) la distancia que alcanza el objeto en su deslizamiento antes de quedar momentáneamente en reposo. (Despreciar la energía disipada a lo largo de la curva de transición.)

**47** ● Un bloque de  $2 \text{ kg}$  situado a una altura de  $3 \text{ m}$  se desliza por una rampa curva y lisa desde el reposo (figura 7.25). Resbala  $9 \text{ m}$  sobre una superficie horizontal rugosa antes de llegar al reposo. (a) ¿Cuál es la velocidad del bloque en la parte inferior de la rampa? (b) ¿Cuánta energía se ha disipado por rozamiento? (c) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal?

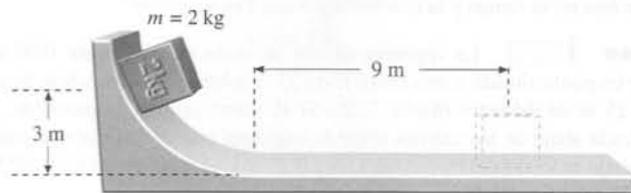


Figura 7.25 Problema 47

**48** ●● **¡SOLVE!** Una niña de  $20 \text{ kg}$  se desliza por un tobogán de  $3,2 \text{ m}$  de altura. Cuando alcanza su parte inferior lleva una velocidad de  $1,3 \text{ m/s}$ . (a) ¿Cuánta energía se ha disipado por rozamiento? (b) Si el tobogán está inclinado  $20^\circ$ , ¿cuál es el coeficiente de rozamiento entre la niña y la superficie de deslizamiento?

**49** ●● El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque de  $4 \text{ kg}$  y la plataforma de la figura 7.26 es  $0,35$ . (a) Determinar la energía disipada por rozamiento cuando el bloque de  $2 \text{ kg}$  cae una distancia  $y$ . (b) Calcular la energía mecánica total  $E$  del sistema después de que el bloque de  $2 \text{ kg}$  caiga la distancia  $y$ , suponiendo que inicialmente  $E = 0$ . (c) Utilizar el resultado de (b) para determinar el módulo de la velocidad de cualquiera de los bloques después que el bloque de  $2 \text{ kg}$  caiga  $2 \text{ m}$ .

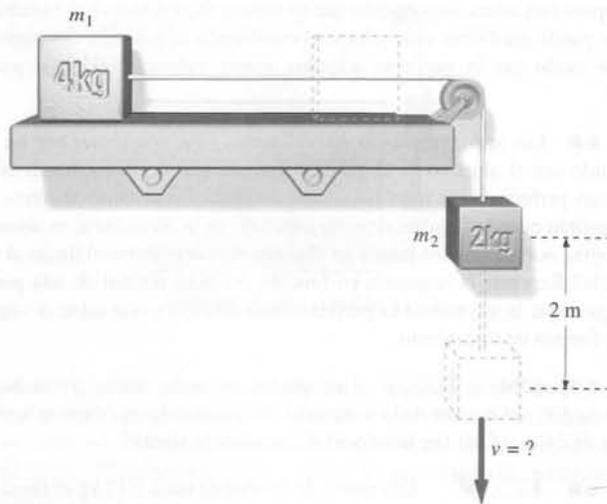


Figura 7.26 Problema 49

**50** ●● **SSM** Un objeto compacto de masa  $m$  se mueve en un círculo horizontal de radio  $r$  sobre una mesa rugosa. Está sujeto a una cuerda fija en el centro del círculo. La velocidad del objeto es inicialmente  $v_0$ . Después de completar una vuelta alrededor del círculo la velocidad es  $\frac{1}{2} v_0$ . (a) Determinar la energía disipada por rozamiento durante una vuelta en función de  $m$ ,  $v_0$  y  $r$ . (b) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético? (c) ¿Cuántas vueltas dará la partícula antes de alcanzar la posición de reposo?

**51** ●● **¡SOLVE!** Un bloque de  $2,4 \text{ kg}$  posee una velocidad inicial de  $3,8 \text{ m/s}$  dirigida hacia arriba sobre un plano inclinado  $37^\circ$  con la horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es  $0,30$ . ¿Qué distancia sobre el plano inclinado sube el bloque? ¿Cuál es el módulo de su velocidad cuando llega al punto de partida en el viaje de regreso cuesta abajo?

**52** ●●● Un bloque de masa  $m$  descansa sobre un plano inclinado  $\theta$  grados sobre la horizontal. El bloque está unido a un muelle de constante  $k$  (figura 7.27). Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque y el plano son  $\mu_s$  y  $\mu_c$  respectivamente. Tiramos del muelle lentamente hacia arriba a lo largo del plano hasta que el bloque comienza a moverse. (a) Determinar una expresión para el alargamiento  $d$  del muelle en el momento en que el bloque se mueve. (b) Determinar el valor de  $\mu_c$  tal que el bloque se detenga justo cuando el muelle se encuentra en su condición natural, es decir, ni alargado, ni comprimido.

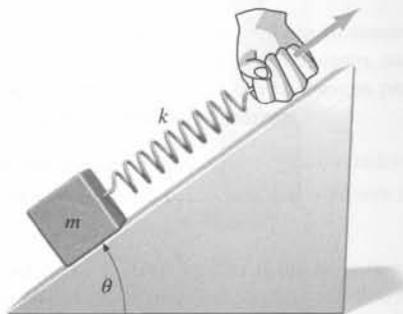


Figura 7.27 Problema 52

## Masa y energía

**53** ● (a) Calcular la energía en reposo que hay en 1 g de polvo. (b) Si se pudiera transformar esta energía en forma eléctrica y venderla a 10 céntimos el kilovatio-hora, ¿cuánto dinero se obtendría? (c) Si con esa energía se encendiera un lámpara de 100 W, ¿durante cuánto tiempo permanecería encendida?

**54** ● Cuando se detona un kilotón de TNT se produce una fuerza explosiva de unos  $5 \times 10^{12}$  J. ¿Cuál es la masa equivalente a la energía de la explosión?

**55** ● Un muón tiene una energía en reposo de 105,7 MeV. Calcular su masa en reposo en kilogramos.

**56** ● SSM Si un agujero negro y una estrella "normal" orbitan uno alrededor del otro, los gases de la estrella que caen en el agujero negro se calientan millones de grados debido al rozamiento en el disco de acumulación del agujero. Cuando los gases se calientan tanto, empiezan a radiar luz en la región espectral de los rayos X. Se cree que Cygnus X-1, la segunda fuente de rayos X más brillante del firmamento, es uno de estos sistemas binarios. Emite radiación a una potencia estimada de  $4 \times 10^{31}$  W. Si suponemos que el 1% de la masa-energía que cae escapa en forma de rayos X, ¿con qué tasa está ganando masa el agujero negro?

**57** ● Con referencia a la reacción de fusión del ejemplo 7.15, calcular el número de reacciones por segundo que serían necesarias para obtener 1 kW de potencia.

**58** ● Use la tabla 7.1 para calcular cuánta energía se necesita para extraer un neutrón de un núcleo de  $^4\text{He}$ , y que resulte un núcleo de  $^3\text{He}$  y un neutrón.

**59** ● Un neutrón libre en reposo se desintegra en un protón más un electrón:



Utilizar la tabla 7.1 para calcular la energía liberada en este proceso.

**60** ●● En una reacción de fusión nuclear, dos núcleos de  $^2\text{H}$  se combinan para producir  $^4\text{He}$ . (a) ¿Cuánta energía se libera en esta reacción? (b) ¿Cuántas reacciones de este tipo tienen lugar por segundo para producir 1 kW de potencia?

**61** ●● Una gran central nuclear produce 3000 MW de potencia por fisión nuclear, que transforma la masa  $m$  en energía. (a) ¿Cuánta masa se transforma

en energía al cabo de un año? (Suponer una eficiencia del 33 por ciento en una central nuclear.) (b) En una central térmica de carbón, cada kilogramo de carbón libera en la combustión 31 MJ de energía térmica. ¿Cuántos kilogramos de carbón se necesitarán anualmente para una central de 3000 MW? (Suponer una eficiencia del 38 por ciento en una central térmica de carbón.)

## Problemas generales

**62** ●● SSM Un bloque de masa  $m$ , inicialmente en reposo, se arrastra con una cuerda hacia arriba por un plano inclinado un ángulo  $\theta$  sobre la horizontal (sin rozamiento). La tensión en la cuerda es  $T$  y la cuerda es paralela al plano. Después de recorrer una distancia  $L$ , la velocidad del bloque es  $v$ . El trabajo realizado por la tensión  $T$  es (a)  $mgL \sin \theta$ , (b)  $mgL \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2$ , (c)  $mgL \sin \theta + \frac{1}{2}mv^2$ , (d)  $mgL \cos \theta$ , (e)  $TL \cos \theta$

**63** ●● Un bloque de masa  $m$  se desliza hacia abajo con velocidad constante  $v$  por un plano inclinado un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , ¿cuál es la magnitud de la energía disipada por rozamiento? (a)  $mgv \Delta t \tan \theta$ , (b)  $mgv \Delta t \sin \theta$ , (c)  $\frac{1}{2}mv^3 \Delta t$ , (d) La respuesta no puede determinarse sin conocer el coeficiente de rozamiento cinético.

**64** ● SOLVE Un bloque de 3,5 kg descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento en contacto con un muelle de constante 6800 N/m. El muelle está fijo por el otro extremo e inicialmente posee su longitud natural. Una fuerza horizontal constante de 70 N aplicada al bloque comprime el muelle. Determinar la longitud comprimida del muelle cuando el bloque está momentáneamente en reposo.

**65** ● SSM SOLVE La energía medida por unidad de tiempo y unidad de área que llega a la atmósfera superior de la Tierra procedente del Sol, llamada constante solar, es  $1,35 \text{ kW/m}^2$ . Debido a la absorción y reflexión en la atmósfera, aproximadamente  $1 \text{ kW/m}^2$  alcanza la superficie terrestre en un día despejado. ¿Cuánta energía capta en 8 h de luz al día un panel solar de 1 m por 2 m de superficie sobre un montaje rotatorio que se encuentra siempre en posición perpendicular a los rayos del Sol?

**66** ●● (a) Calcular la energía total que cada segundo radia el Sol, usando el valor de la constante solar que se da en el problema 65 y la distancia conocida de la Tierra al Sol. (b) Esta energía la producen reacciones de fusión como la que se detalla en el ejemplo 7.15. Hay varias reacciones que tienen lugar en el "ciclo Phenix del Sol", pero el resultado global es que se fusionan cuatro núcleos de hidrógeno para formar un núcleo de helio, liberando 26,7 MeV de energía. Si suponemos que esencialmente el Sol está formado por hidrógeno y que continuará "quemándolo" hasta que se haya usado un 10% de todo este combustible, use la masa del Sol para determinar aproximadamente cuánto tiempo de vida le queda al Sol.

**67** ● SOLVE Durante una prueba en Bonneville Salt Flats, Utah, el piloto del coche experimental *Spirit of America* de 1250 kg, propulsado con un reactor, al perder el control del vehículo empezó a frenar dejando marcas de frenado en 9,5 km. (a) Si inicialmente el coche se movía a 708 km/h, estimar el coeficiente de rozamiento cinético  $\mu_c$ . (b) ¿Cuál era la energía cinética  $E_c$  del coche 60 s después que empezó a accionar los frenos?

**68** ●● SOLVE Determinar la potencia necesaria de un motor para el funcionamiento de un telearrastre que permita subir a 80 esquiadores por una pista de 600 m, inclinada  $15^\circ$  sobre la horizontal, a una velocidad de 2,5 m/s. El coeficiente de rozamiento cinético es 0,06 y la masa media de cada esquiador 75 kg.

**69** ●● SOLVE Una caja de 2 kg se proyecta hacia arriba, con velocidad inicial de 3 m/s, por un plano inclinado rugoso que forma un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético es 0,3. (a) Relacionar todas las fuerzas que actúan sobre la caja. (b) ¿Qué distancia recorre la caja a lo largo del plano antes de que se detenga momentáneamente? (c) Determinar la energía disipada por rozamiento cuando la caja de desliza hacia arriba por el plano. (d) Determinar su velocidad cuando alcanza la posición inicial.

**70** ● SSM SOLVE Un ascensor de 1200 kg accionado por un motor eléctrico puede transportar con seguridad una carga máxima de 800 kg.

¿Qué potencia suministra el motor cuando el ascensor asciende con la carga máxima a una velocidad de 2,3 m/s?

**71** ●● **¡OLIVE!** Para reducir el consumo de potencia de los motores de los ascensores, éstos utilizan contrapesos conectados mediante un cable que pasa por una polea situada en la parte superior del eje del ascensor. Si el ascensor del problema 70 tiene un contrapeso de masa 1500 kg, ¿cuál es la potencia suministrada por el motor cuando asciende a plena carga a una velocidad de 2,3 m/s? ¿Qué potencia suministra el motor cuando el ascensor asciende vacío a 2,3 m/s?

**72** ●● **¡OLIVE!** ✓ Un juguete de lanzar dardos posee un muelle cuya constante de fuerza es 5000 N/m. Para cargar el disparador, el muelle se comprime 3 cm. El dardo de 7 g, disparado verticalmente hacia arriba, alcanza una altura máxima de 24 m. Determinar la energía disipada por el rozamiento del aire durante el ascenso del dardo. Estimar la velocidad del proyectil cuando retorna a su punto de partida.

**73** ●● **SSM** **¡OLIVE!** ✓ En una erupción volcánica se expulsa verticalmente hacia arriba un trozo de 2 kg de roca volcánica porosa con una velocidad inicial de 40 m/s, alcanzando una altura de 50 m antes de que comience a caer hacia la Tierra. (a) ¿Cuál es la energía cinética inicial de la roca? (b) ¿Cuál es el incremento de energía térmica debido al rozamiento del aire durante el ascenso? (c) Si el incremento de energía térmica debido al rozamiento del aire en el descenso es el 70% del que tuvo lugar en el ascenso, ¿cuál es la velocidad de la roca cuando vuelve a su posición inicial?

**74** ●● Un bloque de masa  $m$  parte del reposo a una altura  $h$  y se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin rozamiento que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal como indica la figura 7.28. El bloque choca contra un muelle de constante de fuerza  $k$ . Determinar la compresión del muelle cuando el bloque se detiene momentáneamente.

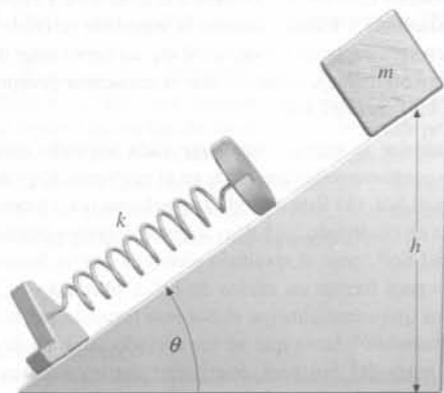


Figura 7.28 Problema 74

**75** ● **SSM** Una losa de  $1,5 \times 10^4$  kg descansa sobre una viga de acero. En un día muy cálido, la viga se ha dilatado y ha levantado el bloque 0,1 cm. (a) ¿Qué trabajo realiza la viga sobre la losa? (b) ¿De dónde viene la energía que levanta la losa? Dé una explicación microscópica sobre qué le ocurre al acero.

**76** ●● **¡OLIVE!** ✓ Un coche de 1500 kg de masa que se desplaza con una velocidad de 24 m/s se encuentra al pie de una colina de 2,0 km de longitud y cuya altitud es de 120 m. En la cima de la colina la velocidad del coche es de 10 m/s. Suponiendo aceleración constante, calcular la potencia media desarrollada por el motor del coche, despreciando todas las pérdidas internas por rozamiento.

**77** ●● **SSM** Se suspende una masa  $m$  del techo mediante un muelle que puede moverse verticalmente en la dirección  $y$  como se indica en la figura 7.29. Sabemos que la energía potencial en función de la posición es  $U = \frac{1}{2}ky^2 - mgy$ . (a) Representar  $U$  en función de  $y$  usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica. ¿Qué valor de  $y$  corresponde a la condición *no deformada* del muelle? (b) A partir de la expresión de  $U$ , determinar la fuerza neta hacia abajo que actúa sobre  $m$  en cualquier posición  $y$ . (c) La masa se deja libre desde el

reposo en  $y = 0$ ; si no hay rozamiento, ¿cuál es el valor máximo,  $y_{\text{máx}}$ , que alcanzará la masa? Indicar  $y_{\text{máx}}$  en el esquema del apartado (a). (d) Considerar ahora el efecto del rozamiento. La masa finalmente se detiene en una posición de equilibrio  $y_{\text{eq}}$ . Determinar este punto en el esquema. (e) Determinar la cantidad de energía térmica producida por rozamiento desde el comienzo de la operación hasta el equilibrio final.



Figura 7.29 Problema 77

**78** ●● Una pistola lanzaseñales se carga comprimiendo el muelle una distancia  $d$  y dispara una bengala de masa  $m$  dirigida verticalmente hacia arriba. La bengala tiene una velocidad  $v_0$  cuando abandona el muelle y alcanza una altura máxima  $h$  desde el punto donde abandona el muelle. Los efectos de resistencia del aire son importantes. (Expresar las respuestas en función de  $m$ ,  $v_0$ ,  $d$ ,  $h$  y  $g$ .) (a) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el muelle en el proceso de compresión? (b) ¿Cuál es el valor de la constante del muelle,  $k$ ? (c) ¿Cuánta energía mecánica se transforma en energía térmica a causa de la fuerza de arrastre del aire sobre la bengala durante el tiempo que transcurre entre el disparo y la llegada a su altura máxima?

**79** ●● **¡OLIVE!** Una vagoneta de una montaña rusa de masa total (incluidos los pasajeros) 500 kg se desplaza libremente por la pista sin rozamiento del aire indicada en la figura 7.30. Los puntos A, E y G son secciones rectas horizontales, todas ellas de la misma altura de 10 m sobre el suelo. El punto C, que está a una altura de 10 m sobre el suelo, pertenece a una pendiente que forma un ángulo de  $30^\circ$ . El punto B está en lo alto de una cuesta, mientras que el punto D pertenece a una hondonada que está al nivel del suelo. El radio de curvatura de cada uno de estos puntos es 20 m. El punto F está en el medio de una curva horizontal con peralte de radio de curvatura 30 m y a la misma altura de 10 m sobre el suelo que los puntos A, E y G. En el punto A, la velocidad de la vagoneta es 12 m/s. (a) Si la vagoneta es capaz de llegar justamente al punto B de la cuesta, ¿cuál es la altura de este punto sobre el suelo? (b) Si se cumple la condición (a), ¿cuál es la magnitud de la fuerza total ejercida sobre la vagoneta por la pista en el punto B? (c) ¿Cuál es la aceleración de la vagoneta en el punto C? (d) ¿Cuáles son el módulo y dirección de la fuerza total ejercida sobre la vagoneta por la pista en el punto D? (e) ¿Cuáles son el módulo y dirección de la fuerza total ejercida sobre la vagoneta por la pista en el punto F? (f) Al llegar al punto G se aplica a la vagoneta una fuerza de frenado constante y se alcanza la detención en una distancia de 25 m. ¿Cuál es la fuerza de frenado?

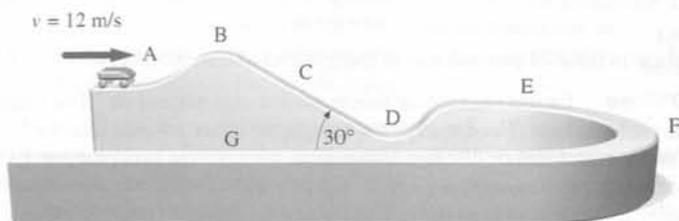


Figura 7.30 Problema 79

**80** ● **SSM** **¡SOLVE!** Un ascensor (masa  $M = 2000$  kg) se mueve hacia abajo a  $v_0 = 1,5$  m/s. Un sistema de frenado evita que la velocidad de descenso se incremente. (a) ¿A qué ritmo (en J/s) se transforma en el sistema de frenado la energía mecánica en energía térmica? (b) Cuando el ascensor se mueve hacia abajo a  $v_0 = 1,5$  m/s, falla el sistema de frenado y cae libremente a lo largo de una distancia  $d = 5$  m antes de chocar contra el tope de un gran muelle de seguridad con una constante de fuerza  $k = 1,5 \times 10^4$  N/m. Después del choque sobre el tope del muelle, queremos saber la distancia  $\Delta y$  que se comprimió éste antes de que la cabina del ascensor quede en reposo. Expresar algebraicamente el valor de  $\Delta y$  en función de las magnitudes conocidas  $M$ ,  $v_0$ ,  $g$ ,  $k$  y  $d$  y sustituir los valores dados para hallar  $\Delta y$ .

**81** ● Para medir la fuerza de rozamiento (rozamiento por rodadura y fuerza arrastre del aire) sobre un coche en movimiento, un mecánico apaga el motor y deja que el vehículo se deslice cuesta abajo en pendientes conocidas. El mecánico registra los siguientes datos:

1. Sobre una pendiente de  $2,87^\circ$  el coche se desliza uniformemente a 20 m/s.
2. Sobre una pendiente de  $5,74^\circ$  la velocidad constante de deslizamiento es 30 m/s.

La masa total del coche es 1000 kg. (a) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento a 20 m/s ( $F_{20}$ ) y a 30 m/s ( $F_{30}$ )? (b) ¿Qué potencia útil debe suministrar el motor para que el coche circule sobre una carretera horizontal a las velocidades estacionarias de 20 m/s ( $P_{20}$ ) y 30 m/s ( $P_{30}$ )? (c) A todo gas, el motor suministra 40 kW. ¿Cuál es el ángulo máximo de pendiente hacia arriba para el cual el coche puede mantener una velocidad estacionaria de 20 m/s? (d) Suponer que el motor suministra el mismo trabajo útil total por cada litro de combustible, cualquiera que sea su velocidad. A 20 m/s sobre una carretera horizontal, el coche recorre 12,7 km/litro. ¿Cuántos kilómetros por litro recorrerá si su velocidad es 30 m/s?

**82** ●● Un bloque de 2 kg se suelta sobre un plano inclinado hacia abajo a una distancia de 4 m de un muelle de constante  $k = 100$  N/m. El muelle está fijo a lo largo del plano inclinado, que forma un ángulo de  $30^\circ$  (figura 7.31). (a) si no hay rozamiento, hallar la compresión máxima del muelle, admitiendo que carece de masa. (b) Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es 0,2, hallar la compresión máxima. (c) En el plano del apartado (b), ¿hasta qué punto subirá el bloque por el plano después de abandonar el muelle?

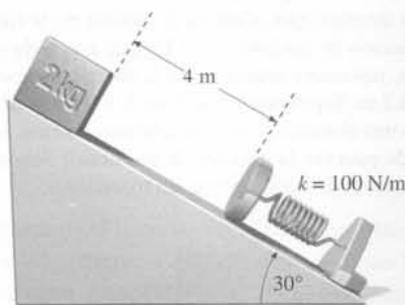


Figura 7.31 Problema 82

**83** ●● **¡SOLVE!** Un tren con una masa total de  $2 \times 10^6$  kg sube 707 m a lo largo de una distancia de 62 km con una velocidad media de 15,0 km/h. Si la fuerza de rozamiento es igual al 0,8 por ciento del peso, (a) calcular la energía cinética del tren, (b) la variación total de energía potencial, (c) la energía disipada por el rozamiento, y (d) la potencia de la locomotora.

**84** ●● **SSM** Parece ser que al acelerar se consume más energía que al conducir con velocidad constante. (a) Calcular la energía necesaria para que un coche de 1200 kg alcance una velocidad de 50 km/h despreciando el rozamiento. (b) Si los rozamientos (rozamiento por rodadura y fuerza de arrastre) del aire dan lugar a una fuerza de rozamiento total de 300 N a la velocidad de 50 km/h, ¿cuánta energía se necesita para desplazar el coche una distancia de 300 m a una velocidad constante de 50 km/h? (c) Suponiendo que las pérdidas de energía por causa del rozamiento en el apartado (a) son el 75 por ciento de las encontradas en

el apartado (b), estimar la relación que existe entre el consumo de energía para los dos casos considerados.

**85** ●●● **SSM** Un péndulo consiste en una pequeña masa ( $M$ ) atada al extremo de una cuerda de longitud  $L$ . Tal como muestra la figura 7.32, la masa se coloca en posición horizontal y se suelta. En el punto más bajo de la oscilación, la cuerda choca con una clavija delgada situada a una distancia  $R$  por encima de dicho punto. Demostrar que  $R$  debe ser menor que  $2L/5$  para que la masa describa un círculo entero alrededor del punto  $R$ .

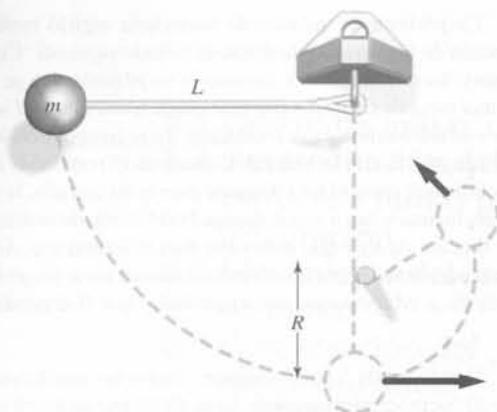


Figura 7.32 Problema 85

**86** ●● Para determinar la penetrabilidad de una bala se dispara un rifle contra un bloque de madera en reposo. La bala penetra una distancia  $D$  en la madera. Otra bala que tiene la misma masa pero que dobla su velocidad incide sobre el mismo bloque. Supongamos que la madera ejerce una fuerza media sobre la bala que no depende de la velocidad. La distancia de penetración de la segunda bala es (a)  $D$ , (b)  $2D$ , (c)  $4D$ , (d) imposible de determinar a partir de la información disponible.

**87** ●● En la figura 7.33 se muestra una experiencia estándar de un curso de física introductorio destinada a examinar la conservación de la energía y las leyes de Newton. Una pequeña viga de masa  $M$  atada a una cuerda sin masa de cuyo extremo cuelga un peso de masa  $m$  se coloca en un raíl de aire. Cuando el aire circula por el raíl, éste esencialmente no tiene rozamiento. Se suelta entonces la masa  $m$  y se mide la velocidad de la viga después de que el peso haya caído una distancia  $Y$ . Para demostrar que las leyes de la física son coherentes, determinar la velocidad de la viga de dos formas diferentes: (a) mediante la conservación de la energía mecánica; (b) usando la segunda y la tercera leyes de Newton directamente; es decir, haciendo un diagrama de fuerzas para las dos masas, encontrando su aceleración y, a partir de ella, calculando la velocidad de la viga.



Figura 7.33 Problema 87

**88** ●● SSM Se formula un modelo de carrera deportiva, según el cual la energía se consume en el proceso de acelerar y desacelerar las piernas. Si la masa de una pierna es  $m$  y la velocidad de la carrera es  $v$ , la energía necesaria para acelerar la pierna desde el reposo a  $v$  es  $\frac{1}{2}mv^2$  y la misma energía se necesita para desacelerar la pierna hasta el reposo para iniciar la siguiente zancada. Así, la energía requerida en cada zancada es  $mv^2$ . Supóngase que la masa de la pierna de un hombre es 10 kg y que corre con una velocidad de 3 m/s, siendo la distancia entre dos pisadas consecutivas de 1 m. Por lo tanto, la energía que debe proporcionar a sus piernas cada segundo es  $3 \times mv^2$ . Calcular con este modelo el consumo de energía del hombre por unidad de tiempo, suponiendo que sus músculos tienen un rendimiento del 25 por ciento.

**89** ●● Un profesor de química de secundaria sugirió medir el módulo de la aceleración de la gravedad mediante el método siguiente: Colgar un peso de un hilo muy fino de longitud  $L$  formando un péndulo que se coloca en el extremo de una mesa de tal forma que éste queda a una altura  $H$  sobre el suelo en el punto de altura mínima de su oscilación. Tirar entonces del hilo de forma que forme un ángulo  $\theta_0$  con la vertical. Colocar en el punto más bajo del péndulo una cuchilla que corte el hilo. Cuando éste se ha cortado, la masa se proyecta horizontalmente y cae a una distancia  $D$  del borde de la mesa. La idea es medir  $D$  en función de  $\theta_0$  y que esto sirva para determinar  $g$ . Además de las dificultades experimentales obvias, el procedimiento tiene un problema grave:  $D$  no depende de  $g$ . Muestre que esto es verdad y que  $D$  depende únicamente de  $\theta_0$ .

**90** ●● Un bloque de 5 kg se mantiene contra un muelle, cuya constante de fuerza es 20 N/cm, comprimiéndolo 3 cm. El bloque se libera y el muelle se extiende impulsando el bloque a lo largo de una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la superficie y el bloque es 0,2. (a) Determinar el trabajo realizado sobre el bloque por el muelle al extenderse desde su posición comprimida a su posición de equilibrio. (b) Determinar la energía disipada por rozamiento cuando el bloque se desplaza los 3 cm hasta la posición de equilibrio del muelle. (c) ¿Cuál es la velocidad del bloque al alcanzar el muelle su posición de equilibrio? (d) Si el bloque no estuviera sujeto al muelle, ¿qué distancia recorrería sobre la superficie antes de detenerse?

**91** ●● Un bloque de masa  $m$  se deja caer sobre la parte superior de un muelle vertical cuya constante de fuerza es  $k$  (figura 7.21, problema 26). Si el bloque se suelta desde una altura  $h$  por encima del muelle, (a) ¿cuál es la energía cinética máxima del bloque? (b) ¿Cuál es la máxima compresión del muelle? (c) ¿Para qué compresión la energía cinética del bloque es la mitad de su valor máximo?

**92** ●● Se empuja hacia un lado la lenteja de un péndulo de longitud  $L$  de modo que la cuerda forme con la vertical un ángulo  $\theta_0$ , y luego se suelta. En el ejemplo 7.2 se utilizó el principio de conservación de la energía para obtener su velocidad en la parte inferior de la trayectoria. En este problema se pide llegar al mismo resultado utilizando la segunda ley de Newton. (a) Demostrar que la componente tangencial de la segunda ley de Newton viene dada por  $dv/dt = -g \text{ sen } \theta$ , donde  $v$  es el módulo de la velocidad y  $\theta$  el ángulo que forma la cuerda con la vertical. (b) Demostrar que  $v$  se puede escribir en la forma  $v = L d\theta/dt$ . (c) Utilizar este resultado y la regla de la derivación en cadena para obtener

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta} v$$

(d) Combinar los resultados de (a) y (c) para obtener  $v dv = -gL \text{ sen } \theta d\theta$ .  
 (e) Integrar el miembro de la izquierda de esta ecuación desde  $v = 0$  hasta la

velocidad final  $v$  y el miembro de la derecha desde  $\theta = 0$  a  $\theta = \theta_0$  y demostrar que el resultado es equivalente a  $v = \sqrt{2gh}$ , siendo  $h$  la altura original de la lenteja del péndulo sobre el punto más bajo de su recorrido.

**93** ●● Un escalador de 85 kg baja por la pendiente de una roca cuando su sujeción falla y queda sostenido únicamente por la cuerda de seguridad atada a un punto de la cima. La forma de la pared puede esquematizarse tal como se muestra en la figura 7.34, con  $H = 300$  m. Suponga que la cuerda se comporta como un muelle de constante de fuerza  $k = 5$  N/m y de 60 m de longitud. (a) Usando una hoja de cálculo, represente gráficamente la energía potencial del escalador en función de  $s$ , siendo ésta la distancia desde la cima medida a lo largo de la curva de la superficie de la roca. Use valores de  $s$  comprendidos entre 60 m y 200 m. (b) Si la caída comenzó cuando estaba a una distancia  $s_i = 60$  m de la cima y acabó a una distancia  $s_f = 110$  m, determinar cuánta energía se disipó por rozamiento desde el momento que empezó a resbalar y hasta finalmente quedó parado.

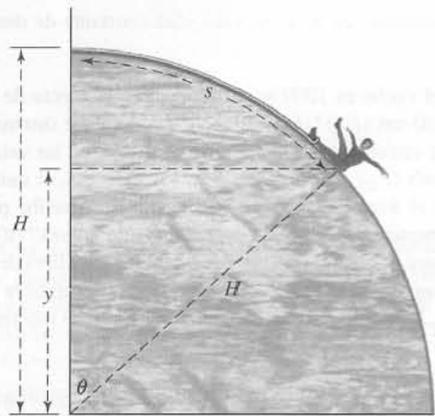


Figura 7.34 Problema 93

**94** ●● SSM Un bloque de madera de masa  $M$  está conectado a dos muelles sin masa tal como se muestra en la figura 7.35. Cada muelle tiene una longitud  $L$  y una constante de fuerza  $k$ . (a) Si el bloque se desplaza una distancia  $x$ , como se muestra en la figura, ¿cuál es el cambio de la energía potencial almacenada en los muelles? (b) ¿Cuál es el módulo de la fuerza que tira del bloque hacia la posición de equilibrio? (c) Usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, represente gráficamente la energía potencial  $U$  en función de  $x$  para  $0 \leq x \leq 0,2$  m. Supóngase  $k = 1$  N/m,  $L = 0,1$  m y  $M = 1$  kg. (d) Si el bloque se desplaza una distancia  $x = 0,1$  m y, posteriormente, se suelta, ¿cuál es su velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio? Supóngase que el bloque está descansando sobre una superficie sin rozamiento.

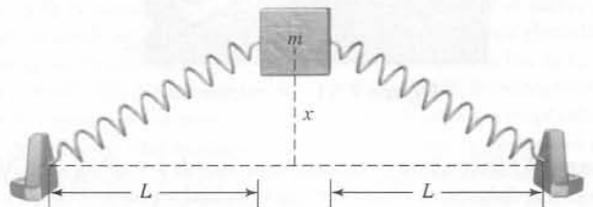


Figura 7.35 Problema 94

# SISTEMAS DE PARTÍCULAS Y CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

## Capítulo 8

- 8.1 Centro de masas
- \*8.2 Determinación del centro de masas por integración
- 8.3 Movimiento del centro de masas
- 8.4 Conservación del momento lineal
- 8.5 Energía cinética de un sistema
- 8.6 Colisiones
- \*8.7 Sistema de referencia del centro de masas
- \*8.8 Sistemas de masa variable: la propulsión de los cohetes



La masa del palo de golf multiplicada por su velocidad es el ímpetu o el momento lineal del palo. Cuando el golfista golpea la bola con el palo, parte del momento se transfiere a la bola.

¿Cómo se verá afectada la distancia recorrida por la bola si el deportista usa palos de distinta masa? (Véase el ejemplo 8.12.)

En los capítulos 6 y 7 hemos visto que el teorema trabajo-energía cinética para las partículas y para los sistemas de partículas son unas herramientas útiles para analizar una serie de situaciones y para resolver una gran cantidad de problemas. Sin embargo, para estudiar el movimiento de objetos materiales reales y para comprender cómo se comportan éstos cuando chocan, como por ejemplo la bola y el palo de golf de la foto, necesitamos añadir dos teoremas adicionales a nuestro bagaje de herramientas conceptuales. Estos son la **segunda ley de Newton para sistemas de partículas** (sección 8.3) y el teorema **del impulso mecánico-incremento del momento lineal** (sección 8.6). Este último teorema para sistemas introduce el principio de conservación del momento lineal, una de las leyes universales de la física.

El producto de la masa por la velocidad de una partícula se denomina **momento lineal, ímpetu o cantidad de movimiento**. El momento lineal de un sistema de partículas es el vector suma de los momentos lineales de las partículas individuales del sistema. Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento lineal del sistema es constante. El momento lineal de un sistema aislado es una magnitud que se conserva, al igual que la energía de un sistema aislado.



En este capítulo haremos uso del principio de conservación del momento lineal para analizar las colisiones entre bolas de billar, coches, partículas subatómicas y desintegraciones radiactivas de núcleos. Aplicaremos las leyes de Newton al movimiento de objetos macroscópicos reales como coches, cohetes y personas, dándonos cuenta que en los sistemas de partículas hay un punto, el *centro de masas*, que se mueve como si todo el sistema estuviera concentrado en él, y que todas las fuerzas que afectan el sistema lo hacen como si sólo actuaran en ese punto.

## 8.1 Centro de masas

El movimiento de un objeto o de un sistema de partículas se puede describir en función del movimiento del centro de masas (que puede considerarse como el movimiento global del sistema) más el movimiento de las partículas individuales en el sistema relativo al centro de masas. Consideremos en primer lugar un sistema simple formado por dos partículas en una dimensión. Sean  $x_1$  y  $x_2$  las coordenadas de las partículas puntuales de masas  $m_1$  y  $m_2$  respecto a un origen elegido arbitrariamente. La coordenada  $x_{cm}$  del centro de masas viene definida por

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 \tag{8.1}$$

en donde  $M = m_1 + m_2$  es la masa total del sistema. Para el caso de sólo dos partículas, el centro de masas se encuentra sobre un punto de la línea que une las partículas; si las partículas son de igual masa, el centro de masas se halla a la mitad de camino entre las partículas (figura 8.1).

Si dos partículas tienen distinta masa, el centro de masas está más cerca de la partícula de masa mayor (figura 8.2).

Si se elige el origen y la dirección del eje  $x$  de tal forma que la posición de  $m_1$  es el origen y  $m_2$  está en la dirección positiva del eje  $x$ , entonces  $x_1 = 0$  y  $x_2 = d$ , donde  $d$  es la distancia entre las partículas (figura 8.3) y el centro de masas viene dado por

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 = m_1(0) + m_2d$$

$$x_{cm} = \frac{m_2}{M} d = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \tag{8.2}$$

**Ejercicio** Una masa de 4 kg está en el origen y una masa de 2 kg está en  $x = 6$  cm. Determinar  $x_{cm}$ . (Respuesta  $x_{cm} = 2$  cm.)

Podemos generalizar de dos partículas en una dimensión a un sistema de muchas partículas en tres dimensiones. Para  $N$  partículas

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_Nx_N = \sum_i m_ix_i \tag{8.3}$$

en donde  $M = \sum m_i$  es la masa total del sistema. Igualmente,

$$My_{cm} = \sum_i m_iy_i \quad \text{y} \quad Mz_{cm} = \sum_i m_iz_i \tag{8.4}$$

El vector posición de la partícula  $i$  es  $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$ . El vector de posición del **centro de masas**  $\mathbf{r}_{cm}$ , viene definido por

$$M\mathbf{r}_{cm} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots = \sum_i m_i\mathbf{r}_i \tag{8.5}$$

DEFINICIÓN —CENTRO DE MASAS DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

en donde  $\mathbf{r}_{cm} = x_{cm}\mathbf{i} + y_{cm}\mathbf{j} + z_{cm}\mathbf{k}$ .

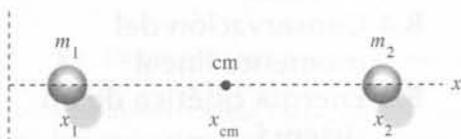


Figura 8.1

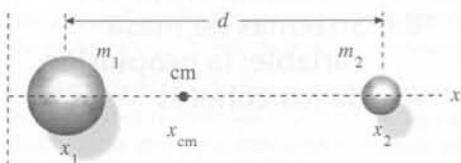


Figura 8.2

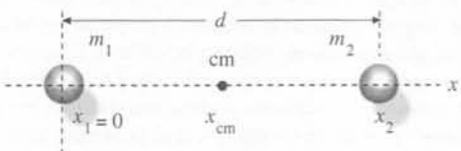


Figura 8.3

Para determinar el centro de masas de un objeto continuo, basta reemplazar el sumatorio de la ecuación 8.5 por una integral:

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int \mathbf{r} \, dm \quad (8.6)$$

DEFINICIÓN —CENTRO DE MASAS DE UN OBJETO CONTINUO

en donde  $dm$  es un elemento de masa localizado en la posición  $\mathbf{r}$ , como se muestra en la figura 8.4. En la sección 8.2 se exponen varios ejemplos relacionados con la ecuación 8.6. Para objetos muy simétricos el centro de masas es el centro geométrico. Por ejemplo, el centro de masas de un cilindro uniforme se encuentra en su centro geométrico. Considérese los siguientes ejemplos.

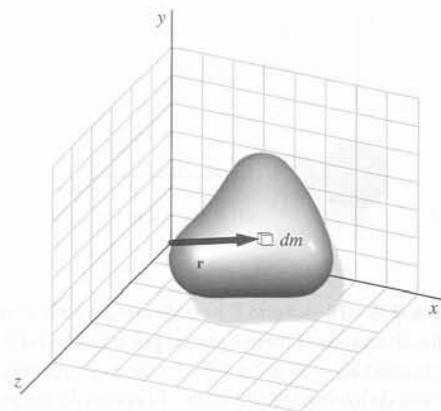


Figura 8.4 Elemento de masa  $dm$  localizado en  $\mathbf{r}$  para determinar el centro de masas por integración.

### EJEMPLO 8.1 | Centro de masas de la molécula de agua

Una molécula de agua está formada por un átomo de oxígeno y dos átomos de hidrógeno. El átomo de oxígeno tiene una masa de 16 unidades de masa atómica (u) y cada átomo de hidrógeno tiene una masa 1 u. Cada uno de los átomos de hidrógeno están separados una distancia media de 96 pm ( $96 \times 10^{-12}$  m) del átomo de oxígeno y separados entre sí por un ángulo de  $104,5^\circ$ . Determinar el centro de masas de la molécula.

**Planteamiento del problema** El cálculo se simplifica si elegimos como origen la posición del átomo de oxígeno y el eje  $x$  como la bisectriz del ángulo entre los átomos de hidrógeno (figura 8.5). Por lo tanto, dada la simetría de la molécula, el centro de masas estará sobre el eje  $x$  y la línea que une el átomo de oxígeno con cada átomo de hidrógeno formará con el eje  $x$  un ángulo de  $52,2^\circ$ .

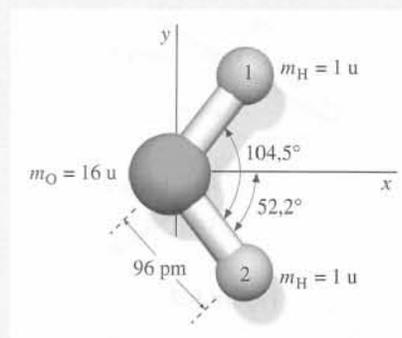


Figura 8.5

1. La posición del centro de masas viene dada por sus coordenadas,  $x_{\text{cm}}$  e  $y_{\text{cm}}$ :

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

2. Si estas expresiones se escriben explícitamente obtenemos:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_{\text{H1}}x_{\text{H1}} + m_{\text{H2}}x_{\text{H2}} + m_{\text{O}}x_{\text{O}}}{m_{\text{H1}} + m_{\text{H2}} + m_{\text{O}}}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{m_{\text{H1}}y_{\text{H1}} + m_{\text{H2}}y_{\text{H2}} + m_{\text{O}}y_{\text{O}}}{m_{\text{H1}} + m_{\text{H2}} + m_{\text{O}}}$$

3. Hemos elegido como origen la localización del oxígeno, de modo que las dos coordenadas  $x$  e  $y$  de éste son cero. Las coordenadas  $x$  de los átomos de hidrógeno se calculan a partir del ángulo de  $52,2^\circ$  que cada átomo de hidrógeno forma con el eje  $x$ :

$$x_{\text{O}} = y_{\text{O}} = 0$$

$$x_{\text{H1}} = x_{\text{H2}} = 96 \text{ pm} \cos 52,2^\circ = 59 \text{ pm}$$

$$y_{\text{H1}} = 96 \text{ pm} \sin 52,2^\circ = 76 \text{ pm}$$

$$y_{\text{H2}} = -96 \text{ pm} \sin 52,2^\circ = -76 \text{ pm}$$

4. Sustituyendo las coordenadas  $x$  y los valores de las masas en el paso 2 se obtiene  $x_{\text{cm}}$ :

$$x_{\text{cm}} = \frac{(1 \text{ u}) 59 \text{ pm} + (1 \text{ u}) (59 \text{ pm}) + (16 \text{ u}) 0}{1 \text{ u} + 1 \text{ u} + 16 \text{ u}}$$

$$= 6,6 \text{ pm}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{(1 \text{ u}) 76 \text{ pm} + (1 \text{ u}) (-76 \text{ pm}) + (16 \text{ u}) 0}{1 \text{ u} + 1 \text{ u} + 16 \text{ u}} = 0$$

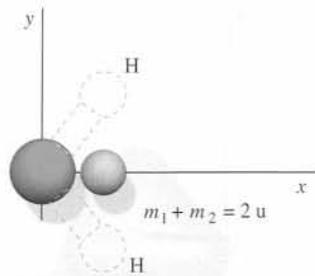
$$= 0$$

5. El centro de masas está en el eje  $x$

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = x_{\text{cm}}\mathbf{i} + y_{\text{cm}}\mathbf{j}$$

$$= 6,6 \text{ pm} \mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \boxed{6,6 \text{ pm} \mathbf{i}}$$

**Observación** Se puede ver que  $y_{\text{cm}} = 0$  a partir de la simetría de la distribución de masa. Asimismo, el centro de masas está muy próximo al átomo de oxígeno, el de mayor masa, como era de esperar.



**Figura 8.6** El ejemplo 8.1 puede considerarse con los dos átomos de H reemplazados por una sola partícula de masa  $m_1 + m_2 = 2 \text{ u}$  sobre el eje  $x$  en el centro de masas de los átomos originales. El centro de masas de la molécula de agua se encuentra entonces entre el átomo de oxígeno en el origen y el centro de masas de los dos átomos de hidrógeno calculado previamente.

El ejemplo 8.1 también puede resolverse determinando en primer lugar el centro de masas de los dos átomos de hidrógeno aisladamente. Para un sistema de tres partículas, la ecuación 8.5 es

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3$$

Los dos primeros términos del segundo miembro de esta ecuación están relacionados con el centro de masas de las dos primeras partículas  $\mathbf{r}'_{\text{cm}}$ :

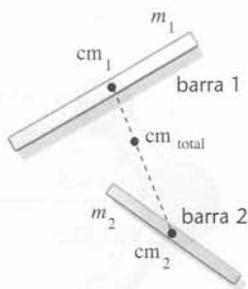
$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{r}'_{\text{cm}}$$

El centro de masas del sistema de tres partículas será, por lo tanto,

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = (m_1 + m_2)\mathbf{r}'_{\text{cm}} + m_3\mathbf{r}_3$$

Así, podemos determinar primero el centro de masas de dos de las partículas, por ejemplo, los átomos de hidrógeno, y después reemplazarlos por una sola partícula de masa total  $m_1 + m_2$  en aquel centro de masas (figura 8.6).

La misma técnica nos permite calcular los centros de masa de sistemas más complejos, como por ejemplo, dos barras uniformes (figura 8.7). El centro de masas de cada barra por separado se encuentra en el centro de la barra. El centro de masas del sistema se determina tratando cada barra como una partícula puntual en su propio centro de masas.



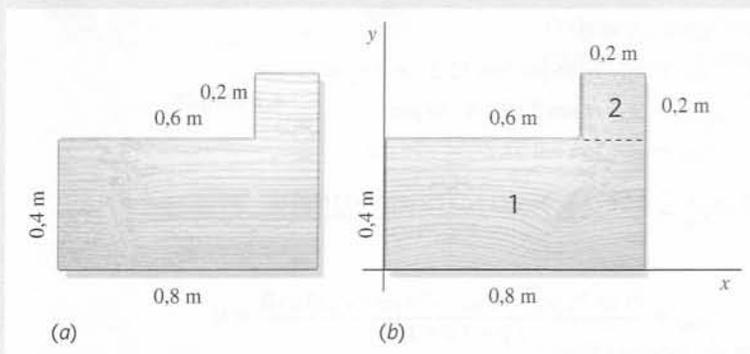
**Figura 8.7**

**EJEMPLO 8.2 | Centro de masas de una lámina de madera**

*¡INTÉNTELO USTED MISMO!*

Determinar el centro de masas de la lámina de madera de la figura 8.8(a).

**Planteamiento del problema** La lámina puede dividirse en dos partes simétricas (figura 8.8(b)). El centro de masas de cada parte es su centro geométrico. Sea  $m_1$  la masa de la parte 1 y  $m_2$  la masa de la parte 2. La masa total es  $M = m_1 + m_2$ . Las masas son proporcionales a las áreas.



**Figura 8.8**

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

**Pasos**

1. Expresar las coordenadas  $x$  y  $y$  del centro de masas en función de  $m_1$  y  $m_2$ .

**Respuestas**

$$Mx_{\text{cm}} = m_1x_{\text{cm},1} + m_2x_{\text{cm},2}$$

$$My_{\text{cm}} = m_1y_{\text{cm},1} + m_2y_{\text{cm},2}$$

2. Dividir las ecuaciones anteriores por  $M$  y sustituir los cocientes de las áreas por las relaciones entre las masas.

$$x_{\text{cm}} = \frac{A_1}{A} x_{1,\text{cm}} + \frac{A_2}{A} x_{2,\text{cm}}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{A_1}{A} y_{1,\text{cm}} + \frac{A_2}{A} y_{2,\text{cm}}$$

3. Calcular las áreas y los cocientes entre las áreas.

$$A_1 = 0,32 \text{ m}^2, \quad A_2 = 0,04 \text{ m}^2, \quad A = 0,36 \text{ m}^2$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{8}{9}, \quad \frac{A_2}{A} = \frac{1}{9}$$

4. Expresar las coordenadas  $x$  e  $y$  del centro de masas de cada una de las partes de la lámina por inspección simple de la figura.

$$x_{1,\text{cm}} = 0,4 \text{ m}, \quad y_{1,\text{cm}} = 0,2 \text{ m}$$

$$x_{2,\text{cm}} = 0,7 \text{ m}, \quad y_{2,\text{cm}} = 0,5 \text{ m}$$

5. Sustituir estos resultados para calcular  $x_{\text{cm}}$  e  $y_{\text{cm}}$ .

$$x_{\text{cm}} = \boxed{0,433 \text{ m}}, \quad y_{\text{cm}} = \boxed{0,233 \text{ m}}$$

**Observación** 1. El centro de masas está muy próximo al centro de masas de la parte 1, ya que  $m_1 = 8m_2$ . 2. El cálculo del centro de masas es más sencillo si se coloca el origen en el centro geométrico de la parte 1 de la lámina y se dibuja el eje  $x$  señalando el centro de la parte 2.

## Energía potencial gravitatoria de un sistema

La energía potencial gravitatoria de un sistema de partículas en un campo gravitatorio uniforme es la misma que tendría si toda su masa estuviera concentrada en el centro de masas. Sea  $h_i$  la altura de la partícula  $i$  en un sistema que se encuentra por encima de un nivel determinado de referencia. La energía potencial gravitatoria del sistema es

$$U = \sum_i m_i g h_i = g \sum_i m_i h_i$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la definición del centro de masas, la altura de éste viene dada por la expresión

$$M h_{\text{cm}} = \sum_i m_i h_i$$

es decir,

$$U = M g h_{\text{cm}} \quad (8.7)$$

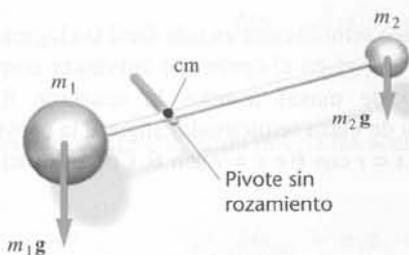


Figura 8.9

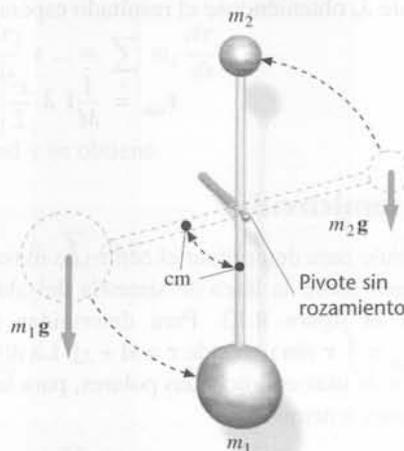
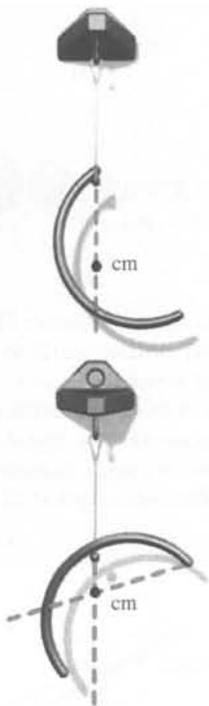


Figura 8.10



**Figura 8.11** El centro de masas de un objeto irregular puede determinarse suspendiéndolo de dos puntos distintos.

Este resultado puede utilizarse para localizar experimentalmente el centro de masas de un objeto. Por ejemplo, dos objetos conectados por una barra ligera estarán en equilibrio sobre un pivote situado en el centro de masas (figura 8.9). Si pivotamos el sistema en cualquier otro punto, el sistema girará hasta que la energía potencial pase por un mínimo, lo cual tiene lugar cuando el centro de masas se encuentra en el punto más bajo posible directamente debajo del pivote (figura 8.10).

Si suspendemos cualquier cuerpo irregular de un pivote, este cuerpo colgará de modo que sus centro de masas se encuentre en un punto de la línea vertical que pasa por el pivote y debajo de éste. Si ahora suspendemos el cuerpo de otro punto y trazamos la línea vertical que pasa a través del mismo, el centro de masas se encuentra en la intersección de las dos líneas (figura 8.11).

## \* 8.2 Determinación del centro de masas por integración

En esta sección se determina el centro de masas por integración (ecuación 8.6).

$$M\mathbf{r}_{cm} = \int \mathbf{r} dm$$

Para ilustrar la técnica de cómo establecer la integración trataremos el problema simple de determinar el centro de masas de una barra uniforme y delgada. Aunque podemos encontrar la solución a este problema por simetría, en este apartado lo haremos mediante integración.

### Barra uniforme

Primero, elegimos el sistema de coordenadas. Una buena elección es un sistema de coordenadas con el eje  $x$  a lo largo de la barra, con el origen en un extremo (figura 8.12). En la figura se muestra un elemento de masa  $dm$  de longitud  $dx$  situado a una distancia  $x$  del origen. La ecuación 8.6 nos lleva entonces a

$$M\mathbf{r}_{cm} = \int \mathbf{r} dm = \int xi dm$$

La masa está distribuida a lo largo del eje  $x$  dentro del intervalo  $0 \leq x \leq L$ . El barrido de  $dm$  a lo largo de toda la barra (y en la dirección positiva del eje  $x$ ) se determina mediante los límites de la integral 0 y  $L$ . El cociente  $dm/dx$  es la masa por unidad de longitud  $\lambda$ , por lo tanto  $dm = \lambda dx$ :

$$M\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{i} \int x dm = \mathbf{i} \int_0^L x \lambda dx$$

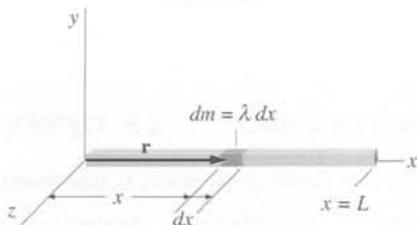
Si la barra es uniforme,  $\lambda$  es constante e igual a  $M/L$ . El cálculo se acaba sustituyendo el valor de  $\lambda$ , obteniéndose el resultado esperado

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \mathbf{i} \lambda \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{1}{M} \mathbf{i} \frac{ML^2}{2} = \frac{1}{2} L \mathbf{i}$$

### Aro semicircular

El cálculo para determinar el centro de masas de un aro semicircular es más fácil si elegimos el origen sobre la línea de simetría del alambre (el eje  $y$ ) en el centro de curvatura como indica la figura 8.13. Para determinar el centro de masas usamos la ecuación 8.6 ( $M\mathbf{r}_{cm} = \int \mathbf{r} dm$ ), donde  $\mathbf{r} = xi + yj$ . La distribución de masa semicircular sugiere la conveniencia de usar coordenadas polares, para las cuales  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Con estas sustituciones tenemos

$$M\mathbf{r}_{cm} = \int (xi + yj) dm = \int r(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) dm$$



**Figura 8.12**

Ahora expresamos  $dm$  en función de  $d\theta$ . Primero, el elemento de masa  $dm$  tiene longitud  $ds = r d\theta$ , por lo tanto

$$dm = \lambda ds = \lambda r d\theta$$

en donde  $\lambda = dm/ds$  es la masa por unidad de longitud. De esta forma tenemos

$$M \mathbf{r}_{\text{cm}} = \int r(\cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j}) \lambda r d\theta$$

La evaluación de esta integral supone que  $dm$  recorra la distribución de masa semicircular. Esto significa que los límites de  $\theta$  son  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Se integra en la dirección de  $\theta$  creciente, por lo que los límites van de  $0$  a  $\pi$ . Se obtiene entonces

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{r^2}{M} \int_0^\pi (\cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j}) \lambda d\theta$$

El aro es uniforme y sabemos que  $\lambda = M/\pi r$ , donde  $\pi r$  es la longitud de la semicircunferencia. Sustituyendo  $\lambda$  y reordenando términos

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{r}{\pi} \mathbf{i} \int_0^\pi \cos \theta d\theta + \frac{r}{\pi} \mathbf{j} \int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta = \frac{r}{\pi} \mathbf{i} \text{sen } \theta \Big|_0^\pi - \frac{r}{\pi} \mathbf{j} \cos \theta \Big|_0^\pi = \frac{2r}{\pi} \mathbf{j}$$

El centro de masas está en el eje  $y$  a una distancia de  $2r/\pi$  del origen. Notemos que está fuera del objeto.

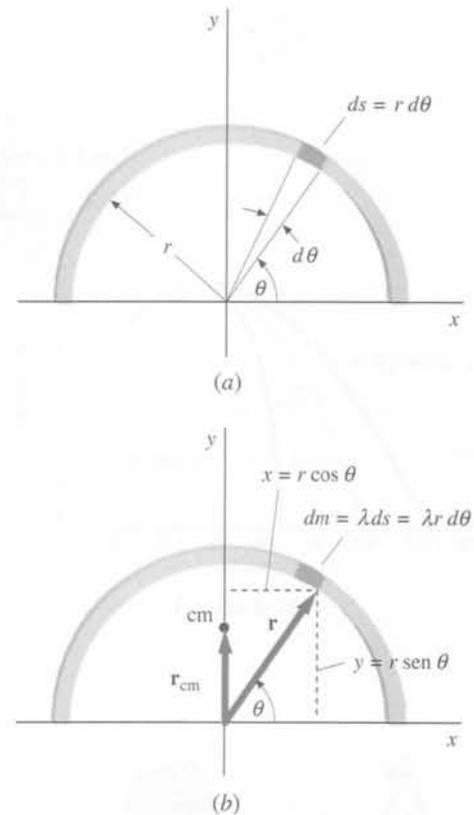


Figura 8.13 Geometría para el cálculo del centro de masas de un aro semicircular por integración.

## 8.3 Movimiento del centro de masas

La figura 8.14 es una fotografía obtenida con destellos múltiples de un bastón lanzado al aire. Aunque el movimiento del bastón es complicado, el movimiento del centro de masas es simple. Mientras el bastón está en el aire, el centro de masas sigue una trayectoria parabólica, la misma que seguiría una partícula puntual. Demostraremos en general que la aceleración del centro de masas de un sistema de partículas es igual a la fuerza externa que actúa sobre el sistema, dividida por la masa total del mismo. Para el bastón lanzado al aire, la aceleración del centro de masas es  $\mathbf{g}$  dirigida hacia abajo. Para determinar la aceleración del centro de masas, calcularemos primero su velocidad, derivando la ecuación 8.5 respecto al tiempo:

$$M \frac{d\mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} = m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

La derivada temporal de la posición es la velocidad y se obtiene

$$M \mathbf{v}_{\text{cm}} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \quad (8.8)$$

Una nueva diferenciación nos da las aceleraciones:

$$M \mathbf{a}_{\text{cm}} = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \quad (8.9)$$

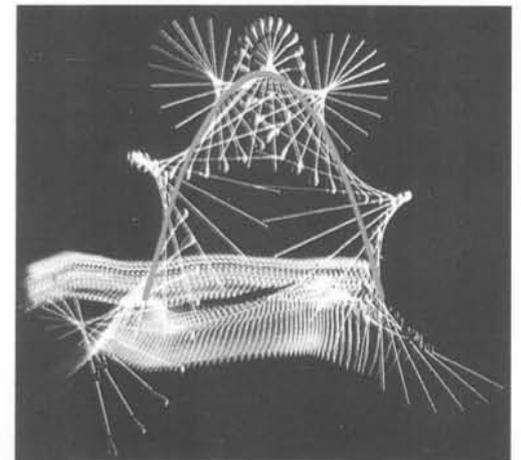


Figura 8.14

Sin embargo, de acuerdo con la segunda ley de Newton,  $m_i \mathbf{a}_i$  es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula  $i$ , por lo que

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i$$

en donde el término de la derecha es la suma de todas las fuerzas que actúan en cada partícula del sistema. Algunas de estas fuerzas son fuerzas *internas* (ejercidas sobre una partícula del sistema por otra partícula del sistema) y otras son fuerzas *externas* (ejercidas sobre una partícula del sistema por una partícula que no está en el sistema). Así,

$$M \mathbf{a}_{\text{cm}} = \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{int}} + \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} \quad (8.10)$$

De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas se presentan emparejadas acción-reacción. Así, para cada fuerza interna que actúa sobre una partícula existe una fuerza igual pero opuesta que actúa sobre otra partícula. Cuando se suman todas las fuerzas internas, cada pareja acción-reacción suma cero, de forma que  $\sum \mathbf{F}_{i,\text{int}} = 0$ . La ecuación 8.10 se convierte en

$$\mathbf{F}_{\text{net},\text{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = M \mathbf{a}_{\text{cm}} \quad (8.11)$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA UN SISTEMA

Esta ecuación nos dice que la masa total  $M$  multiplicada por la aceleración del centro de masas  $\mathbf{a}_{\text{cm}}$  es igual a la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema. Así, tenemos:

El centro de masas de un sistema se mueve como una partícula de masa  $M = \sum m_i$  sometida a la influencia de la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema.

Este teorema es importante porque nos muestra cómo describir el movimiento del centro de masas de cualquier sistema de partículas. El centro de masas se comporta exactamente igual que una sola partícula puntual sometida únicamente a las fuerzas externas. Los movimientos individuales de los elementos del sistema generalmente son mucho más complejos y no vienen descritos por la ecuación 8.11. El bastón lanzado al aire de la figura 8.14 es un ejemplo. La única fuerza que actúa es la gravedad y, por lo tanto, el centro de masas del bastón se mueve según una trayectoria parabólica, como si se tratara de una partícula puntual (la rotación del bastón alrededor de su centro de masas no viene descrita por la ecuación 8.11).

### EJEMPLO 8.3 | Un proyectil que explota

Un proyectil se lanza al aire desde el nivel del suelo y aterriza a 55 m. En el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos de igual masa. Justo después de la explosión, uno de los fragmentos tiene velocidad cero y cae directamente al suelo. ¿Dónde cae el otro fragmento? Despreciar la resistencia del aire.

**Planteamiento del problema** Sea el proyectil el sistema. Entonces las fuerzas de explosión son todas fuerzas internas. Como la única fuerza *externa* que actúa sobre el sistema es la de la gravedad, el centro de masas, que está en todo momento a mitad de camino entre los fragmentos, continúa con su trayectoria parabólica como si no hubiera explosión (figura 8.15).

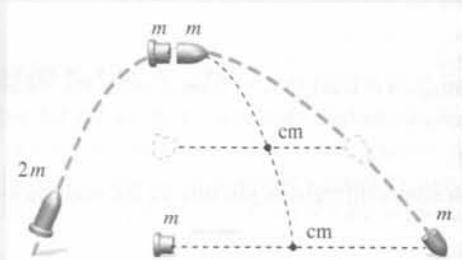


Figura 8.15

- Sea  $x = 0$  la posición inicial del proyectil. Las posiciones de aterrizaje  $x_1$  y  $x_2$  de los fragmentos están relacionados con la posición final del centro de masas por:
 
$$(2m)x_{cm} = mx_1 + mx_2$$

$$0$$

$$2x_{cm} = x_1 + x_2$$
- En el impacto,  $x_{cm} = R$  y  $x_1 = 0,5R$ , donde  $R = 55$  m es el alcance del proyectil si no explota. Se obtiene entonces para  $x_2$ :
 
$$x_2 = 2x_{cm} - x_1 = 2R - 0,5R = 1,5R$$

$$= 1,5(55 \text{ cm}) = \boxed{82,5 \text{ m}}$$

**Observación** La figura 8.16 representa la altura en función de la distancia para los proyectiles que explotan cuando el primer fragmento posee una velocidad horizontal igual a la mitad de la velocidad horizontal inicial. Como en el ejemplo original, en el cual el primer fragmento cae verticalmente hacia abajo, el centro de masas sigue una trayectoria normal parabólica.

**Ejercicio** Si la masa del fragmento que cae directamente hacia abajo es el doble que la masa del otro fragmento, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento aterrizará el más ligero? (*Respuesta*  $2R$ .)

**Observación** Si ambos fragmentos tienen la misma componente vertical de la velocidad después de la explosión, ambos aterrizarán al mismo tiempo. Si justo después de la explosión la componente vertical de la velocidad vectorial de uno de los fragmentos es menor que la del otro, el fragmento con componente vertical menor chocará primero contra el suelo. Tan pronto como lo haga, el suelo ejercerá una fuerza sobre él y la fuerza neta sobre el sistema dejará de ser sólo la gravedad. Desde este momento, nuestro análisis no es válido.

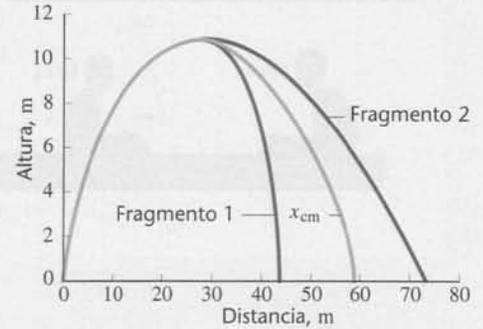


Figura 8.16

**Ejercicio** Un cilindro descansa sobre un papel encima de una mesa (figura 8.17). Cuando se tira del papel hacia la derecha, el cilindro rueda hacia la izquierda en relación al papel. ¿Cómo se mueve el centro de masas del cilindro en relación a la mesa? (*Respuesta* Acelera hacia la derecha, ya que la fuerza externa resultante que actúa sobre el cilindro es la de rozamiento hacia la derecha que ejerce el papel. Inténtelo hacer. Aparentemente, el cilindro acelera hacia la izquierda, ya que le vemos rodar hacia atrás sobre el papel. Sin embargo, en relación a la mesa, que sirve de sistema de referencia inercial, se mueve hacia la derecha. Si se hace una marca en la mesa que señale la posición original del cilindro, se observa que el centro de masas se mueve hacia la derecha *mientras el cilindro siga en contacto con el papel*.)

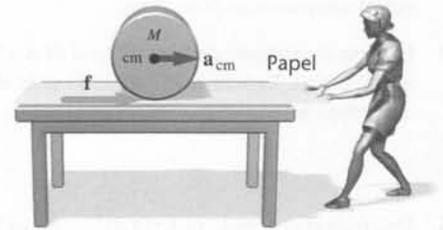


Figura 8.17

Un caso especial del movimiento del centro de masas es aquel en que sobre el sistema no actúa ninguna fuerza externa neta. Por lo tanto,  $\mathbf{a}_{cm} = 0$  y el centro de masas está en reposo o se mueve con velocidad constante. Las fuerzas internas y el movimiento pueden ser complejos, pero el comportamiento del centro de masas es simple. Además, si la fuerza externa neta no es cero, pero si una componente de ella en una dirección dada, por ejemplo la dirección  $x$ , es cero, entonces  $a_{cmx} = 0$  y  $v_{cmx}$  permanece constante. Un ejemplo de esto es un proyectil en ausencia de resistencia del aire. La fuerza externa neta sobre el proyectil es la fuerza gravitatoria. Esta fuerza actúa hacia abajo, por lo que la componente de la fuerza en la dirección horizontal es cero. Se sigue entonces, que la componente horizontal de la velocidad del centro de masas es constante.

### EJEMPLO 8.4 | Cambio de plazas en un bote

Pete (masa 80 kg) y Dave (masa 120 kg) se encuentran en un bote de remos (masa 60 kg). Dave está en el centro del bote, remando, y Pete en un extremo a 2 m del centro. Dave se cansa de remar y una vez que el bote se detiene, intercambia sus puesto con Pete. ¿Qué distancia se ha movido el bote al intercambiarse las dos personas? (Despreciar cualquier fuerza horizontal ejercida por el agua.)

**Planteamiento del problema** Sea el sistema Pete, Dave y el bote. Como no hay fuerzas externas en dirección horizontal, el centro de masas no se mueve horizontalmente respecto un sistema de referencia inercial como el agua. Sin embargo, en relación al bote, el centro de masas sí se mueve. Encontrar primero el desplazamiento  $\Delta x_{cm}$  que se mueve el centro de masas respecto al bote. Respecto al agua el bote tiene que moverse la misma distancia  $\Delta x_{cm}$  en dirección contraria. Este hecho determina la distancia que el bote debe moverse.

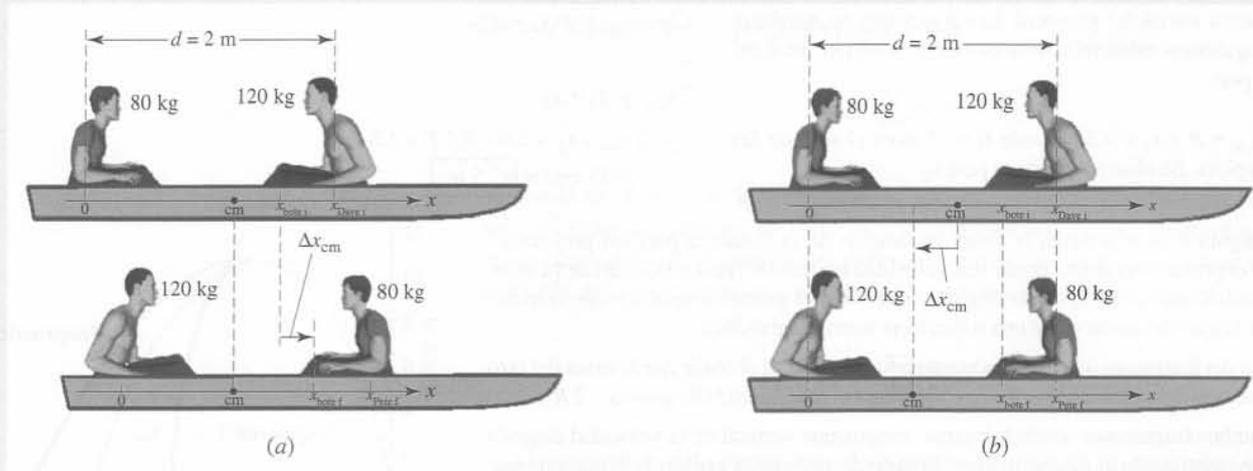


Figura 8.18

1. Dibujar un diagrama del sistema en sus configuraciones inicial y final (figura 8.18). Elegir el origen en la parte trasera del bote (la posición inicial de Pete) y sea  $d = 2 \text{ m}$  de tal forma que  $x_{\text{Pete } i} = 0$  y  $x_{\text{Dave } i} = d$ . Sea  $x_{\text{bote}}$  la posición del centro de masas del bote. Los remeros simplemente intercambian posiciones.
2. Escribir el producto de la masa total  $M$  por la posición inicial del centro de masas. Repetir esta operación para el valor de la posición final del centro de masas.
3. Determinar el desplazamiento del centro de masas relativo al bote, restando el primer resultado del paso 2 del segundo:
4. Como el centro de masa no se mueve con respecto al agua, el bote debe moverse una distancia igual en la dirección opuesta:

$$Mx_{\text{cm } i} = m_{\text{Pete}}x_{\text{Pete } i} + m_{\text{Dave}}x_{\text{Dave } i} + m_{\text{bote}}x_{\text{bote } i}$$

$$= 0 + m_{\text{Dave}}d + m_{\text{bote}}x_{\text{bote}}$$

$$Mx_{\text{cm } f} = m_{\text{Pete}}x_{\text{Pete } f} + m_{\text{Dave}}x_{\text{Dave } f} + m_{\text{bote}}x_{\text{bote } f}$$

$$= m_{\text{Pete}}d + 0 + m_{\text{bote}}x_{\text{bote}}$$

$$Mx_{\text{cm } f} - Mx_{\text{cm } i} = (m_{\text{Pete}} - m_{\text{Dave}})d + 0$$

por lo que

$$x_{\text{cm } f} - x_{\text{cm } i} = \frac{(m_{\text{Pete}} - m_{\text{Dave}})d}{M}$$

$$-(x_{\text{cm } f} - x_{\text{cm } i}) = \frac{(m_{\text{Dave}} - m_{\text{Pete}})d}{M}$$

$$= \frac{(120 \text{ kg} - 80 \text{ kg})}{120 \text{ kg} + 80 \text{ kg} + 60 \text{ kg}}(2 \text{ m})$$

$$= \boxed{0,308 \text{ m}}$$

**Observación** La localización del centro de masas respecto al bote desaparece en el paso 3. El desplazamiento del bote es independiente de su localización.

### EJEMPLO 8.5 | Deslizamiento de un bloque

Una cuña de masa  $m_2$  se encuentra en reposo sobre una balanza como indica la figura 8.19. Un bloque pequeño de masa  $m_1$  se desliza por el plano inclinado sin rozamiento de la cuña. Determinar la lectura de la balanza mientras el bloque se desliza.

**Planteamiento del problema** La cuña y el bloque constituyen nuestro sistema. Como el bloque acelera hacia abajo por la cuña, el centro de masas posee componentes de aceleración hacia la derecha y hacia abajo. Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema son los pesos del bloque y la cuña, la fuerza  $F_x$  ejercida por la balanza sobre la cuña y la fuerza normal  $F_n$  ejercida hacia arriba por la balanza. La lectura de la balanza es igual al módulo de  $F_n$ .

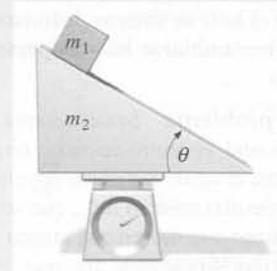


Figura 8.19

1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el sistema cuña-bloque (figura 8.20):

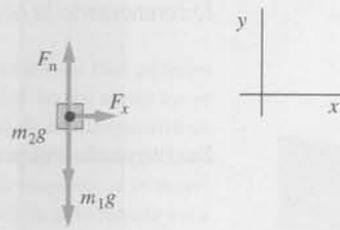


Figura 8.20

2. Expresar la componente vertical de la segunda ley de Newton para el sistema y despejar  $F_n$ :
3. Usando la ecuación 8.9, expresar  $a_{cm,y}$  en función de la aceleración del bloque  $a_{1y}$ :
4. En el ejemplo 4.8 vimos que un bloque que se desliza hacia abajo por un plano inclinado estacionario posee la aceleración  $g \sen \theta$ . Determinar la componente  $y$  de esta aceleración usando trigonometría y utilizarla para determinar  $a_{cm,y}$ :
5. Sustituir  $a_{cm,y}$  por el valor obtenido en el paso 2 y calcular  $F_n$ :

$$F_n - m_1g - m_2g = Ma_{cm,y} = (m_1 + m_2) a_{cm,y}$$

$$F_n = (m_1 + m_2) g + (m_1 + m_2) a_{cm,y}$$

$$Ma_{cm,y} = m_1 a_{1y} + m_2 a_{2y} = m_1 a_{1y}$$

$$a_{cm,y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_{1y}$$

$$a_{1y} = -a \sen \theta = -g \sen^2 \theta$$

por lo tanto

$$a_{cm,y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_{1y}$$

$$= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} g \sen^2 \theta$$

$$F_n = (m_1 + m_2) g + (m_1 + m_2) a_{cm,y}$$

$$= (m_1 + m_2) g - m_1 g \sen^2 \theta = [(1 - \sen^2 \theta)m_1 + m_2]g$$

$$= \boxed{(m_1 \cos^2 \theta + m_2)g}$$

**Ejercicio** ¿Qué valores de  $F_n$  se pueden deducir, intuitivamente, si  $\theta = 0$  o si  $\theta = 90^\circ$ ? Demostrar que  $(m_1 \cos^2 \theta + m_2)g$  da estos valores esperados. (Respuesta Para  $\theta = 0$  esperamos  $F_n = (m_1 + m_2)g$ ; para  $\theta = 90^\circ$ ,  $F_n = m_2g$ ).

**Ejercicio** Determinar la fuerza  $F_x$  ejercida sobre la cuña por la balanza. (Respuesta  $F_x = m_1 g \sen \theta \cos \theta$ .)

## 8.4 Conservación del momento lineal

El **momento lineal**, **ímpetu** o **cantidad de movimiento p** de una partícula se define como el producto de su masa por la velocidad:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (8.12)$$

DEFINICIÓN — MOMENTO LINEAL DE UNA PARTÍCULA

El momento lineal es una magnitud vectorial. Puede considerarse como una medida de la dificultad de llevar la partícula hasta el reposo. Por ejemplo, un camión pesado tiene mayor momento lineal que un automóvil ligero que se mueve con igual velocidad. Es necesaria una fuerza mayor para detener el camión en un tiempo determinado que para detener el automóvil en el mismo tiempo. (La magnitud  $m\mathbf{v}$  se designa como *momento lineal* de una partícula para distinguirlo del *momento angular*, que se trata en el capítulo 10. Cuando no hace falta clarificar que el momento se refiere al momento lineal, el adjetivo *lineal* se omite y nos referimos simplemente al *momento*. En el resto de este capítulo se usa el vocablo *momento* para referirnos al momento lineal.)

La segunda ley de Newton puede escribirse en función del momento de una partícula. Diferenciando la ecuación 8.12 se obtiene

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

Sustituyendo  $m\mathbf{a}$  por la fuerza  $\mathbf{F}_{\text{neta}}$ , resulta

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (8.13)$$

Por lo tanto, la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la derivada respecto al tiempo del momento de la partícula. En realidad el enunciado original de Newton sobre la segunda ley tenía esta forma.

El momento total  $\mathbf{P}_{\text{sist}}$  de un sistema de muchas partículas es la suma de los momentos de las partículas individuales:

$$\mathbf{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i$$

De acuerdo con la ecuación 8.8,  $\sum m_i \mathbf{v}_i$  es igual a la masa total  $M$  multiplicada por la velocidad del centro de masas:

$$\mathbf{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{\text{cm}} \quad (8.14)$$

MOMENTO TOTAL DE UN SISTEMA

Derivando esta ecuación respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{sist}}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}$$

pero de acuerdo con la segunda ley de Newton (ecuación 8.11),  $M\mathbf{a}_{\text{cm}}$  es igual a la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema. Por lo tanto,

$$\sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{neta,ext}} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{sist}}}{dt} \quad (8.15)$$

Cuando la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema de partículas es cero, la derivada del momento lineal total es también cero, y el momento lineal total del sistema permanece constante:

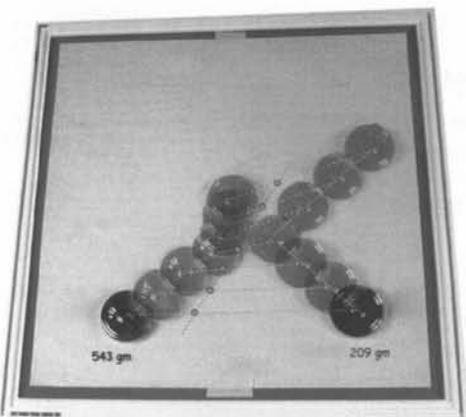
$$\mathbf{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{\text{cm}} = \text{constante} \quad (\mathbf{F}_{\text{neta,ext}} = 0) \quad (8.16)$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

Este resultado se conoce con el nombre de **ley de conservación del momento**:

Si la fuerza externa resultante sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema permanece constante.

Esta ley es una de las más importantes de la física. Es, en general, más aplicable que la ley de conservación de la energía mecánica debido a que las fuerzas internas ejercidas por una partícula del sistema sobre otra son frecuentemente no conservativas. Así pues, estas fuerzas internas pueden hacer variar la energía mecánica total del sistema, pero no pueden modificar la cantidad de movimiento total del sistema. Si el momento lineal total de un sistema es constante, la velocidad vectorial del centro de masas del sistema también es constante.



Dos discos se mueven en un colchón de aire sobre una superficie horizontal. (En la fotografía no se ven los pequeños agujeros por los que sale el aire.) La colisión hace cambiar el módulo y la dirección de la velocidad de cada disco, pero la velocidad del centro de masas sigue constante, sin que le afecten las fuerzas internas de la colisión.

### EJEMPLO 8.6 | Mantenimiento espacial

Durante la reparación del telescopio espacial Hubble, una astronauta reemplaza dos paneles solares cuyos marcos se han curvado. Al empujar los paneles deteriorados hacia atrás en el espacio exterior, ella experimenta un impulso en sentido opuesto. La masa de la astronauta es 60 kg y la del panel 80 kg. La astronauta está inicialmente en reposo relativo respecto a su vehículo espacial y después empuja el panel con una velocidad de 0,3 m/s respecto a la nave. ¿Cuál es su velocidad posterior respecto a la nave? (Durante esta operación la astronauta está sujeta con una cuerda a la nave espacial; para nuestro cálculo, suponer que la cuerda permanece floja.)

**Planteamiento del problema** La velocidad de la astronauta puede determinarse a partir de la velocidad del panel mediante la ley de conservación del momento lineal. Elegir como dirección positiva la del movimiento del panel.

1. Aplicar la conservación del momento para determinar la velocidad de la astronauta. Como el momento inicial total es cero, continuará siendo cero durante el proceso:

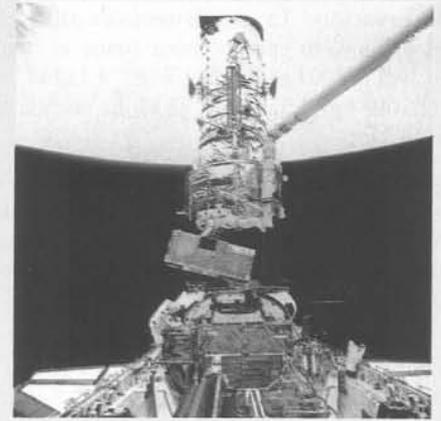
$$p_p + p_a = m_p v_p + m_a v_a = 0$$

2. Despejar la velocidad de la astronauta:

$$v_a = -\frac{m_p}{m_a} v_p = \frac{80 \text{ kg}}{60 \text{ kg}} (0,3 \text{ m/s}) = \boxed{-0,4 \text{ m/s}}$$

**Observación** Aunque el momento se conserva, la energía mecánica de este sistema se incrementa, ya que al realizar un esfuerzo, la energía química de la astronauta se convierte en energía cinética.

**Ejercicio** Determinar la energía cinética final del sistema astronauta-panel. (Respuesta 8,4 J.)



### EJEMPLO 8.7 | El vagón incontrolado

Un vagón de ferrocarril incontrolado de masa 14 000 kg se desplaza a 4 m/s hacia un cambio de agujas. Al pasar cerca de un almacén de grano, 2000 kg de grano caen súbitamente sobre el vagón. ¿Cuánto tiempo tardará el vagón en cubrir la distancia de 500 m que hay desde el almacén hasta el cambio de agujas? Suponer que el grano cae verticalmente y que la desaceleración debida al rozamiento por rodadura y a la resistencia del aire es despreciable.

**Planteamiento del problema** Determinamos el tiempo de recorrido a partir de la distancia al cambio de agujas y la velocidad del vagón. Consideramos como sistema el vagón y el grano caído en el mismo (figura 8.21). Como no actúan fuerzas externas horizontales sobre el sistema, la componente horizontal del momento lineal del sistema se conserva. La velocidad final del vagón lleno de grano puede determinarse a partir de su momento final, el cual es igual al momento inicial del vagón. (El grano inicialmente carece de momento lineal horizontal.) Sean  $m_v$  y  $m_g$  las masas del vagón y del grano respectivamente.

1. El tiempo transcurrido desde el almacén hasta el cambio de agujas a la distancia  $d$  recorrida dividida por la velocidad  $v_f$  del vagón después de que haya caído el grano:

$$\Delta t = \frac{d}{v_f}$$

2. Aplicar el principio de conservación del momento para relacionar la velocidad final  $v_f$  con la velocidad inicial  $v_i$ . ¡Cuidado! Sólo se conserva la componente horizontal del momento del sistema:

$$(m_v + m_g) v_f = m_v v_i + m_g(0)$$

3. Despejar  $v_f$ :

$$v_f = \frac{m_v v_i}{m_v + m_g}$$

4. Aplicar el valor de  $v_f$  del paso 1 y despejar el tiempo:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{d}{v_f} = \frac{(m_v + m_g)d}{m_v v_i} \\ &= \frac{(14\,000 \text{ kg} + 2\,000 \text{ kg})(500 \text{ m})}{(14\,000 \text{ kg})(4 \text{ m/s})} \\ &= \boxed{143 \text{ s}} \end{aligned}$$

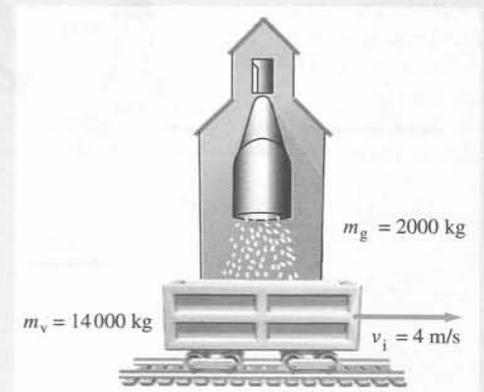


Figura 8.21

**Observación** La energía mecánica del sistema se convierte en calor. Sea  $E_{c_g}$  la energía cinética del grano justo cuando choca contra el vagón. La energía mecánica inicial es  $E_{c_p} + \frac{1}{2}m_v v_i^2 = E_{c_g} + \frac{1}{2}(14\,000\text{ kg})(4\text{ m/s})^2 = E_{c_g} + 112\text{ kJ}$ , mientras que la energía final es  $\frac{1}{2}(m_v + m_g) v_f^2 = \frac{1}{2}(16\,000\text{ kg})(3,5\text{ m/s})^2 = 98\text{ kJ}$ . La energía cinética final es inferior a la energía cinética inicial en 14 kJ.

**Ejercicio** Supongamos que hay un pequeño agujero en el fondo del vagón, de modo que el grano se escapa por el mismo a razón de 10 kg/s. ¿Cuánto tiempo tarda ahora el vagón en cubrir los 500 m? (Respuesta 143 s. El grano que escapa no imparte momento lineal alguno al resto del sistema. Si el suelo careciese de rozamiento y fuera plano, todo el grano inicialmente en el vagón llegaría al cambio de agujas al mismo tiempo que el vagón.)

## EJEMPLO 8.8 | Los ejercicios de la patinadora

Una patinadora de 40 kg está entrenándose con dos pesas de 5 kg sobre una tabla de 3 kg. Partiendo del reposo, lanza los pesos horizontalmente uno tras otro desde su tabla. Después de su lanzamiento, la velocidad de cada peso es de 7 m/s relativa a la patinadora y su tabla. ¿Con qué velocidad es impulsada la patinadora en dirección opuesta después de lanzar (a) el primer peso? (b) ¿el segundo peso? Suponer que la tabla se mueve sin rozamiento.

**Planteamiento del problema** Ninguna fuerza externa horizontal actúa sobre el sistema patinadora-pesos-tabla, de modo que la componente horizontal del momento lineal se conserva. Necesitamos determinar la velocidad de la patinadora después del lanzamiento de cada peso (figura 8.22).

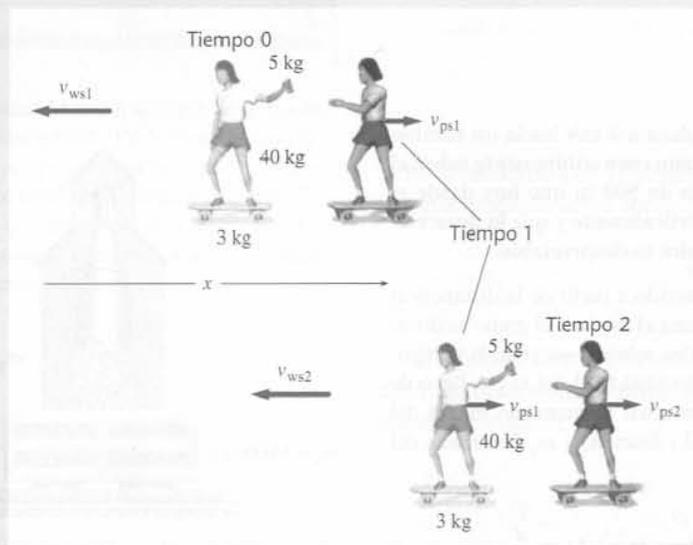


Figura 8.22

1. Cada peso tiene una masa de 5 kg ( $m$ ) y la plancha y la patinadora tienen una masa de 43 kg ( $M$ ). Elija la dirección del movimiento de la patinadora como la dirección positiva. Entonces  $v_{wp} = -7\text{ m/s}$  es la velocidad de uno de los pesos lanzados respecto a la patinadora. Sean  $v_{ps1}$  y  $v_{ws1}$  las velocidades respectivas de la patinadora y del primer peso lanzado relativas al suelo. Aplicar la conservación del momento después del lanzamiento del primer peso.
2. La velocidad del peso lanzado relativo al suelo es la velocidad del peso relativa a la plancha más la velocidad de la plancha relativa al suelo:

$$P_{\text{sist}1} = P_{\text{sist}0}$$

$$(M + m)V_{ps1} + mv_{ws1} = 0$$

(Los subíndices indican el tiempo. El tiempo 0 corresponde a un instante anterior al lanzamiento del primer peso, el tiempo 1 corresponde a un instante de tiempo comprendido entre el primer y el segundo lanzamiento, y el subíndice 2 indica que la patinadora ya ha lanzado los dos pesos.)

$$v_{ws1} = v_{wp1} + V_{ps1}$$

3. Sustituyendo  $v_{ws1}$  por el resultado del paso 1 se obtiene  $v_{ps1}$ :

$$(M + m)V_{ps1} + m(v_{wp1} + V_{ps1}) = 0$$

por lo tanto

$$V_{ps1} = -\frac{m}{M + 2m}v_{wp1} = -\frac{5 \text{ kg}}{43 \text{ kg} + 10 \text{ kg}}(-7 \text{ m/s})$$

$$= \boxed{0,66 \text{ m/s}}$$

- (b) 1. Se repite el paso 1 del apartado (a) para el lanzamiento del segundo bloque. Sean  $v_{ps2}$  y  $v_{w's2}$  las velocidades respectivas de la patinadora y del segundo peso lanzado relativas al suelo.

$$P_{sist2} = P_{sist1}$$

$$MV_{ps2} + mv_{w's2} = (M + m)V_{ps1}$$

2. Se repite el paso 2 del apartado (a) para el lanzamiento del segundo peso.

$$v_{w's2} = v_{w'p2} + V_{ps2}$$

3. Sustituyendo en  $v_{w'g2}$  el resultado del paso 1 del apartado (b) se obtiene  $v_{ps2}$ :

$$MV_{ps2} + m(v_{w'p2} + V_{ps2}) = (M + m)V_{ps1}$$

por lo tanto

$$V_{ps2} = \frac{(M + m)V_{ps1} - mv_{w'p2}}{M + m} = V_{sg1} - \frac{m}{M + m}v_{w'p2}$$

$$= 0,66 \text{ m/s} - \frac{5 \text{ kg}}{48 \text{ kg}}(-7 \text{ m/s}) = \boxed{1,39 \text{ m/s}}$$

**Observación** Este ejemplo ilustra el principio del cohete; un cohete se mueve hacia delante lanzando combustible hacia atrás en forma de gases de escape.

**Ejercicio** ¿A qué velocidad se mueve la patinadora si, partiendo del reposo, lanza los dos pesos a la vez, de tal modo que *después de lanzados*, su velocidad respecto a la patinadora y su tabla es de 7 m/s? (Respuesta 1,32 m/s.)

## EJEMPLO 8.9 | Desintegración radiactiva

Un núcleo de torio 227 en reposo se desintegra en un núcleo de radio 223 (masa 223 u) por emisión de una partícula  $\alpha$  (masa 4 u) (figura 8.23). La energía cinética de la partícula  $\alpha$  resulta ser de 6,00 MeV. ¿Cuál es la energía cinética del núcleo de radio en retroceso?

**Planteamiento del problema** Como el núcleo de torio antes de la desintegración está en reposo, su momento lineal total es cero. Podemos relacionar la velocidad del núcleo de radio con el de la partícula alfa a partir del principio de conservación del momento lineal.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.*

### Pasos

1. Expresar la energía cinética del núcleo de radio  $E_{c_{Ra}}$  en función de su masa  $m_{Ra}$  y su velocidad  $v_{Ra}$ .
2. Expresar la energía cinética de la partícula  $\alpha$   $E_{c_{\alpha}}$  en función de su masa  $m_{\alpha}$  y su velocidad  $v_{\alpha}$ .
3. Utilizar la conservación del momento lineal para relacionar  $v_{Ra}$  con  $v_{\alpha}$ .
4. Despejar las velocidades  $v_{Ra}$  y  $v_{\alpha}$  de los pasos 1 y 2 y sustituir sus expresiones en el resultado del paso 3.
5. Despejar  $E_{c_{Ra}}$ .

### Respuestas

$$E_{c_{Ra}} = \frac{1}{2}m_{Ra}v_{Ra}^2$$

$$E_{c_{\alpha}} = \frac{1}{2}m_{\alpha}v_{\alpha}^2$$

$$m_{\alpha}v_{\alpha} = m_{Ra}v_{Ra}$$

$$m_{\alpha}\left(\frac{2E_{c_{\alpha}}}{m_{\alpha}}\right)^{1/2} = m_{Ra}\left(\frac{2E_{c_{Ra}}}{m_{Ra}}\right)^{1/2}$$

$$E_{c_{Ra}} = \frac{m_{\alpha}}{m_{Ra}}E_{c_{\alpha}} = \boxed{0,108 \text{ MeV}}$$

## ¡INTÉNTELO USTED MISMO!

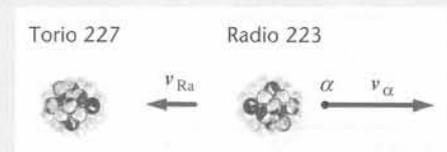


Figura 8.23

**Observación** En este proceso la energía en reposo del núcleo de torio se transforma en energía cinética de la partícula alfa y del núcleo de radio. La masa del núcleo de torio es mayor que la de la partícula alfa más la del núcleo de radio en unos 6,1 MeV/c<sup>2</sup>.

## 8.5 Energía cinética de un sistema

Aunque el momento lineal total de un sistema de partículas debe ser constante si la fuerza externa resultante sobre el sistema es cero, la energía mecánica total del sistema puede variar. Como vimos en los ejemplos de la sección anterior las fuerzas internas, que no pueden alterar el momento lineal total, pueden ser fuerzas no conservativas y, por lo tanto, modificar la energía mecánica total del sistema. Existe un importante teorema que se refiere a la energía cinética de un sistema de partículas que nos permite tratar más fácilmente la energía de sistemas complejos, así como los cambios energéticos dentro de un sistema:

La energía cinética de un sistema de partículas puede escribirse como la suma de dos términos: (1) la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masas,  $\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$ , en donde  $M$  es la masa total del sistema; y (2) la energía cinética asociada con el movimiento de las partículas del sistema respecto al centro de masas,  $\sum \frac{1}{2}m_i u_i^2$ , siendo  $\mathbf{u}_i$  la velocidad de la partícula  $i$  relativa al centro de masas.

TEOREMA PARA LA ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

La energía cinética de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$E_c = \sum_i E_{c_i} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

La velocidad de la partícula  $i$  puede escribirse como la suma de la velocidad del centro de masas  $\mathbf{v}_{\text{cm}}$  y la velocidad de la partícula relativa al centro de masas  $\mathbf{u}_i$ :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{u}_i \quad (8.17)$$

La energía cinética del sistema es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_i \frac{1}{2}m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \sum_i \frac{1}{2}m_i (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{u}_i) \\ &= \sum_i \frac{1}{2}m_i (v_{\text{cm}}^2 + 2\mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{u}_i + u_i^2) \\ &= \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{\text{cm}}^2 + \mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot \sum_i m_i \mathbf{u}_i + \sum_i \frac{1}{2}m_i u_i^2 \end{aligned}$$

en donde en el sumando del medio hemos sacado factor común  $\mathbf{v}_{\text{cm}}$ , ya que es el mismo para todas las partículas, es decir, se refiere al sistema y no a una partícula específica. La magnitud  $\sum m_i \mathbf{u}_i$  es el momento lineal del sistema *referido al centro de masas*. Esta magnitud, que es igual a  $M\mathbf{u}_{\text{cm}}$  es necesariamente cero. (Con respecto al centro de masas, la velocidad del centro de masas  $\mathbf{u}_{\text{cm}}$  es cero de modo que el momento lineal total  $M\mathbf{u}_{\text{cm}}$  es también cero.) Por lo tanto,

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i u_i^2 = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + E_{c_{\text{rel}}} \quad (8.18)$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

en donde  $M$  es la masa total y  $E_{c_{\text{rel}}}$  es la energía cinética de las partículas *relativa al centro de masas*. Cuando no hay fuerzas externas,  $\mathbf{v}_{\text{cm}}$  es constante y la energía cinética asociada con el movimiento global ( $\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$ ) no varía. Sólo la energía cinética relativa puede cambiar en un sistema aislado.

## 8.6 Colisiones

En una **colisión**, dos objetos se aproximan uno a otro e interaccionan fuertemente durante un tiempo muy corto. Durante el breve tiempo de colisión, cualquier fuerza externa es mucho menor que las fuerzas de interacción entre los objetos. Por ello, las únicas fuerzas importantes que actúan sobre el sistema formado por los dos objetos son las fuerzas de interacción, que son iguales y opuestas, de modo que el momento lineal total del sistema permanece invariable. El tiempo de colisión es normalmente tan pequeño que el desplazamiento de los objetos durante el choque puede despreciarse. Antes y después de la colisión, la interacción de los dos objetos es pequeña comparado con la interacción durante el choque. Son ejemplos el choque de las dos bolas de billar, el golpe del bate sobre una pelota de béisbol o un dardo al chocar contra el blanco. **El movimiento de un cometa alrededor del Sol puede considerarse como una colisión, incluso teniendo en cuenta que los dos astros no se tocan físicamente.** En el laboratorio de física se puede ver también una colisión entre dos carros que llevan parachoques magnéticos, sin que se produzca contacto físico entre ambos.

Cuando la energía cinética total de los dos objetos es la misma después del choque que antes, se dice que se trata de un **choque elástico**. Si la energía cinética total no es la misma después del choque, éste es un **choque inelástico**. Un caso extremo es el **choque perfectamente inelástico**, en el cual toda la energía cinética relativa al centro de masas se convierte en calor o energía interna del sistema y los dos objetos quedan unidos después de la colisión.

### Impulso y fuerza media

En la figura 8.24 se muestra la variación con el tiempo del módulo de una fuerza típica ejercida por un cuerpo sobre otro durante un choque. Durante el tiempo de colisión,  $\Delta t = t_f - t_i$ , la fuerza es grande. El resto del tiempo, la fuerza es despreciablemente pequeña. El **impulso**  $\mathbf{I}$  de la fuerza es un vector definido por

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt \quad (8.19)$$

DEFINICIÓN —IMPULSO

El módulo del impulso de la fuerza es el área encerrada bajo su curva  $F$  en función de  $t$ . La unidad del impulso es  $\text{N} \cdot \text{s}$ . Si  $\mathbf{F}_{\text{neto}}$  es la fuerza neta que actúa sobre la partícula, su relación con la variación del momento de esta partícula viene expresada por la segunda ley de Newton,  $\mathbf{F}_{\text{neto}} = d\mathbf{p}/dt$ . Por lo tanto, el impulso de la fuerza neta es igual a la variación total del momento  $\Delta\mathbf{p}$  durante el intervalo de tiempo de la colisión:

$$\mathbf{I}_{\text{neto}} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{\text{neto}} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta\mathbf{p} \quad (8.20)$$

TEOREMA IMPULSO — MOMENTO PARA UNA PARTÍCULA

Asimismo, el impulso neto debido a fuerzas externas en un sistema se iguala con el cambio del momento total del sistema:

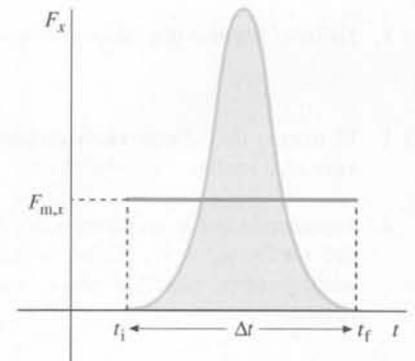
$$\mathbf{I}_{\text{neto,ext}} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{\text{neto,ext}} dt = \Delta\mathbf{p}_{\text{sist}} \quad (8.21)$$

TEOREMA IMPULSO — MOMENTO PARA UN SISTEMA

La **fuerza media** durante el intervalo  $\Delta t = t_f - t_i$  viene definida por

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt = \frac{\mathbf{I}}{\Delta t} \quad (7.22)$$

DEFINICIÓN —FUERZA MEDIA



**Figura 8.24** Variación típica de la fuerza de colisión con el tiempo. El área bajo la curva  $F_x$  en función de  $t$  es la componente  $x$  del impulso,  $I_x$ .  $F_{m,x}$  es la fuerza media por intervalo de tiempo  $\Delta t$ . El área rectangular  $F_{m,x} \Delta t$  es la misma que la encerrada bajo la curva de  $F_x$  en función de  $t$ .

La fuerza media es la fuerza constante que produce el mismo impulso que la fuerza real en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , como indica el rectángulo de la figura 8.24. La fuerza media puede calcularse a partir del cambio del momento si se conoce el tiempo de choque. Este tiempo puede estimarse a partir de la distancia recorrida por uno de los objetos durante la colisión.

**EJEMPLO 8.10** | Una colisión en la práctica del kárate

Con un golpe experto de kárate, un karateca rompe un bloque de hormigón. Su puño tiene una masa de 0,70 kg, se mueve a 5,0 m/s al chocar contra el bloque y se detiene a 6 mm del punto de contacto. (a) ¿Qué impulso ejerce el bloque sobre el puño del karateca? (b) ¿Cuál es el tiempo de colisión aproximado y la fuerza media que el bloque ejerce sobre el puño?



**Planteamiento del problema** El impulso neto es igual a la variación del momento  $\Delta p$ . Esta variación puede determinarse a partir de la masa y velocidad del puño. El tiempo de colisión correspondiente al apartado (b) puede deducirse de la distancia dada  $\Delta y = 6$  mm y de la velocidad media durante la colisión, que puede estimarse suponiendo una aceleración constante. Elegiremos como positiva la dirección hacia arriba (figura 8.25).

- (a) 1. Expresar que el impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento:
- 2. El momento inicial es el que posee el puño antes de chocar contra el bloque con velocidad  $v$ , y el momento lineal final es cero:
- 3. Hallar el impulso que ejerce el bloque sobre el puño:

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v} = (0,7 \text{ kg})(-5,0 \text{ m/s}) \mathbf{j}$$

$$= -3,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{p}_f = 0$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = 0 - (-3,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \mathbf{j})$$

$$= \boxed{3,5 \text{ N} \cdot \text{s} \mathbf{j}}$$

- (b) 1. El tiempo de colisión es la distancia recorrida dividida por la velocidad media:
- 2. Suponiendo que la aceleración es constante estimamos la velocidad media,  $v_m = \frac{1}{2}v$ . Como hemos elegido la dirección hacia arriba positiva, tanto  $\Delta y$  como  $v_m$  son magnitudes negativas. Calcular  $\Delta t$ :
- 3. La fuerza media es el impulso dividido por el tiempo de colisión. Está dirigida hacia arriba, como era de esperar:

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{v_m}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{\frac{1}{2}v} = \frac{-0,006 \text{ m}}{-2,5 \text{ m/s}} = 0,0024 \text{ s}$$

$$= 2,4 \text{ ms}$$

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mathbf{I}}{\Delta t} = \frac{3,5 \text{ N} \cdot \text{s} \mathbf{j}}{0,0024 \text{ s}} = \boxed{1,46 \text{ kN} \mathbf{j}}$$

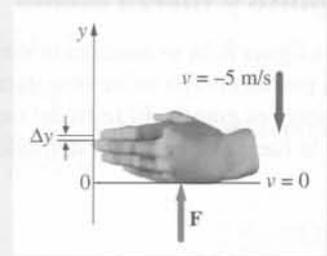


Figura 8.25

**Observación** La fuerza media es grande —aproximadamente 212 veces el peso del puño.

**EJEMPLO 8.11** | Ensayo de un accidente

Un coche equipado con un maniquí de 80 kg para ensayos de accidentes (figura 8.26), choca contra un muro a 25 m/s. Estimar la fuerza que el cinturón de seguridad ejerce sobre el maniquí en el impacto.

**Planteamiento del problema** Suponer que el coche y el maniquí recorren aproximadamente 1 m al plegarse la parte delantera del coche, y que la aceleración es constante durante el choque. Para determinar la fuerza, calcularemos el impulso  $I$  y después lo dividiremos por el tiempo de colisión  $\Delta t$ . Elegir el eje  $x$  positivo en la dirección hacia adelante.

¡INTÉNTELO USTED MISMO!



Figura 8.26

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

### Pasos

1. Relacionar la fuerza media con el impulso y, en consecuencia, con el cambio de momento.
2. Determinar el cambio del momento del maniquí.
3. Relacionar el tiempo con el desplazamiento, suponiendo que la aceleración es constante.
4. Determinar la velocidad media y usarla conjuntamente con el resultado del paso 3 para calcular el tiempo.
5. Sustituir los resultados de los pasos 2 y 4 en el resultado del paso 1 y determinar la fuerza.

### Respuestas

$$F_m \Delta t = I = \Delta p, \text{ por lo tanto } F_m = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$\Delta p = m v_f - m v_i = -2000 \text{ N} \cdot \text{s } i$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_m}$$

$$v_m = \frac{1}{2}(v_f + v_i) = 12,5 \text{ m/s } i, \text{ por lo tanto}$$

$$\Delta t = 0,08 \text{ s}$$

$$F_m = \boxed{-25 \text{ kN } i}$$

**Observación** El módulo de la aceleración media es  $a_m = \Delta v / \Delta t = 313 \text{ m/s}^2$ , o sea aproximadamente 32 g. Tal aceleración representa una fuerza neta de unas 32 veces el peso del maniquí, suficiente para provocar daños serios. Una bolsa de aire ("air bag") incrementa la distancia de frenado, lo que ayuda a evitar daños. La bolsa de aire también permite que la fuerza se distribuya en un área mucho mayor.

**Observación** En la figura 8.27, el gráfico (a) muestra la fuerza media ejercida sobre el maniquí en función de la distancia de frenado  $x$ . Sin cinturón de seguridad o "air bag", el conductor "volaría" a través del parabrisas o sería detenido en una fracción de un metro por el salpicadero o el volante de dirección. El gráfico (b) muestra la fuerza en función de la velocidad inicial para tres distancias de frenado: 2 m, 1,5 m y 1 m.

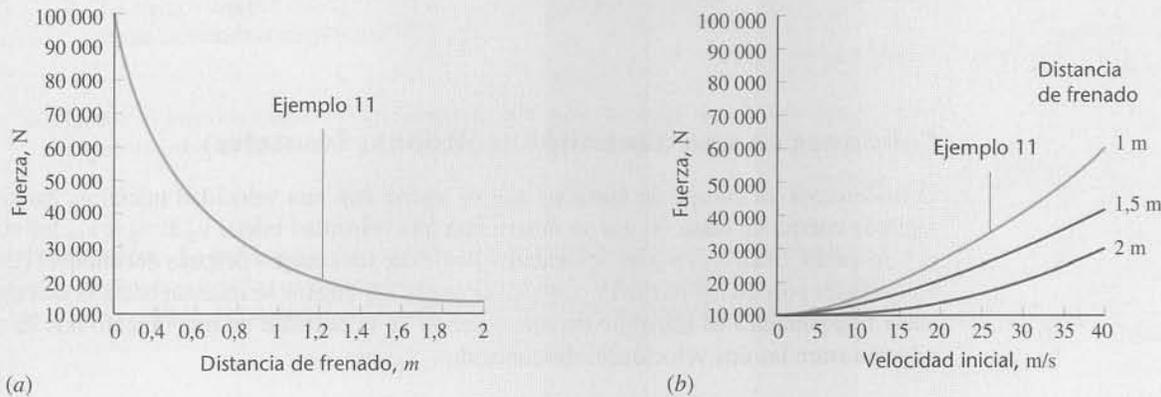


Figura 8.27

### EJEMPLO 8.12 | Una pelota de golf

Una persona golpea una pelota con un palo de golf. Estimar (a) el impulso  $I$ , (b) el tiempo de colisión  $\Delta t$  y (c) la fuerza media  $F_m$ ? Considerar que la masa de una pelota de golf típica es  $m = 45 \text{ g}$  y su radio  $r = 2 \text{ cm}$ . En un recorrido típico, el alcance  $R$  es de unos 192 m (figura 8.28).

**Planteamiento del problema** Sea  $v_0$  el módulo de la velocidad de la pelota cuando se separa del palo. El impulso es igual a la variación de su momento lineal o sea,  $m v_0$ . Estimaremos la velocidad inicial  $v_0$  a partir del alcance. Estimaremos el tiempo de colisión a partir de la distancia recorrida durante el choque  $\Delta x$  y la velocidad media  $\frac{1}{2} v_0$ , suponiendo constante la aceleración. Usaremos  $\Delta x = 2 \text{ cm}$ , que es el radio de la bola. La fuerza media se obtiene entonces a partir del impulso  $I$  y el tiempo de colisión  $\Delta t$ .

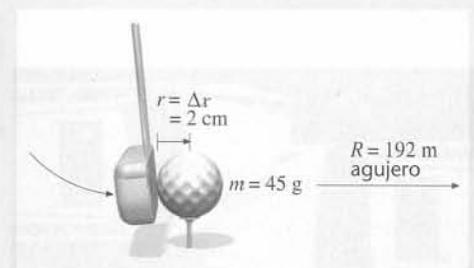


Figura 8.28

(a) 1. Igualar el impulso con la variación del momento de la bola:

$$I = F_m \Delta t = \Delta p$$

2. La velocidad inicial está relacionada con el alcance  $R$ , dado por la ecuación 2.23:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$$

3. Considerar que  $\theta_0 = 13^\circ$  y calcular la velocidad inicial:

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{Rg}{\sin 2\theta_0}} \\ &= \sqrt{\frac{(192 \text{ m})(9,81 \text{ m/s}^2)}{\sin 26^\circ}} = 65,5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

4. Utilizar este valor de  $v_0$  para calcular el módulo del impulso:

$$\begin{aligned} I = \Delta p &= m(v_0 - 0) = (0,045 \text{ kg})(65,5 \text{ m/s}) \\ &= 2,95 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = \boxed{2,95 \text{ N} \cdot \text{s}} \end{aligned}$$

(b) Calcular el tiempo de colisión  $\Delta t$  utilizando  $x = 2 \text{ cm}$  y  $v_m = \frac{1}{2}(v_f - v_i)$ :

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta x}{v_m} = \frac{\Delta x}{\frac{1}{2}v_0} \\ &= \frac{0,02 \text{ m}}{\frac{1}{2}(65,5 \text{ m/s})} = \boxed{0,610 \times 10^{-3} \text{ s}} \end{aligned}$$

(c) Mediante los valores calculados de  $I$  y  $\Delta t$  determinar el módulo de la fuerza media:

$$F_m = \frac{I}{\Delta t} = \frac{2,95 \text{ N} \cdot \text{s}}{6,10 \times 10^{-4} \text{ s}} = \boxed{4,83 \text{ kN}}$$

**Observación** De nuevo nos encontramos con que las fuerzas ejercidas durante un choque son muy grandes. Aquí la fuerza ejercida sobre la pelota de golf por el palo es aproximadamente 10 000 veces el peso de la pelota, a la que impulsa en una breve aceleración de 10 000g en 0,61 ms. Asimismo, la fuerza de resistencia del aire no se ha tenido en cuenta en el análisis. En un tiro de golf real la resistencia del aire no es despreciable.

## Colisiones en una dimensión (colisiones frontales)

Consideremos un cuerpo de masa  $m_1$  que se mueve con una velocidad inicial  $v_{1i}$  hacia un segundo cuerpo de masa  $m_2$  que se mueve con una velocidad inicial  $v_{2i}$  si  $v_{2i} < v_{1i}$ , los cuerpos chocarán. Sean  $v_{1f}$  y  $v_{2f}$  las velocidades finales de los cuerpos después del choque. (Estas velocidades pueden ser positivas o negativas según los objetos se muevan hacia la derecha o hacia la izquierda.) El principio de conservación de la cantidad de movimiento nos da una relación entre las dos velocidades desconocidas,  $v_{1f}$  y  $v_{2f}$ :

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \quad (8.23)$$

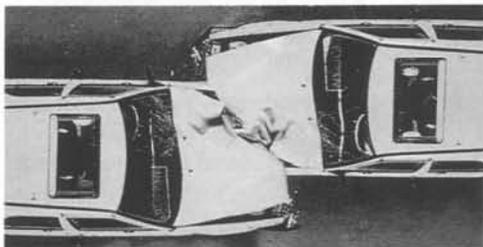
Para calcular  $v_{1f}$  y  $v_{2f}$  es necesaria una segunda ecuación. Esta segunda ecuación, que ahora desarrollaremos, depende del tipo de colisión.

**Colisión perfectamente inelástica en una dimensión** En las colisiones perfectamente inelásticas, las partículas quedan unidas después de la colisión. Por ejemplo, la colisión entre el guante de un jugador de béisbol y la pelota es perfectamente inelástica, siempre que el jugador no deje caer esta última. La segunda ecuación entre las velocidades finales es tal que éstas son iguales entre sí e iguales a la velocidad del centro de masas:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_{cm}$$

Este resultado combinado con la conservación del momento nos da

$$(m_1 + m_2)v_{cm} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \quad (8.24)$$



Colisión perfectamente inelástica entre dos coches.

### EJEMPLO 8.13 | La caza de un libro de física durante un paseo espacial

Una astronauta de masa 60 kg da un paseo espacial para reparar un satélite de comunicaciones. De pronto necesita consultar su libro de física. Un compañero de equipo se lo lanza con una velocidad de 4 m/s relativa al vehículo espacial. Ella se encuentra en reposo relativo respecto al vehículo espacial justo antes de atrapar el libro, de masa 3,0 kg (figura 8.29). Determinar (a) la velocidad de la astronauta justo después de atrapar el libro, (b) la energía mecánica inicial y final del sistema libro-astronauta y (c) el impulso ejercido por el libro sobre la astronauta.

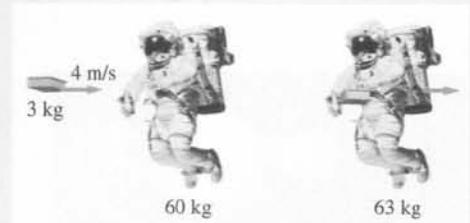


Figura 8.29

**Planteamiento del problema** (a) La velocidad final del libro y la astronauta es la velocidad del centro de masas. Para su cálculo utilizamos la conservación del momento lineal, expresada por la ecuación 8.24. Las energías cinéticas inicial y final se calculan a partir de las velocidades inicial y final. Como el libro y la astronauta se mueven con la misma velocidad final, la colisión es perfectamente inelástica. (b) Las energías mecánicas del libro y la astronauta se calculan directamente a partir de sus masas y velocidades. (c) El impulso ejercido por el libro sobre la astronauta es igual al cambio de momento lineal de la astronauta.

- (a) 1. Utilizar la conservación del momento lineal para relacionar la velocidad final del sistema,  $v_{cm}$ , con las velocidades iniciales:

$$m_1 v_1 + m_a v_a = (m_1 + m_a) v_{cm}$$

2. Despejar  $v_{cm}$ :

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \frac{m_1 v_1 + m_a v_a}{m_1 + m_a} \\ &= \frac{(3,0 \text{ kg})(4 \text{ m/s}) + 0}{60 \text{ kg} + 3 \text{ kg}} = \boxed{0,19 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

- (b) 1. La energía mecánica inicial del sistema libro-astronauta es la energía cinética del libro:

$$\begin{aligned} E_{c_i} &= E_{c_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (3,0 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 = \boxed{24 \text{ J}} \end{aligned}$$

2. La energía cinética final es la energía cinética del libro y la astronauta moviéndose conjuntamente a  $v_{cm}$ :

$$\begin{aligned} E_{c_f} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_a) v_{cm}^2 \\ &= \frac{1}{2} (63 \text{ kg})(0,19 \text{ m/s})^2 = \boxed{1,14 \text{ J}} \end{aligned}$$

- (c) Igualar el impulso ejercido sobre la astronauta con la variación del momento lineal de la misma:

$$\begin{aligned} I &= \Delta p_a = m_a \Delta v_a \\ &= (60 \text{ kg})(0,19 \text{ m/s} - 0) \\ &= 11,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = \boxed{11,4 \text{ N} \cdot \text{s}} \end{aligned}$$

**Observación** La mayor parte de la energía cinética inicial de este proceso se pierde en forma de calor. El impulso ejercido por el libro sobre la astronauta es igual y opuesto al ejercido por la astronauta sobre el libro, de tal modo que la variación total del momento lineal es cero.

Con frecuencia es útil expresar la energía cinética  $E_c$  de una partícula en función de su momento lineal  $p$ . Para una masa  $m$  que se mueve con velocidad  $v$ , tenemos

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{(m v)^2}{2m}$$

Como  $p = m v$ ,

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \quad (8.25)$$

Esta expresión puede aplicarse a un choque perfectamente inelástico cuando un objeto está inicialmente en reposo. El momento lineal del sistema es el del objeto incidente:

$$P_{\text{sist}} = p_{\text{li}} = m_1 v_{\text{li}}$$

La energía cinética inicial es

$$E_{c_i} = \frac{P_{\text{sist}}^2}{2m_1} \quad (8.26)$$

Después del choque, los objetos se mueven unidos como una sola masa  $m_1 + m_2$  con velocidad  $v_{cm}$ . El momento lineal se conserva, de modo que el momento lineal final es igual a  $P_{sist}$ . La energía cinética final es, Por lo tanto,

$$E_{cf} = \frac{P_{sist}^2}{2(m_1 + m_2)} \tag{8.27}$$

Comparando las ecuaciones 8.26 y 8.27, vemos que la energía cinética final es menor que la inicial.

**EJEMPLO 8.14 | El péndulo balístico**

En una prueba pública de puntería, una persona dispara una bala sobre un bloque de madera suspendido. El bloque, con el proyectil en su seno, oscila como un péndulo hacia arriba. A partir de la altura alcanzada por este péndulo, se informa inmediatamente al público de la velocidad de la bala. ¿A qué velocidad iba la bala?

**Planteamiento del problema** La velocidad inicial de la bala  $v_{li}$  está relacionada con la velocidad del sistema bala-bloque,  $v_f$ , justo después del choque inelástico, por la conservación del momento lineal. La velocidad  $v_f$  está relacionada con la altura  $h$  por la conservación de la energía mecánica (figura 8.30). Sea  $m_1$  la masa de la bala y  $m_2$  la masa del blanco.

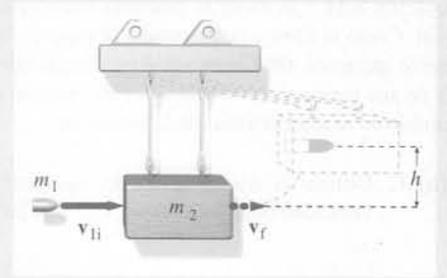


Figura 8.30

1. Utilizar la conservación de la energía mecánica *después* del choque para determinar  $v_f$  en función de la altura máxima  $h$ :
2. Utilizar la conservación del momento lineal *durante* el choque para determinar  $v_{li}$  en función de  $v_f$ :
3. Despejar  $v_f$  de la ecuación del paso 1 y sustituirla en el resultado del paso 2 para determinar  $v_{li}$ :

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = (m_1 + m_2)gh$$

$$m_1 v_{li} = (m_1 + m_2)v_f$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

por lo tanto

$$v_{li} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_f = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

**Observación** Hemos supuesto que el tiempo de colisión es tan corto que el desplazamiento del bloque durante el choque es despreciable. Esto quiere decir que el bloque adquiere velocidad inmediatamente después de la colisión, cuando aún está en el punto más bajo del arco. El dispositivo descrito en este ejemplo se denomina *péndulo balístico*.

**Ejercicio** Si la masa de la bala es 12 g, la masa del bloque del péndulo balístico es 2 kg, y la altura final 10,4 cm, ¿qué velocidad tenía la bala? (Respuesta 240 m/s.)

**Ejercicio** ¿Puede resolverse este ejemplo igualando la energía cinética inicial de la bala con la energía potencial del sistema compuesto bloque-bala, en su altura máxima? Es decir, ¿se conserva la energía mecánica tanto durante la colisión inelástica como durante el ascenso del péndulo? (Respuesta No)

**Ejercicio** Un coche de 2000 kg a 25 m/s choca frontalmente con otro de 1500 kg inicialmente en reposo. Si la colisión es perfectamente inelástica, determinar (a) la velocidad de cada coche después de la colisión y (b) la relación entre las energías cinéticas final e inicial del sistema. (Respuestas (a) 14,3 m/s, (b) 0,57.)

**EJEMPLO 8.15 | Colisión con una caja vacía**

Repetir el ejemplo 8.14 utilizando una caja vacía como blanco. La bala choca contra el blanco y la atraviesa completamente. Un dispositivo láser indica que la bala emerge con una velocidad igual a la mitad del valor inicial. Con estos datos es posible deducir la altura alcanzada por el blanco. ¿Cuánto vale esta altura?

**Planteamiento del problema** La altura  $h$  está relacionada con la velocidad de la caja después del choque,  $v_2$ , por el principio de conservación de la energía mecánica (figura 8.31). Esta velocidad puede determinarse mediante el principio de conservación del momento lineal.

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

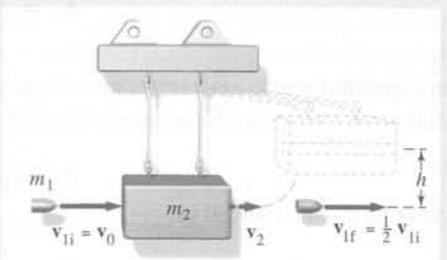


Figura 8.31

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

### Pasos

1. Mediante la conservación de la energía mecánica relacionar la altura final  $h$  con la velocidad  $v_2$  de la caja después de la colisión.
2. Mediante la conservación del momento expresar una ecuación que relacione  $v_1$  con la velocidad post-colisión  $v_2$ .
3. Eliminar  $v_2$  y despejar  $h$ .

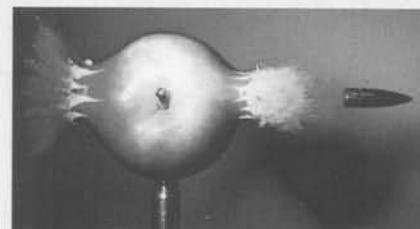
**Observación** El choque entre la bala y la caja es un choque inelástico, pero no un choque perfectamente inelástico porque después de la colisión los dos objetos no van a la misma velocidad vectorial. Las colisiones inelásticas también ocurren en sistemas microscópicos. Por ejemplo, cuando un electrón choca contra un átomo, a veces éste se excita pasando a un estado energético interno más elevado. En consecuencia, la energía cinética total del átomo y el electrón es menor después de la colisión.

### Respuestas

$$m_2gh = \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$m_2v_2 + m_1\left(\frac{1}{2}v_0\right) = m_1v_0$$

$$h = \frac{m_1^2v_0^2}{8m_2^2g}$$



Una bala a 850 m/s choca inelásticamente con una manzana, la cual instantes más tarde se desintegra completamente. El tiempo de exposición es menor que una millonésima de segundo.

**Colisiones elásticas en una dimensión** En las **colisiones elásticas**, las energías cinéticas inicial y final son iguales. En el mundo macroscópico las colisiones elásticas son un ideal al cual la realidad puede aproximarse, pero nunca pueden llegar a darse. Si una pelota cae sobre una superficie de cemento y rebota hasta su altura inicial, la colisión entre la bola y el cemento es elástica. Pero esto no se ha observado nunca. A escala microscópica las colisiones elásticas son más comunes. Por ejemplo, las colisiones entre las moléculas de aire son siempre elásticas. En todas las colisiones elásticas tenemos:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 \quad (8.28)$$

Esta ecuación, junto con la correspondiente a la conservación del momento lineal (ecuación 8.23), es suficiente para determinar las velocidades finales de los dos objetos. Sin embargo, la naturaleza cuadrática de la ecuación 8.28 complica frecuentemente la solución de un problema de colisión elástica. Tales problemas pueden tratarse más fácilmente si expresamos la velocidad relativa de las dos partículas después del choque en función de la velocidad relativa antes del choque. Reajustando la ecuación 8.28 se obtiene,

$$m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) = m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2)$$

o sea

$$m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) = m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) \quad (8.29)$$

De la conservación del momento lineal, sabemos que

$$m_1v_{1f} + m_2v_{2f} = m_1v_{1i} + m_2v_{2i}$$

de modo que

$$m_2(v_{2f} - v_{2i}) = m_1(v_{1i} - v_{1f}) \quad (8.30)$$

Dividiendo ahora la ecuación 8.29 por la 8.30 resulta

$$v_{2f} + v_{2i} = v_{1i} + v_{1f}$$

de modo que

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \quad (8.31)$$

**Figura 8.32** Aproximación y retroceso en una colisión elástica en una dimensión.



Si los objetos van a chocar,  $v_{2i} - v_{1i}$  debe ser negativo (figura 8.32) y su **velocidad de aproximación** es  $-(v_{2i} - v_{1i})$ . Después del choque, la **velocidad de retroceso** es  $v_{2f} - v_{1f}$ . (Estos dos términos indican el módulo de la velocidad de un objeto en relación al otro.) La ecuación 8.31 establece que

En las colisiones elásticas, el módulo de la velocidad de retroceso es igual a la velocidad de aproximación.

Normalmente la resolución de problemas de choque elástico es más simple utilizando la ecuación 8.31 en lugar de la 8.28. No obstante, debemos recordar que la ecuación 8.31 depende de la conservación de la energía y, por lo tanto, *sólo* puede aplicarse a las colisiones elásticas.

### EJEMPLO 8.16 | Colisión elástica entre dos bloques

Un bloque de 4 kg que se mueve hacia la derecha con una velocidad de 6 m/s choca elásticamente con un bloque de 2 kg que también se mueve hacia la derecha, pero cuya velocidad es de 3 m/s (figura 8.33). Calcular las velocidades finales  $v_{1f}$  y  $v_{2f}$ .

**Planteamiento del problema** La conservación del momento (ecuación 8.18) y la conservación de la energía (expresada como una inversión de las velocidades relativas, ecuación 8.24) ofrecen dos ecuaciones para las dos velocidades finales incógnitas. El subíndice 1 representa el bloque de 4 kg y el subíndice 2 el bloque de 2 kg.



**Figura 8.33**

1. Aplicar la conservación del momento y simplificar hasta encontrar una ecuación que relacione las dos velocidades finales:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} &= m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \\ (4 \text{ kg})v_{1f} + (2 \text{ kg})v_{2f} &= (4 \text{ kg})(6 \text{ m/s}) + (2 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \\ \text{por lo tanto} \\ 2v_{1f} + v_{2f} &= 15 \text{ m/s} \end{aligned}$$

2. La igualdad de las energías cinéticas inicial y final proporciona una segunda relación entre las dos velocidades finales. Esta igualdad se materializa igualando las velocidades de recesión y de aproximación:

$$\begin{aligned} v_{2f} - v_{1f} &= -(v_{2i} - v_{1i}) \\ &= -(3 \text{ m/s} - 6 \text{ m/s}) = 3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

3. Restar el resultado del paso 2 del resultado del paso 1 y despejar  $v_{1f}$ :

$$\begin{aligned} 2v_{1f} + v_{1f} &= 12 \text{ m/s} \\ \text{por lo tanto} \\ v_{1f} &= \boxed{4 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

4. Sustituir en el resultado del paso 2 y despejar  $v_{2f}$ :

$$\begin{aligned} v_{2f} - 4 \text{ m/s} &= 3 \text{ m/s} \\ \text{de donde} \\ v_{2f} &= \boxed{7 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

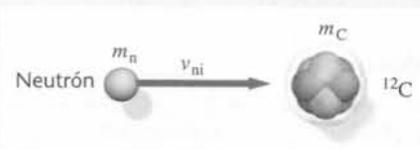
**Comprobar el resultado** Como comprobación, calculemos las energías cinéticas inicial y final:

$$\begin{aligned} E_{c_i} &= \frac{1}{2}(4 \text{ kg})(6 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(2 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2 = 72 \text{ J} + 9 \text{ J} = 81 \text{ J}; \\ E_{c_f} &= \frac{1}{2}(4 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(2 \text{ kg})(7 \text{ m/s})^2 = 32 \text{ J} + 49 \text{ J} = 81 \text{ J} = E_{c_i}. \end{aligned}$$

### EJEMPLO 8.17 | Colisión elástica entre un neutrón y un núcleo

Un neutrón de masa  $m_n$  y velocidad  $v_{ni}$  choca elásticamente con un núcleo de carbono de masa  $m_C$  en reposo (figura 8.34). (a) ¿Cuáles son las velocidades finales de ambas partículas? (b) ¿Qué fracción  $f$  de su energía pierde el neutrón?

**Planteamiento del problema** La conservación del momento y conservación de la energía nos permiten determinar las velocidades finales. Como la energía inicial del núcleo de carbono es cero, su energía final es igual a la energía perdida por el neutrón.



**Figura 8.34**

(a) 1. La conservación del momento nos ofrece una relación para las velocidades finales:

$$m_n v_{ni} = m_n v_{nf} + m_C v_{Cf}$$

2. La igualdad de las energías cinéticas inicial y final proporciona una segunda relación entre las dos velocidades finales. Esta igualdad se materializa igualando las velocidades de recesión y aproximación:

$$v_{Cf} - v_{nf} = -(v_{Ci} - v_{ni}) = 0 + v_{ni}$$

por lo tanto

$$v_{Cf} = v_{ni} + v_{nf}$$

3. Para eliminar  $v_{Cf}$ , despejar esta magnitud en el paso 2 y sustituirla en el paso 1:

$$m_n v_{ni} = m_n v_{nf} + m_C (v_{ni} + v_{nf})$$

4. Despejar  $v_{nf}$ . (Obsérvese que  $v_{nf}$  es negativa. El neutrón  $m_n$  es devuelto hacia atrás por el núcleo de carbono  $m_C$ , más masivo.)

$$v_{nf} = \frac{m_n - m_C}{m_n + m_C} v_{ni}$$

5. Sustituir el resultado del paso 4 en el resultado del paso 3 y despejar  $v_{Cf}$ .

$$v_{Cf} = v_{ni} - \frac{m_C - m_n}{m_n + m_C} v_{ni} = \frac{2m_n}{m_n + m_C} v_{ni}$$

(b) 1. La colisión es elástica, por lo que la energía cinética perdida por el neutrón es la energía cinética final del núcleo de carbón:

$$\begin{aligned} f &= \frac{-\Delta E_{c_n}}{E_{c_n}} = \frac{E_{c_{Cf}}}{E_{c_n}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} m_C v_{Cf}^2}{\frac{1}{2} m_n v_{ni}^2} = \frac{m_C (v_{Cf})^2}{m_n (v_{ni})^2} \end{aligned}$$

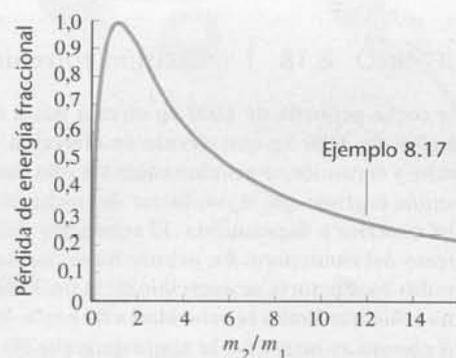
2. Calcular con los resultados del paso 5 del apartado (a) el cociente de las velocidades y sustituir en el resultado del paso 1 del apartado (b), determinando la pérdida fraccional de energía del neutrón.

$$f = \frac{m_C \left( \frac{2m_n}{m_n + m_C} \right)^2}{m_n} = \frac{4m_n m_C}{(m_n + m_C)^2}$$

**Observación** Una aplicación importante de la transferencia de energía en las colisiones elásticas es la desaceleración de los neutrones en un reactor nuclear. En la fisión de un núcleo de uranio se emiten neutrones de alta energía. Para que estos neutrones provoquen la fisión de otro núcleo de uranio, su energía debe reducirse, es decir, deben ser frenados o "moderados". Un mecanismo para realizar este proceso es la dispersión elástica de los neutrones con los núcleos en el reactor. La pérdida fraccional de energía,  $f = -\Delta E_{c_n} / E_{c_n}$  depende de la relación entre la masa del núcleo moderador y la del neutrón, como se indica en la figura 8.35. Para el uranio  $m_U \approx 235 m_n$  y  $f \approx 0,017 = 1,7\%$ . Para el carbono,  $m_C \approx 12 m_n$  y  $f = 0,28 = 28\%$ ; para el deuterio  $m_D \approx 2 m_n$  y  $f = 0,89 = 89\%$ ; para el hidrógeno,  $m_H \approx m_n$  y  $f = 1 = 100\%$ . Por ello, para frenar los neutrones, de modo que puedan ser capturados por los núcleos de uranio, se utilizan en el reactor moderadores de grafito o agua.

**Ejercicio** Demostrar que en una colisión elástica frontal entre un objeto en movimiento y otro parado, ambos de la misma masa, la pérdida fraccional de energía cinética es uno, y que la velocidad final del objeto inicialmente estacionario iguala la velocidad inicial del objeto que, antes del choque, estaba en movimiento.

**Ejercicio** Un bloque de 2 kg que se mueve a 3 m/s realiza un choque elástico con otro bloque de 4 kg en reposo. (a) ¿Cuál es la energía cinética original? (b) ¿Cuánta energía se transfiere al bloque de 4 kg? (Respuestas (a) 9 J, (b) 8 J.)



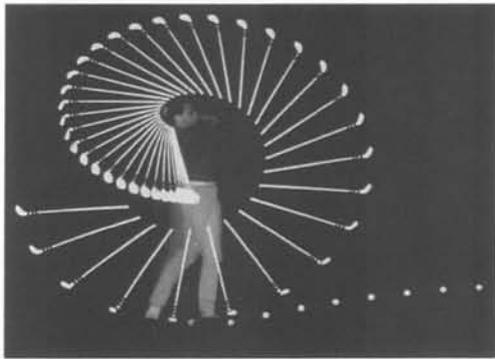
**Figura 8.35** Pérdida de energía fraccional en función de la relación de las dos masas. La pérdida máxima de energía tiene lugar cuando  $m_1 = m_2$ .

Los resultados del ejemplo 8.17 para las velocidades finales de una partícula incidente al chocar con una segunda partícula inicialmente en reposo tienen otras aplicaciones. La velocidad final de la partícula incidente  $v_{1f}$  y la de la partícula estacionaria  $v_{2f}$  están relacionadas con la velocidad inicial de la partícula incidente por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (8.32a)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (8.32b)$$

Cuando un objeto muy masivo (por ejemplo, la bola de una bolera) choca con un objeto ligero en reposo (por ejemplo, una pelota de ping-pong), el objeto masivo no se afecta esencialmente por el choque. Antes de la colisión, la velocidad relativa de aproximación es  $v_{1i}$ . Si el objeto masivo continúa esencialmente con la misma velocidad  $v_{1i}$  después del choque, la velocidad



del objeto pequeño debe ser  $2v_{1i}$  para que la velocidad de retroceso igual a la velocidad de aproximación. Este resultado se obtiene también de las ecuaciones 8.32a y 8.32b si tenemos en cuenta que  $m_2$  es mucho menor que  $m_1$ , en cuyo caso  $v_{1f} \approx v_{1i}$  y  $v_{2f} \approx 2v_{1i}$ , como era de esperar.

**\*Coeficiente de restitución** En general, un choque es una situación intermedia entre los casos extremos de choque elástico, en el que las velocidades relativas se invierten, y choque perfectamente inelástico, en el que no existe velocidad relativa después del choque. El **coeficiente de restitución**  $e$ , que es la medida de la elasticidad de una colisión, se define como el cociente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad relativa de aproximación:

$$e = \frac{v_{ret}}{v_{ap}} = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} \quad (8.33)$$

DEFINICIÓN — COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

En una colisión elástica,  $e = 1$ ; en una colisión perfectamente inelástica,  $e = 0$ .

### Colisiones en tres dimensiones

**Colisiones perfectamente inelásticas en tres dimensiones** Para choques en tres dimensiones, el momento inicial total se obtiene sumando los vectores momento inicial de cada objeto implicado en la colisión. Como los objetos se quedan enganchados y el momento se conserva, tenemos  $m_{1i}v_{1i} + m_{2i}v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$ . Por esta relación sabemos que los tres vectores velocidad, y la colisión, están en el mismo plano. También, a partir de la definición de centro de masas sabemos que  $v_f = v_{cm}$ .

### EJEMPLO 8.18 | Colisión entre un coche y un camión

Un coche pequeño de 1200 kg circula hacia el este cuando choca en una intersección con un camión de 3000 kg que circula en dirección norte a 40 km/h, como indica la figura 8.36. El coche y el camión se acoplan como un solo cuerpo a consecuencia del choque. El conductor del camión esgrime que el conductor del coche es el culpable de la colisión ya que iba a una velocidad superior a la permitida. El conductor del coche busca evidencias para desmontar el argumento del camionero. En primer lugar, no hay marcas de frenado, indicando que ninguno de los dos conductores se apercibió de la posibilidad de la colisión y frenó. En segundo lugar, hay una señal que limita la velocidad a 80 km/h. En tercer lugar el velocímetro del camión después del choque se atrancó y la aguja marcaba 50 km/h, y en cuarto lugar, los restos del choque se desparramaron en la dirección noreste con un ángulo superior a  $59^\circ$ . ¿Estas evidencias, dan soporte al argumento de que el conductor del coche no iba a una velocidad superior a la permitida en el momento del choque?

**Planteamiento del problema** Elegimos un sistema de coordenadas tal que inicialmente el coche se desplaza en la dirección  $+x$  y el camión en la dirección  $+y$  (figura 8.37). A continuación expresamos el momento de cada objeto en forma vectorial y aplicamos el principio de conservación del momento.

1. Escribir las ecuaciones de la conservación del momento en forma vectorial en función de las masas y de las velocidades:
2. Igualar la componente  $x$  del momento inicial con la componente  $x$  del momento final:
3. Igualar la componente  $y$  del momento inicial con la componente  $y$  del momento final:
4. Eliminar  $v_f$  dividiendo la ecuación para la componente  $y$  por la ecuación para la componente  $x$  obtenidas en los pasos anteriores:

$$m_c v_c + m_t v_t = (m_c + m_t) v_f$$

$$m_c v_c + 0 = (m_c + m_t) v_f \cos \theta$$

$$0 + m_t v_t = (m_c + m_t) v_f \sin \theta$$

$$\frac{m_t v_t}{m_c v_c} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} v_c &= \frac{m_t v_t}{m_c \tan \theta} \\ &= \frac{(3000 \text{ kg})(50 \text{ km/h})}{(1200 \text{ kg}) \tan 59^\circ} \\ &= \boxed{75,1 \text{ km/h}} \end{aligned}$$

### ¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

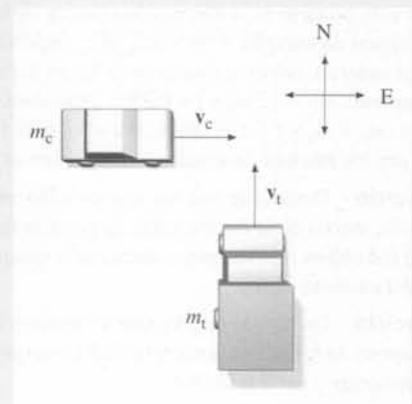


Figura 8.36

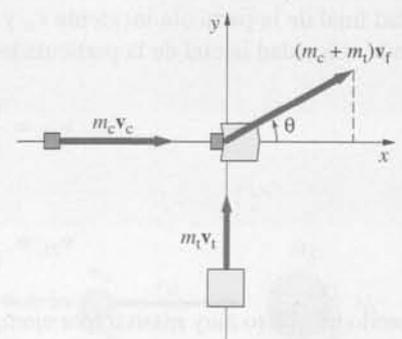


Figura 8.37

5. ¿Se sustentan los argumentos del conductor del camión referentes a la velocidad del coche?

La velocidad de 75,1 km/h es inferior a los 80 km/h permitidos, por lo tanto después de aplicar argumentos de física vemos como el conductor del camión no esgrime un argumento correcto.

**Observación** En un juicio estos argumentos tendría que presentarlos un perito judicial experto.

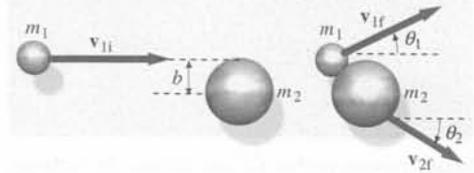
**\*Colisiones elásticas en tres dimensiones** Los choques elásticos en tres dimensiones son más complejos que los estudiados previamente. La figura 8.38 muestra una colisión no frontal entre un objeto de masa  $m_1$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{1i}$  paralelamente al eje  $x$  hacia un objeto de masa  $m_2$  que se encuentra inicialmente en reposo en el origen. La distancia  $b$  entre los centros medida perpendicularmente a la dirección de  $\mathbf{v}_{1i}$  se denomina **parámetro de impacto**. Después del choque, el objeto 1 se aleja con velocidad  $\mathbf{v}_{1f}$  formando un ángulo  $\theta_1$  con la velocidad inicial y el objeto 2 se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{2f}$ , formando un ángulo  $\theta_2$  con  $\mathbf{v}_{1i}$ . La conservación del momento lineal nos da

$$\mathbf{P}_{\text{sist}} = m_1 \mathbf{v}_{1i} = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f}$$

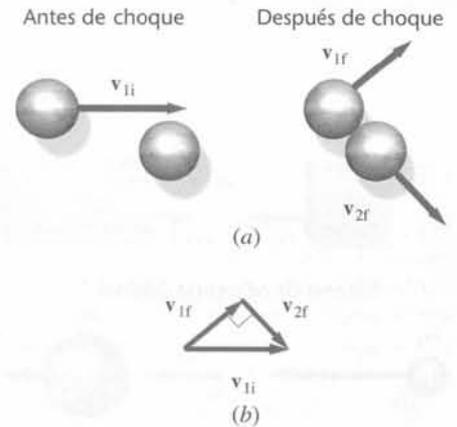
En esta ecuación vemos que el vector  $\mathbf{v}_{2f}$  debe encontrarse en el plano formado por  $\mathbf{v}_{1i}$  y  $\mathbf{v}_{1f}$ , que a partir de ahora denominaremos plano  $xy$ . Suponiendo conocida la velocidad inicial  $\mathbf{v}_{1i}$  todavía quedan cuatro incógnitas: las componentes  $x$  e  $y$  de cada velocidad final; o alternativamente, los módulos de las dos velocidades finales y los dos ángulos de desviación. Las componentes  $x$  e  $y$  de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento nos dan dos de las relaciones necesarias entre estas incógnitas. La conservación de la energía nos da una tercera relación. Para obtener el valor de las cuatro incógnitas, es necesario una cuarta relación. Esta cuarta relación depende del parámetro de impacto  $b$  y del tipo de fuerza de interacción ejercida por los cuerpos entre sí. En la práctica, la cuarta relación se obtiene normalmente midiendo el ángulo de desviación o el ángulo de retroceso. Esta medida puede proporcionarnos información respecto a la fuerza de interacción de los cuerpos.

Considérese el caso especial e interesante de un choque elástico no frontal entre dos objetos de igual masa cuando uno de ellos se encuentra inicialmente en reposo (figura 8.39a). Si  $\mathbf{v}_{1i}$  y  $\mathbf{v}_{1f}$  son las velocidades inicial y final del objeto 1 respectivamente y  $\mathbf{v}_{2f}$  es la velocidad final del objeto 2, la conservación de la cantidad de movimiento nos dice

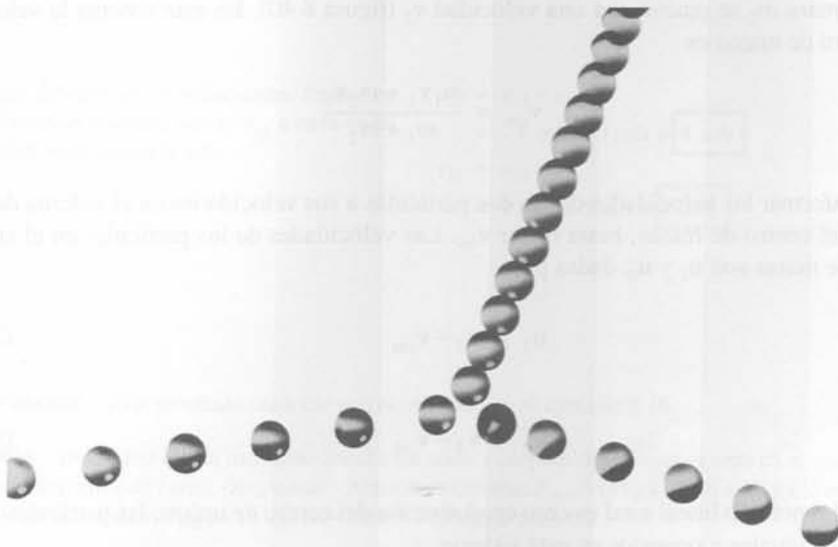
$$m\mathbf{v}_{1i} = m\mathbf{v}_{1f} + m\mathbf{v}_{2f}$$



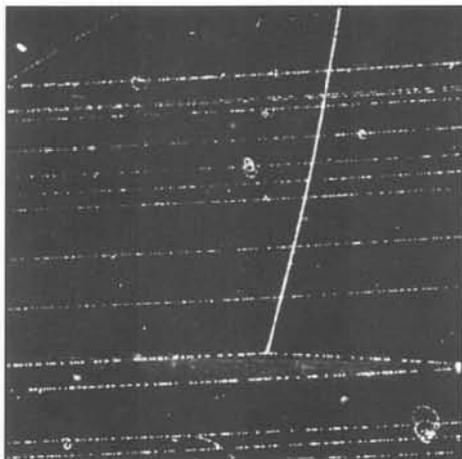
**Figura 8.38** Choque no frontal. Las velocidades finales dependen del parámetro de impacto  $b$  y del tipo de fuerza ejercida por un objeto sobre otro.



**Figura 8.39** (a) Choque elástico no frontal entre dos esferas de igual masa cuando una de las esferas se encuentra inicialmente en reposo. Después del choque, las esferas se mueven formando entre sí un ángulo recto. (b) Los vectores velocidad correspondientes a este choque forman un triángulo rectángulo.



Fotografías con destellos múltiples de un choque elástico no frontal de dos bolas de masas iguales. La bola con un punto incide desde la izquierda y choca contra la bola con rayas que está inicialmente en reposo. Las velocidades finales de las dos bolas son perpendiculares entre sí.



Choque protón-protón en una cámara de burbujas con hidrógeno líquido. El protón incidente entra por la izquierda e interacciona con otro protón estacionario en la cámara. Las dos partículas se mueven formando un ángulo recto después del choque. La ligera curvatura de las trazas se debe a un campo magnético.

o

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$$

Los vectores velocidad final se suman formando el triángulo que se indica en la figura 8.39b. La conservación de la energía correspondiente a este choque es

$$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2$$

o

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \tag{8.34}$$

La ecuación 8.34 es el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo formado por los vectores  $\mathbf{v}_{1f}$ ,  $\mathbf{v}_{2f}$  y  $\mathbf{v}_{1i}$ , siendo  $\mathbf{v}_{1i}$  la hipotenusa del triángulo. Por lo tanto, los vectores velocidad final son perpendiculares entre sí, como indica la figura 8.39b.

### \*8.7 Sistema de referencia del centro de masas

Como hemos visto, la velocidad del centro de masas permanece invariable cuando la fuerza resultante externa que actúa sobre el sistema es nula. A veces es conveniente elegir un sistema de coordenadas con el origen en el centro de masas. Entonces, con respecto al sistema de coordenadas original, este sistema de coordenadas se mueve con una velocidad constante  $\mathbf{v}_{cm}$ . Este sistema recibe el nombre de **sistema de referencia del centro de masas**. Si una partícula tiene la velocidad  $\mathbf{v}$  en el sistema de referencia original, su velocidad relativa al centro de masas es  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{cm}$ . En el sistema del centro de masas, la velocidad del centro de masas es cero. Como el momento lineal total del sistema es igual al producto de la masa total por la velocidad del centro de masas, el momento lineal total también es cero en el sistema de referencia del centro de masas. Por ello se llama también **sistema de referencia del momento lineal cero**.

El análisis matemático de las colisiones se simplifica enormemente cuando se consideran en el sistema de referencia del centro de masas. Los momentos lineales de los dos objetos incidentes son iguales y opuestos. Después de una colisión perfectamente inelástica, los objetos permanecen en reposo. Toda la energía original se pierde en forma de energía térmica. Una colisión perfectamente elástica en una dimensión invierte la velocidad de cada objeto, pero no cambia su módulo (este hecho se deduce en el *problema 8.101*).

Consideremos por ejemplo, un sistema simple de dos partículas en un sistema de referencia, en el cual una partícula de masa  $m_1$  se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}_1$  y una segunda partícula de masa  $m_2$  se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}_2$  (figura 8.40). En este sistema la velocidad del centro de masas es

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

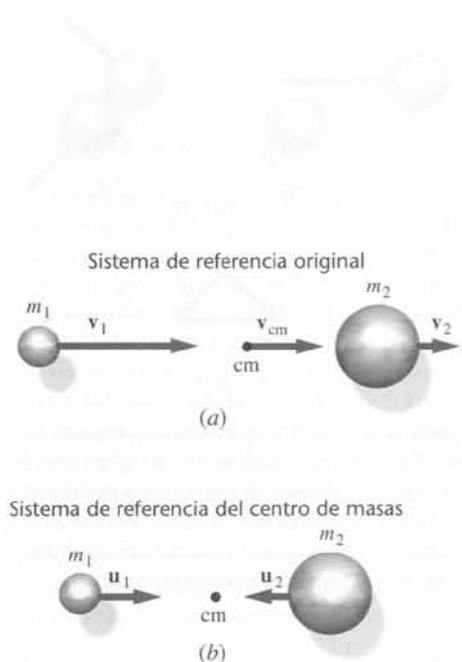
Para transformar las velocidades de las dos partículas a sus velocidades en el sistema de referencia del centro de masas, basta restar  $\mathbf{v}_{cm}$ . Las velocidades de las partículas en el sistema centro de masas son  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ , dadas por

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{cm} \tag{8.35a}$$

y

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{cm} \tag{8.35b}$$

Como el momento lineal total es cero en el sistema del centro de masas, las partículas tienen momentos iguales y opuestos en este sistema.



**Figura 8.40** (a) Dos partículas se mueven en un sistema de referencia general en el cual el centro de masas tiene una velocidad  $\mathbf{v}_{cm}$ . (b) Las dos partículas del apartado anterior vistas desde un sistema de referencia para el cual el centro de masas está en reposo.

### EJEMPLO 8.19 | Colisión elástica de dos bloques

Determinar las velocidades finales de los bloques de la colisión elástica del ejemplo 8.16 (en donde un bloque de 4 kg que se mueve hacia la derecha a 6 m/s choca elásticamente con un bloque de 2 kg que se mueve también hacia la derecha a 3 m/s) transformando previamente sus velocidades al sistema de referencia del centro de masas.

**Planteamiento del problema** Para pasar al sistema centro de masas, determinamos en primer lugar  $v_{cm}$  y lo restamos de cada velocidad. Resolvemos a continuación el choque invirtiendo las velocidades y transformando de nuevo al sistema original.

1. Calcular la velocidad del centro de masas,  $v_{cm}$  (figura 8.41):

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(4 \text{ kg})(6 \text{ m/s}) + (2 \text{ kg})(3 \text{ m/s})}{4 \text{ kg} + 2 \text{ kg}}$$

$$= 5 \text{ m/s}$$

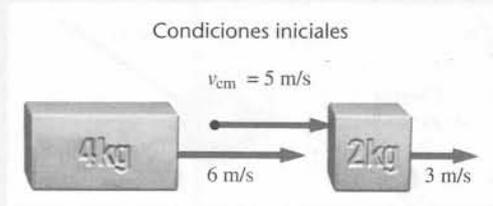


Figura 8.41

2. Transformar las velocidades iniciales al sistema de referencia del centro de masas, restando  $v_{cm}$  de las velocidades iniciales (figura 8.42):

$$u_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$$

$$= 6 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$$

$$u_{2i} = v_{2i} - v_{cm}$$

$$= 3 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s} = -2 \text{ m/s}$$

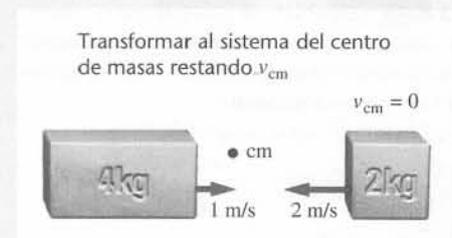


Figura 8.42

3. Resolver la colisión en el sistema de referencia del centro de masas invirtiendo la velocidad de cada objeto (figura 8.43):

$$u_{1f} = -u_{1i} = -1 \text{ m/s}$$

$$u_{2f} = -u_{2i} = +2 \text{ m/s}$$



Figura 8.43

4. Para determinar las velocidades finales en el sistema original, sumar  $v_{cm}$  a cada velocidad final (figura 8.44):

$$v_{1f} = u_{1f} + v_{cm}$$

$$= -1 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s} = \boxed{4 \text{ m/s}}$$

$$v_{2f} = u_{2f} + v_{cm}$$

$$= 2 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s} = \boxed{7 \text{ m/s}}$$

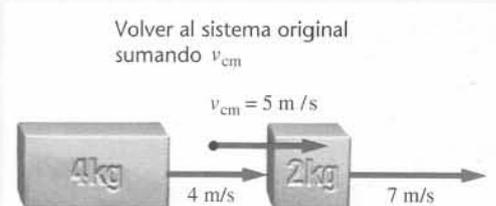
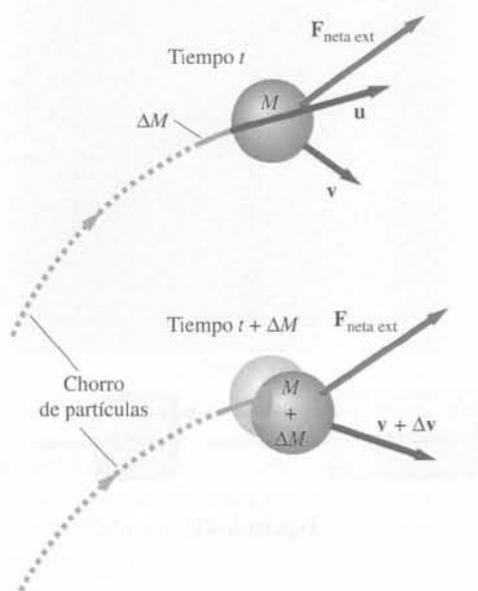


Figura 8.44

**Observación** Este resultado coincide con el obtenido en el ejemplo 8.16.

**Ejercicio** Demostrar que el momento lineal total antes y después del choque es cero en el sistema de referencia del centro de masas. (Respuesta Antes de la colisión:  $P_{sist i} = (4 \text{ kg})(1 \text{ m/s}) + (2 \text{ kg})(-2 \text{ m/s}) = 0$ ; después de la colisión:  $P_{sist f} = (4 \text{ kg})(-1 \text{ m/s}) + (2 \text{ kg})(2 \text{ m/s}) = 0$ .)

## \*8.8 Sistemas de masa variable: la propulsión de los cohetes



**Figura 8.45** Un objeto de masa  $M$  que se mueve a velocidad  $v$  experimenta colisiones perfectamente inelásticas con las partículas de un chorro continuo que se mueven a velocidad  $u$ .

Un aspecto muy importante y creativo en la resolución de problemas de física consiste en especificar adecuadamente el sistema. En esta sección exploramos situaciones en que el sistema que consideramos cambia su masa continuamente. Un ejemplo de uno de estos sistemas es un cohete. En este caso se elige el sistema como el conjunto formado por el cohete más el combustible que aún está por usar. Cuando el combustible se utiliza, los gases se expelen fuera de la nave y la masa del sistema disminuye.

Otro ejemplo de sistemas de masa variable lo constituye un asteroide que pasa a través de los restos de la erupción emitidos al espacio por un volcán de la luna de Júpiter, IO. Especificamos que en el tiempo  $t$  el sistema sea el asteroide, más los restos acumulados en él, más los que se acumularán entre el tiempo  $t$  y el tiempo  $t + \Delta t$ . A medida que se acumulan restos de la erupción en el asteroide, la masa del sistema aumenta. Para resolver problemas de estas características aplicamos el teorema impulso-momento durante un intervalo de tiempo pequeño  $\Delta t$  y después tomamos el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Consideremos la siguiente deducción de la segunda ley de Newton para objetos cuya masa varía continuamente. Supongamos que un flujo de materia continuo que se mueve a velocidad  $u$  choca con un objeto de masa  $M$  que se mueve con velocidad  $v$  (figura 8.45). La masa de las partículas que chocan con el objeto durante el tiempo  $\Delta t$  es  $\Delta M$ , y estas partículas se quedan enganchadas con el objeto aumentando su masa  $\Delta M$  en un tiempo  $\Delta t$ . Durante este tiempo  $\Delta t$  la velocidad  $v$  cambia  $\Delta v$ . En el tiempo  $t$  definimos que el sistema es el objeto (incluyendo toda la masa que ha chocado sobre él en tiempos anteriores a  $t$ ) más toda la materia que choca con el objeto durante el tiempo comprendido entre  $t$  y  $t + \Delta t$ . Aplicando el teorema impulso-momento a este sistema se obtiene,

$$\mathbf{F}_{\text{neta ext}} \Delta t = \Delta \mathbf{P} = [(M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v})] - [M\mathbf{v} + \Delta M\mathbf{u}]$$

en donde el primer término (en corchetes) es el momento en el tiempo  $t + \Delta t$  y el segundo término en corchetes es el momento en el tiempo  $t$ . La reorganización de los términos de la ecuación anterior conduce a

$$\mathbf{F}_{\text{neta ext}} \Delta t = M \Delta \mathbf{v} + \Delta M(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \Delta M \Delta \mathbf{v} \quad (8.36)$$

(en donde la fuerza externa neta  $\mathbf{F}_{\text{neta ext}}$  incluye la fuerza gravitatoria y una o más fuerzas de contacto). Dividiendo la ecuación 8.36 por  $\Delta t$  se llega a

$$\mathbf{F}_{\text{neta ext}} = M \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta M}{\Delta t}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{\Delta M}{\Delta t} \Delta \mathbf{v}$$

y si se toma el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  (que a su vez significa tanto  $\Delta M \rightarrow 0$  como  $\Delta \mathbf{v} \rightarrow 0$ ) se obtiene

$$\mathbf{F}_{\text{neta ext}} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dM}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + 0$$

expresión que si se arregla queda

$$\mathbf{F}_{\text{neta ext}} + \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_{\text{rel}} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (8.37)$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON EN SISTEMAS DE MASA VARIABLE

en donde  $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  es la velocidad de  $dM$  relativa a  $M$ . Nótese que excepto para el término  $-(dM/dt)\mathbf{v}_{\text{rel}}$ , la ecuación 8.37 es precisamente la segunda ley de Newton para un sistema de masa constante.

### EJEMPLO 8.20 | La cuerda que cae

Una cuerda uniforme de masa  $M$  y de longitud  $L$  se sujeta de manera que su extremo inferior está justo por encima de una balanza. Se suelta la cuerda y ésta empieza a caer. Determinar la fuerza que ejerce la balanza sobre la cuerda cuando ha caído la mitad de ésta.

**Planteamiento del problema** Se aplica la ecuación 8.37 a la porción de cuerda que está en la balanza. En ella se ejercen dos fuerzas externas, la fuerza de la gravedad y la fuerza normal ejercida por la balanza. Las velocidades con las que los diferentes puntos de la cuerda chocan con la balanza dependen de la altura desde donde caen.

1. Se dibuja un diagrama de la caída de la cuerda (véase la figura 8.46) junto con un eje de coordenadas. Se incluyen la configuración inicial y la configuración un tiempo arbitrario posterior.

2. Se expresa la ecuación 8.37 en sus componentes. Sea  $m$  la masa del sistema (la parte de la cuerda en la balanza). La velocidad del sistema es cero, por lo que  $dv_y/dt = 0$ :

$$F_{\text{net},y} + \frac{dm}{dt}v_{\text{rel},y} = m \frac{dv_y}{dt}$$

$$F_n - mg + \frac{dm}{dt}v_{\text{rel},y} = 0$$

3. Sea  $dm$  la masa de un pequeño segmento de cuerda de longitud  $d\ell$  que cae durante el tiempo  $dt$  sobre la balanza. La cuerda es uniforme, por lo que la relación entre  $dm$  y  $d\ell$  es:

$$\frac{dm}{d\ell} = \frac{M}{L}$$

4. Multiplicando ambos términos del paso anterior por  $d\ell/dt$  y despejando para  $dm/dt$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{M d\ell}{L dt}$$

5.  $d\ell/dt$  es el módulo de la velocidad del impacto de un segmento, por lo que  $v_{\text{rel},y} = -d\ell/dt$ . ( $v_{\text{rel},y}$  es negativa ya que se ha elegido la dirección positiva del eje  $y$  hacia arriba, y la cuerda está cayendo.) Si se sustituye esta relación en el resultado del paso 4 se obtiene:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{M}{L}v_{\text{rel},y}$$

6. Sustituyendo el resultado del paso 5 en el paso 2 y despejando  $F_n$  se obtiene:

$$F_n = mg + \frac{M}{L}v_{\text{rel},y}^2$$

7. Hasta que un punto de la cuerda toca la balanza, se mueve con aceleración constante  $g$ . Usando la ecuación 2.23 con  $\Delta y = -L/2$  se obtiene:

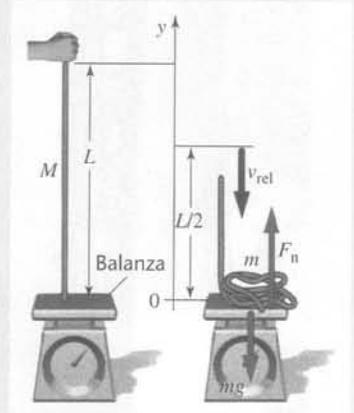
$$\begin{aligned} v_{\text{rel},y}^2 &= v_{\text{rel},y,0}^2 + 2a_y\Delta y \\ &= 0 + 2(-g)(-L/2) = gL \end{aligned}$$

8. Sustituyendo el resultado del paso anterior en el resultado del paso 6 con  $m = M/2$  resulta:

$$F_n = \frac{M}{2}g + \frac{M}{L}gL = \boxed{\frac{3}{2}Mg}$$

**Observación** Cuando la mitad de la cuerda ha caído sobre la balanza, el peso del sistema (la cuerda que descansa sobre la balanza) es  $1/2Mg$ , que corresponde a un tercio de la fuerza normal. Esto significa que  $F_{\text{net},y} = Mg$  (dirigida hacia arriba). Esta es la fuerza requerida para detener el momento de la cuerda que cae en ese instante.

**Ejercicio** Determinar la fuerza normal ejercida por la balanza sobre la cuerda (a) justo antes de que el extremo superior de la cuerda llegue a la balanza y, (b) justo después de que el extremo superior llegue a la balanza. (Respuesta (a)  $3Mg$ , (b)  $Mg$ )



**Figura 8.46** Una cuerda flexible y uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  cae a partir del reposo sobre la superficie de una balanza.

La propulsión de cohetes es un ejemplo interesante de la conservación de la cantidad de movimiento. La masa del cohete cambia continuamente a medida que el motor quema combustible y expelle los gases resultantes. Consideremos un cohete que se mueve en línea recta con una velocidad  $v$  relativa a la Tierra, tal como se muestra en la figura 8.47. Suponiendo que el combustible se quema a ritmo constante, en el tiempo  $t$  la masa del cohete es:

$$M = M_0 - Rt \quad (8.38)$$

en donde  $M_0$  es la masa inicial del cohete. Los gases se separan del cohete a una velocidad  $\mathbf{u}_{\text{ext}}$  relativa al cohete, y el ritmo con que el cohete consume combustible coincide con la velocidad con que disminuye su masa  $M$ . Elegimos como sistema el cohete y el combustible no utilizado. Despreciando la resistencia del aire, la única fuerza externa que actúa sobre el

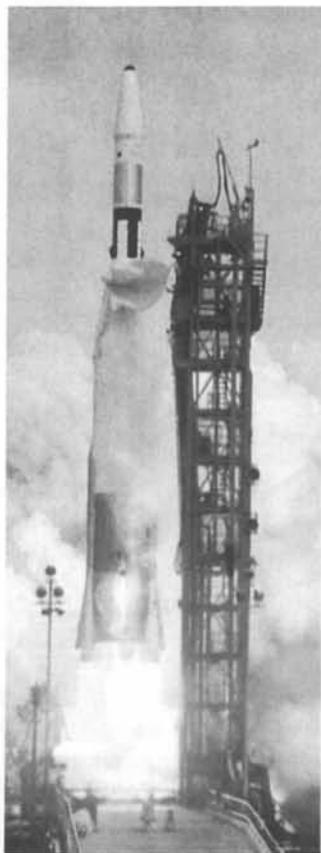


Figura 8.47

sistema es la fuerza de la gravedad. Con  $F_{\text{neto ext}} = Mg$  y  $dM/dt = -R$ , la ecuación 8.37 se convierte en **la ecuación del cohete**:

$$Mg - Ru_{\text{ext}} = M \frac{dv}{dt} \quad (8.39)$$

ECUACIÓN DE UN COHETE

La magnitud  $Ru_{\text{ext}}$  es la fuerza ejercida sobre el cohete por el gas que escapa y se denomina **empuje** (o **fuerza de impulsión**)  $F_e$ :

$$F_e = Ru_{\text{ext}} = \left| \frac{dM}{dt} \right| u_{\text{ext}} \quad (8.40)$$

DEFINICIÓN —EMPUJE DE UN COHETE

El cohete se mueve hacia arriba, por lo que se elige esta dirección como la positiva del eje  $y$ , con lo cual la ecuación 8.39 se expresa como

$$-Mg + Ru_{\text{ext}} = M \frac{dv_y}{dt} \quad (8.41)$$

COMPONENTE VERTICAL DE LA ECUACIÓN DE UN COHETE

Dividiendo por  $M$ , arreglando los términos y sustituyendo la ecuación 8.38 se obtiene

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_{\text{ext}}}{M} - g = \frac{Ru_{\text{ext}}}{M_0 - Rt} - g \quad (8.42)$$

COMPONENTE VERTICAL DE LA ACCELERACIÓN DE UN COHETE

La ecuación 8.42 se resuelve integrando a los dos lados del signo igual con respecto del tiempo. Para un cohete que inicia su movimiento del reposo en el tiempo  $t = 0$  resulta:

$$v_f = -u_{\text{ext}} \ln \left( \frac{M_0}{M_0 - Rt} \right) - gt \quad (8.43)$$

COMPONENTE VERTICAL DE LA VELOCIDAD DE UN COHETE

suponiendo que la aceleración de la gravedad es constante.

### EJEMPLO 8.21 | Despegue

*¡INTÉNTELO USTED MISMO!*

El cohete Saturno V utilizado en el programa lunar Apolo, tenía una masa inicial  $M_0$  de  $2,85 \times 10^6$  kg, una carga útil del 27 por ciento, un ritmo de combustión  $R$  de  $13,84 \times 10^3$  kg/s, y una fuerza de impulsión  $F_e$  de  $34 \times 10^6$  N. Determinar (a) la velocidad de expulsión de los gases, (b) el tiempo de combustión total  $t_b$ , (c) la aceleración inicial de despegue, (d) la aceleración en el tiempo  $t_b$  y (e) la velocidad final del cohete.

**Planteamiento del problema** (a) La velocidad de expulsión de los gases se obtiene del empuje y del ritmo de combustión. (b) Para determinar el tiempo de combustión total, necesitamos conocer la masa total del combustible quemado, que es la masa inicial menos la carga útil. (c) La aceleración se determina mediante la ecuación 8.42. (d) La velocidad final viene dada por la ecuación 8.43.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

### Pasos

- (a) Calcular  $u_{\text{ext}}$  a partir del empuje y de la velocidad de combustión.
- (b) 1. Calcular la masa final  $M_f$  del cohete.  
2. Utilizar el resultado anterior para calcular el tiempo de combustión total,  $t_b$ .
- (c) Calcular  $dv_y/dt$  para  $M = M_0$  y para  $M = M_f$ .
- (d) Calcular la velocidad final a partir de la ecuación 8.42.

### Respuestas

$$u_{\text{ext}} = \boxed{2,46 \text{ km/s}}$$

$$M_f = (0,27)M_0 = 7,70 \times 10^5 \text{ kg}$$

$$t_b = \frac{M_0 - M_f}{R} = \boxed{150 \text{ s}}$$

$$\text{Inicialmente, } \frac{dv_y}{dt} = 2,14 \text{ m/s}^2;$$

$$\text{Finalmente, } \frac{dv_y}{dt} = \boxed{34,3 \text{ m/s}^2}$$

$$v_{yf} = \boxed{1,75 \text{ km/s}}$$

**Observación** La aceleración inicial es pequeña: sólo 0,21 g. Cuando ha transcurrido el tiempo de combustión total, la aceleración del cohete ha crecido a 3,5 g. Inmediatamente después de que se acabe el combustible, la aceleración es  $-g$ . La velocidad del cohete entonces, después de dos minutos y medio de combustión, es aproximadamente 6300 km/h.

## Resumen

La conservación del momento lineal (o ímpetu) en un sistema aislado es una ley fundamental de la naturaleza con aplicaciones en todas las áreas de la física.

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### 1. Centro de masas

Sistema de partículas

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots \quad (8.5)$$

$$M\mathbf{v}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots \quad (8.8)$$

$$M\mathbf{a}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \dots \quad (8.9)$$

Objetos continuos

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int \mathbf{r} \, dm \quad (8.6)$$

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas

$$\mathbf{F}_{\text{net},\text{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}} \quad (8.11)$$

#### 2. Momento lineal

Definición para una partícula

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (8.12)$$

Energía cinética de una partícula

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \quad (8.25)$$

#### Momento de un sistema de partículas

$$\mathbf{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i\mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{\text{cm}} \quad (8.14)$$

Segunda ley de Newton para sistemas

$$\mathbf{F}_{\text{net},\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{sist}}}{dt} \quad (8.15)$$

Ley de conservación del momento

Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema se conserva.

#### 3. Energía de un sistema

Energía cinética

La energía cinética asociada al movimiento de las partículas de un sistema relativo al centro de masas es  $E_{\text{cm}} = \sum \frac{1}{2}m_i u_i^2$ , en donde  $u_i$  es la velocidad de la partícula  $i$  relativa al centro de masas:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + E_{\text{cm}} \quad (8.18)$$

Energía potencial gravitatoria

$$U = Mgh_{\text{cm}} \quad (8.7)$$

## 4. Colisiones

Impulso El impulso de una fuerza se define como la integral de la fuerza extendida al intervalo de tiempo durante el cual actúa.

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt \quad (8.19)$$

Teorema impulso-momento

$$\mathbf{I}_{\text{neto}} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{\text{neto}} dt = \Delta \mathbf{p} \quad (8.20)$$

Fuerza media

$$\mathbf{F}_{\text{m}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt = \frac{\mathbf{I}}{\Delta t} \quad (8.22)$$

Colisiones elásticas

Se dice que un choque es elástico cuando la suma de las energías cinéticas de los dos objetos es la misma antes y después de la colisión.

Velocidades relativas de aproximación y retroceso

En un choque elástico la velocidad relativa de alejamiento de los cuerpos después del choque es igual a la velocidad relativa de aproximación antes del choque:

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \quad (8.31)$$

Colisiones perfectamente inelásticas

En una colisión perfectamente inelástica los cuerpos que chocan se acoplan y se mueven con la velocidad del centro de masas.

\*Coeficiente de restitución

El coeficiente de restitución  $e$  mide la elasticidad de un choque, y se define como el coeficiente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad relativa de aproximación:

$$e = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{(v_{2i} - v_{1i})} \quad (8.33)$$

Para un choque elástico,  $e = 1$ ; para un choque perfectamente inelástico,  $e = 0$ .

## \*5. Sistemas de masa variable

Segunda ley de Newton

$$\mathbf{F}_{\text{neto,ext}} + \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_{\text{rel}} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (8.37)$$

Ecuación del cohete

$$M\mathbf{g} - R\mathbf{u}_{\text{ext}} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (8.39)$$

Empuje

$$\mathbf{F}_e = -R\mathbf{u}_{\text{ext}} = -\left| \frac{dM}{dt} \right| \mathbf{u}_{\text{ext}} \quad (8.40)$$

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

 Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

 Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

Tomar  $g = 9,81 \text{ N/kg} = 9,81 \text{ m/s}^2$  y despreciar el rozamiento en todos los problemas a menos que se indique lo contrario.

### Problemas conceptuales

1 ● Dar un ejemplo de un objeto tridimensional que no tenga masa en su centro de masas.

2 ● SSM Desde lo alto de una torre se deja caer una bala a la vez que otra bala idéntica se dispara hacia arriba. El centro de masas de las dos

balas, (a) está siempre en el mismo sitio, (b) inicialmente sube, después cae, pero empieza a caer *antes* de que la bala lanzada al aire empiece a caer, (c) inicialmente sube, después cae, pero empieza a caer *simultáneamente* que la bala lanzada al aire empiece a caer, (d) inicialmente sube, después cae, pero empieza a caer después de que la bala lanzada al aire empiece a caer.

3 ● Dos discos de masas  $m_1$  y  $m_2$  yacen desconectados sobre una mesa sin rozamiento. Se ejerce una fuerza horizontal  $F_1$  solamente sobre  $m_1$ .

¿Cuál es el módulo de la aceleración del centro de masas de los discos? (a)  $F_1/m_1$ , (b)  $F_1/(m_1 + m_2)$ , (c)  $F_1/m_2$ , (d)  $(m_1 + m_2) F_1 / m_1 m_2$

4 ● Los dos discos del problema 3 están sobre una mesa sin rozamiento y conectados por un muelle sin masa de constante de fuerza  $k$ . Se ejerce de nuevo una fuerza horizontal  $F_1$  sobre  $m_1$  a lo largo del muelle, alejándola de  $m_2$ . ¿Cuál es el módulo de la aceleración del centro de masas? (a)  $F_1/m_1$ , (b)  $F_1/(m_1 + m_2)$ , (c)  $(F_1 + kx)/m_1 m_2$ , en donde  $x$  es el aumento de longitud del muelle. (d)  $(m_1 + m_2) F_1 / m_1 m_2$ .

5 ● SSM Si dos partículas tienen la misma energía cinética, ¿el módulo de su momento es necesariamente es igual? Explicarlo y dar un ejemplo.

6 ● Verdadero o falso:

- (a) El momento lineal de un cuerpo pesado es mayor que el de un objeto ligero que se mueve con igual velocidad.  
 (b) El ímpetu del sistema puede conservarse aunque no suceda lo mismo con la energía mecánica.  
 (c) La velocidad del centro de masas de un sistema es igual al momento lineal total del sistema dividido por su masa total.

7 ● ¿Cómo es el movimiento de retroceso de un rifle o de un cañón en relación con la conservación de la cantidad de movimiento?

8 ● SSM Una muchacha salta de un bote al muelle. ¿Por qué debe saltar con más energía de la que necesitaría si saltase la misma distancia de un muelle a otro?

9 ●● SSM Una gran parte de la investigación pionera sobre el movimiento de cohetes fue realizada por Robert Goddard, profesor de física en el Clark College de Worcester, Massachusetts. Un editorial de *New York Times*, publicado en 1920, ilustra la opinión pública de su trabajo: "El profesor Goddard con su cátedra en el Clark College y el apoyo de la Institución Smithsonian desconoce la relación entre acción y reacción y la necesidad de tener algo mejor que el vacío frente a lo cual reaccionar —es decir, su idea es absurda. Naturalmente parece desconocer las enseñanzas impartidas diariamente en los centros de enseñanza media".<sup>1</sup> La creencia de que un cohete necesitaba algún medio sobre el cual empujar, era un concepto erróneo predominante antes de que los cohetes en el espacio fueran algo común. Explicar por qué dicha creencia era errónea.

10 ● Dos bolas de una bolera se mueven con igual velocidad, pero una de ellas se desliza hacia abajo por la pista, mientras la otra está rodando. ¿Cuál de las dos bolas tiene más energía cinética?

11 ● Un filósofo dice "Todo movimiento es imposible. Las fuerzas siempre actúan en pares iguales acción-reacción y, por lo tanto, se anulan" Responda a su argumento.

12 ● Si dos objetos chocan y uno de ellos está inicialmente en reposo, ¿es posible que ambos queden quietos después del choque? (Supóngase que cualquier fuerza externa que actúe sobre el sistema de los dos objetos es muy pequeña, es decir, despreciable.) ¿Es posible que uno de los dos se quede parado? Explíquelo.

13 ● Desde el punto de vista de las leyes físicas, ¿cuál es el problema con los superhéroes de cómic cuando vuelan sin motores a chorro ni flotadores en el aire y chocan, repeliéndolos, con enormes objetos como coches y villanos?

14 ●● SSM Si las fuerzas externas son las únicas fuerzas que hacen que el centro de masas de un sistema de partículas acelere, ¿cómo puede moverse un coche? Habitualmente pensamos que el motor de un coche propor-

ciona la fuerza necesaria para acelerarlo, pero, ¿es eso cierto? ¿De donde viene la fuerza externa que acelera el coche?

15 ●● Cuando pisamos el pedal del freno para frenar un coche, una mordaza presiona la rueda de modo que el rozamiento disminuye su velocidad de rotación. Sin embargo, el rozamiento de la mordaza no puede ser la fuerza que detiene el vehículo porque es una fuerza interna, ya que la rueda y la mordaza son elementos que forman el sistema. ¿Cuál es la fuerza externa que detiene el coche? Dé una explicación detallada de cómo funciona esta fuerza.

16 ● Explique por qué la red protectora puede salvar la vida de un artista de circo.

17 ● ¿Cómo se podría estimar el tiempo de colisión de una pelota de béisbol con un bate?

18 ● ¿Por qué un vaso de vino puede caer en una alfombra y no romperse y, en cambio, si cae en una superficie de hormigón se rompe?

19 ● Verdadero o falso:

- (a) En un choque perfectamente inelástico se pierde toda la energía cinética de las partículas.  
 (b) En un choque elástico frontal la velocidad relativa de retroceso después del choque es igual a la velocidad relativa de aproximación antes del mismo.  
 (c) La energía mecánica se conserva en una colisión elástica.

20 ●● SSM ¿En qué condiciones puede perderse toda la energía cinética inicial en un choque?

21 ●● Considerar una colisión perfectamente inelástica de dos objetos de igual masa. (a) ¿En qué caso es mayor la pérdida de la energía cinética: si los dos objetos tienen velocidades directamente opuestas y de igual magnitud  $v/2$ , o si uno de los objetos se encuentra inicialmente en reposo y el otro tiene una velocidad inicial  $v$ ? (b) ¿En qué situación es mayor el porcentaje de pérdida de energía cinética?

22 ●● SSM Un niño se ha construido una arma de juguete que consiste de dos cañas horizontales huecas por donde se pueden lanzar guisantes (véase la figura 8.48). El niño sopla desde la izquierda cuando dos guisantes están en las posiciones de la figura. Si el juguete está en posición horizontal, ¿cuál de los dos guisantes, el A o el B, saldrá con mayor velocidad? ¿Por qué? Sugerencia: La respuesta tiene que ver con el teorema impulso-momento.

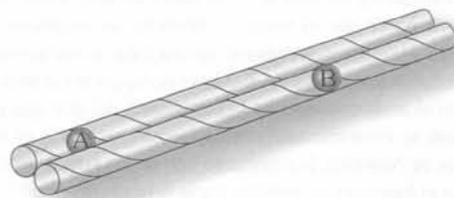


Figura 8.48 Problema 22

23 ●● Una partícula  $m_1$  que se mueve con velocidad  $v$  realiza un choque elástico frontal con una masa estacionaria  $m_2$ . ¿En qué condiciones será mayor la energía impartida a  $m_2$ ? (a)  $m_2 \ll m_1$ , (b)  $m_2 = m_1$ , (c)  $m_2 \gg m_1$ , (d) Ninguna de las anteriores.

## Sección opcional

24 ● Describir una colisión perfectamente inelástica considerada en el sistema de referencia del centro de masas.

<sup>1</sup> En la página 43 de la edición del 17 de julio de 1968 del *New York Times* se escribió una "corrección" al editorial de 1920. En dicha corrección, que se publicó 3 días antes de que el hombre pisara la Luna por primera vez, se decía que "ahora está totalmente demostrado que un cohete puede funcionar tanto en el vacío como en la atmósfera. *The Times* pide disculpas por su error".

**25** ● Las boquillas de las mangueras de jardín habitualmente tienen la forma que se indica en la figura 8.49, acabando en ángulo recto. Si se abre la válvula de la boquilla y sale el agua a presión, se nota que ésta ejerce sobre la mano una presión hacia atrás más fuerte de lo que sería de esperar si la boquilla no acabara en ángulo recto. ¿Por qué?



Figura 8.49 Problema 25

**26** ● ¿Por qué se puede prescindir del rozamiento y de la fuerza de la gravedad en los problemas de colisiones? Explíquelo.

**27** ● Si una masa de un péndulo oscila, ¿se conserva su momento? Explíquelo.

**28** ●● SSM Un vagón de un tren pasa por debajo de un silo que deja caer grano a velocidad constante. (a) ¿La conservación del momento conlleva que el vagón del tren disminuya su velocidad a medida que le cae grano? Suponer que no hay rozamiento en la vía y que el terreno es perfectamente plano. (b) Si el vagón frena, esto implica que hay una fuerza externa que actúa sobre él de modo que disminuye su velocidad. ¿De dónde procede? (c) Pasado el silo, el grano cae al suelo a velocidad constante por un agujero vertical en el suelo del vagón. ¿A medida que pierde masa, el vagón se acelera?

**29** ●● SSM Como evidencia de que incluso personas muy brillantes pueden equivocarse, considere el problema siguiente, que fue propuesto a un estudiante de primer curso en el Caltech (abreviatura del prestigioso instituto californiano: *California Institute of Technology*): Un barco de vela estaba en el agua un día sin viento. Para hacer que el barco se moviera, un marinero, erróneamente, colocó un ventilador a popa de manera que enviaba viento hacia las velas para que empujara el barco hacia delante. Explicar por qué esto es imposible. La idea de quien propuso el problema era que la fuerza neta del aire que empujaba las velas hacia adelante se contrarrestaba con la fuerza que ejercía el ventilador hacia atrás (tercera ley de Newton). Sin embargo uno de los estudiantes señaló al profesor que *de hecho* el barco podía moverse hacia delante. ¿Por qué?

### Estimaciones y aproximaciones

**30** ●● Un coche de 2000 kg que viaja a 90 km/h choca contra una pared de hormigón que no cede. (a) Estimar el tiempo de choque suponiendo que el centro del coche recorre la mitad del camino hasta la pared con desaceleración constante. (Utilizar una longitud razonable para el coche.) (b) Estimar la fuerza media ejercida por la pared sobre el coche.

**31** ●● En una carrera de vagonetas de tracción manual sobre railes, una de estas unidades de masa 350 kg se mueve a 32 km/h con un equipo de cuatro personas (cada una de ellas de 75 kg). La vagoneta se dirige hacia un río, cuando observan que el puente por el que han de pasar se ha derrumbado. Las cuatro componentes saltan simultáneamente hacia atrás con una velocidad de componente horizontal de 4 m/s relativa a la vagoneta después del salto. La vagoneta

cae al agua a una distancia de 25,0 m de la orilla. (a) Estimar el tiempo de caída de la vagoneta. (b) ¿Qué ocurre con las componentes del equipo?

**32** ●● SSM Disparando un rifle hacia un melón (no lo intente en casa) se realiza un experimento que va contra la intuición. Cuando la bala incide sobre el fruto, nueve de diez veces el melón se mueve hacia el rifle, el sentido *opuesto* al movimiento de la bala. (La décima vez, el melón simplemente explota.) ¿Se violan las leyes de la física por lo que se refiere a la conservación del momento? No, porque no estamos tratando simplemente con una colisión de dos cuerpos, ya que una fracción de la energía incidente se invierte en producir un chorro de melón en la dirección de la bala. Este chorro puede tener un momento superior al de la bala, por lo que, para conservar el momento, el resto del melón se mueve hacia atrás. Hagamos las siguientes suposiciones:

1. El melón es de 2,50 kg.
2. La bala del rifle tiene una masa de 10,4 g y su velocidad es de 550 m/s.
3. El 10% de la energía de la bala se deposita en forma de energía cinética del chorro de melón que salpica hacia delante.
4. La masa de melón que forma el chorro es, 0,14 kg.
5. Todas las colisiones se dan en línea recta. ¿Cuál será la velocidad de retroceso del melón? Compárela con una velocidad de retroceso típica de unos 0,5 m/s.

### Determinación del centro de masas

**33** ● Tres masas puntuales de 2 kg cada una están localizadas sobre el eje  $x$ , en el origen, en  $x = 0,20$  m y en  $x = 0,50$  m. Hallar el centro de masas del sistema.

**34** ● SSM El hacha de piedra de la figura 8.50, en donde se muestran sus dimensiones, está formada por una piedra simétrica de 8 kg atada al extremo de un palo homogéneo de 2,5 kg. ¿A qué distancia del mango del hacha se encuentra su centro de masas?

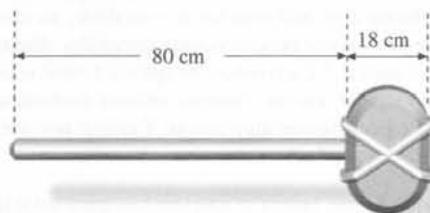


Figura 8.50 Problema 34

**35** ● **RESOLVE** Tres bolas A, B y C de masas 3 kg, 1 kg y 1 kg respectivamente, están conectadas por barras de masa despreciable. Las bolas están localizadas en la forma indicada en la figura 8.51. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masas?

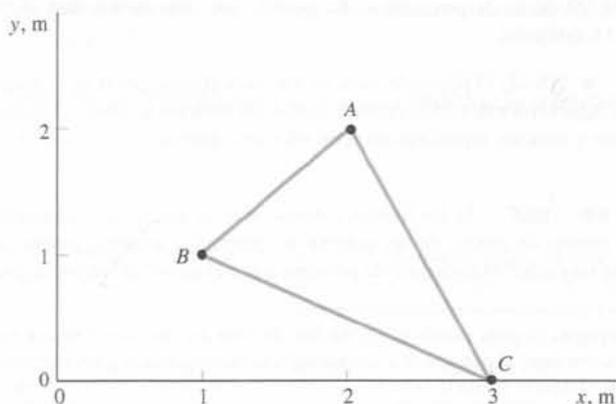


Figura 8.51 Problemas 35, 45

**36** ● **RESOLVER** Por simetría, localizar el centro de masas de un triángulo equilátero de lado  $a$ , que tiene un vértice sobre el eje  $y$  y los otros dos en  $(-a/2, 0)$  y  $(+a/2, 0)$ .

**37** ●● **SSM** Determinar el centro de masas de una pieza de madera contrachapada que tiene la forma de la figura 8.52. Podemos considerar que la pieza está formada por dos piezas, un cuadrado de 3 m de lado y de masa  $m_1$  y un rectángulo de 1 m  $\times$  2 m con una masa  $-m_2$ . Considere que el eje de coordenadas está situado en el extremo inferior izquierdo de la pieza.

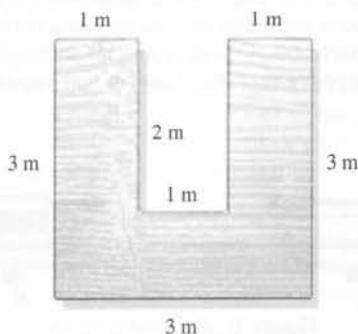


Figura 8.52 Problema 37

**38** ●● Una lata de masa  $M$  y altura  $H$  tiene forma cilíndrica y está llena de agua. La masa inicial de agua es  $M$ , la misma de la lata. Se perfora un agujero en la base de la lata por el que se va el agua. (a) Si la altura del agua en la lata es  $x$ , ¿cuál es el centro de masas del sistema lata + agua? (b) ¿Cuál es la mínima altura del centro de masas mientras se escapa el agua?

**\*Determinación del centro de masas por integración**

**39** ●● **SSM** Demostrar que el centro de masas de un disco semicircular uniforme de radio  $R$  está en un punto que dista  $4R/(3\pi)$  del centro del círculo.

**40** ●●● Determinar el centro de masas de una semiesfera maciza homogénea de radio  $R$  y masa  $M$ .

**41** ●●● Determinar el centro de masas de una corteza semiesférica delgada.

**42** ●●● Una plancha de metal se corta con la forma de la parábola que muestra la figura 8.53, que viene determinada por la ecuación  $y = ax^2$ , con  $0 \leq y \leq b$ . Determinar el centro de masas en función de  $a$  y de  $b$ . (Hay que calcular primero el área.)

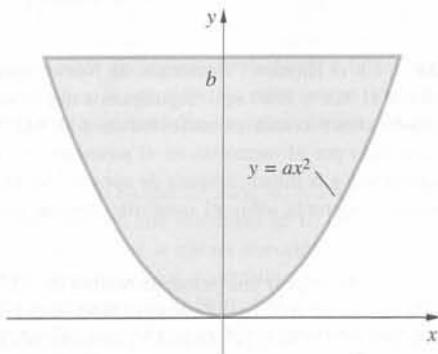


Figura 8.53 Problema 42

**Movimiento del centro de masas de un sistema**

**43** ● **RESOLVER** Dos masas de 3 kg cada una tienen las velocidades  $\mathbf{v}_1 = 2 \text{ m/s } \mathbf{i} + 3 \text{ m/s } \mathbf{j}$  y  $\mathbf{v}_2 = 4 \text{ m/s } \mathbf{i} - 6 \text{ m/s } \mathbf{j}$ . Determinar la velocidad del centro de masas del sistema.

**44** ● **SSM** **RESOLVER** Un automóvil de 1500 kg se mueve hacia el oeste con una velocidad de 20 m/s y un camión de 3000 kg se mueve hacia el este con una velocidad de 16 m/s. Determinar la velocidad del centro de masas del sistema.

**45** ● **RESOLVER** Una fuerza  $\mathbf{F} = 12 \text{ N } \mathbf{i}$  se aplica a la bola de 3 kg de la figura 8.51 del problema 35. ¿Cuál es la aceleración del centro de masas?

**46** ●● Un bloque de masa  $m$  está sujeto a una cuerda y suspendido dentro de una caja hueca de masa  $M$ . La caja descansa sobre una balanza que mide el peso del sistema. (a) Si la cuerda se rompe, ¿cambia la lectura de la balanza? Razonar la respuesta. (b) Suponer que la cuerda se rompe y la masa  $m$  cae con aceleración constante  $g$ . Determinar la aceleración del centro de masas, tanto en dirección como en módulo. (c) Utilizando el resultado de (b), determinar la lectura de la balanza, mientras  $m$  se encuentra en caída libre.

**47** ●● **SSM** Un muelle vertical de constante de fuerza  $k$  está sujeto por la parte inferior a una plataforma de masa  $m_p$  y en la parte superior posee una cápsula sin masa como indica la figura 8.54. La plataforma reposa sobre una balanza. Una bola de masa  $m_b$  se deja caer en la cápsula desde una altura despreciable. ¿Cuál es la lectura de la balanza cuando (a) el muelle se comprime la longitud  $d = m_b g/k$ ? (b) La bola alcanza momentáneamente el reposo con el muelle comprimido? (c) La bola alcanza de nuevo el reposo en su posición original?



Figura 8.54 Problemas 47, 49 y 136

**48** ●● **SSM** En la máquina de Atwood de la figura 8.55, la cuerda pasa por un cilindro fijo, sin rozamiento, de masa  $m_c$ . (a) Determinar la aceleración del centro de masas del sistema formado por los dos bloques y el cilindro. (b) Utilizar la segunda ley de Newton (para sistemas) para determinar la fuerza  $F$  ejercida por el soporte. (c) Determinar la tensión de la cuerda que conecta los bloques y demostrar que  $F = m_c g + 2T$ .

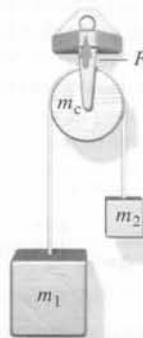


Figura 8.55 Problema 48

49 ●● **RESOLVER** Repetir los problemas 47a y 47b pero ahora dejando caer la bola sobre la cápsula desde una altura  $h$  por encima de la misma.

### Conservación del momento lineal

50 ● **RESOLVER** Una muchacha de 55 kg de masa salta hacia afuera desde la proa de una canoa de 75 kg que está inicialmente en reposo. Si la velocidad de la muchacha es de 2,5 m/s hacia la derecha, ¿cuál será la velocidad de la canoa después del salto?

51 ● Dos masas de 5 kg y 10 kg situadas sobre una masa sin rozamiento están conectadas por un muelle comprimido. Cuando el muelle se libera, la masa menor posee una velocidad de 8 m/s hacia la izquierda. ¿Cuál es la velocidad de la masa mayor?

52 ● **SSM** La figura 8.56 muestra el aspecto de un proyectil un instante después de haber estallado en tres fragmentos. ¿Cuál era la velocidad del proyectil un instante antes de su explosión? (a)  $v_3$ , (b)  $v_3/3$ , (c)  $v_3/4$ , (d)  $4v_3$ , (e)  $(v_1 + v_2 + v_3)/4$

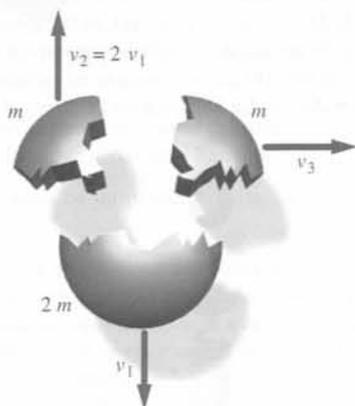


Figura 8.56 Problema 52

53 ● Una granada de masa  $m$  y velocidad  $v$  explota en dos fragmentos idénticos. Si la granada se movía horizontalmente respecto a la Tierra y después de la explosión uno de los fragmentos se mueve verticalmente con el módulo de la velocidad  $v$ , determinar la velocidad  $v'$  del otro fragmento.

54 ●● **SSM** Un bloque y una pistola cargada con una bala están firmemente fijados en los extremos opuestos de una barra deslizante montada en una guía de aire sin rozamiento (figura 8.57). El bloque y la pistola están separados una distancia  $L$ , y el sistema está inicialmente en reposo. Se dispara la pistola y la bala sale de la boca del arma con velocidad  $v_b$ , impacta con el bloque y se incrusta. La masa de la bala es  $m_b$ , y la del sistema pistola-raíl-bloque,  $m_p$ . (a) ¿Cuál es la velocidad de la plataforma inmediatamente después de que la bala abandone la pistola? (b) ¿Cuál es la velocidad de la plataforma inmediatamente después de que la bala quede en reposo dentro del bloque? (c) ¿Qué distancia ha recorrido el bloque desde su posición inicial hasta que la bala se detiene en el bloque?



Figura 8.57 Problema 54

55 ●● Un pequeño objeto de masa  $m$  desliza hacia abajo por una cuña de masa  $2m$  y luego se desliza suavemente sobre una mesa sin rozamiento. La cuña está inicialmente en reposo sobre la mesa. Si el objeto está inicialmente en reposo a una altura  $h$  por encima de la mesa, determinar la velocidad de la cuña cuando el objeto se separa de ésta.

56 ●● **SSM** En una guía de aire se colocan dos piezas con imanes que se atraen uno a otro (véase la figura 8.58). La masa de la primera pieza es de 0,10 kg y la de la segunda de 0,20 kg (cada una incluye la masa propia de la pieza más la del imán). Se sitúa el origen en el extremo izquierdo, el centro de la pieza 1 está en  $x = 0,1$  m y el centro de la pieza 2 está en  $x = 1,60$  m. La pieza 1 mide 10 cm y la 2, 20 cm, y ambas piezas tienen el centro de masas en su centro. (a) Cuando se sueltan las dos piezas se mueven una al encuentro de la otra y quedan enganchadas. ¿Cuál es la posición de los centros de cada pieza cuando chocan por primera vez? (b) ¿Seguirán moviéndose después del choque? Explíquelo.

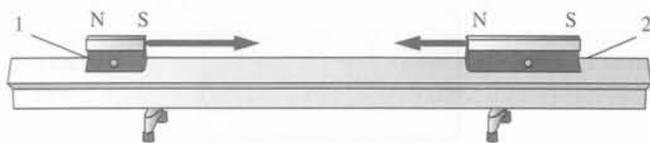


Figura 8.58 Problema 56

### Energía cinética de un sistema de partículas

57 ● **SSM** **RESOLVER** Un bloque de 3 kg se mueve hacia la derecha a 5 m/s y un segundo bloque de 3 kg se mueve hacia la izquierda a 2 m/s. (a) Hallar la energía cinética total de ambos bloques en este sistema. (b) Hallar la velocidad del centro de masas del sistema formado por los dos bloques. (c) Hallar las velocidades de los dos bloques respecto al centro de masas. (d) Hallar la energía cinética del movimiento respecto al centro de masas. (e) Demostrar que la respuesta del apartado (a) es mayor que la correspondiente al apartado (d) en una cantidad igual a la energía cinética del centro de masas.

58 ● Repetir el problema 57 para un segundo bloque de masa 5 kg que reemplaza al de 3 kg y que se mueve hacia la derecha con velocidad de 3 m/s.

### Impulso y fuerza media

59 ● Un balón de rugby de masa 0,43 kg sale del pie del chutador con una velocidad inicial de 25 m/s. (a) ¿Cuál es el impulso impartido al balón por el chutador? (b) Si el pie del jugador está en contacto con el balón durante 0,008 s, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el pie sobre el balón?

60 ● Un ladrillo de 0,3 kg se deja caer desde una altura de 8 m. Choca contra el suelo y queda en reposo. (a) ¿Cuál es el impulso ejercido por el suelo sobre el ladrillo? (b) Si desde que el ladrillo toca el suelo hasta que queda en reposo transcurren 0,0013 s, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el suelo sobre el ladrillo?

61 ● **SSM** En el Hayden Planetarium de Nueva York se exhibe un meteorito de 30,8 ton (1 ton = 1000 kg). Supongamos que la energía cinética del meteorito cuando chocó contra el suelo fue de 617 MJ. Determinar el impulso  $I$  experimentado por el meteorito en el momento en que su energía cinética se había reducido a la mitad (después de unos 0,3 s). Determinar también la fuerza media  $F$  ejercida sobre el meteorito durante este intervalo de tiempo.

62 ●● **RESOLVER** Al golpear una pelota de béisbol de 0,15 kg, su velocidad cambia de +20 m/s a -20 m/s. (a) ¿Cuál es el módulo del impulso impartido por el bate a la pelota? (b) Si la pelota está en contacto con el bate durante 1,3 ms, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el bate sobre la pelota?

**63** ●● SSM **RESOLVER** Una pelota de frontón de 60 g a la velocidad de 5,0 m/s, choca contra la pared bajo un ángulo de  $40^\circ$  y rebota con la misma velocidad y el mismo ángulo. Si está en contacto con la pared durante 2 ms, ¿cuál es la fuerza media ejercida por la bola sobre la pared?

**64** ●● **RESOLVER** Se lanza una pelota de 150 g a una altura de 40 m. (a) Utilizar un valor razonable para la distancia que recorrerá la pelota de manera que mientras se encuentre en la mano de la persona que la lanza se pueda calcular la fuerza media ejercida y el tiempo que la pelota permanece en la mano durante el lanzamiento. (b) ¿Es posible despreciar el peso de la pelota mientras ésta es lanzada?

**65** ●● Una pelota de frontón de 60 g de masa se lanza perpendicularmente contra una pared con una velocidad de 10 m/s. Rebota con una velocidad de 8 m/s. (a) ¿Qué impulso se ha transmitido a la pared? (b) Si el contacto entre la pelota y la pared dura 0,003 s, ¿qué fuerza media se ejerce sobre la pared? (c) La pelota la recoge un jugador que la deja en reposo. En el proceso sus manos retroceden 0,5 m. ¿Cuál es el impulso recibido por el jugador? (d) ¿Cuál es la fuerza media ejercida sobre el jugador por la pelota?

**66** ●●● **RESOLVER** Las grandes cavernas de piedra caliza se formaron gracias al goteo constante de agua. (a) ¿Cuál es la fuerza media ejercida sobre el suelo de caliza por las gotas de agua de 0,03 mL que caen desde una altura de 5 m a razón de 10 por minuto? (b) Comparar esta fuerza con el peso de una gota de agua.

## Colisiones en una dimensión

**67** ● SSM Un coche de 2000 kg se mueve hacia la derecha a 30 m/s en persecución de un segundo coche de igual masa que se mueve también hacia la derecha a 10 m/s. (a) Si los dos coches chocan y quedan acoplados, ¿cuál es su velocidad inmediatamente después de la colisión? (b) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial de los coches se pierde durante esta colisión? ¿A dónde va a parar esta energía?

**68** ● Un jugador de rugby de 85 kg que se mueve a la velocidad de 7 m/s realiza un choque perfectamente inelástico con un defensa de 105 kg que está inicialmente en reposo. ¿Cuál es la velocidad de los jugadores inmediatamente después de la colisión?

**69** ● Un cuerpo de 5 kg con una velocidad de 4,0 m/s choca frontalmente con otro de 10 kg que se mueve hacia él con una velocidad de 3,0 m/s. Si el bloque de 10 kg queda inmóvil después del choque, (a) ¿cuál es la velocidad final del cuerpo de 5 kg? (b) ¿Es elástico el choque?

**70** ● Una bola de masa  $m$  se mueve con velocidad  $v$  hacia la derecha y choca contra un bate mucho más pesado que se mueve hacia la izquierda con velocidad  $v$ . Determinar la velocidad de la bola después del choque elástico con el bate.

**71** ●● SSM **RESOLVER** Un protón de masa  $m$  realiza un choque elástico frontal con un núcleo de carbono estacionario de masa  $12m$ . La velocidad del protón es de 300 m/s. (a) Determinar la velocidad del centro de masas del sistema. (b) Determinar la velocidad del protón después del choque.

**72** ●● Un cuerpo de 3 kg que se mueve con una velocidad de 4 m/s verifica un choque elástico contra un cuerpo estacionario de masa 2 kg. Utilizando el principio de conservación de la cantidad de movimiento, y el hecho de que la velocidad relativa de separación es igual a la velocidad relativa de aproximación, determinar la velocidad de cada cuerpo después de la colisión. Comprobar la respuesta calculando las energías cinéticas inicial y final de cada cuerpo.

**73** ●● **RESOLVER** Un bloque de masa  $m_1 = 2$  kg se desliza a lo largo de una mesa sin rozamiento con una velocidad de 10 m/s. Directamente enfrente de este bloque y moviéndose en la misma dirección con una velocidad de 3 m/s hay otro bloque de masa  $m_2 = 5$  kg, conectado a un muelle de masa despreciable y constante de fuerza  $k = 1120$  N/m, como se muestra en la figura 8.59. (a) Antes de que  $m_1$  choque contra el muelle, ¿cuál es la velocidad del centro de masas del sistema? (b) Durante del choque, el muelle se comprime hasta un valor máximo  $\Delta x$ . ¿Cuál es el valor de  $\Delta x$ ? (c) Los bloques finalmente se sepa-

ran de nuevo. ¿Cuáles son las velocidades finales de los dos bloques medidas en el sistema de referencia de la mesa?

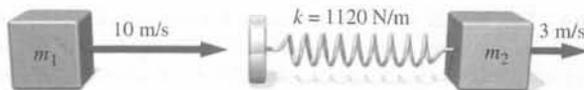


Figura 8.59 Problema 73

**74** ●● SSM **RESOLVER** Una bala de masa  $m$  se dispara verticalmente desde abajo sobre una lámina delgada de contrachapado de madera de masa  $M$  que está inicialmente en reposo, soportada por una lámina delgada de papel. La bala perfora la lámina, la cual asciende hasta una altura  $H$  por encima de su posición inicial antes de volver a caer. La bala sigue ascendiendo hasta una altura  $h$ . (a) Expresar la velocidad ascendente de la bala y la lámina inmediatamente después de que la primera emerge de la lámina en función de  $h$  y  $H$ . (b) Utilizar el principio de conservación del momento lineal para expresar la velocidad de la bala antes de que atraviese el bloque de madera en función de  $m$ ,  $h$ ,  $M$  y  $H$ . (c) Obtener expresiones para las energías mecánicas del sistema antes y después de la colisión inelástica. (d) Expresar la energía disipada en la lámina de madera en función de  $m$ ,  $h$ ,  $M$  y  $H$ .

**75** ●● Un protón de masa  $m$  se mueve con velocidad inicial  $v_0$  hacia una partícula  $\alpha$  de masa  $4m$  inicialmente en reposo. Como ambas partículas poseen carga eléctrica positiva, se repelen entre sí. Determinar la velocidad  $v'$  de la partícula  $\alpha$  (a) cuando la distancia entre las dos partículas es mínima y (b) cuando las dos partículas están muy separadas.

**76** ● Un electrón choca con un átomo de hidrógeno inicialmente en reposo. Todo el movimiento se da en una línea recta. ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se transfiere al átomo? (Considere que la masa del átomo de hidrógeno es 1840 veces la masa de un electrón.)

**77** ●● **RESOLVER** Una bala de 16 g se dispara contra la lenteja de un péndulo balístico de masa 1,5 kg. Cuando la lenteja está a su altura máxima, las cuerdas forman con la vertical un ángulo de  $60^\circ$ . La longitud del péndulo es de 2,3 m. Determinar la velocidad de la bala.

**78** ●● SSM Demostrar que en una colisión elástica en una dimensión, si la masa y la velocidad del objeto 1 son  $m_1$  y  $v_{1i}$  y si la masa y la velocidad del objeto 2 son  $m_2$  y  $v_{2i}$ , entonces las velocidades finales  $v_{1f}$  y  $v_{2f}$  vienen dadas por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

**79** ●● Usar los resultados del problema 78 para investigar las colisiones elásticas en una dimensión en los límites siguientes: (a) Cuando las dos masas son iguales, demostrar que las partículas "canjean" velocidades  $v_{1f} = v_{2i}$  y  $v_{2f} = v_{1i}$ . (b) Si  $m_2 \gg m_1$ , demostrar que  $v_{1f} = -v_{1i} + 2v_{2i}$  y  $v_{2f} = v_{2i}$ .

## Colisiones perfectamente inelásticas y el péndulo balístico

**80** ●● Se dispara un proyectil de masa  $m_1$  con una velocidad  $v$  sobre un péndulo balístico, que tiene masa  $m_2$ . El péndulo está sujeto a una varilla muy ligera de longitud  $L$  que puede girar por su otro extremo. El proyectil se detiene en el péndulo. Hallar la velocidad mínima  $v$  para que el péndulo llegue a describir una circunferencia completa.

**81** ●● SSM Se dispara un proyectil de masa  $m_1$  con velocidad  $v$  sobre un péndulo balístico de masa  $m_2$ . Hallar la máxima altura  $h$  alcanzada por éste si el proyectil pasa a través del péndulo y sale con velocidad  $v/2$ .

**82** ● Si tomamos un bloque de madera como los que se usan habitualmente en un péndulo balístico y antes de disparar sobre él la bala lo ponemos en una mesa plana, ¿qué distancia recorrerá hasta pararse? Considerar que la

bala tiene una masa de 10,5 g, que la masa del bloque de madera es de 10,5 kg y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la mesa es 0,22. Suponer también que la bala no induce rotación sobre el bloque.

**83** ●● Una bola de 0,425 kg de masa y 1,3 m/s de velocidad rueda por una mesa hasta que entra en una caja vacía de 0,327 kg. La caja con la bola dentro recorre por la mesa una distancia de 0,520 m. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético de la mesa?

**84** ●● SSM Tarzán está frente a una estampida de elefantes cuando Jane le rescata colgada de una liana. Si la liana tiene una longitud de 25 m, Jane ha iniciado su salto cuando ésta estaba en posición horizontal, y si la masa de Jane es de 54 kg y la de Tarzán de 82 kg, ¿hasta qué altura por encima del suelo podrá subir la pareja?

### Explosiones y desintegraciones radiactivas

**85** ●● **ÍCONO** El isótopo del berilio  ${}^4\text{Be}$  es inestable y se desintegra en dos partículas  $\alpha$  (núcleos de helio de masa  $m = 6,68 \times 10^{-27}$  kg), liberándose una energía de  $1,5 \times 10^{-14}$  J. Determinar las velocidades de las dos partículas alfa que surgen de la desintegración de un núcleo de  ${}^4\text{Be}$  en reposo. Suponer que toda la energía aparece como energía cinética.

**86** ●● El isótopo ligero del litio  ${}^7\text{Li}$  es inestable y se rompe espontáneamente en un protón (núcleo de hidrógeno) y una partícula alfa (núcleo de helio). En este proceso se libera una energía total de  $3,15 \times 10^{-13}$  J, que aparece en forma de energía cinética de los dos productos de reacción. Determinar las velocidades del protón y de la partícula alfa que surgen de la desintegración de un núcleo de  ${}^7\text{Li}$  en reposo. (Nota: Las masas del protón y de la partícula alfa son  $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$  kg y  $m_\alpha = 4 m_p = 6,68 \times 10^{-27}$  kg.)

**87** ●●● **ÍCONO** Se lanza un proyectil de 3 kg con un ángulo de  $30^\circ$  sobre la horizontal y con una velocidad inicial de 120 m/s. En la parte superior de su trayectoria, explota en dos partes de 1 y 2 kg de masa. El fragmento de 2 kg cae al suelo directamente debajo del punto de explosión, 3,6 segundos después de que ésta se ha verificado. (a) Determinar la velocidad del fragmento de 1 kg inmediatamente después de la explosión. (b) Determinar la distancia entre el punto del disparo y el punto en el cual el fragmento de 1 kg choca contra el suelo. (c) Determinar la energía liberada en la explosión.

**88** ●●● SSM El isótopo de boro  ${}^9\text{B}$  es inestable y se desintegra en un protón y dos partículas alfa. La energía total liberada en forma de energía cinética de los productos de desintegración es  $4,4 \times 10^{-14}$  J. En uno de estos procesos, con el núcleo de  ${}^9\text{B}$  en reposo antes de la desintegración, la velocidad del protón medida experimentalmente es  $6,0 \times 10^6$  m/s. Si las dos partículas alfa tienen energías iguales, determinar el módulo y dirección de sus velocidades respecto a la del protón.

### \*Coeficiente de restitución

**89** ● El coeficiente de restitución del acero sobre acero se mide dejando caer una bola de este material sobre una placa de acero rígidamente ligada a la Tierra. Si la bola se deja caer desde una altura de 3 m y rebota hasta 2,5 m, ¿cuál es el coeficiente de restitución?

**90** ● SSM De acuerdo con las normas oficiales del juego de pelota con raqueta, una pelota aceptable para un torneo debe rebotar hasta una altura comprendida entre 173 y 183 cm cuando se deja caer libremente desde una altura de 254 cm a temperatura ambiente. ¿Cuál es el intervalo aceptable de valores del coeficiente de restitución para el sistema pelota-suelo?

**91** ● **ÍCONO** Una pelota rebota hasta el 80 por ciento de su altura original. (a) ¿Qué fracción de su energía mecánica se pierde en cada rebote? (b) ¿Cuál es el coeficiente de restitución del sistema pelota-suelo?

**92** ●● **ÍCONO** Un bloque de 2 kg se mueve con una velocidad de 6 m/s y choca frontalmente con un bloque de 4 kg inicialmente en reposo. Después del choque, el bloque de 2 kg retrocede con velocidad de 1 m/s. (a) Calcular la velocidad del bloque de 4 kg después del choque. (b) Calcular la energía perdida en el choque. (c) ¿Cuál es el coeficiente de restitución para este choque?

**93** ●● Un bloque de 2 kg que se mueve hacia la derecha con velocidad de 5 m/s choca con un bloque de 3 kg que se mueve en la misma dirección a 2 m/s, como indica la figura 8.60. Después del choque, el bloque de 3 kg se mueve a 4,2 m/s. Determinar (a) la velocidad del bloque de 2 kg después del choque y (b) el coeficiente de restitución de la colisión.



Figura 8.60 Problema 93

### \*Colisiones en tres dimensiones

**94** ●● SSM En la sección 8.6 se probó, mediante argumentos geométricos, que cuando una partícula choca elásticamente con otra de igual masa que inicialmente está en reposo, las dos se separan formando un ángulo recto. En este problema examinamos otra forma de demostrar este resultado que ilustra la potencia de la notación vectorial. (a) Si  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ , demostrar que  $A^2 = B^2 + C^2 + 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ . (b) Sea  $\mathbf{P}$  el momento inicial de la primera partícula y sean  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  los momentos de las partículas tras la colisión. Escribiendo la ecuación para la conservación del momento, realizando el producto escalar de cada término por él mismo, y comparando con la ecuación para la conservación de la energía, demostrar que  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$ .

**95** ● En un juego de billar, la bola golpeada por el taco, con una velocidad inicial de 5 m/s, realiza un choque elástico con la bola ocho que está inicialmente en reposo. Después del choque, la bola ocho se mueve formando un ángulo de  $30^\circ$  con la bola golpeada. (a) Determinar la dirección del movimiento de esta última después de la colisión. (b) Calcular la velocidad de cada bola. Suponer que las bolas tienen igual masa.

**96** ●● Un objeto A de masa  $m$  choca con una velocidad  $v_0\mathbf{i}$  contra un objeto B de masa  $2m$  con velocidad  $\frac{1}{2}v_0\mathbf{j}$ . Después de la colisión, el objeto B posee una velocidad  $\frac{1}{4}v_0\mathbf{i}$ . (a) Determinar la velocidad del objeto A después de la colisión. (b) ¿Es esta una colisión elástica? Si no lo es, expresar la variación de energía cinética en función de  $m$  y  $v_0$ .

**97** ●● SSM **ÍCONO** Un disco de masa 0,5 kg se aproxima a otro semejante que se encuentra estacionario sobre hielo sin rozamiento. La velocidad inicial del disco móvil es de 2 m/s. Después del choque, el primer disco sale con velocidad  $v_1$  formando un ángulo de  $30^\circ$  con la línea original de movimiento; el segundo disco sale con velocidad  $v_2$  a  $60^\circ$ , como indica la figura 8.61. (a) Calcular  $v_1$  y  $v_2$ . (b) ¿Fue elástica la colisión?

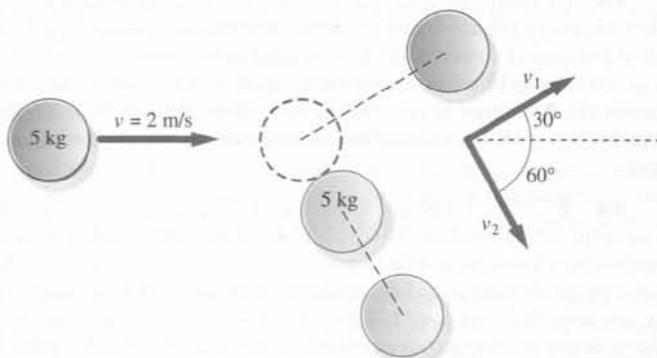


Figura 8.61 Problema 97

98 ●● La figura 8.62 muestra el resultado de un choque entre dos objetos de distinta masa. (a) Calcular la velocidad  $v_2$  de la masa mayor después del choque y el ángulo  $\theta_2$ . (b) Demostrar que este choque es elástico.

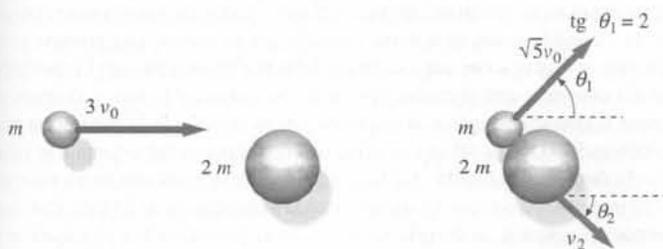


Figura 8.62 Problema 98

99 ●● SSM **¡OLVÉ!** Una pelota que se desplaza con una velocidad de 10 m/s lleva a cabo un choque elástico no frontal con otra pelota de igual masa inicialmente en reposo. La pelota incidente es desviada  $30^\circ$  de su dirección original de movimiento. Calcular la velocidad de cada pelota después del choque.

100 ●● Una partícula tiene inicialmente una velocidad  $v_0$ . Choca contra una segunda partícula de igual masa en reposo y se desvía un ángulo  $\phi$ . Su velocidad después del choque es  $v$ . La segunda partícula retrocede, de tal forma que su velocidad forma un ángulo  $\theta$  con la dirección inicial de la primera partícula. (a) Demostrar que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v \operatorname{sen} \phi}{(v_0 - v \cos \phi)}$$

(b) Demostrar que si la colisión es elástica,  $v = v_0 \cos \phi$ .

**Sistema de referencia centro de masas**

101 ●● Una partícula de momento lineal  $p_1$  en una dimensión verifica un choque elástico con una segunda partícula de momento lineal  $p_2 = -p_1$  en el sistema de referencia del centro de masas. Después del choque su momento lineal es  $p'_1$ . Expresar la energía total y la final en función de  $m_1$ ,  $m_2$  y  $p_1$  y demostrar que  $p'_1 = \pm p_1$ . Si  $p'_1 = -p_1$ , la partícula invierte su sentido en la colisión y sale con el mismo módulo de velocidad que tenía inicialmente. ¿Cuál es el significado del signo más en la solución?

102 ●● SSM **¡OLVÉ!** Un bloque de 3 kg se mueve en la dirección negativa de  $x$  a 5 m/s y un bloque de 1 kg se mueve en la dirección positiva a 3 m/s. (a) Determinar la velocidad  $v_{cm}$  del centro de masas. (b) Restar  $v_{cm}$  de la velocidad de cada bloque para determinar la velocidad de éstos en el sistema del centro de masas. (c) Después de realizar una colisión elástica, la velocidad de cada bloque se invierte en este sistema. Determinar la velocidad de cada bloque después de una colisión elástica. (d) Transformar de nuevo al sistema original sumando  $v_{cm}$  a la velocidad de cada bloque. (e) Comprobar el resultado determinando las energías cinéticas inicial y final de los bloques en el sistema original.

103 ●● Repetir el problema 102 con un segundo bloque de masa 5 kg que se mueve hacia la derecha a 3 m/s.

**\*Sistemas de masa variable: la propulsión de los cohetes**

104 ●● **¡OLVÉ!** Un cohete quema combustible a un ritmo de 200 kg/s y lo expulsa con una velocidad relativa de 6 km/s. Calcular el empuje del cohete.

105 ●● Un cohete tiene una masa inicial de 30 000 kg, de la cual un 80% es combustible. Quema combustible a razón de 200 kg/s y expulsa los gases de combustión con una velocidad relativa de 1,8 km/s. Determinar (a) la fuerza de empuje del cohete, (b) el tiempo transcurrido hasta quemar todo el combustible y (c) su

velocidad final, suponiendo que se mueve verticalmente hacia arriba en las proximidades de la superficie de la Tierra, donde el campo gravitatorio  $g$  es constante.

106 ●● SSM La *impulso específico* del combustible de un cohete se define como  $I_{es} = F_e / (Rg)$ , donde  $F_e$  es el empuje producido por el combustible,  $g$  el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y  $R$  la tasa a la que se quema el combustible  $T$  que depende de las características de éste. (a) Demostrar que el impulso específico tiene dimensiones de tiempo. (b) Demostrar que  $u_g = gI_{es}$ , donde  $u_g$  es la velocidad de salida de los gases. (c) ¿Cuál es impulso específico (expresado en segundos) del combustible usado en el cohete Saturno V del ejemplo 8.21?

107 ●●● SSM La *relación inicial*  $\tau_0$  de un cohete es  $\tau_0 = F_e / (m_0g)$ , donde  $F_e$  es el empuje del cohete y  $m_0$  es la masa inicial del cohete, junto con el combustible. (a) En un cohete lanzado desde la superficie terrestre, demostrar que  $\tau_0 = 1 + (a_0/g)$ , donde  $a_0$  es la aceleración inicial del cohete. En los vuelos tripulados  $\tau_0$  no puede ser mayor de 4, atendiendo al confort y a la seguridad de los astronautas. (Los astronautas sentirán durante el ascenso del cohete que su peso es igual a  $\tau_0$  veces su peso normal.) (b) Demostrar que la velocidad final del cohete lanzado desde la superficie de la Tierra, en función de  $\tau_0$  y de  $I_{es}$  (véase el problema 106) se escribe como

$$v_f = gI_{es} \left[ \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right) - \frac{1}{\tau_0} \left( 1 - \frac{m_f}{m_0} \right) \right]$$

en donde  $m_f$  es la masa del cohete (no se incluye el combustible utilizado). (c) Usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, representar gráficamente  $v_f$  en función del cociente de masas  $m_0/m_f$  si  $I_{es} = 250$  s y  $\tau_0 = 2$  para valores del cociente de masas desde 2 hasta 10. (Nótese que el cociente de masas no puede ser inferior a 1.) (d) Para colocar un satélite en órbita se necesita una velocidad final  $v_f = 7$  km/s. Calcular el cociente de masas necesario para un cohete de una única fase, usando los valores del impulso específico y del empuje dados en el apartado (b). Por razones de ingeniería, es difícil construir un cohete con un cociente de masas mayor de 10. ¿Se puede justificar por qué se utilizan cohetes de varias fases para poner satélites en órbita alrededor de la Tierra?

108 ●● La altura que puede alcanzar un prototipo de cohete lanzado desde la Tierra se estima suponiendo que el tiempo durante el cual se quema el combustible es pequeño comparado con el tiempo total de vuelo, por lo que durante la mayor parte del vuelo el cohete se mueve en condiciones de caída libre. (Esta estimación en los cálculos del tiempo y del desplazamiento desprecia el tiempo durante el cual se quema combustible.) Para un prototipo de cohete con  $I_{es} = 100$  s,  $m_0/m_f = 1,2$  y  $\tau_0 = 5$  (estos parámetros se definen en los problemas 106 y 107) estimar (a) la altura que puede alcanzar el cohete y (b) el tiempo total de vuelo. (c) Justificar la suposición según la cual el tiempo de vuelo es mucho mayor que el tiempo durante el cual se quema combustible comparando el tiempo de vuelo del apartado (b) con el tiempo que tarda en gastarse el combustible.

**Problemas generales**

109 ● Un vagón de tren de juguete que tiene masa 250 g y se mueve a razón de 0,50 m/s, se acopla a otro de masa 400 g que está inicialmente en reposo. ¿Cuál es la velocidad de ambos vagones después de acoplados? Determinar la energía cinética inicial y final.

110 ● (a) Calcular la energía cinética total de los dos vagones del problema 109 antes de su acoplamiento. (b) Determinar las velocidades iniciales de los dos vagones respecto al centro de masas del sistema y utilizar los resultados obtenidos para calcular la energía cinética inicial del sistema respecto al centro de masas. (c) Determinar la energía cinética del centro de masas. (d) Comparar las respuestas de los apartados (b) y (c) con las del apartado (a).

111 ● SSM Un pez de 4 kg nada hacia la derecha con una velocidad de 1,5 m/s, cuando se traga un pez de 1,2 kg que nada hacia él a 3 m/s. Despreciando la resistencia del agua, ¿cuál es la velocidad del pez grande inmediatamente después de esta engullida?

**112** ● Un bloque de 3 kg se mueve a 6 m/s hacia la derecha, mientras un bloque de 6 kg se mueve a 3 m/s hacia la derecha. Determinar (a) la energía cinética total del sistema de los dos bloques, (b) la velocidad del centro de masas, (c) la energía del centro de masas y (d) la energía cinética relativa al centro de masas.

**113** ● Un coche de 1500 kg que viaja hacia el norte a 70 km/h choca en un cruce con otro coche de 2000 kg que viaja hacia el oeste a 55 km/h. Después del choque ambos coches permanecen unidos. (a) ¿Cuál es el momento lineal total del sistema antes del choque? (b) Calcular el módulo, dirección y sentido de la velocidad del conjunto de chatarra después del choque.

**114** ●● SSM Una mujer de 60 kg se encuentra de pie en la parte trasera de una balsa de 6 m de longitud y 120 kg que flota en reposo en aguas tranquilas y sin rozamiento. La balsa se encuentra a 0,5 m de un embarcadero fijo, como en la figura 8.63. (a) La mujer camina hasta la proa de la balsa y se detiene. ¿A qué distancia se encuentra ahora la balsa del embarcadero? (b) Mientras la mujer camina, mantiene una velocidad constante de 3 m/s relativa a la balsa. Determinar la energía cinética total del sistema (mujer más balsa) y comparar con la energía cinética en el caso de que la mujer caminará a 3 m/s sobre una balsa atada al embarcadero. (c) ¿De dónde procede esta energía y a dónde va cuando la mujer se detiene en la proa de la balsa? (d) En tierra firme, la mujer puede lanzar una bola de plomo a 6 m. Situada en la parte trasera de la balsa, apunta hacia delante y lanza la bola de modo que justo cuando sale de su mano, posee la misma velocidad respecto a ella que cuando la bola fue lanzada en tierra firme. ¿Dónde caerá la bola?

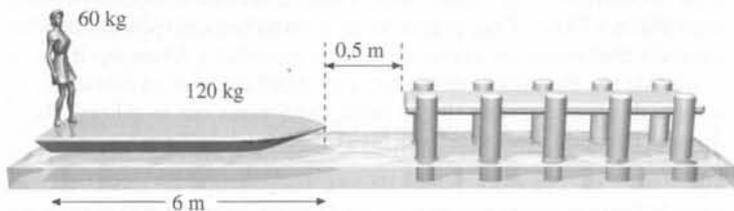


Figura 8.63 Problema 114

**115** ●● Una bola de acero de 1 kg y una cuerda de 2 m de masa despreciable forman un péndulo simple que puede oscilar sin rozamiento alrededor del punto  $O$ , como muestra la figura 8.64. Este péndulo se deja libre desde el reposo en una posición horizontal, y cuando la bola está en su punto más bajo choca contra un bloque de 1 kg que descansa sobre una plataforma. Suponiendo que el choque es perfectamente elástico y que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la plataforma es 0,1, determinar (a) la velocidad del bloque justo después del impulso, (b) la distancia recorrida por el bloque antes de detenerse.

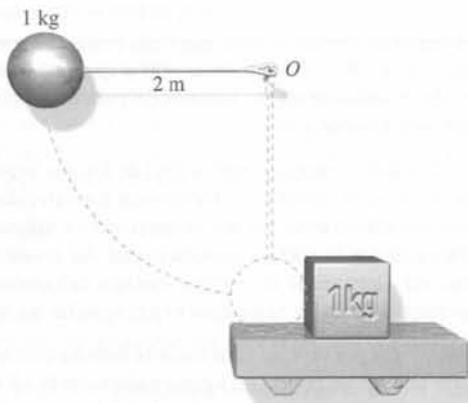


Figura 8.64 Problema 115

**116** ●● SSM Durante la I Guerra Mundial, una de las armas de guerra más temibles eran los grandes cañones montados sobre vagones de ferrocarril. La figura 8.65 muestra este tipo de cañón, montado de modo que podía disparar una granada bajo un ángulo de  $30^\circ$ . Con el vagón inicialmente en reposo, el cañón dispara un proyectil de 200 kg a 125 m/s. (Todos los valores son relativos a la vía.) Consideremos un sistema formado por un cañón, una granada y un vagón que se mueve sobre una vía sin pérdidas por rozamiento. (a) El momento total del sistema, ¿será el mismo (es decir, "se conserva") antes y después de disparar la granada? Explicar la respuesta. (b) Si la masa de la plataforma más el cañón es 5000 kg, ¿cuál será la velocidad de retroceso del sistema a lo largo de la vía después del disparo? (c) La granada se eleva hasta una altura máxima de 180 m en su trayectoria. En dicho punto la velocidad es de 80 m/s. Con esta información, calcular la energía térmica (calor) producida por el rozamiento del aire sobre el proyectil desde su lanzamiento hasta la altura máxima.

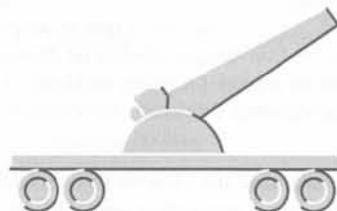


Figura 8.65 Problema 116

**117** ●● Una bala de 15 g que viaja a 500 m/s choca contra un bloque de madera de 0,8 kg, equilibrado sobre el borde de una mesa que se encuentra a 0,8 m por encima del suelo (figura 8.66). Si la bala se incrusta totalmente en el bloque, determinar la distancia  $D$  a la cual choca el bloque contra el suelo.

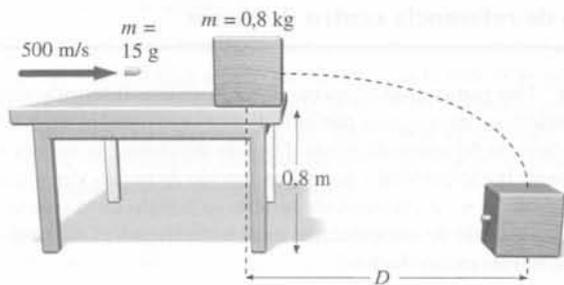


Figura 8.66 Problema 117

**118** ●● Dos partículas de masa  $m$  y  $4m$  se mueven en el vacío en ángulo recto como indica la figura 8.67. Una fuerza  $F$  actúa sobre ambas partículas durante un tiempo  $T$ . Como resultado, la velocidad de la partícula  $m$  es  $4v$  en su dirección original. Determinar la nueva velocidad  $v'$  de la partícula de masa  $4m$ .

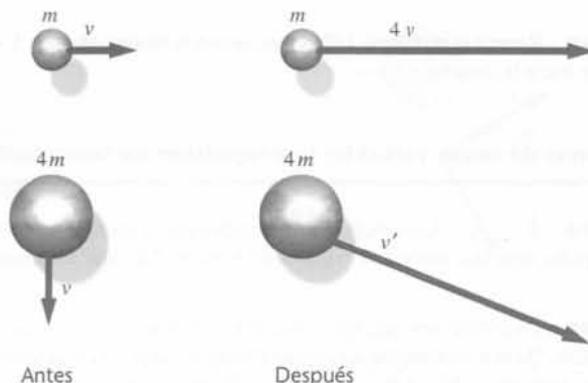


Figura 8.67 Problema 118

**119 ●●** Un experimento popular y un tanto peligroso consiste en aguantar una pelota de béisbol unos pocos centímetros por encima de una pelota de baloncesto, que a su vez sostenemos aproximadamente un metro por encima del suelo. Ambas pelotas se sueltan a la vez y chocan después que la pelota de baloncesto haya rebotado en el suelo. La pelota de béisbol sale disparada contra el techo, mientras que la de baloncesto llega hasta media altura. (Una vez el autor del problema rompió una lámpara haciendo esto.) (a) Suponiendo que la colisión de la pelota de baloncesto con el suelo es elástica, ¿cuál es la relación entre las velocidades de las dos pelotas justo antes de que choquen? (b) Suponiendo que la colisión entre las dos pelotas sea elástica, use el resultado del apartado (a) y la conservación del momento y de la energía para demostrar que si la pelota de baloncesto pesa 3 veces más que la de béisbol, la velocidad final de la pelota de baloncesto será cero. (Esta es aproximadamente la verdadera relación entre las masas, que hace que el experimento sea tan especial.) (c) Si el módulo de la velocidad de la pelota que está arriba es  $v$  antes de la colisión, ¿cuál es el módulo de la velocidad inmediatamente después del choque?

**120 ●●●** (a) En el problema 119, si mantenemos una tercera pelota por encima de las otras dos y queremos que la pelota de baloncesto y la de béisbol se paren en medio de la habitación donde realizamos el experimento. ¿Cuál debe ser el cociente de masas entre la bola de arriba y la bola de béisbol inmediatamente después de la colisión? (b) Si el módulo de la velocidad de la pelota que está arriba es  $v$  antes de la colisión, ¿cuál es el módulo de la velocidad inmediatamente después del choque?

**121 ●● SSM** En el llamado “efecto de honda”, la transferencia de energía en una colisión elástica se utiliza para incrementar la energía de una sonda espacial, de tal modo que ésta pueda escapar del sistema solar. Todas las velocidades se dan respecto a un sistema de referencia inercial en cuyo centro el Sol permanece en reposo. La figura 8.68 muestra una sonda espacial moviéndose a 10,4 km/s hacia Saturno, el cual se mueve a 9,6 km/s hacia la sonda. Debido a la atracción gravitatoria entre Saturno y la sonda, ésta se mueve alrededor de Saturno y escapa en dirección opuesta con velocidad  $v_f$ . (a) Suponiendo que esta colisión es elástica y unidimensional con la masa de Saturno mucho mayor que la de la sonda, determinar  $v_f$ . (b) ¿En qué factor se incrementa la energía cinética de la sonda? (c) ¿De dónde procede esta energía?

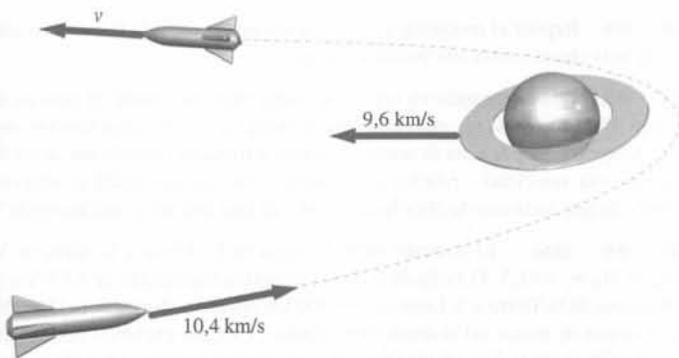


Figura 8.68 Problema 121

**122 ●● SSM** Imaginemos que una linterna de 1,5 kg flota en el espacio interestelar, lejos de cualquier planeta o estrella. Tiene baterías que están cargadas con una energía total  $E = 1,5$  kJ. Cuando se enciende, pierde energía en forma de luz y, consecuentemente, pierde una pequeña masa (según  $E = mc^2$ ). Dado que la masa perdida se mueve a la velocidad de la luz, la linterna empieza a retroceder. (a) Si la linterna pierde una energía  $\Delta E$ , argumentar por qué la pérdida de momento de ésta es  $P = \Delta E/c$ . (b) Si la masa de la linterna es de 1,5 kg y si ésta está conectada hasta que pierde toda su energía, ¿cuál es la velocidad final que adquiere? Supóngase que la linterna tiene una eficiencia del 100% en convertir la energía de la pila en energía radiante y que, inicialmente, está en reposo.

**123 ●** Un bloque tiene una masa de 1 kg. Si convertimos 1 g de su masa en energía de un haz de luz bien colimada que brille en una única dirección, calcular la velocidad que alcanza el resto del bloque. (En el problema 122 se analiza el momento transportado por un haz de luz.)

**124 ●●** Una pareja de jóvenes, A (masa 80 kg) y B (masa desconocida) se encuentran en un bote de remos (masa 60 kg) sobre un lago en calma. A se encuentra en el centro del bote remando y ella (B) está en la popa a 2 m del centro. A está cansado y deja de remar. Ella se ofrece a sustituirle y con el bote en reposo intercambian sus posiciones. A observa que después de cambiar de posición, el bote se ha movido 20 cm respecto a un punto fijo. ¿Cuál es la masa de B?

**125 ●● Solve** Un pequeño coche de masa 800 kg está estacionado detrás de un camión ligero de masa 1550 kg sobre un terreno horizontal. Los frenos de ambos vehículos están libres, de modo que pueden rodar con un rozamiento despreciable. Una mujer de 50 kg sentada en la parte trasera del camión ejerce una fuerza constante con sus pies sobre el coche, como muestra la figura 8.69. El coche adquiere la aceleración de  $1,2$  m/s<sup>2</sup>. (a) ¿Cuál es la aceleración del camión? (b) ¿Cuál es el módulo de la fuerza ejercida sobre el coche?

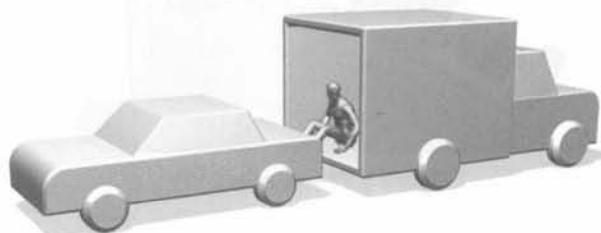


Figura 8.69 Problema 125

**126 ●●** Un bloque de 13 kg se encuentra en reposo sobre un suelo horizontal. Se lanza sobre él un pegote de barro de 400 g de modo que su trayectoria sea horizontal, golpee el bloque, y se quede adherido a él. El bloque y el pegote se deslizan 15 cm por el suelo. Si el coeficiente de rozamiento es 0,4, ¿cuál es la velocidad original del pegote?

**127 ●● SSM** Un conductor descuidado choca por detrás contra un coche que está parado en una señal de tráfico. Justo antes del impacto, el conductor pisa el freno bloqueando las ruedas. El conductor del coche golpeado tiene también su pie apretando con fuerza el pedal del freno, bloqueando el sistema de frenado. La masa del coche golpeado es de 900 kg y la del vehículo culpable es de 1200 kg. En la colisión, los parachoques de los dos coches se enganchan entre sí. La policía determina a partir de las marcas del deslizamiento sobre el suelo que después del choque, los dos vehículos se movieron juntos 0,76 m. Las pruebas revelan que el coeficiente de rozamiento deslizante entre los neumáticos y el pavimento es 0,92. El conductor del coche que provoca la colisión afirma que él se movía a una velocidad inferior a 15 km/h cuando se aproximaba al cruce. ¿Está diciendo la verdad?

**128 ●●** Un péndulo está formado por una lenteja de 0,4 kg atada a una cuerda de longitud 1,6 m. Un bloque de masa  $m$  descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento (figura 8.70). El péndulo se suelta desde el reposo bajo un ángulo de  $53^\circ$  con la vertical y la lenteja choca elásticamente contra el bloque. Después de la colisión, el ángulo máximo del péndulo con la vertical es  $5,73^\circ$ . Determinar la masa  $m$ .

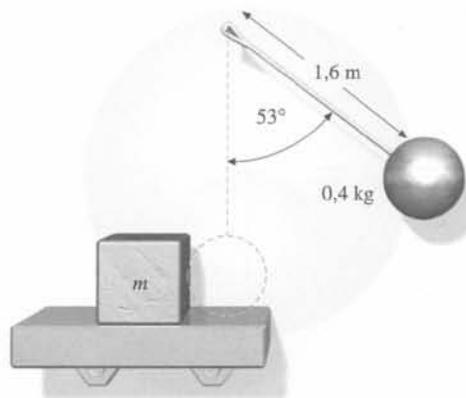


Figura 8.70 Problema 128

**129** ●● Inicialmente, la masa  $m = 1,0$  kg y la masa  $M$  están ambas en reposo sobre un plano inclinado sin rozamiento (figura 8.71). La masa  $M$  se apoya en un muelle de constante  $11\,000$  N/m. La distancia a lo largo del plano entre  $m$  y  $M$  es de  $4,0$  m. La masa  $m$  se deja libre, choca elásticamente con la masa  $M$  y rebota a una distancia de  $2,56$  m sobre el plano inclinado. La masa  $M$  se detiene momentáneamente a  $4,0$  cm de su posición inicial. Determinar la masa  $M$ .

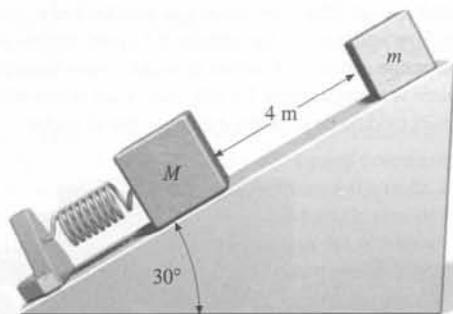


Figura 8.71 Problema 129

**130** ●● SSM Una placa circular de radio  $r$  tiene un orificio circular cortado en ella de una radio  $r/2$  (figura 8.72). Hallar el centro de masas de la placa. Sugerencia: El orificio puede representarse por dos discos superpuestos; uno de masa  $m$  y el otro de masa  $-m$ .

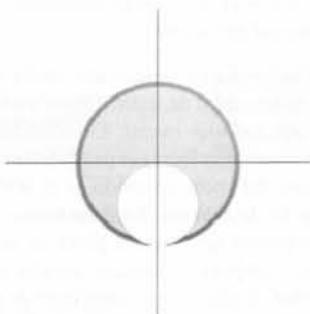


Figura 8.72 Problema 130

**131** ●● Utilizando la sugerencia dada en el problema 130, hallar el centro de masas de una esfera maciza de radio  $r$  que tiene una cavidad esférica de radio  $r/2$ , como se ve en la figura 8.73.

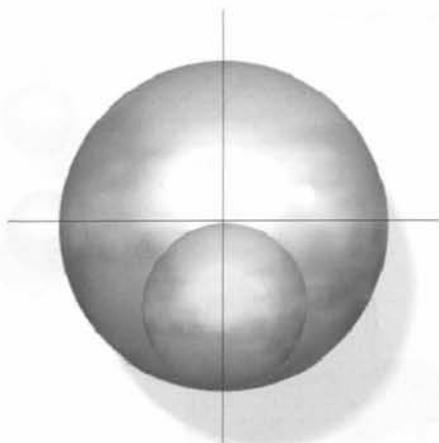


Figura 8.73 Problema 131

**132** ●● SSM Un neutrón de masa  $m$  choca elásticamente y frontalmente con un núcleo estacionario de masa  $M$ . (a) Demostrar que la energía del núcleo después de la colisión es  $E_{c,\text{núcleo}} = [4mM/(m+M)^2] E_{c,n}$ , siendo  $E_{c,n}$  igual a la energía cinética inicial del neutrón. (b) Demostrar que la fracción de energía perdida por el neutrón en este choque es

$$\frac{-\Delta E_{c,n}}{E_{c,n}} = \frac{4mM}{(m+M)^2} = \frac{4(m/M)}{(1+m/M)^2}$$

**133** ●● La masa de un núcleo de carbono es aproximadamente 12 veces la masa de un neutrón. (a) Utilizar los resultados del problema 132 para demostrar que después de  $N$  choques frontales de un neutrón con núcleos de carbono en reposo, la energía del neutrón es aproximadamente  $0,716^N E_0$ , siendo  $E_0$  la energía original. Los neutrones emitidos en la fisión de un núcleo de uranio poseen una energía de unos  $2$  MeV. Para que uno de estos neutrones origine la fisión de otro núcleo de uranio en un reactor, su energía debe reducirse aproximadamente a  $0,02$  eV. (b) ¿Cuántas colisiones frontales son necesarias para reducir la energía de un neutrón de  $2$  MeV a  $0,02$  eV, suponiendo que son choques elásticos con núcleos de carbono estacionarios?

**134** ●● Por término medio, un neutrón pierde el 63% de su energía en un choque elástico con un átomo de hidrógeno y un 11% de su energía en un choque idéntico con un átomo de carbono. Estos valores son inferiores a los utilizados en problemas anteriores, debido a que la mayor parte de los choques no son frontales. Calcular, por término medio, el número de choques necesario para reducir la energía de un neutrón de  $2$  MeV a  $0,02$  MeV (un resultado deseable por razones explicadas en el problema 129) si el neutrón choca con (a) átomos de hidrógeno y (b) átomos de carbono.

**135** ●● Una cuerda de longitud  $L$  y masa  $M$  está arrollada sobre una mesa. Partiendo de  $t = 0$ , un extremo de la cuerda se levanta de la mesa con una fuerza  $F$  tal que se mueve con una velocidad constante  $v$ . (a) Determinar la altura del centro de masas de la cuerda en función del tiempo. (b) Derivar dos veces el resultado de (a) para calcular la aceleración del centro de masas. (c) Suponiendo que la fuerza ejercida por la mesa es igual al peso de la cuerda que reposa en cada instante sobre ella, determinar la fuerza  $F$  ejercida sobre el extremo de la cuerda.

**136** ●● Repetir el problema 47 suponiendo que la cápsula tiene una masa  $m_c$  y la bola choca contra ella inelásticamente.

**137** ●● Dos astronautas en reposo se encuentran uno frente al otro en el espacio. Uno, con masa  $m_1$ , echa una bola de masa  $m_b$  al otro, cuya masa es  $m_2$ . Este recoge la bola y la echa de nuevo al primer astronauta. Si cada uno lanza la bola con una velocidad  $v$  relativa a sí mismo, ¿con qué velocidad se mueven después de que cada uno de ellos ha realizado un lanzamiento y una recogida?

**138** ●● SSM El cociente entre la masa de la Tierra y la masa de la Luna es  $M_T/m_L = 81,3$ . El radio de la Tierra es aproximadamente de  $6370$  km y la distancia de la Tierra a la Luna de  $384\,000$  km aproximadamente. (a) Localizar el centro de masas del sistema Tierra-Luna. ¿Está por encima o por debajo de la superficie de la Tierra? (b) ¿Qué fuerzas externas actúan sobre el sistema Tierra-Luna? (c) ¿En qué dirección está la aceleración del centro de masas de este sistema? (d) Admitir que el centro de masas de este sistema se mueve en una órbita circular alrededor del Sol. ¿Qué distancia debe moverse el centro de la Tierra en dirección radial (hacia el Sol o alejándose de él) durante los 14 días que transcurren desde que la Luna está más alejada del Sol (Luna llena) hasta que está más próxima a dicho astro (Luna nueva)?

**139** ●● **¡SOLVE!** Un estudiante de pie sobre una superficie helada apunta con una manguera horizontalmente, dispuesto a lanzar agua sobre el patio de su colegio. El agua sale de la manguera a  $2,4$  kg/s y velocidad de  $30$  m/s. Si su masa es  $75$  kg. ¿cuál es la aceleración de retroceso del estudiante? (Despreciar el rozamiento y la masa de la manguera.)

**140** ●●● SSM Un chorro de 100 bolitas de vidrio sale de un tubo horizontal cada segundo y choca contra un platillo de una balanza como se ve en la figura 8.74. En su marcha caen a lo largo de una distancia de  $0,5$  m hasta la balanza y rebotan hasta la misma altura. Cada bolita tiene una masa de  $0,5$  g. ¿Qué valor debe tener la masa  $m$  colocada en el otro platillo de la balanza para hacer que la aguja permanezca en cero?

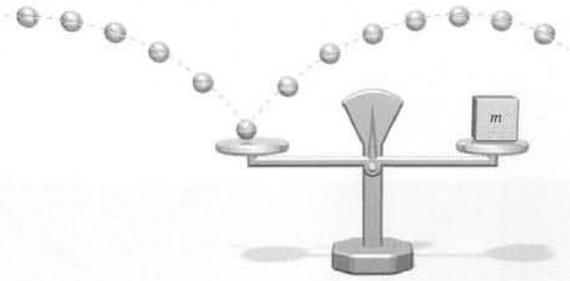


Figura 8.74 Problema 140

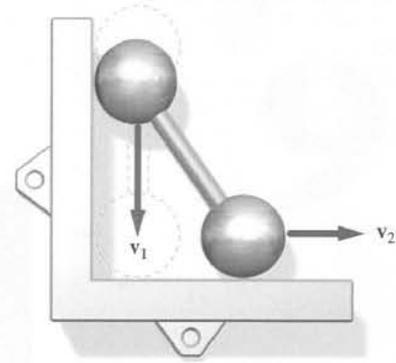
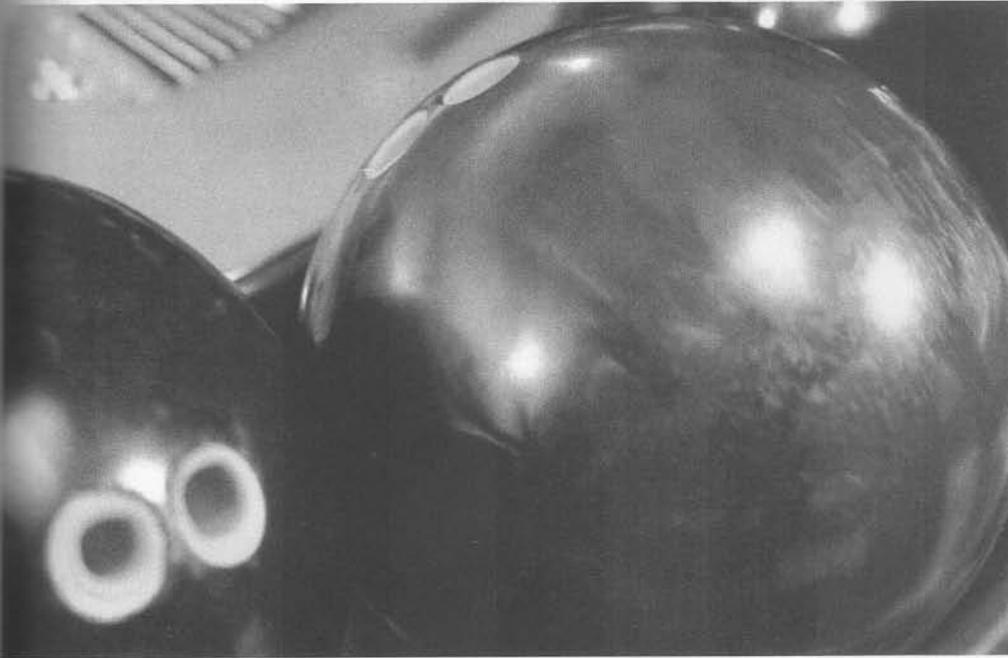


Figura 8.75 Problema 141

**141 ●●●** Una pesa de gimnasia formada por dos bolas de masa  $m$  conectadas por una barra de longitud  $L$  y masa despreciable se apoya en un suelo sin rozamiento contra una pared sin rozamiento hasta que comienza a deslizar por ésta como muestra la figura 8.75. Determinar la velocidad  $v$  de la bola que está junto al suelo en el momento que se hace igual a la velocidad de la otra bola.



Esta bola del juego de bolos se mueve en el canal de retorno de las bolas, rodando sin resbalar. ¿Cómo diseñaría un canal de retorno de las bolas para parar la rotación de las bolas? (Véase el ejemplo 9.13.)

*E*n los capítulos 4 y 5 exploramos las leyes de Newton. En los capítulos 6 y 7 examinamos la conservación de la energía y en el capítulo 8 estudiamos la conservación del momento lineal. En esos capítulos hemos descubierto herramientas (leyes y teoremas) que son útiles para analizar nuevas situaciones y resolver problemas nuevos. Ahora utilizaremos estas herramientas a medida que exploremos el movimiento de rotación.

El movimiento de rotación está presente en todas partes. La Tierra gira alrededor de su eje. Las ruedas, los engranajes, las hélices, los motores, el eje de transmisión de un coche, los discos compactos, los patinadores sobre hielo cuando realizan sus piruetas, todo gira.

➤ En este capítulo consideraremos la rotación alrededor de un eje fijo en el espacio como en el caso de una peonza o un carrusel, o alrededor de un eje que se mueve paralelamente a sí mismo, como en el caso de una bola que rueda sobre una superficie. Otros ejemplos más generales del movimiento de rotación se analizarán en el capítulo 10.

## 9.1 Cinemática de la rotación: velocidad angular y aceleración angular

Cada punto de un cuerpo que gira respecto de un eje fijo se mueve en un círculo cuyo centro está en el eje de rotación y cuyo radio es la distancia de este punto al eje de rotación. Cualquier línea trazada a partir de este eje que lo una con cualquier punto en rotación, barre el mismo ángulo en el mismo tiempo. Imaginemos un disco que gira alrededor de un eje fijo perpendicu-

- 9.1 Cinemática de la rotación: velocidad angular y aceleración angular
- 9.2 Energía cinética de rotación
- 9.3 Cálculo del momento de inercia
- 9.4 La segunda ley de Newton en la rotación
- 9.5 Aplicaciones de la segunda ley de Newton a la rotación
- 9.6 Objetos rodantes

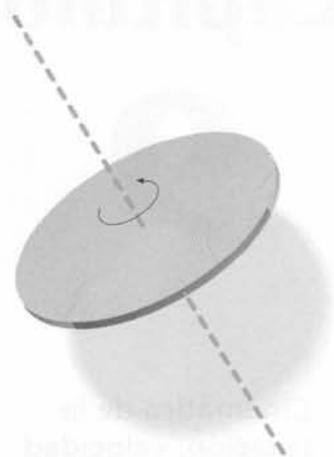


Figura 9.1

lar a su superficie y que pasa por su centro (figura 9.1). Sea  $r_i$  la distancia desde el centro del disco a la partícula  $i$  (figura 9.2), y sea  $\theta_i$  el ángulo medido en el sentido contrario al de la rotación de las agujas del reloj entre la línea radial que une la partícula con el eje de rotación y una línea de referencia fija en el espacio. Cuando el disco gira un ángulo  $d\theta$ , la partícula se mueve un arco circular de longitud  $ds_i$ , de tal manera que se cumple

$$ds_i = r_i |d\theta| \quad (9.1)$$

en donde  $\theta$  se mide en radianes. Las distancias  $ds_i$  varían de una partícula a otra, pero el ángulo  $d\theta$ , llamado **desplazamiento angular**, es el mismo para todas las partículas del disco. Para una revolución completa, la longitud del arco  $\Delta s_i$  es  $2\pi r_i$  y el desplazamiento angular  $\Delta\theta$  es

$$\Delta\theta = \frac{2\pi r_i}{r_i} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 1 \text{ rev}$$

La variación del ángulo respecto al tiempo es la misma para todas las partículas del disco y se denomina **velocidad angular**  $\omega$  del mismo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (9.2)$$

DEFINICIÓN —VELOCIDAD ANGULAR

donde  $\omega$  es la minúscula de la letra griega omega. Para rotaciones en sentido contrario a las agujas del reloj,  $\theta$  crece y  $\omega$  es positiva. Para rotaciones en sentido horario,  $\theta$  decrece y  $\omega$  es negativa. Las unidades de  $\omega$  son los radianes por segundo. (En el capítulo 10 veremos que para rotaciones en general, la velocidad angular es una magnitud vectorial que apunta a lo largo del eje de rotación.) Como el radián es una unidad adimensional, las dimensiones de la velocidad angular son las de la inversa del tiempo,  $[T]^{-1}$ . Frecuentemente la rotación se describe mediante revoluciones por minuto (rev/min o rpm). Para convertir entre sí revoluciones, radianes y grados, basta recordar que

$$1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

**Ejercicio** Un disco CD-ROM está girando a 3000 revoluciones por minuto. ¿Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo? (*Respuesta* 314 rad/s.)

La variación de la velocidad angular respecto al tiempo se denomina **aceleración angular**  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (9.3)$$

DEFINICIÓN —ACELERACIÓN ANGULAR

Las unidades de la aceleración angular son radianes por segundo por segundo ( $\text{rad/s}^2$ ). La aceleración angular es positiva si la velocidad angular  $\omega$  crece y negativa si  $\omega$  decrece.

Las tres magnitudes angulares —desplazamiento angular  $\theta$ , velocidad angular  $\omega$  y aceleración angular  $\alpha$ — son análogas a las magnitudes lineales —desplazamiento lineal  $x$ , velocidad lineal  $v$  y aceleración lineal  $a$ — que vimos al estudiar el movimiento unidimensional. Si la aceleración angular  $\alpha$  es constante, podemos integrar la ecuación 9.3 para determinar  $\omega$ :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (9.4)$$

en donde la constante de integración  $\omega_0$  es la velocidad angular inicial. Esta es la ecuación análoga rotacional a  $v = v_0 + at$ . Integrando de nuevo, resulta

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (9.5)$$

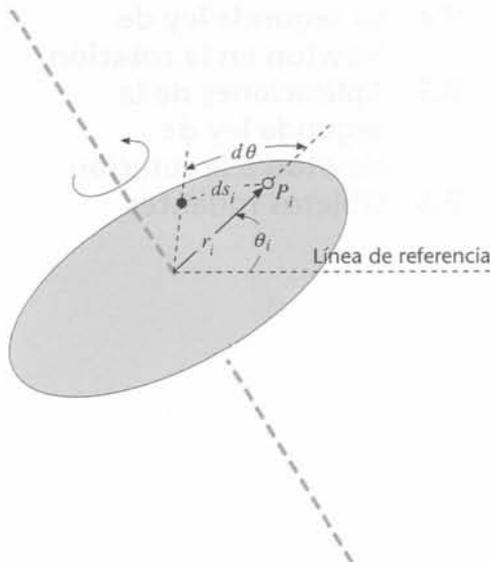


Figura 9.2





Trazas de estrellas en una foto de larga exposición del firmamento nocturno.

que es la ecuación análoga rotacional de  $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ , donde  $\theta$  reemplaza a  $x$ ,  $\omega$  a  $v$  y  $\alpha$  a  $a$ . De igual modo, eliminando  $t$  de las ecuaciones 9.4 y 9.5 se obtiene

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (9.6)$$

que es la ecuación análoga rotacional de  $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ . Las ecuaciones de rotación con aceleración constante tienen la misma forma que las de aceleración lineal constante.

### EJEMPLO 9.1 | Un reproductor de CD

Un disco compacto gira a partir del reposo a 500 rev/min en 5,5 s. (a) ¿Cuál es su aceleración angular, supuesta constante? (b) ¿Cuántas revoluciones da en 5,5 s? (c) ¿Qué distancia recorre un punto de la periferia del disco situado a 6 cm del centro durante los 5,5 s que tarda en alcanzar las 500 rev/min?

**Planteamiento del problema** El apartado (a) es análogo al problema lineal de determinar la aceleración cuando se conoce el tiempo y la velocidad final. Para expresar  $\alpha$  en  $\text{rad/s}^2$  necesitamos convertir  $\omega$  en  $\text{rad/s}$ . El apartado (b) es análogo a la determinación de la distancia recorrida cuando se conoce el tiempo y la velocidad final.

(a) 1. La aceleración angular está relacionada con las velocidades angulares inicial y final:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t$$

2. Despejar  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{500 \text{ rev/min}}{5,5 \text{ s}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \boxed{9,52 \text{ rad/s}^2}$$

(b) 1. El desplazamiento angular está relacionado con el tiempo por la ecuación 9.5:

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2}(9,52 \text{ rad/s}^2)(5,5 \text{ s})^2 = 144 \text{ rad} \end{aligned}$$

2. Convertir radianes en revoluciones:

$$\theta - \theta_0 = 144 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} = \boxed{22,9 \text{ rev}}$$

(c) La distancia recorrida  $\Delta s$  es igual al producto de  $r$  por el desplazamiento angular:

$$\Delta s = r \Delta\theta = (6 \text{ cm})(144 \text{ rad}) = \boxed{8,64 \text{ m}}$$

**Comprobar el resultado** La velocidad angular media en revoluciones por minuto es 250 rev/min. En 5,5 s, el disco compacto gira  $(250 \text{ rev}/60 \text{ s})(5,5) = 22,9 \text{ rev}$ .

**Observación** Un disco compacto es barrido por un láser que comienza en el radio más interno, de unos 2,4 cm, y se mueve hacia afuera hasta alcanzar el borde a 6,0 cm. A medida que el láser se mueve de este modo, la velocidad angular del disco disminuye de 500 rev/min a 200 rev/min, con lo cual la velocidad lineal (tangencial) del disco en el punto donde incide el rayo láser permanece constante.

**Ejercicio** (a) Convertir 500 rev/min a rad/s. (b) Comprobar el resultado del apartado (b) del ejemplo utilizando la expresión  $\omega^2 = \alpha_f^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ . (Respuesta 500 rev/min = 52,4 rad/s.)

La velocidad lineal de una partícula sobre el disco es tangente a la trayectoria circular de la misma y su módulo es  $ds/dt$ . A partir de las ecuaciones 9.1 y 9.2 vemos que esta “velocidad tangencial” de la partícula está relacionada con la velocidad angular del disco por

$$v_t = \frac{r_i d\theta}{dt}$$

de modo que

$$v_t = r_i \omega \quad (9.7)$$

De igual modo, la aceleración tangencial de una partícula sobre el disco es

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = r_i \frac{d\omega}{dt}$$

de modo que

$$a_t = r_i \alpha \quad (9.8)$$

Cada partícula del disco tiene también una aceleración centrípeta que está dirigida hacia el interior a lo largo de la línea radial, y cuyo módulo es

$$a_c = \frac{v_t^2}{r_i} = \frac{(r_i \omega)^2}{r_i}$$

de modo que

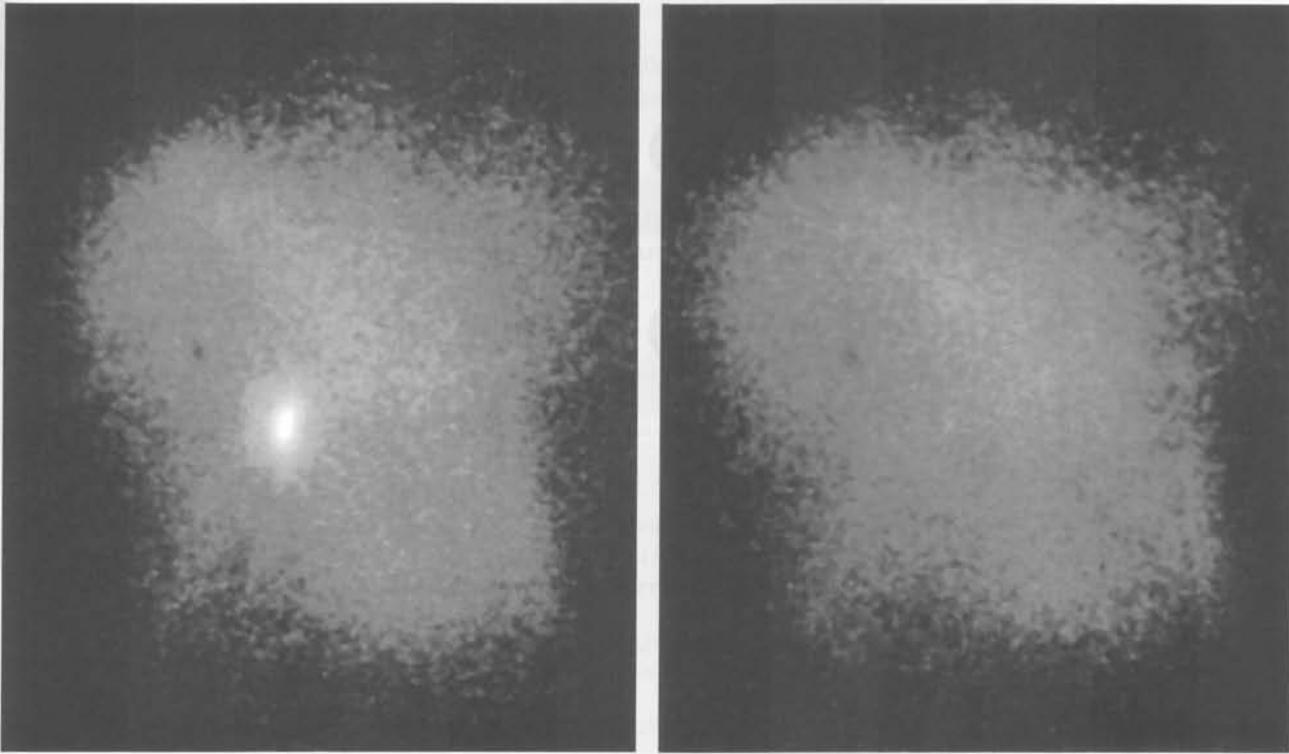
$$a_c = r_i \omega^2 \quad (9.9)$$

**Ejercicio** Un punto del borde de un disco compacto está a 6,0 cm del eje de rotación. Determinar la velocidad tangencial  $v_t$ , la aceleración tangencial  $a_t$  y la aceleración centrípeta  $a_c$  de dicho punto cuando el disco gira a la velocidad angular constante de 300 rev/min. (Respuesta  $v_t = 188 \text{ cm/s}$ ,  $a_t = 0$ ,  $a_c = 5,92 \times 10^3 \text{ cm/s}^2$ .)

## 9.2 Energía cinética de rotación

La energía cinética de un objeto rígido que gira respecto a un eje fijo es la suma de la energía cinética de las partículas individuales que colectivamente constituyen el objeto. Así, la energía cinética de la partícula  $i$ , de masa  $m_i$ , es

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



El pulsar del Cangrejo es una de las estrellas de neutrones que gira más rápido, aunque continuamente disminuye su velocidad de rotación. Da la impresión de encenderse (izquierda) y apagarse (derecha), de la misma forma que la luz de un faro, con la frecuencia de 30 destellos por segundo, aunque su periodo aumenta con la tasa de cambio de  $10^{-5}$  s/año. La pérdida de la energía de rotación, que equivale a la potencia emitida por 100 000 soles, se muestra en forma de la luz emitida por los electrones acelerados en el campo magnético del pulsar.

Sumando la energía cinética de todas las partículas y teniendo en cuenta que  $v_i = r_i\omega$  se obtiene

$$E_c = \sum_i \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i ( m_i r_i^2 \omega^2 ) = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

La suma del término de la derecha es el **momento de inercia**  $I$  del objeto respecto del eje de rotación

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (9.10)$$

DEFINICIÓN – MOMENTO DE INERCIA

Por lo tanto, la energía cinética resulta ser

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (9.11)$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN OBJETO EN ROTACIÓN

### EJEMPLO 9.2 | Sistema de partículas en rotación

Un objeto consiste en cuatro partículas de masa  $m$  unidas mediante varillas ligeras sin masa que forman un rectángulo de lados  $2a$  y  $2b$ , como se ve en la figura 9.3. El sistema gira alrededor de un eje situado en el plano de la figura, pasando por el centro. (a) Usando las ecuaciones 9.10 y 9.11 determinar la energía cinética de este objeto. (b) Comprobar el resultado calculando la energía cinética de cada partícula y sumándola hasta obtener la energía cinética total.

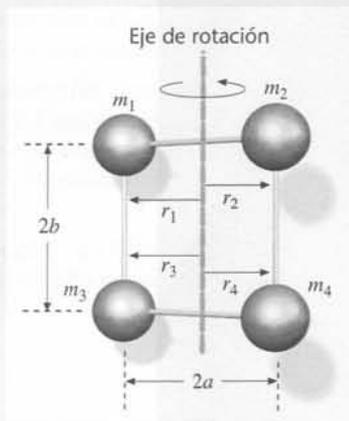


Figura 9.3

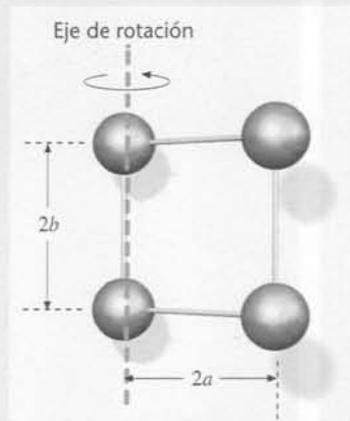


Figura 9.4

**Planteamiento del problema** Se sabe que el objeto está formado por partículas individuales, por lo tanto se usa primero la ecuación 9.10 para calcular  $I$  y, posteriormente, la ecuación 9.11 para el cálculo de  $E_c$ . En la ecuación 9.10,  $r_i$  es la distancia radial entre eje de rotación y la partícula de masa  $m_i$ .

- (a) 1. Aplicar la definición de momento de inercia a las partículas discretas (ecuación 9.10):

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$$

2. Las masas  $m_i$  y las distancias  $r_i$  son conocidas:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = a$$

3. Aplicando estos valores se obtiene el momento de inercia:

$$I = ma^2 + ma^2 + ma^2 + ma^2 = 4ma^2$$

4. Despejar la energía cinética usando la ecuación 9.11:

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 4ma^2 \omega^2 = \boxed{2ma^2 \omega^2}$$

- (b) 1. Para determinar la energía cinética de la partícula  $i$  primero tenemos que calcular su velocidad:

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

2. Las partículas se mueven en círculos de radio  $a$ . Determinar la velocidad de cada partícula:

$$v_i = r_i \omega = a \omega \quad (i = 1, \dots, 4)$$

3. Sustituir en el paso 1 del apartado (b):

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} ma^2 \omega^2$$

4. Cada partícula tiene la misma energía cinética. Para obtener la energía cinética total se suman todas las energías:

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_{i=1}^4 E_{c_i} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 \\ &= 4 \left( \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 \right) = 2ma^2 \omega^2 \end{aligned}$$

5. Se compara con el resultado del apartado (a):

Los dos cálculos dan el mismo resultado

**Observación** El momento de inercia  $I$  es independiente de la longitud  $b$ , pues ésta no está relacionada con la distancia de las masas al eje de rotación.

**Ejercicio** Determinar el momento de inercia de este sistema si la rotación se verifica alrededor de un eje paralelo al del ejemplo anterior, pero que pasa a través de dos de las partículas, como se indica en la figura 9.4. (Respuesta  $I = 8ma^2$ .)

### 9.3 Cálculo del momento de inercia

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a experimentar cambios en su movimiento de rotación respecto de un eje. Es el análogo rotacional de la masa. El momento de inercia depende de la distribución de la masa dentro del objeto respecto al eje de rotación. Cuanto más lejos está la masa del eje, mayor es el momento de inercia. Así, al contrario que la masa de un objeto, que es una propiedad del mismo objeto, su momento de inercia depende de la localización del eje de rotación.

## Sistemas de partículas discretas

El momento de inercia respecto a un eje determinado de aquellos sistemas formados por partículas discretas puede calcularse directamente mediante la ecuación 9.10.

## Sistemas continuos

Para calcular el momento de inercia en sistemas continuos, imaginemos que un objeto consiste en un continuo de elementos de masa muy pequeños. Así, la suma finita  $\sum m_i r_i^2$  de la ecuación 9.10 se transforma en la integral

$$I = \int r^2 dm \quad (9.12)$$

donde  $r$  es la distancia al eje de rotación del elemento de masa  $dm$ .

### EJEMPLO 9.3 | Momento de inercia de una barra uniforme

**Determinar el momento de inercia de una barra uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  alrededor de un eje perpendicular a la barra que pasa por uno de sus extremos. Suponer que la barra tiene un espesor despreciable.**

**Planteamiento del problema** Supongamos que la barra está orientada según el eje  $x$  con su extremo en el origen. Para calcular  $I$  alrededor del eje  $y$ , elegimos un elemento de masa  $dm$  a una distancia  $x$  del eje (figura 9.5). Como la masa total  $M$  está uniformemente distribuida a lo largo de la longitud  $L$ , la masa por unidad de longitud (densidad de masa lineal) es  $\lambda = M/L$ .

1. El momento de inercia viene dado por la integral:

$$I = \int_0^L x^2 dm$$

2. Para calcular la integral, relacionar primero  $dm$  con  $dx$ . Escribir  $dm$  en función de la densidad  $\lambda$  y  $dx$ :

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

3. Sustituir y realizar la integración. Se eligen los límites de integración de tal forma que  $dm$  recorre la distribución de masa en la dirección creciente de  $x$ :

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx \\ &= \frac{M}{L} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L = \frac{M}{L} \frac{L^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3} ML^2} \end{aligned}$$

**Observación** El momento de inercia alrededor del eje  $z$  es también  $\frac{1}{3} ML^2$ , y el correspondiente al eje  $x$  es cero si suponemos que toda la masa está sobre el eje  $x$ .

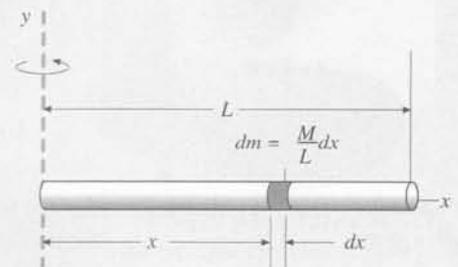


Figura 9.5

Mediante el uso de la ecuación 9.12 se puede calcular  $I$  para objetos continuos de formas diversas (véase la tabla 9.1).

**\*Anillos respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro** Consideremos un anillo de masa  $M$  y radio  $R$  (figura 9.6). El eje de rotación es el eje del anillo, perpendicular al plano del mismo. Toda la masa se encuentra a una distancia  $r = R$  y el momento de inercia es

$$I = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

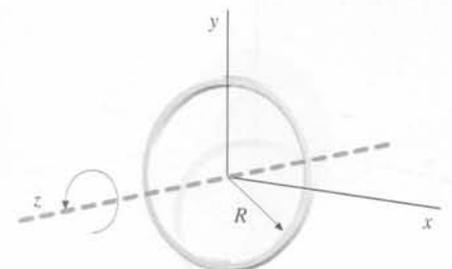
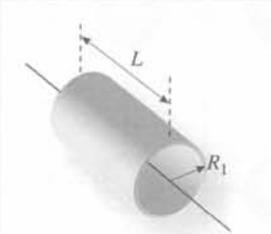
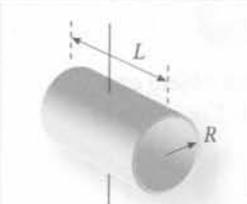
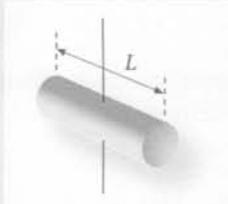
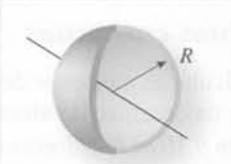
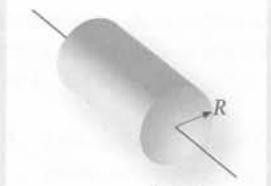
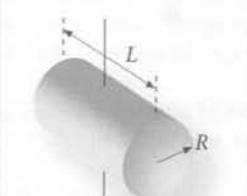
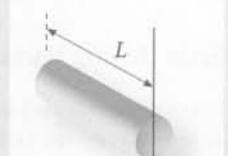
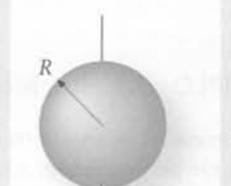
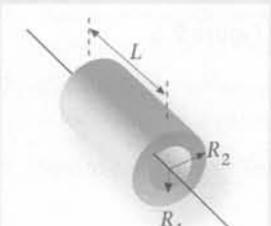
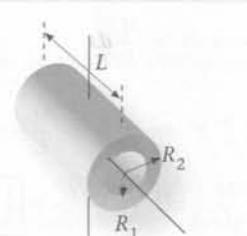
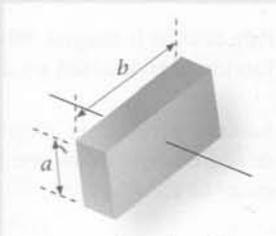


Figura 9.6

**\*Disco uniforme respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro** En el caso de un disco uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  es lógico que  $I$  deba ser menor que  $MR^2$ , ya que la masa está distribuida uniformemente de  $r = 0$  a  $r = R$ , mientras que en el anillo

TABLA 9.1 Momentos de inercia de cuerpos uniformes de formas diversas

Cilindro hueco de pared delgada respecto a su eje	Cilindro hueco respecto a un diámetro que pasa por su centro	Barra delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro	Esfera hueca respecto al diámetro (pared delgada)
 $I = MR^2$	 $I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$	 $I = \frac{1}{12}ML^2$	 $I = \frac{2}{3}MR^2$
Cilindro sólido respecto a su eje	Cilindro sólido respecto a un diámetro que pasa por su centro	Barra delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por su extremo	Esfera sólida respecto al diámetro
 $I = \frac{1}{2}MR^2$	 $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$	 $I = \frac{1}{3}ML^2$	 $I = \frac{2}{5}MR^2$
Cilindro hueco de pared gruesa respecto a su eje	Cilindro hueco de paredes gruesas respecto a un diámetro que pasa por su centro	Paralelepípedo sólido rectangular respecto a un eje que pasa por el centro perpendicular a la cara	
 $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	 $I = \frac{1}{4}M(R_1^2 + R_2^2) + \frac{1}{12}ML^2$	 $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	

Un disco es un cilindro cuya longitud  $L$  es despreciable. Poniendo  $L = 0$ , las fórmulas anteriores para cilindros sirven para los discos.

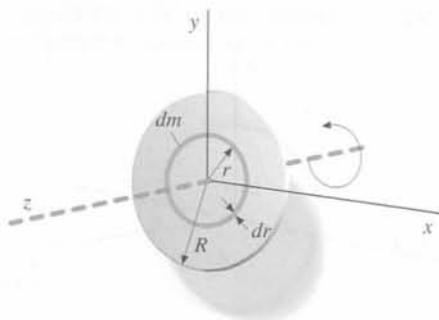


Figura 9.7

estaba concentrada en  $r = R$ . En la figura 9.7 cada elemento de masa es un anillo de radio  $r$  y espesor  $dr$ . El momento de inercia de cualquiera de estos elementos de masa es  $r^2 dm$ . Como el disco es uniforme, la masa por unidad de área  $\sigma$  es constante,  $\sigma = M/A$ , en donde  $A = \pi R^2$  es el área del disco. Como el área de cada elemento es  $dA = 2\pi r dr$ , su masa será:

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{A} 2\pi r dr$$

Así tenemos,

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2\pi M}{A} \frac{R^4}{4} = \frac{\pi M}{2\pi R^2} R^4 = \frac{1}{2}MR^2 \end{aligned}$$

**\*Cilindro uniforme respecto al eje** Consideremos que un cilindro está formado por una serie de discos, cada uno de masa  $dm$  y momento de inercia  $\frac{1}{2}dm R^2$  (figura 9.8). El momento de inercia del cilindro completo es, por lo tanto,

$$I = \int \frac{1}{2} dm R^2 = \frac{1}{2} R^2 \int dm = \frac{1}{2} MR^2$$

en donde  $M$  es la masa total del cilindro.

### Teorema de los ejes paralelos

Con frecuencia es posible simplificar el cálculo de los momentos de inercia de diversos cuerpos utilizando el llamado **teorema de los ejes paralelos**, que relaciona el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masas de un objeto, con el momento de inercia respecto a otro eje paralelo al primero (figura 9.9). Sea  $I_{cm}$  el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masas de un objeto de masa total  $M$ , e  $I$  el correspondiente a un eje paralelo situado a la distancia  $h$  del primero. El teorema de los ejes paralelos establece que

$$I = I_{cm} + Mh^2 \quad (9.13)$$

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

El ejemplo 9.2 y el ejercicio siguiente ilustran un caso especial de este teorema con  $h = a$ ,  $M = 4m$  e  $I_{cm} = 4ma^2$ . Al final de esta sección se incluye una deducción de este teorema.

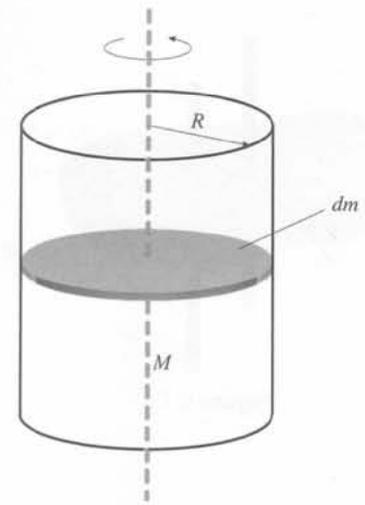


Figura 9.8

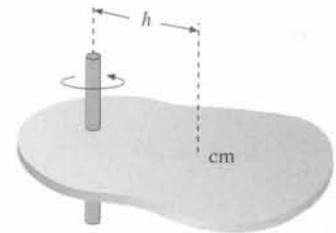


Figura 9.9 Un objeto gira alrededor de un eje paralelo a otro que pasa por el centro de masas y está a una distancia  $h$  del primero.

### EJEMPLO 9.4 | Momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masas de una barra uniforme

Determinar el momento de inercia de una barra uniforme alrededor del eje  $y'$  que pasa por el centro de masas (figura 9.10).

**Planteamiento del problema** Sabemos que  $I = \frac{1}{3}ML^2$  respecto a un extremo y deseamos determinar  $I_{cm}$ . Utilizaremos el teorema de los ejes paralelos, siendo  $h = \frac{1}{2}L$ .

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

1. Aplicar el teorema de los ejes paralelos expresando  $I$  en función de  $I_{cm}$ .
2. Sustituir  $I = \frac{1}{3}ML^2$  y despejar  $I_{cm}$ .

#### Respuestas

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

$$I_{cm} = I - Mh^2 = \frac{1}{3}ML^2 - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{12}ML^2}$$

**Observación** El momento de inercia es mínimo cuando un objeto gira alrededor de su centro de masas, como en este ejemplo. Comparar este resultado con el del ejemplo 9.3, donde la barra uniforme gira alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos.

**Ejercicio** Usando el teorema de los ejes paralelos, demostrar que cuando se comparan los momentos de inercia de un objeto respecto dos ejes paralelos, el momento de inercia menor se da respecto del eje de rotación que está más próximo al centro de masas.

### ¡INTÉNTELO USTED MISMO!

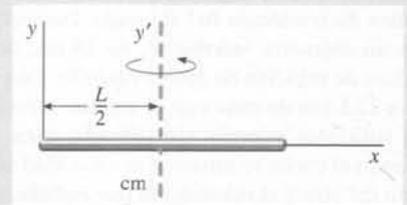


Figura 9.10

### \*Demostración del teorema de los ejes paralelos

Para probar el teorema de los ejes paralelos empezamos considerando un objeto y un eje  $A$ , como se muestra en la figura 9.11. Elegimos como origen el centro de masas, con el eje  $z$  paralelo al eje  $A$ . Entonces  $I$  es el momento de inercia respecto de  $A$  e  $I_{cm}$  es el momento de inercia

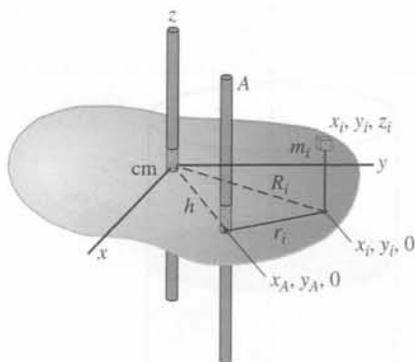


Figura 9.11

respecto del eje  $z$ . La masa  $m_i$  está en el punto de coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  y la intersección del eje  $A$  con el plano  $xy$  tiene coordenadas  $x_A, y_A$ . Las distancias  $r_i$  y  $R_i$  son las distancias perpendiculares desde  $m_i$  al eje  $A$  y al eje  $z$ , respectivamente, y  $h$  es la distancia perpendicular entre los ejes. Se obtiene que  $r_i$  es la distancia desde  $(x_A, y_A, 0)$  hasta  $(x_i, y_i, 0)$ ,  $R_i$  es la distancia desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(x_i, y_i, 0)$ , y  $h$  es la distancia desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(x_A, y_A, 0)$ . Así,  $r_i^2 = (x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2$ ,  $R_i^2 = x_i^2 + y_i^2$  y  $h^2 = x_A^2 + y_A^2$ . En consecuencia,

$$I_{\text{cm}} = \sum m_i R_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

e

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 = \sum m_i [(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2] \\ &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - \sum m_i 2x_i x_A - \sum m_i 2y_i y_A + \sum m_i (x_A^2 + y_A^2) \end{aligned}$$

Sacando el factor común de estas sumas se obtiene

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2x_A \sum m_i x_i - 2y_A \sum m_i y_i + (\sum m_i) (x_A^2 + y_A^2)$$

El primer término es  $I_{\text{cm}}$ . El segundo y el tercer términos pueden simplificarse usando  $\sum m_i x_i = Mx_{\text{cm}}$  y  $\sum m_i y_i = My_{\text{cm}}$ . Además, como  $x_{\text{cm}} = y_{\text{cm}} = 0$ , tanto el segundo como el tercer término se anulan. El cuarto término vale  $Mh^2$  y resulta

$$I = I_{\text{cm}} + Mh^2$$

que es el teorema de los ejes paralelos.

### EJEMPLO 9.5 | Un coche híbrido

Supongamos que usted conduce un coche híbrido experimental diseñado para ser utilizado en condiciones de tráfico denso en una ciudad. En un coche convencional cada vez que se accionan los frenos para parar, la energía cinética del vehículo se disipa en forma de calor. En un vehículo híbrido, el mecanismo de freno transforma la energía cinética de traslación del movimiento del vehículo en energía de rotación de un volante o cilindro inercial muy pesado. Cuando el coche recupera su velocidad de cruce esta energía se transfiere de nuevo a energía cinética de traslación del vehículo. De hecho, el cilindro, de 100 kg, es un cilindro hueco que tiene un diámetro inferior  $R_1$  de 25 cm, un diámetro exterior  $R_2$  de 40 cm, y una velocidad máxima de rotación de 30 000 rev/min. Una noche oscura y desapacible, el coche agota su gasolina a 22,5 km de casa con el volante inercial girando a su velocidad máxima. ¿Tiene el vehículo suficiente energía almacenada para que usted y su nerviosa abuela lleguen a casa? (Cuando el coche se mueve a la velocidad mínima permitida en la autopista, 60 km/h, la resistencia del aire y el rozamiento por rodadura disipan energía a 10 kW.)

**Planteamiento del problema** La energía cinética se calcula directamente de la expresión

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

1. La energía cinética de rotación es:
2. Calcular el momento de inercia del cilindro hueco:
3. Convertir  $\omega$  en rad/s:
4. Aplicar estos valores para obtener la energía cinética:
5. La energía se disipa a 10kW si se circula a la velocidad de 60 km/h. Para determinar la energía disipada durante los 22,5 km, primero tenemos que determinar el tiempo necesario para el viaje:
6. La energía se disipa a 10kW durante 1350 s. La energía disipada total es:
7. ¿Hay suficiente energía en el cilindro inercial?

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2) = 11,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega = 30\,000 \text{ rev/min} = 3140 \text{ rad/s}$$

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = 54,8 \text{ MJ}$$

$$\Delta x = v \Delta t, \text{ por lo tanto, } \Delta t = 1350 \text{ s}$$

$$13,5 \text{ Mj}$$

54,8 MJ son aprovechables y 13,5 MJ se disipan.

Sí, hay más que suficiente energía almacenada.

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

**Observación** En un galón de gasolina (3,8 l) hay 130 MJ de energía. Si el motor tiene una eficiencia del 10%, para mover el vehículo sólo se aprovechan 13 MJ por galón de gasolina. Por lo tanto, a partir de los datos del ejercicio anterior se deduce que con un galón de gasolina se recorren 22,5 km.

**EJEMPLO 9.6 | El pivote**

Una barra delgada y uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  pivota por uno de sus extremos. Se coloca en posición horizontal y se deja en libertad (figura 9.12). Se supone que no hay rozamiento en el pivote. Determinar (a) la velocidad angular de la barra cuando alcanza su posición vertical, y (b) la fuerza que ejerce el pivote en ese instante. (c) ¿Qué velocidad angular inicial se necesita para que la barra alcance la posición vertical al final de su oscilación?

**Planteamiento del problema** (a) Cuando la barra cae, su energía potencial disminuye y su energía cinética aumenta. Como el pivote no ejerce rozamiento, se usa la conservación de la energía mecánica. La velocidad angular de la barra se determina a partir de la energía cinética de rotación. (b) Para determinar la fuerza sobre el pivote se aplica la segunda ley de Newton al sistema. (c) Al igual que en el apartado (a), se usa la conservación de la energía mecánica.

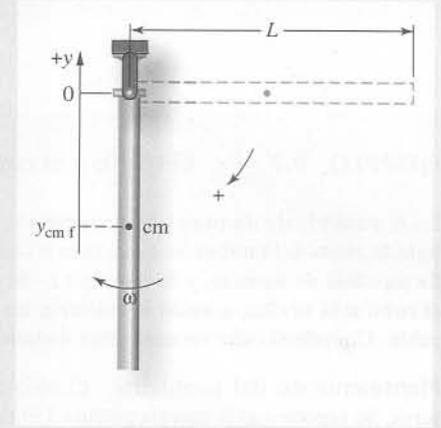


Figura 9.12

(a) 1. Dibujar un diagrama de la barra que muestre sus configuraciones inicial y final (figura 9.12). Colocar un eje de coordenadas vertical de forma que la dirección hacia arriba sea positiva y con el origen en el eje de rotación.

2. Aplicar la conservación de la energía mecánica para relacionar las energías mecánicas inicial y final.

3. Despejar  $\omega_f$ :

4. Obtener  $I$  a partir de la tabla 9.1 y sustituir en el resultado del paso 3:

(b) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas en la barra cuando ésta pasa por la posición vertical (véase la figura 9.13).

2. Aplicar la segunda ley de Newton a la barra y al pivote. Cuando la barra está en posición vertical por debajo del pivote, la aceleración del centro de masas va en la dirección centrípeta (positiva):

3. Relacionar la aceleración del centro de masas con la velocidad angular usando  $a_c = r\omega^2$ . Sustituir el resultado del paso 4 del apartado (a) para  $\omega$  y despejar  $a_{cm}$ :

4. Sustituir en el resultado del apartado 2 del apartado (b) y calcular  $F_p$ :

(c) 1. La velocidad angular inicial  $\omega_i$  está relacionada con la energía cinética inicial:

2. Dibujar un diagrama de la barra que muestre las configuraciones inicial y final (figura 9.14). Poner un eje de coordenadas vertical con el origen en el eje de rotación y la dirección positiva dirigida hacia arriba.

3. Aplicar la conservación de la energía mecánica, con  $E_{c_i} = 0$  y  $U_i = 0$ , para relacionar la energía cinética inicial con la posición final:

$$E_{c_i} + U_f = E_{c_f} + U_i$$

$$\frac{1}{2}I\omega_f^2 + Mgy_{cm f} = \frac{1}{2}I\omega_i^2 + Mgy_{cm i}$$

$$\frac{1}{2}I\omega_f^2 + Mg\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 + 0$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{MgL}{I}}$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$\sum F_{ext y} = Ma_{cm}$$

$$F_p - Mg = Ma_{cm}$$

$$a_c = r\omega^2$$

$$a_{cm} = \frac{L}{2} \frac{3g}{L} = \frac{3}{2}g$$

$$F_p = Mg + Ma_{cm} = Mg + M\frac{3}{2}g$$

$$= \frac{5}{2}Mg$$

$$E_{c_i} = \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

$$E_{c_f} + U_f = E_{c_i} + U_i$$

$$\frac{1}{2}I\omega_f^2 + Mgy_{cm f} = \frac{1}{2}I\omega_i^2 + Mgy_{cm i}$$

$$0 + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega_i^2 + 0$$

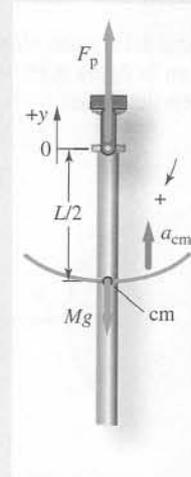


Figura 9.13

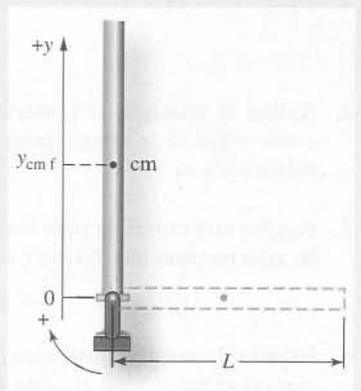


Figura 9.14

4. Despejar la velocidad angular inicial.

$$\omega_i = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

**Observación** No es una coincidencia que las respuestas de los apartados (a) y (c) sean idénticas. La disminución de la energía potencial en el apartado (a) es igual al incremento de la energía potencial en el apartado (c). Así, el incremento de la energía cinética del apartado (a) es igual a la disminución de la energía cinética en el apartado (c).

### EJEMPLO 9.7 | El torno y el cubo

En la cubierta de un pozo hay un torno cuyo tambor tiene de masa  $m_t$  y radio  $R$ . Virtualmente toda la masa del tambor se concentra a una distancia  $R$  del eje. Alrededor del tambor se enrolla un cable de masa  $m_c$  y de longitud  $L$ , de donde cuelga un cubo de agua de masa  $m_a$ . Cuando el cubo está arriba, a usted le resbalan las manos y el cubo cae por el pozo, desenrollando el cable. Cuando el cubo ha caído una distancia  $d$  ( $d < L$ ), ¿a qué velocidad se mueve el cubo?

**Planteamiento del problema** Cuando el cubo con el agua cae, la energía mecánica se conserva. Se supone que la energía potencial inicial es cero. Cuando el cubo ha caído una distancia  $d$ , el centro de masas del cable ha bajado  $d/2$  y, dado que la parte del cable que cuelga se mueve con velocidad  $v$  y el cable no se deforma, todo el cable debe moverse a  $v$ . Determinamos  $v$  a partir de la conservación de la energía mecánica.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

1. Dibujar un diagrama del sistema en sus configuraciones inicial y final, como se muestra en la figura 9.15. Incluir un eje y con su origen a la misma altura del eje del torno.

2. Aplicar el principio de conservación de la energía mecánica. Elegir como origen de la energía potencial cuando el cubo de agua está a la máxima altura.

3. Escribir una expresión para la energía potencial total cuando el cubo de agua ha caído una distancia  $d$ . Sea  $m'_c$  la masa de cable que cuelga.

4. Expresar la energía cinética total cuando el cubo de agua está cayendo con velocidad  $v$ . Todo el cable y la masa del torno se mueven con la misma velocidad  $v$ .

### ¡INTÉNTELO USTED MISMO!



#### Respuestas

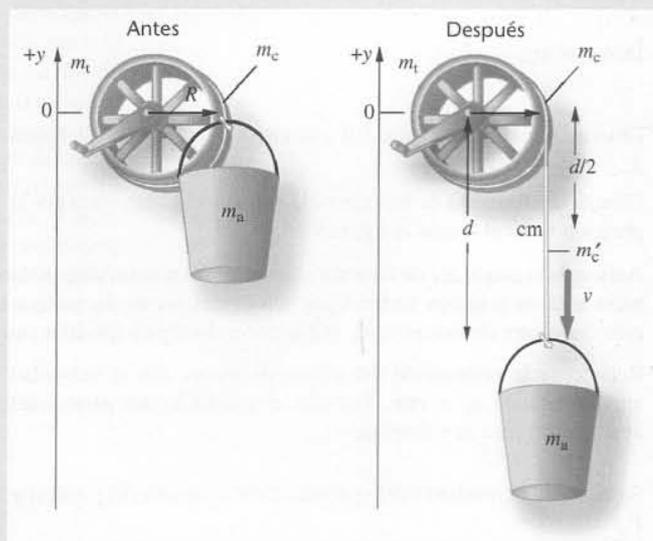


Figura 9.15

$$U_f + E_{c_f} = U_i + E_{c_i} \\ = 0 + 0 = 0$$

$$U_f = U_{af} + U_{cf} + U_{t_f} = m_a g(-d) + m'_c g\left(-\frac{d}{2}\right) + 0 \\ = -(m_a + \frac{1}{2}m'_c)gd$$

$$E_{c_f} = E_{c_{af}} + E_{c_{cf}} + E_{c_{t_f}} = \frac{1}{2}m_c v^2 + \frac{1}{2}m_a v^2 + \frac{1}{2}m_t v^2 \\ = \frac{1}{2}(m_c + m_a + m_t)v^2$$

5. Sustituir en la ecuación de conservación de la energía (paso 2) y despejar  $v$ .

$$-(m_a + \frac{1}{2}m_c')gd + \frac{1}{2}(m_c + m_a + m_t)v^2 = 0$$

por lo tanto

$$v = \sqrt{\frac{(2m_a + m_c')gd}{m_c + m_a + m_t}}$$

6. Suponer que el cable es uniforme y expresar  $m_c'$  en función de  $m_c$ ,  $d$ , y  $L$ .

$$\frac{m_c'}{d} = \frac{m_c}{L} \Rightarrow m_c' = \frac{d}{L}m_c$$

7. Sustituir el resultado del paso 6 en el resultado del paso 5.

$$v = \sqrt{\frac{(2m_aL + m_c d)gd}{(m_c + m_a + m_t)L}}$$

**Observación** Todo el torno se mueve a velocidad  $v$ . La energía cinética se puede expresar entonces como  $\frac{1}{2}m_tv^2$ . Sin embargo, se puede expresar también como  $\frac{1}{2}I_t\omega^2$ , donde  $I_t = m_tR^2$  y  $\omega = v/R$ . Con estas sustituciones  $E_{ct} = \frac{1}{2}I_t\omega^2 = \frac{1}{2}m_tR^2(v^2/R^2) = \frac{1}{2}m_tv^2$ .

## 9.4 La segunda ley de Newton en la rotación

Para hacer que una tapa dé vueltas, se la tiene que hacer girar. En la figura 9.16 se muestra cómo se hace girar un disco mediante la aplicación de dos fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  ejercidas en los bordes del disco y en la dirección tangencial. La dirección y sentido de las fuerzas es importante. Si las mismas fuerzas se aplican en la dirección radial (figura 9.17) el disco no gira.

La figura 9.18 muestra una partícula de masa  $m$  atada a un extremo de una barra sin masa y rígida, de longitud  $r$ . Hay un eje perpendicular a la barra y que pasa por su extremo, alrededor del cual la barra puede girar libremente. En consecuencia, la partícula sólo se mueve en un círculo de radio  $r$ . Asimismo, se aplica sobre la partícula una fuerza  $F$ . Si se aplica la segunda ley de Newton a la partícula y se toman componentes en la dirección tangencial se obtiene

$$F_t = ma_t$$

Deseamos obtener una ecuación que incorpore las magnitudes angulares. Sustituyendo  $r\alpha$  por  $a_t$  (ecuación 9.8) y multiplicando los dos términos por  $r$  se obtiene

$$rF_t = mr^2\alpha \tag{9.14}$$

El producto  $rF_t$  es el **momento**  $\tau$  de la fuerza, es decir,

$$\tau = F_t r \tag{9.15}$$

MOMENTO

Sustituyendo en la ecuación 9.14 se obtiene

$$\tau = mr^2\alpha \tag{9.16}$$

Un objeto rígido que gira alrededor de un eje fijo es simplemente un conjunto de partículas individuales, cada una de las cuales está obligada a moverse en una trayectoria circular con la misma velocidad angular  $\omega$  y aceleración  $\alpha$ . Aplicando la ecuación 9.16 a la partícula  $i$  de ese conjunto lleva a

$$\tau_{ineta} = \bar{m}_i r_i^2 \alpha$$

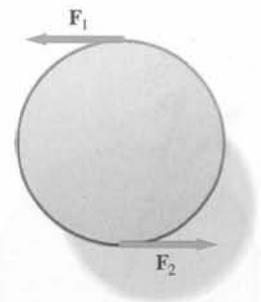


Figura 9.16

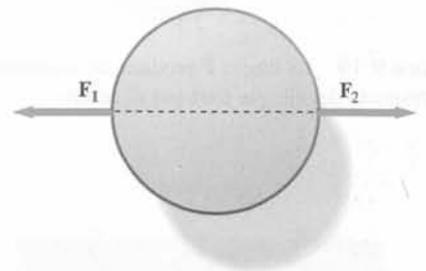


Figura 9.17

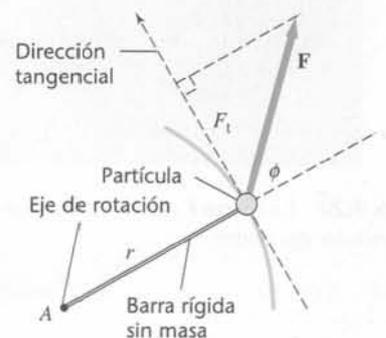


Figura 9.18



en donde  $\tau_{ineta}$  es el momento debido a la fuerza neta sobre la partícula  $i$ . Sumando para todas las partículas los dos términos de las expresiones anteriores conduce a

$$\sum \tau_{ineta} = \sum m_i r_i^2 \alpha = (\sum m_i r_i^2) \alpha = I \alpha \quad (9.17)$$

En el capítulo 8 vimos que la fuerza resultante que actúa sobre un sistema de partículas es igual a la fuerza *externa* neta que actúa sobre el sistema, ya que las fuerzas internas (las que se ejercen mutuamente las partículas del sistema) se anulan por pares. El tratamiento de los momentos internos que se ejercen las partículas entre sí dentro de un sistema conduce a un resultado semejante, es decir, el momento resultante que actúa sobre un sistema es igual al momento *externo* neto que actúa sobre el sistema. (Abordaremos este punto más adelante en el capítulo 10.) Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 9.17 en la forma

$$\tau_{neta,ext} = \sum \tau_{ext} = I \alpha \quad (9.18)$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA LA ROTACIÓN

Esta es la segunda ley de Newton aplicada a la rotación, análoga a la aplicada al movimiento lineal,  $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .

### Cálculo de momentos

La figura 9.19 muestra una fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre un objeto que está obligado a girar respecto a un eje fijo  $A$ , que no se muestra, y que pasa por  $O$  y es perpendicular al papel. La dirección tangencial positiva se muestra en el punto de aplicación de la fuerza, siendo  $r$  la distancia radial desde este punto de aplicación hasta  $A$ . El momento  $\tau$  debido a esta fuerza respecto del eje  $A$  es  $\tau = F_t r$  (ecuación 9.15). En principio, la expresión  $F_t r$  es todo lo que se necesita para calcular el momento pero, sin embargo, muchas veces los cálculos son más simples si se usan expresiones alternativas para el momento, como la que podemos extraer de la figura:

$$F_t = F \sin \phi$$

en donde  $\phi$  es el ángulo entre la dirección radial y la dirección de la fuerza. Así, podemos expresar el momento como  $\tau = F_t r = (F \sin \phi) r$ . La *línea de acción* de una fuerza es la línea paralela a la fuerza y que pasa por el punto de aplicación de la fuerza. De la figura 9.20 podemos ver que  $r \sin \phi = \ell$ , donde el **brazo de palanca**  $\ell$  es la distancia perpendicular entre  $A$  y la línea de acción. En consecuencia, el momento viene dado también por  $\tau = F \ell$ . Poniendo las tres expresiones juntas se obtiene:

$$\tau = F_t r = F \sin \phi r = F \ell \quad (9.19)$$

EXPRESIONES EQUIVALENTES DEL MOMENTO

### Momento debido a la gravedad

Como ya se ha dicho, se puede considerar que un objeto macroscópico es un conjunto de partículas microscópicas puntuales y que, sobre cada una de ellas, actúa una fuerza gravitatoria microscópica. Cada una de estas fuerzas ejerce un momento microscópico respecto a un eje determinado, y el momento gravitatorio neto sobre el objeto es la suma de estos momentos microscópicos. El momento gravitatorio neto se calcula considerando que el peso total del objeto (la suma de todas las fuerzas gravitatorias) actúa sobre un único punto: el **centro de gravedad**. Consideremos un objeto (figura 9.21) obligado a girar respecto de un eje horizontal  $A$  que va en la dirección perpendicular al papel. Elegimos, tal como se muestra en la figura 9.21, el eje  $z$  del sistema de coordenadas de modo que coincida con el eje  $A$ , y elegimos el eje  $x$  según la dirección horizontal del papel y el eje  $y$  según la dirección vertical. El momento de una partícula de masa  $m_i$  debido a la gravedad es  $m_i g x_i$ , donde  $x_i$  es el brazo

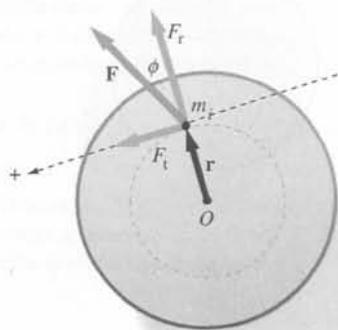


Figura 9.19 La fuerza  $\mathbf{F}$  produce un momento  $F_t r$  respecto del eje que pasa por el centro.

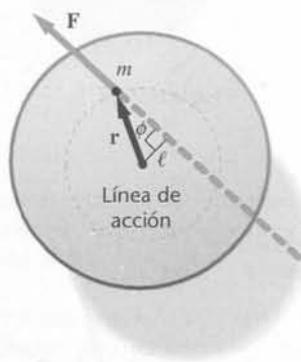


Figura 9.20 La fuerza  $\mathbf{F}$  produce un momento  $F \ell$ , alrededor del centro.

de palanca de la fuerza  $m_i g$ . El momento gravitatorio neto de un objeto es la suma de los momentos gravitatorios de las partículas que lo forman, es decir,  $\tau_{\text{grav}} = \sum m_i g x_i$ . Si  $g$  tiene el mismo valor en todo el objeto,  $g$  puede sacarse como factor común fuera de la suma, lo cual nos lleva a  $\tau_{\text{grav}} = (\sum m_i x_i)g$ . La suma entre paréntesis es (véase la ecuación 8.1)  $Mx_{\text{cm}}$ . Sustituyendo se obtiene

$$\tau_{\text{grav}} = Mg x_{\text{cm}} \quad (9.20)$$

MOMENTO DE LA GRAVEDAD

El momento debido a un campo gravitatorio uniforme se calcula como si la fuerza gravitatoria actuara globalmente en el centro de masas, ya que el centro de gravedad coincide con el centro de masas si el objeto está en un campo gravitatorio uniforme.

## 9.5 Aplicaciones de la segunda ley de Newton a la rotación

En esta sección veremos algunas aplicaciones de la segunda ley de Newton a la rotación, expresada por la ecuación 9.18.

### Indicaciones útiles para la resolución de problemas relacionados con la aplicación de la segunda ley de Newton a sistemas en rotación

**Diagrama de fuerzas** Dibujar el diagrama de fuerzas en la imagen del objeto (no concentrar las fuerzas en un solo punto). Dibujar cada vector fuerza a lo largo de la línea de acción de la fuerza. En el diagrama indicar la dirección positiva de rotación (en el sentido o en contra de las agujas del reloj).

### EJEMPLO 9.8 | Una bicicleta estática

Una forma práctica de hacer ejercicio sin desplazarse del lugar puede conseguirse mediante una bicicleta situada en un soporte, de tal modo que la rueda trasera gira libremente. Al pedalear, la cadena aplica al piñón una fuerza de 18 N a una distancia de  $r_s = 7$  cm del eje de la rueda. Consideremos la rueda como un anillo ( $I = MR^2$ ) de radio  $R = 35$  cm y masa 2,4 kg. ¿Cuál es la velocidad angular de la rueda al cabo de 5 s?

**Planteamiento del problema** La velocidad angular puede determinarse a partir de la aceleración angular, y ésta se deduce a partir de la segunda ley de Newton de la rotación. Como las fuerzas son constantes, los momentos de las fuerzas también lo serán y podemos aplicar las ecuaciones de la aceleración angular constante. Obsérvese que  $\mathbf{F}$  actúa en la dirección de la cadena, y por lo tanto, la línea de fuerza es tangente de la rueda; el brazo de palanca será el radio  $r_s$  del piñón (véase figura 9.22).

1. La velocidad angular está relacionada con la aceleración y el tiempo:  $\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t$
2. Aplicar la segunda ley de Newton al movimiento de rotación para relacionar  $\alpha$  con el momento neto de las fuerzas y el momento de inercia:  $\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$
3. El único momento de fuerza que actúa sobre el sistema es la fuerza aplicada  $F$  con el brazo de palanca  $r_s$ :  $\tau_{\text{ext}} = F r_s$

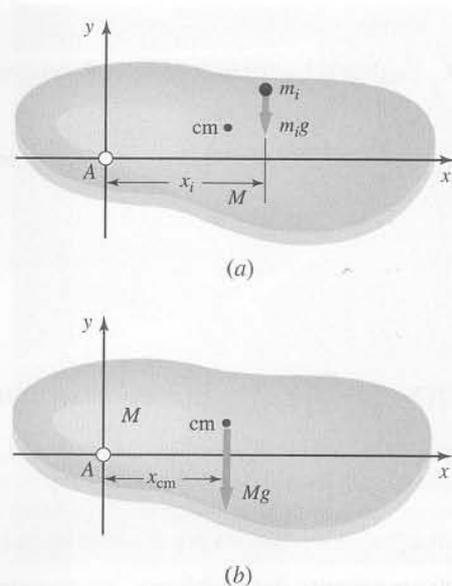


Figura 9.21



Figura 9.22

4. Sustituir el momento de la fuerza por este valor, y el momento de inercia por  $MR^2$ ;

$$\alpha = \frac{\tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{Fr_s}{MR^2}$$

5. Sustituir en el resultado del paso 1 y despejar y calcular  $\omega$  pasados 5 s.

$$\omega = \alpha t = \frac{Fr_s}{MR^2} t = \frac{(18 \text{ N})(0,07 \text{ m})}{(2,4 \text{ kg})(0,35 \text{ m})^2} 5 \text{ s}$$

$$= \boxed{21,4 \text{ rad/s}}$$

### EJEMPLO 9.9 | Una barra uniforme con un pivote en un extremo

Una barra delgada y uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  pivota sobre un extremo. Se coloca en posición horizontal y se deja en libertad. Se supone que no hay rozamiento en el pivote. Determinar (a) la aceleración angular de la barra inmediatamente después de dejarla en libertad, y (b) la fuerza  $F_A$  ejercida por el pivote sobre la barra en ese instante.

**Planteamiento del problema** Se determina la aceleración angular a partir de la segunda ley de Newton para la rotación (ecuación 9.18). Se determina la fuerza  $F_A$  a partir de la segunda ley de Newton para sistemas de partículas (ecuación 8.10). La aceleración tangencial del centro de masas está relacionada con la aceleración angular (ecuación 9.5) y la aceleración centrípeta del centro de masas está relacionada con la velocidad angular (ecuación 9.6).

- (a) 1. Dibujar el diagrama de fuerzas de la barra (figura 9.23).

2. Escribir la segunda ley de Newton para la rotación:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$$

3. Calcular el momento debido a la gravedad alrededor del eje dado. La barra es uniforme, por lo que su centro de masas está en su centro, es decir, a una distancia  $L/2$  de su eje:

$$\tau_{\text{grav}} = Mg \frac{L}{2}$$

4. Buscar el momento de inercia respecto al extremo de la barra en la tabla 9.1:

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

5. Para calcular  $\alpha$  sustituir estos valores en la ecuación del paso 2:

$$\alpha = \frac{\tau_{\text{grav}}}{I} = \frac{Mg(L/2)}{(1/3)ML^2} = \boxed{\frac{3g}{2L}}$$

- (b) 1. Escribir la segunda ley de Newton para la barra:

$$\Sigma F_{\text{ext } y} = Ma_{\text{cm } y}$$

$$Mg - F_A = Ma_{\text{cm } y}$$

2. Usar la relación  $a_c = r\omega^2$  para determinar  $a_{\text{cm } c}$ . Inmediatamente después de soltar la barra,  $\omega = 0$ :

$$a_c = r\omega^2$$

$$a_{\text{cm } c} = r_{\text{cm}}\omega^2 = \frac{L}{2}\omega^2 = 0$$

3. Ahora tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas,  $\alpha$ ,  $a_{\text{cm } y}$ , y  $F_A$ . Usar la relación  $a_t = r\alpha$  para obtener una ecuación que relacione  $a_{\text{cm } y}$  con  $\alpha$ :

$$a_t = r\alpha$$

$$a_{\text{cm } y} = r_{\text{cm}}\alpha = \frac{L}{2}\alpha$$

4. Sustituir los resultados del paso 5 apartado (a) y del paso 1 apartado (b) en el resultado del paso 3 apartado (b) y despejar  $F_A$ :

$$\frac{Mg - F_A}{M} = \frac{L3g}{22L}$$

por lo tanto

$$F_A = \boxed{\frac{1}{4}Mg}$$

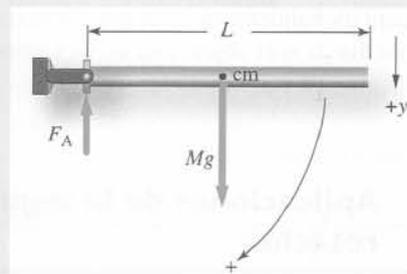


Figura 9.23

**Observación** Inmediatamente después de soltar la barra, la aceleración del centro de masas apunta verticalmente hacia abajo. Dado que la fuerza externa neta y la aceleración deben ir en la misma dirección se sigue que  $F_A$ , en ese instante, no puede tener una componente horizontal.

**Ejercicio** Una pequeña moneda de masa  $m \ll M$  se sitúa en la parte alta de la barra en su centro. Determinar (a) la aceleración de la moneda y (b) la fuerza que ejerce sobre la barra justamente después de dejar la barra en libertad. (Respuestas (a)  $a = 3g/4$  hacia abajo, (b)  $f = mg/4$  hacia abajo.)

## Rotación sin deslizamiento

Hay muchas situaciones físicas en las cuales una cuerda se enrolla a una rueda o cilindro en rotación. Si la cuerda está tensa y no se desliza, su velocidad lineal debe ser igual a la velocidad tangencial  $v_t$  de los puntos de la periferia del cilindro:

$$v_t = R\omega \quad (9.21)$$

CONDICIÓN PARA  $v$  Y  $\omega$  SIN DESLIZAMIENTO

En un punto de una cuerda, la componente de la velocidad tangente a la cuerda es su *velocidad tangencial*, y la componente de la velocidad perpendicular a la dirección tangente es su *velocidad transversal*. Por ejemplo, si un paquete es izado desde la bodega de un barco por un sistema provisto de una cuerda y una polea, tanto el paquete como todos los puntos de la cuerda entre él y la polea tienen la misma velocidad tangencial que el borde de la polea y, además, todos los puntos tienen velocidad transversal cero. Sin embargo, si mientras es izado, sopla viento y el paquete oscila, entonces tanto él como los puntos de la cuerda tendrán, además de la velocidad tangencial, una velocidad transversal. En los temas que tratamos a continuación suponemos que no hay movimiento transversal (a menos que se diga explícitamente). La ecuación 9.21 sirve para condiciones sin deslizamiento, por lo que su derivada con respecto del tiempo relaciona la aceleración tangencial de la cuerda con la aceleración angular del borde de la polea:

$$a_t = R\alpha \quad (9.22)$$

CONDICIÓN PARA  $a$  Y  $\alpha$  SIN DESLIZAMIENTO

## Indicaciones útiles para la resolución de problemas relacionados con la aplicación de la segunda ley de Newton a sistemas en rotación

**Tensión** Debido al rozamiento y a la inercia, la tensión en una cuerda enrollada alrededor de la rueda de una polea es mayor a un lado de la rueda que en el otro, ya que es necesario que la cuerda ejerza un momento sobre la rueda para que ésta gire. Conviene, pues, denominar estas dos tensiones de forma distinta,  $T_1$  y  $T_2$ .

### EJEMPLO 9.10 | Tensión en una cuerda

Se sujeta un objeto de masa  $m$  a una cuerda ligera enrollada alrededor de una rueda de polea de momento de inercia  $I$  y radio  $R$ . La rueda puede girar sin rozamiento y la cuerda no desliza por su borde. Hallar la tensión de la cuerda y la aceleración del cuerpo.

**Planteamiento del problema** En este sistema, el objeto desciende con una aceleración hacia abajo constante  $a$ , mientras la rueda gira con aceleración angular constante,  $\alpha$  (figura 9.24). Para calcular  $\alpha$  se aplica la segunda ley de Newton para la rotación a la rueda y para obtener  $a$  se aplica la segunda ley de Newton al objeto. Usando la condición de ausencia de deslizamiento se relacionan  $a_t$  y  $\alpha$ .

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la rueda de la polea, representando cada vector fuerza con su extremo en el punto de aplicación de la fuerza. Poner los símbolos en todas las fuerzas dibujadas e indicar la dirección positiva de la rotación (figura 9.25):

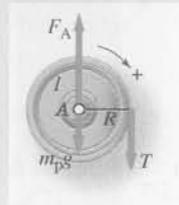


Figura 9.25

2. La única fuerza que ejerce un momento sobre la rueda es la tensión  $T$ , cuyo brazo de palanca es  $R$ . Aplicar la ley de Newton al movimiento de rotación, que relaciona  $T$  con la aceleración angular  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sum \tau_{\text{ext}} &= I\alpha \\ TR &= I\alpha \end{aligned}$$

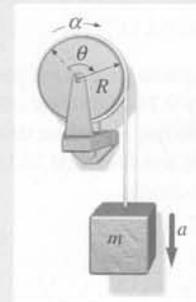
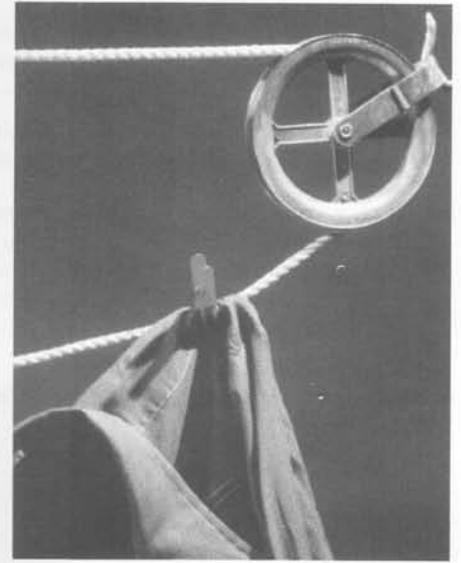


Figura 9.24

- Dibujar un diagrama de fuerzas para el objeto suspendido (figura 9.26) y aplicar la segunda ley de Newton para relacionar  $T$  con la aceleración lineal  $a_t$ :
- Tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas  $T$ ,  $a$  y  $\alpha$ . Una tercera ecuación es la condición no deslizante que relaciona  $a$ , y  $\alpha$ :
- Tenemos ahora tres ecuaciones que nos permiten determinar  $T$ ,  $a$  y  $\alpha$ . Para despejar  $T$  se usa el resultado del paso 2 con el objetivo de obtener una expresión para  $\alpha$  y usamos el resultado del paso 3 para obtener una expresión para  $a_t$ . Sustituir estas expresiones en el resultado del paso 4 y despejar  $T$ .
- Sustituir este resultado para  $T$  en el resultado del paso 3 y despejar  $a_t$ :

$$\Sigma F_{\text{ext } y} = ma_y$$

$$mg - T = ma_t$$

$$a_t = R\alpha$$

$$\frac{mg - T}{m} = R \frac{TR}{I}$$

con lo que

$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$$

$$mg - \frac{mg}{1 + (mR^2/I)} = ma_t$$

por lo tanto,

$$a_t = \frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}} g$$

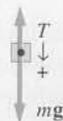


Figura 9.26

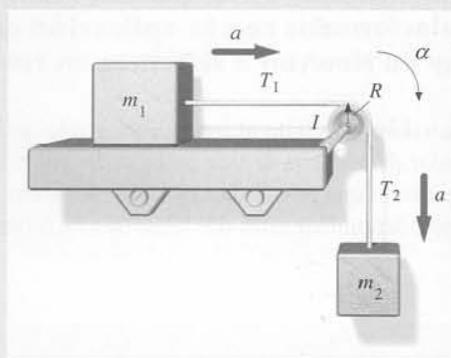
**Comprobar el resultado** Veamos un par de situaciones límites. Si  $I = 0$ , el objeto caería libremente y la cuerda estaría floja; nuestros resultados dan  $T = 0$ ,  $a_t = g$ . ¿Qué ocurre si  $I \rightarrow \infty$ ? Para  $I \gg mR^2$ , nuestras ecuaciones dan  $T \approx mg$  y  $a_t \approx 0$ .

### EJEMPLO 9.11 | Una polea

Dos bloques están conectados por una cuerda que pasa por una polea de radio  $R$  y momento de inercia  $I$ . El bloque de masa  $m_1$  desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento; el bloque de masa  $m_2$  está suspendido de la cuerda (figura 9.27). Determinar la aceleración  $a$  de los bloques y las tensiones  $T_1$  y  $T_2$ , suponiendo que la cuerda no desliza sobre la polea.

**Planteamiento del problema** En este problema, las tensiones  $T_1$  y  $T_2$  no son iguales, porque existe rozamiento entre la cuerda y la polea. (De otro modo la polea no giraría.) Obsérvese que  $T_2$  ejerce un momento en sentido horario y  $T_1$  un momento antihorario sobre la polea. Utilizar la segunda ley de Newton para cada bloque y la segunda ley de Newton para la rotación para la polea, y después relacionar  $a$  y  $\alpha$  por la condición de ausencia de deslizamiento.

¡INTÉNTELO USTED MISMO!



Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

- Dibujar un diagrama de fuerzas para cada bloque y para la polea por separado (figura 9.28). Observar que el centro de masas de la polea no acelera, de modo que el soporte debe ejercer una fuerza sobre el eje  $F_s$  que equilibre la resultante de la fuerza de la gravedad y las fuerzas ejercidas por la cuerda.
- Aplicar la segunda ley de Newton a cada bloque.
- Aplicar la segunda ley de Newton para la rotación a la rueda de la polea.
- Tenemos tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Para obtener la cuarta ecuación, usar la condición de ausencia de deslizamiento de forma que se pueda relacionar  $a$  y  $\alpha$ .

#### Respuestas

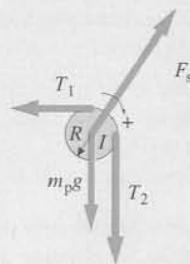
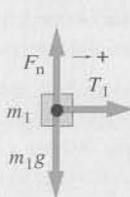


Figura 9.27

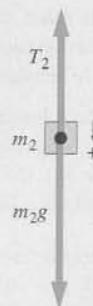


Figura 9.28

$$T_1 = m_1 a; \quad m_2 g - T_2 = m_2 a$$

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha$$

$$a = R\alpha$$

5. Ahora tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, por lo que todo lo que queda es álgebra. Realizar los pasos necesarios para obtener  $a$ ,  $T_1$  y  $T_2$ . (Sugerencia: Para determinar  $a$ , buscar las expresiones para  $T_1$  y  $T_2$  a partir de los resultados del paso 2. Sustituirlas en el resultado del paso 3 hasta encontrar una ecuación con las incógnitas  $a$  y  $\alpha$ . Usar el resultado del paso 4 para eliminar  $\alpha$  y calcular  $a$ .)

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}g$$

$$T_1 = m_1 a = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}m_1 g$$

$$T_2 = m_2(g - a) = \frac{(m_1 + I/R^2)}{m_1 + m_2 + I/R^2}m_2 g$$

**Comprobar el resultado** Si  $I = 0$ ,  $T_1 = T_2$ , y la aceleración es  $a = m_2 g / (m_1 + m_2)$ , como era de esperar. Si  $I$  es muy grande,  $I/R^2 \gg (m_1 + m_2)$ , será  $T_1 \approx 0$ ,  $T_2 \approx m_2 g$ , y  $a \approx 0$ .

## Potencia

Cuando hacemos girar un objeto realizamos trabajo sobre él, incrementando su energía cinética. Consideremos una fuerza  $F_i$  que actúa sobre un objeto en rotación. Cuando el objeto gira un ángulo  $d\theta$ , el punto de aplicación de la fuerza recorre una distancia  $ds_i = r_i d\theta$ , y la fuerza realiza un trabajo:

$$dW_i = F_i ds_i = F_{it} r_i d\theta = \tau_i d\theta$$

en donde  $\tau_i$  es el momento ejercido por la fuerza  $F_i$  y  $F_{it}$  es la componente tangencial de  $F_i$ . En general, el trabajo realizado por un momento  $\tau$  cuando el objeto gira un ángulo pequeño  $d\theta$  es

$$dW = \tau d\theta \quad (9.23)$$

El ritmo al que el momento realiza trabajo es la potencia de entrada del momento:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

o sea,

$$P = \tau \omega \quad (9.24)$$

POTENCIA DE ROTACIÓN

Las ecuaciones 9.23 y 9.24 son análogas a las expresiones  $dW = F_s ds$  y  $P = F_s v_s$  del movimiento lineal.

### EJEMPLO 9.12 | Momento ejercido por el motor de un automóvil

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

A 3700 rev/min, el momento máximo que produce el motor 8,0L V10 de un 2002 Dodge Viper es de 675 N·m. Determinar la potencia de salida del motor si opera a estas condiciones de momento máximo.

**Planteamiento del problema** La potencia es igual al producto del momento por la velocidad angular, datos que nos proporciona el enunciado del problema. Debe expresarse  $\omega$  en rad/s para obtener la potencia en vatios.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

1. Escribir la potencia en función de  $\tau$  y  $\omega$ .
2. Convertir las rev/min en rad/s.
3. Calcular la potencia.

#### Respuestas

$$P = \tau \omega$$

$$\omega = 387 \text{ rad/s}$$

$$P = \boxed{262 \text{ kW}}$$

**Observación** Esta potencia de salida equivale aproximadamente a 350 caballos de vapor.

**Ejercicio** La potencia máxima producida por el motor Viper es de 450 caballos de vapor a 5200 rev/min. ¿Cuál es el momento cuando el motor opera a su potencia máxima? (Respuesta 616 N·m)



TABLA 9.2 Analogías de los movimientos rotacional y lineal

Movimiento rotacional		Movimiento lineal	
Desplazamiento angular	$\Delta\theta$	Desplazamiento	$\Delta x$
Velocidad angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Velocidad	$v = \frac{dx}{dt}$
Aceleración angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Aceleración	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Ecuaciones de aceleración angular constante	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\theta = \omega_0 \Delta t$ $\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \Delta\theta$	Ecuaciones de aceleración constante	$v = v_0 + at$ $\Delta x = v_m \Delta t$ $v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$
Momento de una fuerza	$\tau$	Fuerza	$F$
Momento de inercia	$I$	Masa	$m$
Trabajo	$dW = \tau d\theta$	Trabajo	$dW = F_s ds$
Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia	$P = \tau\omega$	Potencia	$P = Fv$
Momento angular <sup>†</sup>	$L = I\omega$	Momento lineal	$p = mv$
Segunda ley de Newton	$\tau_{\text{neto}} = I\alpha = \frac{dL}{dt}$	Segunda ley de Newton	$F_{\text{neto}} = ma = \frac{dp}{dt}$

<sup>†</sup> El momento angular se introduce en el capítulo 10.

Existen muchos paralelismos entre el movimiento lineal en una dirección y el movimiento rotacional alrededor de un eje fijo. Las similitudes entre las fórmulas pueden encontrarse en la tabla 9.2. Las fórmulas son las mismas, pero los símbolos cambian.

## 9.6 Objetos rodantes

### Rodamiento sin deslizamiento

Cuando un carrito como el de la figura 9.29 rueda sin deslizar por la superficie inclinada de la figura, sus puntos de contacto con la superficie están instantáneamente en reposo y el carrito gira respecto a un eje de rotación que pasa a través del punto de contacto. Esto se puede apreciar en la figura, ya que las zonas con movimiento rápido aparecen borrosas, mientras que aquellas zonas con movimiento más lento aparecen un poco más definidas. En la figura 9.30 se representa cómo una rueda de radio  $R$  gira sin deslizarse por una superficie plana. El punto  $P$  de la rueda, tal como se muestra, se mueve con una velocidad

$$v = r\omega \tag{9.25}$$

CONDICIÓN PARA LA VELOCIDAD SIN DESLIZAMIENTO

en donde  $r$  es la distancia perpendicular desde  $P$  al eje de rotación. El centro de masas de la rueda se mueve con velocidad

$$v_{\text{cm}} = R\omega \tag{9.26}$$

CONDICIÓN PARA  $v_{\text{cm}}$  SIN DESLIZAMIENTO

Nótese que para un punto en el extremo superior de la rueda,  $r = 2R$ , de forma que ese punto se mueve al doble de velocidad que su centro de masas.

Derivando a ambos lados de la ecuación 9.26 se obtiene

$$a_{\text{cm}} = R\alpha \tag{9.27}$$

CONDICIÓN PARA LA ACELERACIÓN SIN DESLIZAMIENTO

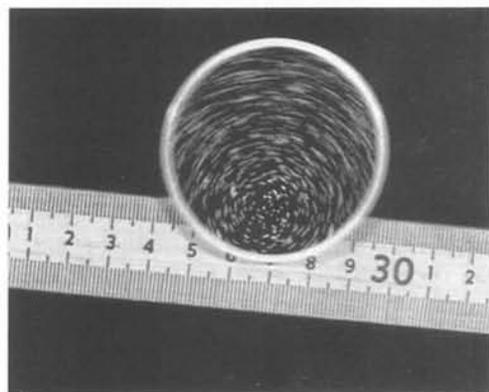


Figura 9.29

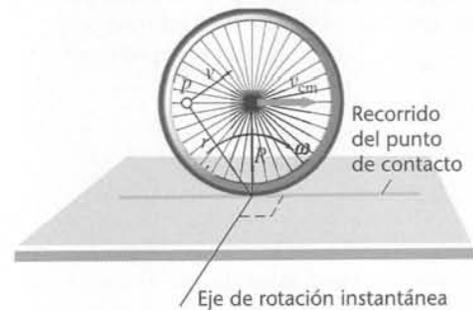


Figura 9.30

Cuando la cuerda a la que está atado un yo-yo se desenrolla, se dan las mismas condiciones de ausencia de deslizamiento que en el ejemplo de la rueda.

Consideremos una bola de radio  $R$  que rueda sobre una superficie plana sin rozamiento. Cuando la bola gira el ángulo  $\phi$  (figura 9.31), el punto de contacto entre la bola y el plano se mueve una distancia  $s$ , relacionada con  $\phi$  por la expresión

$$s = R\phi \quad (9.28)$$

CONDICIÓN PARA EL DESPLAZAMIENTO SIN DESLIZAMIENTO

Si la rueda está rodando en una superficie horizontal, el centro de masas de la rueda siempre queda sobre el punto de contacto, por lo que se mueve también una distancia  $s$ .

En el capítulo 8 vimos que la energía cinética de un sistema puede expresarse como la suma de la energía cinética de traslación del movimiento del centro de masas más la energía cinética relativa al centro de masas. Para un objeto que gira, la energía cinética relativa vale  $\frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$ . Entonces, la energía cinética total será

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 \quad (9.29)$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO RODANTE

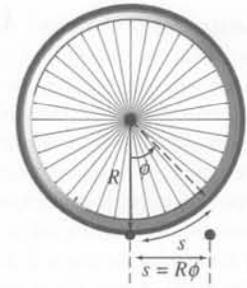


Figura 9.31

### EJEMPLO 9.13 | Una bola de bolera

Una bola de bolera de radio 11 cm y masa  $M = 7,2$  kg rueda sin deslizamiento sobre una superficie horizontal a 2 m/s. Después sube por una pendiente sin deslizamiento hasta una altura  $h$  antes de alcanzar momentáneamente el reposo y volver rodando hacia atrás. Determinar  $h$ .

**Planteamiento del problema** La energía mecánica se conserva. La energía cinética inicial, que es la energía cinética de traslación del centro de masas,  $\frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2$ , más la energía cinética de rotación respecto al centro de masas,  $\frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$ , se convierte en energía potencial  $mgh$ . Como la esfera rueda sin deslizamiento, las velocidades lineal y angular están relacionadas por  $v_{\text{cm}} = R\omega$ . Hacer un esquema que muestre la bola en sus posiciones inicial y final (figura 9.32).

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

1. Aplicar la conservación de la energía mecánica con  $U_i = 0$  y  $E_{c_f} = 0$ . Escribir la energía cinética inicial  $E_{c_i}$  en función de la velocidad  $v_{\text{cm}}$  y de la velocidad angular  $\omega$ .
2. A partir de  $\omega_i = v_i/R$  e  $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}MR^2$ , sustituir  $\omega$  e  $I_{\text{cm}}$ , y despejar  $h$ .

#### Respuestas

$$U_i + E_{c_i} = U_f + E_{c_f}$$

$$Mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega_i^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_i^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} MR^2 \right) \frac{v_i^2}{R^2}$$

$$= \frac{7}{10} M v_i^2$$

por lo tanto

$$h = \frac{7 v_i^2}{10g} = 0,285 \text{ m} = \boxed{28,5 \text{ cm}}$$

### ¡INTÉNTELO USTED MISMO!

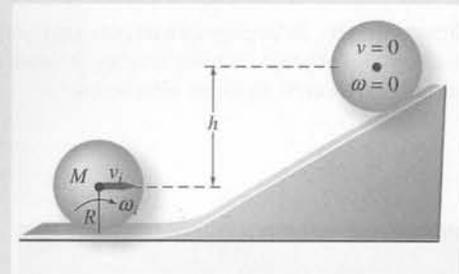


Figura 9.32

**Observación** La altura alcanzada es independiente de la masa y del radio de la bola.

**Ejercicio** Determinar la energía cinética inicial de la bola. (Respuesta 20,2 J.)

### EJEMPLO 9.14 | Jugando a billar

Un taco de billar golpea la bola horizontalmente a una distancia  $x$  por encima del centro de la bola (figura 9.33). Determinar el valor de  $x$  para el cual la bola de billar rodará sin deslizamiento desde el comienzo. Expresar la respuesta en función del radio  $R$  de la bola.

**Planteamiento del problema** Las líneas de acción de las fuerzas del peso y normal pasan por el centro de masas, por lo que no ejercen momento respecto a éste. La fuerza de rozamiento es mucho más pequeña que la del golpe del palo y puede despreciarse. Si el taco golpea contra la bola al nivel del centro, ésta comenzará inicialmente a moverse sin rotación. Si el golpe se verifica por debajo del centro, comenzará con rotación hacia atrás. Para un cierto valor de  $x$ , la bola posee el giro hacia delante correcto, así como la aceleración hacia delante adecuada para que ruede sin deslizarse desde el comienzo, es decir, se cumple la condición no deslizante. El valor de  $x$  determina la relación entre el momento y la fuerza ejercidos sobre la bola y, por lo tanto, la relación entre su aceleración angular  $\alpha$  y la aceleración lineal  $a$ . La aceleración lineal  $a$  es  $F/m$ , independiente de  $x$ . Para que la bola ruede sin deslizamiento desde el principio, determinaremos  $\alpha$  y  $a$  y después, teniendo en cuenta que  $a = R\alpha$  (condición no deslizante), calcularemos  $x$ .

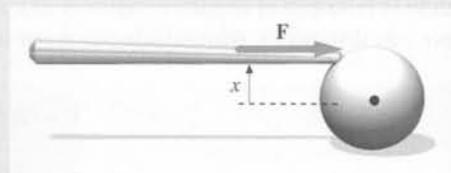


Figura 9.33

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la bola de billar (figura 9.34). Se supone que el rozamiento entre la bola y la mesa es despreciable, por lo que no se incluye la fuerza de rozamiento:
2. El momento de la fuerza respecto al centro de la bola es igual al producto de  $F$  por  $x$ :
3. Aplicar la segunda ley de Newton para sistemas y la correspondiente análoga para rotación respecto al centro de la bola:
4. La condición no deslizante relaciona  $a$  y  $\alpha$ :
5. Sustituir en la relación obtenida en el paso 4 las expresiones de  $\alpha$  y  $a_{cm}$  obtenidas en los pasos 2 y 3.
6. Determinar el momento de inercia a partir de la tabla 9.1 y despejar y calcular  $x$ .

$$\tau = Fx$$

$$F = ma_{cm} \quad \text{y} \quad \tau = I_{cm}\alpha$$

$$a_{cm} = R\alpha$$

$$\frac{F}{m} = R\frac{Fx}{I_{cm}}$$

$$x = \frac{I_{cm}}{mR} = \frac{(2/5)mR^2}{mR} = \boxed{(2/5)R}$$

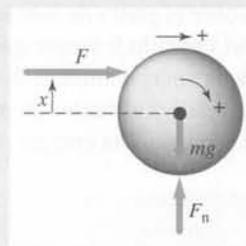


Figura 9.34

**Observación** Si se golpea en un punto más alto que  $2R/5$  o más bajo que  $2R/5$ , la bola rodará y se deslizará. En el juego de billar a veces se desea que la bola se deslice. El rodamiento con deslizamiento se trata en la siguiente subsección.



Cuando un objeto rueda por un plano inclinado hacia abajo, su centro de masa se acelera. El análisis de este problema se simplifica gracias a un importante teorema concerniente al centro de masas:

Si los momentos de las fuerzas se calculan respecto a un sistema de referencia que se mueve con el centro de masas, la segunda ley de Newton correspondiente al movimiento de rotación también se cumple cuando el centro de masas está acelerando por lo que los momentos de las fuerzas se calculan en el sistema de referencia centro de masas. Es decir,

$$\tau_{\text{neto,cm}} = I_{cm}\alpha \quad (9.30)$$

Esta ecuación es la misma que la 9.18 con la salvedad de que aquí el momento y el momento de inercia se calculan respecto de un sistema de referencia que se mueve con el centro de masas. (Se encontrará la deducción en [www.whfreeman.com/tipler](http://www.whfreeman.com/tipler).) Cuando el centro de masas acelera (caso de una bola que desciende por un plano inclinado), el sistema de referencia centro de masas no es inercial y, por lo tanto, no podemos esperar necesariamente que la segunda ley de Newton aplicada a la rotación se cumpla. Sin embargo, se cumple.

### EJEMPLO 9.15 | Aceleración de una bola que rueda sin deslizar

Una bola maciza uniforme de masa  $m$  y radio  $R$  rueda sin deslizamiento por un plano inclinado  $\phi$  hacia abajo. Determinar la aceleración del centro de masas y la fuerza de rozamiento.

**Planteamiento del problema** Según la segunda ley de Newton, la aceleración del centro de masas es igual a la fuerza neta dividida por la masa. Las fuerzas que actúan son el peso  $mg$  hacia abajo, la fuerza normal  $F_n$  que equilibra la componente normal del peso, y la fuerza de rozamiento  $f$  que actúa hacia arriba sobre el plano inclinado (figura 9.35). Cuando el objeto acelera por el plano inclinado, para mantener la condición de ausencia de deslizamiento, su velocidad angular tiene que aumentar. Esta aceleración angular requiere un momento externo neto alrededor del eje que pasa por su centro de masas. Para determinar  $\alpha$  se utiliza la segunda ley de Newton para la rotación. La condición de ausencia de deslizamiento relaciona  $\alpha$  y  $a_{cm}$ .

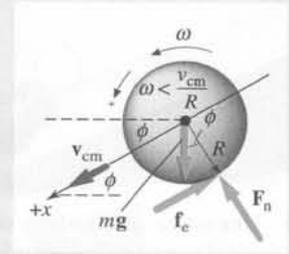


Figura 9.35

1. Aplicar la segunda ley de Newton para un sistema a lo largo del eje  $x$ :

$$\Sigma F_x = ma_{cmx}$$

$$mg \sen \theta - f_e = ma_{cm}$$

2. Aplicar la segunda ley de Newton para un movimiento de rotación, considerando rotaciones alrededor de un eje paralelo al eje instantáneo de rotación y que pasan por su centro de masas:

$$\Sigma \tau_i = I_{cm} \alpha$$

$$f_e R + 0 + 0 = I_{cm} \alpha$$

3. Relacionar  $a_{cm}$  y  $\alpha$  usando la condición de ausencia de deslizamiento:

$$a_{cm} = R \alpha$$

4. Se tiene tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Despejar en el paso 1  $f_e$  y en el paso 3  $\alpha$ , sustituir el resultado en el resultado del paso 2 y despejar  $a_{cm}$ :

$$f_e R = I_{cm} \alpha$$

$$(mg \sen \theta - ma_{cm}) R = I_{cm} \frac{a_{cm}}{R}$$

por lo tanto,

$$a_{cm} = \frac{g \sen \phi}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}}$$

5. Sustituir el resultado del paso 4 en el resultado del paso 1 y despejar  $f_e$ .

$$f_e = mg \sen \phi - ma_{cm}$$

$$= mg \sen \phi - \frac{mg \sen \phi}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}} = \frac{mg \sen \phi}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}}$$

6. Para una esfera sólida,  $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$  (véase la tabla 9.1):

$$a_{cm} = \frac{g \sen \phi}{1 + \frac{2}{5}} = \boxed{\frac{5}{7}g \sen \phi}$$

$$f_e = \frac{mg \sen \phi}{\frac{7}{2}} = \boxed{\frac{2}{7}mg \sen \phi}$$

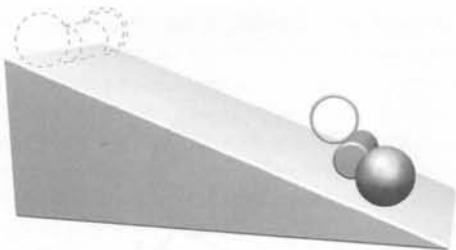
**Observación** Como la bola rueda sin deslizamiento, el rozamiento es estático. Obsérvese que el resultado es independiente del coeficiente de rozamiento estático, en tanto sea lo suficientemente grande para que la bola no deslice.

Los resultados de los pasos 5 y 6 del ejemplo 9.15 se aplican a cualquier objeto que esté rodando sin deslizarse con el centro de masas en el centro geométrico. En estos objetos,  $I_{cm} = \beta mR^2$ , donde para una esfera  $\beta = \frac{2}{5}$ , o bien  $\frac{1}{2}$  para un cilindro sólido, o bien 1 para un cilindro hueco, etc. Para estos objetos los resultados de los pasos 5 y 6 pueden escribirse como

$$f_e = \frac{mg \sen \phi}{1 + \beta^{-1}} \quad (9.31)$$

$$a_{cm} = \frac{g \sen \phi}{1 + \beta} \quad (9.32)$$

La aceleración lineal de cualquier objeto que rueda hacia abajo por un plano inclinado es menor que  $g \sen \theta$  debido a la fuerza de rozamiento dirigida en sentido ascendente. Obsérvese que estas aceleraciones son independientes de la masa y del radio de los objetos. Es decir, todas las esferas sólidas que ruedan sin deslizarse al bajar por el mismo plano inclinado tienen la misma aceleración. Sin embargo, si dejamos en libertad simultáneamente una



**Figura 9.36** Una esfera, un cilindro y un anillo parten juntos desde el reposo en la parte más alta del plano inclinado. En primer lugar llega al fondo la esfera, seguida por el cilindro y después el anillo.

esfera, un cilindro y un anillo desde la parte superior de un plano inclinado, y todos ellos ruedan sin deslizamiento, la esfera llegará en primer lugar a la base porque posee la mayor aceleración; en segundo lugar llegará el cilindro y el último será el anillo (figura 9.36). Si un bloque se desliza sin rozamiento por el mismo plano inclinado, alcanzará el fondo antes que los tres objetos rodantes.

Como el rozamiento es estático, no produce trabajo y no hay disipación de energía mecánica. Por lo tanto, puede utilizarse el principio de conservación de la energía mecánica para determinar la velocidad de un objeto rodante sin deslizamiento a lo largo de un plano inclinado en sentido descendente. En la parte superior del plano inclinado, la energía total es la energía potencial  $mgh$ . En el fondo la energía total es energía cinética. La conservación de la energía mecánica nos dice que

$$\frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 = mgh$$

Podemos utilizar la condición no deslizante para eliminar  $v_{\text{cm}}$  o  $\omega$ . Sustituyendo  $I_{\text{cm}} = \beta mR^2$  y  $\omega = v_{\text{cm}}/R$ , se obtiene  $\frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}\beta mR^2(v_{\text{cm}}^2/R^2) = mgh$ . Despejando  $v_{\text{cm}}^2$ , se obtiene

$$v_{\text{cm}}^2 = \frac{2gh}{1 + \beta} \quad (9.33)$$

Para un cilindro, con  $\beta = \frac{1}{2}$ , se obtiene  $v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{3}{4}gh}$ . Obsérvese que la velocidad es independiente de la masa y del radio del cilindro y es menor que  $\sqrt{2gh}$ , velocidad de un objeto que desliza sin rozamiento a lo largo de un plano inclinado.

La fuerza de rozamiento  $f_c$  en un objeto que rueda sin deslizar por un plano inclinado es menor o igual a su valor máximo; es decir,  $f_c \leq \mu_e F_n$ , donde  $F_n = mg \cos \phi$ . Sustituyendo en la ecuación 9.31 la expresión para la fuerza de rozamiento, se tiene

$$\frac{mg \sin \phi}{1 + \beta^{-1}} \leq \mu_e mg \cos \phi$$

o

$$\text{tg } \phi \leq (1 + \beta^{-1})\mu_e \quad (9.34)$$

(En un cilindro uniforme,  $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$ , por lo que  $\beta = \frac{1}{2}$  y  $\text{tg } \phi \leq 3\mu_e$ .) Si la tangente del ángulo del plano inclinado es mayor que  $(1 + \beta^{-1})\mu_e$ , el objeto se deslizará por la pendiente.

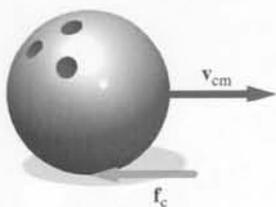
**Ejercicio** Un cilindro rueda hacia abajo por un plano inclinado  $\theta = 50^\circ$ . ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para el cual el cilindro rodará sin deslizamiento? (Respuesta 0,40.)

**Ejercicio** Determinar (a) la fuerza de rozamiento para un anillo que rueda hacia abajo por un plano inclinado y (b) el valor máximo de  $\text{tg } \theta$  para el cual el anillo rueda sin deslizamiento. (Respuesta (a)  $f = \frac{1}{2}mg \sin \theta$ ; (b)  $\text{tg } \theta \leq 2\mu_e$ .)

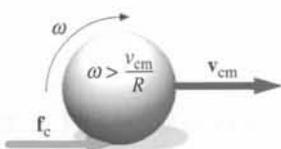
### \*Rodamiento con deslizamiento

Cuando un objeto se desliza mientras rueda, la condición no deslizante  $v_{\text{cm}} = R\omega$  deja de cumplirse. Supongamos que una bola de bolera se lanza sin rotación inicial. Cuando la bola se desliza a lo largo de la pista,  $v_{\text{cm}} > R\omega$ . Sin embargo, la fuerza de rozamiento reduce su velocidad lineal  $v_{\text{cm}}$  (figura 9.37) al mismo tiempo que aumenta su velocidad angular  $\omega$ , hasta que se cumple la condición de ausencia de deslizamiento  $v_{\text{cm}} = R\omega$ . Entonces la bola rueda sin deslizamiento.

Otro ejemplo de rodamiento con deslizamiento es el de una bola que gira sobre sí misma, como ocurre cuando el taco del billar golpea a la bola en un punto que está por encima de  $(2/5)R$  sobre el centro (véase ejemplo 9.14) de modo que  $v_{\text{cm}} < R\omega$ . En este caso, la fuerza de rozamiento incrementa  $v$  y reduce  $\omega$  hasta que se alcanza la condición no deslizante  $v_{\text{cm}} = R\omega$  (figura 9.38).



**Figura 9.37** Una bola se mueve sin rotación inicial. La fuerza de rozamiento  $f_c$  ejercida por el suelo reduce la velocidad del centro de masas  $v$  e incrementa la velocidad angular  $\omega$  hasta que se alcanza la condición de rodadura  $v = R\omega$ .



**Figura 9.38** Una bola gira sobre sí misma acelerando la bola en la dirección del movimiento.

### EJEMPLO 9.16 | Una bola de bolera que desliza

Una bola de masa  $M$  y radio  $R$  se lanza de tal modo que cuando toca el suelo se mueve horizontalmente con velocidad  $v_0 = 5$  m/s y avanza sin rodar. El coeficiente de rozamiento cinético entre la bola y el suelo es  $\mu_c = 0,08$ . Determinar (a) el tiempo durante el cual la bola se desliza y (b) la distancia recorrida deslizando, antes de que ruede sin deslizar.

**Planteamiento del problema** Calculamos  $v_{cm}$  y  $\omega$  en función del tiempo, hacemos  $v_{cm} = R\omega$  y deducimos  $t$ . Las aceleraciones lineal y angular se determinan a partir  $\Sigma F = ma$  y  $\tau = I\alpha$ . La dirección del movimiento se toma como positiva. Hay deslizamiento y rozamiento cinético, por lo que se disipa energía mecánica. Por lo tanto, no se puede usar el principio de conservación de la energía mecánica.

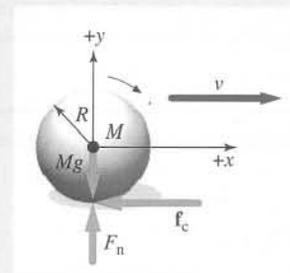


Figura 9.39

(a) 1. Dibujar un diagrama de las fuerzas que actúan sobre la bola (figura 9.39).

2. La fuerza neta que actúa sobre la bola es la fuerza de rozamiento cinético,  $f_c$ , que actúa en la dirección negativa del eje  $x$ . Aplicar la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_x = Ma_{cm,x}$$

$$-f_c = Ma_{cm,x}$$

3. La aceleración va en la dirección negativa de  $x$  y  $a_{cm,y} = 0$ . Determinar primero  $F_n$  y después  $f_c$ :

$$\Sigma F_y = Ma_{cm,y} = 0 \Rightarrow F_n = Mg$$

por lo tanto

$$f_c = \mu_c F_n = \mu_c Mg$$

4. Determinar la aceleración usando los resultados de los pasos 2 y 3:

$$-\mu_c Mg = Ma_{cm,x} \Rightarrow a_{cm,x} = -\mu_c g$$

5. Relacionar la velocidad lineal con la aceleración y con el tiempo utilizando la ecuación cinemática:

$$v_{cm,x} = v_0 + a_{cm,x}t = v_0 - \mu_c g t$$

6. Para determinar  $\alpha$ , aplicar la segunda ley de Newton para la rotación. Calcular los momentos alrededor de un eje que pase por el centro de masas. Obsérvese que en el diagrama de fuerzas el sentido positivo va en la dirección de las agujas del reloj:

$$\Sigma \tau = I_{cm} \alpha$$

$$\mu_c MgR + 0 + 0 = \frac{2}{5} MR^2 \alpha$$

por lo tanto

$$\alpha = \frac{5\mu_c g}{2R}$$

7. Relacionar la velocidad angular con la aceleración angular y el tiempo usando la ecuación cinemática:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \frac{5\mu_c g}{2R} t$$

8. Despejar el tiempo  $t$  cuando se cumple  $v_{cm} = R\omega$ :

$$v_{cm} = R\omega$$

$$v_0 - \mu_c g t = \frac{5}{2} \mu_c g t$$

por lo tanto,

$$t = \frac{2v_0}{7\mu_c g} = \frac{2(5 \text{ m/s})}{7(0,08)(9,81 \text{ m/s}^2)} = \boxed{1,82 \text{ s}}$$

(b) La distancia recorrida en 1,82 s es:

$$\begin{aligned} \Delta x &= v_0 t + \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \\ &= v_0 \frac{2v_0}{7\mu_c g} + \frac{1}{2} (-\mu_c g) \left( \frac{2v_0}{7\mu_c g} \right)^2 = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu_c g} \\ &= \frac{12}{49} \frac{(5 \text{ m/s})^2}{(0,08)(9,81 \text{ m/s}^2)} = \boxed{7,80 \text{ m}} \end{aligned}$$

**Ejercicio** Determinar la velocidad de la bola de bolera cuando comienza a rodar sin deslizar. (Respuesta  $v_{cm} = \frac{5}{7} v_0$ ). Este resultado es independiente del coeficiente de rozamiento cinético. La velocidad de rodadura es  $\frac{5}{7} v_0$ , ya sea  $\mu_c$  grande o pequeño. La energía mecánica total perdida es, por lo tanto, independiente de  $\mu_c$ . (Sin embargo, el tiempo y la distancia dependen sensiblemente del valor de  $\mu_c$ .)

**Ejercicio** Determinar la energía cinética total de la bola después de que comience a rodar sin deslizamiento. (Respuesta  $E_c = \frac{5}{14} m v_0^2$ )

**Observación** En una buena bolera, la pista de las calles está ligeramente engrasada de forma que la bola resbala una cierta distancia, proporcionando al jugador mayor control sobre su lanzamiento.

# Resumen

- 1 El desplazamiento angular, la velocidad angular y la aceleración angular son magnitudes fundamentales definidas en la cinemática de rotación.
- 2 El momento de una fuerza y el momento de inercia son importantes conceptos dinámicos derivados. El momento es una medida de la capacidad de una fuerza para que un objeto comience o termine de girar. El momento de inercia es una medida de la resistencia inercial de un objeto a las aceleraciones angulares. Depende de la distribución de la masa respecto al eje de rotación.
- 3 El teorema de los ejes paralelos, que resulta de la definición del momento de inercia, simplifica frecuentemente el cálculo de  $I$ .
- 4 La segunda ley de Newton para la rotación,  $\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$  se deduce de la segunda ley de Newton y de las definiciones de  $\tau$ ,  $I$  y  $\alpha$ . Es una relación importante para resolver problemas que implican la rotación de un objeto rígido alrededor de un eje de dirección fija.

## TEMA

## OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

### 1. Velocidad angular y aceleración angular

#### Aceleración

Velocidad angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{Definición}) \quad (9.2)$$

Aceleración angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (\text{Definición}) \quad (9.3)$$

Velocidad tangencial

$$v_t = r\omega \quad (9.7)$$

Aceleración tangencial

$$a_t = r\alpha \quad (9.8)$$

Aceleración centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad (9.9)$$

### 2. Ecuaciones de rotación con aceleración angular constante

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (9.4)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (9.5)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (9.6)$$

### 3. Momento de inercia

Sistema de partículas

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{Definición}) \quad (9.10)$$

Sistema continuo

$$I = \int r^2 dm \quad (9.12)$$

Teorema de los ejes paralelos

El momento de inercia respecto a un eje situado a la distancia  $h$  de otro eje paralelo que pasa por el centro de masas es

$$I = I_{\text{cm}} + Mh^2 \quad (9.13)$$

en donde  $I_{\text{cm}}$  es el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masas y  $M$  es la masa total del objeto.

### 4. Energía

Energía cinética de rotación alrededor de un eje fijo

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (9.11)$$

Energía cinética de un objeto rodante

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 \quad (9.29)$$

Potencia

$$P = \tau\omega \quad (9.24)$$

### 5. Momento de una fuerza

El momento producido por una fuerza es igual al producto de la componente tangencial de la fuerza por la distancia radial al eje.

$$\tau = F_t r = Fr \sin \phi = F\ell \quad (9.19)$$

## 6. Segunda ley de Newton aplicada a la rotación

$$\tau_{\text{neto, ext}} = \sum_i \tau_{i, \text{ext}} = I\alpha \quad (9.18)$$

Si en un sistema de referencia que se mueve con el centro de masas se calculan los momentos de las fuerzas respecto a un eje que pasa por el centro de masas, la segunda ley de Newton para la rotación se cumple para rotaciones alrededor de un eje que pase por el centro de masas, aunque el sistema de referencia no sea inercial.

## 7. Condiciones no deslizantes

Cuando una cuerda arrollada a un polea o disco no desliza, las magnitudes lineales y angulares están relacionadas por

$$v_t = R\omega \quad (9.21)$$

$$a_t = R\alpha \quad (9.22)$$

## 8. Objetos rodantes

Rodadura sin deslizamiento

$$v_{\text{cm}} = R\omega \quad (9.26)$$

\*Rodadura con deslizamiento

Cuando un objeto rueda y desliza,  $v_{\text{cm}} \neq R\omega$ . El rozamiento cinético ejerce una fuerza que tiende a modificar  $v_{\text{cm}}$  y un momento que cambia  $\omega$  hasta que  $v_{\text{cm}} = R\omega$  y el objeto solamente rueda.

# Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

Tomar  $g = 9,81 \text{ N/kg} = 9,81 \text{ m/s}^2$  y despreciar el rozamiento en todos los problemas a menos que se indique lo contrario.

### Problemas conceptuales

1 ● SSM Dos puntos sobre un disco giran a velocidad angular constante: uno de ellos está en el borde del disco y el otro a mitad de distancia entre el borde y el eje. ¿Cuál de los dos puntos recorre una mayor distancia en un tiempo determinado? ¿Cuál gira un ángulo mayor? ¿Cuál posee mayor velocidad? ¿Y mayor velocidad angular? ¿Cuál tiene mayor aceleración tangencial? ¿Y mayor aceleración angular? ¿Y mayor aceleración centrípeta?

2 ● Verdadero o falso:

- (a) La velocidad angular y la velocidad lineal tienen las mismas dimensiones.
- (b) Todas las partes de una rueda giratoria deben tener la misma velocidad angular.
- (c) Todas las partes de una rueda giratoria deben tener la misma aceleración angular.

3 ●● Partiendo del reposo, un disco realiza 10 revoluciones hasta alcanzar la velocidad angular  $\omega$ . Con aceleración angular constante, ¿cuántas revoluciones adicionales debe realizar para alcanzar una velocidad angular  $2\omega$ ? (a) 10 rev. (b) 20 rev. (c) 30 rev. (d) 40 rev. (e) 50 rev.

4 ● SSM Las dimensiones del momento de una fuerza son las mismas que las del (a) impulso (b) energía (c) momento lineal (d) ninguna de las anteriores

5 ● El momento de inercia de un objeto de masa  $M$  (a) es una propiedad intrínseca del objeto. (b) Depende de la elección del eje de rotación. (c) Es proporcional a  $M$  independientemente de la elección del eje. (d) Ambos (b) y (c) son correctos.

6 ● SSM ¿Puede un objeto seguir girando en ausencia del momento de una fuerza?

7 ● El momento resultante aplicado, ¿incrementa siempre la velocidad angular de un objeto?

8 ● Verdadero o falso:

- (a) Si la velocidad angular de un objeto es cero en algún momento, el momento resultante que actúa sobre el objeto debe ser cero en ese instante.
- (b) El momento de inercia de un objeto depende de la localización del eje de rotación.
- (c) El momento de inercia de un objeto depende de la velocidad angular del objeto.

9 ● Un disco gira libremente alrededor de un eje. Una fuerza aplicada a una distancia  $d$  del eje le ocasiona una aceleración angular  $\alpha$ . ¿Qué aceleración angular se produce si la misma fuerza se aplica a una distancia  $2d$  del eje? (a)  $\alpha$ . (b)  $2\alpha$ . (c)  $\alpha/2$ . (d)  $4\alpha$ . (e)  $\alpha/4$ .

10 ● SSM El momento de inercia de un objeto alrededor de un eje que no pasa por su centro de masas es \_\_\_\_\_ el momento de inercia res-

pecto a un eje paralelo que pasa por su centro de masas. (a) Siempre menor que. (b) Algunas veces menor que. (c) A veces igual que. (d) Siempre mayor que.

11 ● SSM Un momento constante actúa sobre un tiovivo. La potencia suministrada por el momento es (a) constante. (b) Proporcional a la velocidad angular del tiovivo. (c) Cero. (d) Ninguna de las anteriores.

12 ● Verdadero o falso: Cuando un objeto rueda sin deslizamiento, el rozamiento no realiza trabajo alguno sobre el objeto.

13 ● ¿Por qué se pone el tirador de una puerta lo más lejos posible de las bisagras?

14 ● SSM Una rueda de radio  $R$  rueda sin deslizamiento por una superficie estacionaria plana. La velocidad del punto de la periferia que está en contacto con la superficie, relativo a la superficie es (a) igual a  $R\omega$  en el sentido del movimiento del centro de masas. (b) Igual a  $R\omega$  en sentido opuesto al del movimiento del centro de masas. (c) Cero. (d) Igual a la velocidad del centro de masas y en el mismo sentido. (e) Igual a la velocidad del centro de masas, pero en sentido opuesto.

15 ●● Un cilindro sólido uniforme y una esfera sólida uniforme tienen masas iguales. Ambos cuerpos ruedan sin deslizamiento sobre una superficie horizontal. Si sus energías cinéticas son iguales, entonces (a) la velocidad de traslación del cilindro es mayor que la de la esfera. (b) La velocidad de traslación del cilindro es menor que la de la esfera. (c) Las velocidades de traslación de los dos objetos son iguales. (d) Los resultados (a), (b) y (c) dependen de los radios de los objetos.

16 ● SSM Dos tubos de aspecto idéntico de 1 m de longitud contienen piezas de plomo de 10 kg de masa total (mucho mayor que la masa de los tubos). En el primer tubo el plomo está concentrado en el centro, mientras que en el segundo el plomo está dividido en dos masas iguales colocadas en los dos extremos del tubo. Si los tubos están cerrados por ambos extremos, ¿cómo puede determinarse cuál es cada uno de los tubos?

17 ●● Partiendo del reposo al mismo tiempo, una moneda y un anillo ruedan por un plano inclinado sin deslizamiento. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? (a) El anillo llega primero a la base del plano. (b) La moneda llega en primer lugar. (c) El anillo y la moneda llegan simultáneamente. (d) El resultado de la carrera depende de sus masas relativas. (e) El resultado de la carrera depende de sus diámetros relativos.

18 ●● Un arco de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizamiento. ¿Es mayor su energía cinética de traslación o su energía cinética de rotación? (a) La energía cinética de traslación es mayor. (b) La energía cinética de rotación es mayor. (c) Ambas son iguales. (d) La respuesta depende del radio. (e) La respuesta depende de la masa.

19 ●● Un disco de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizamiento. ¿Es mayor su energía cinética de traslación o su energía cinética de rotación? (a) La energía cinética de traslación es mayor. (b) La energía cinética de rotación es mayor. (c) Ambas son iguales. (d) La respuesta depende del radio. (e) La respuesta depende de la masa.

20 ●● Una bola rueda sin deslizamiento a lo largo de un plano horizontal. Demostrar que la fuerza de rozamiento que actúa sobre la bola debe ser cero. *Sugerencia: Considerar una dirección posible para la acción de la fuerza de rozamiento y los efectos que esta fuerza ejercería sobre la velocidad del centro de masas y sobre la velocidad angular.*

21 ● Verdadero o falso: Cuando una esfera rueda y se desliza sobre una superficie rugosa, la energía mecánica se disipa.

22 ● Un taco de billar golpea una bola en un punto muy próximo a su parte más superior, de modo que comienza a girar sobre sí misma. Mientras desliza, la fuerza de rozamiento (a) incrementa  $v_{cm}$ , (b) decrece  $v_{cm}$ , (c) no tiene efecto sobre  $v_{cm}$ .

## Aproximaciones y estimaciones

23 ●● Una bicicleta de masa 14 kg lleva ruedas de 1,2 m de diámetro, cada una de masa 3 kg. La masa del ciclista es 38 kg. Estimar la fracción de la energía cinética total de la bicicleta y el ciclista asociada a la rotación de las ruedas.

24 ●● ¿Por qué cuando cae al suelo una tostada siempre lo hace por el lado que tiene mantequilla o mermelada? La pregunta puede parecer tonta, pero ha sido objeto de debate científico serio. El análisis es demasiado complicado para reproducirlo aquí, pero R.D. Edge y Darryl Steiner demostraron que una tostada a la cual se la empuja suavemente hasta el borde de una mesa, cae cuando se inclina un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal (véase la figura 9.40) y tiene una velocidad angular de  $\omega = 0,956\sqrt{g/l}$ , donde  $l$  es la longitud del lado de la tostada (supuesta de forma cuadrada). Suponiendo que una tostada empieza a caer con la mermelada o la mantequilla hacia arriba, ¿de qué lado caerá si ésta cae desde una mesa de 0,5 m de altura? ¿Qué ocurre si la mesa tiene 1 m de altura? Suponer que la tostada tiene 0,1 m de lado y que cae al suelo con la mermelada o la mantequilla hacia abajo si el ángulo que forma con el suelo está entre  $180^\circ$  y  $270^\circ$ . (Si la tostada gira un ángulo superior a  $360^\circ$  tendremos que reducirlo al intervalo  $0^\circ - 360^\circ$ ). Ignórense las fuerzas debidas a la resistencia del aire. Para el lector interesado en este problema y en otros muchos, se recomienda el magnífico libro de Robert Erlich, *Why Toast Lands Jelly-Side down: Zen and the Art of Physics Demonstrations*<sup>1</sup> (Por qué las tostadas caen por el lado de la mermelada: Zen y el arte de las demostraciones de la física).

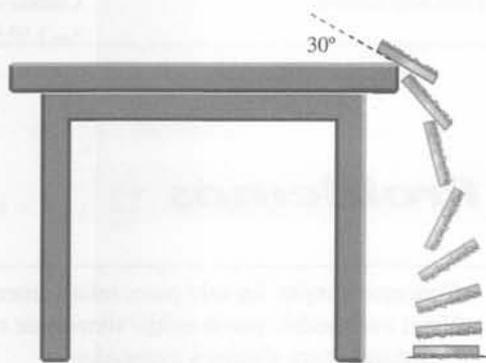


Figura 9.40 Problema 24

25 ●● SSM Consideremos el momento de inercia de un hombre adulto alrededor de un eje que pasa verticalmente por el centro de su cuerpo. Cuando esta persona está de pie con sus brazos pegados al cuerpo o cuando está con sus brazos extendidos tiene momentos de inercia distintos. Estimar el cociente entre ambos momentos de inercia.

## Velocidad angular y aceleración angular

26 ● Una partícula se mueve en una circunferencia de radio 90 m con una velocidad de módulo constante de 25 m/s. (a) ¿Cuál es su velocidad angular en radianes por segundo alrededor del centro de la circunferencia? (b) ¿Cuántas revoluciones realiza en 30 s?

27 ● **SOLVE** Una rueda parte del reposo y tiene aceleración angular constante de  $2,6 \text{ rad/s}^2$ . (a) ¿Cuál es su velocidad angular después de 6 s? (b) ¿Qué ángulo habrá girado? (c) ¿Cuántas revoluciones habrá realizado? (d) ¿Cuál es la velocidad y la aceleración de un punto situado a 0,3 m del eje de rotación?

28 ● SSM Un tocadiscos que gira a  $33\frac{1}{3} \text{ rev/min}$  se desconecta. Se frena con aceleración angular constante y queda parado al cabo de 26 s. (a) Hallar la aceleración angular. (b) ¿Cuál es la velocidad angular media del tocadiscos? (c) ¿Cuántas revoluciones realiza antes de detenerse?

29 ● Un disco de 12 cm de radio empieza a girar alrededor de su eje partiendo del reposo con aceleración angular constante de  $8 \text{ rad/s}^2$ . Al cabo de  $t = 5 \text{ s}$ , ¿cuál es (a) la velocidad angular del disco y (b) las aceleraciones tangencial  $a_t$  y centrípeta  $a_c$  de un punto del borde del disco?

<sup>1</sup> Robert Erlich, *Why toast lands Jelly-side Down*; Princeton, NJ: Princeton University Press (1997)

**30** ● **SOLVE** Una rueda Ferris de radio 12 m da una vuelta cada 27 s. (a) ¿Cuál es su velocidad angular en radianes por segundo? (b) ¿Cuál es la velocidad lineal de un pasajero? (c) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un pasajero?

**31** ● Un ciclista parte del reposo. Al cabo de 8 s las ruedas han verificado 3 rev. (a) ¿Cuál es la aceleración angular de las ruedas? (b) ¿Cuál es su velocidad angular al cabo de 8 s?

**32** ● ¿Cuál es la velocidad angular de la Tierra en rad/s al girar alrededor de su eje?

**33** ● Una rueda giratoria describe 5 rad en 2,8 s antes de detenerse con aceleración angular constante. La velocidad angular inicial de la rueda antes de iniciar su frenado era (a) 0,6 rad/s. (b) 0,9 rad/s. (c) 1,8 rad/s. (d) 3,6 rad/s. (e) 7,2 rad/s.

**34** ● Una bicicleta tiene ruedas de 1,2 m de diámetro. El ciclista acelera desde el reposo con aceleración constante hasta alcanzar la velocidad de 24 km/h en 14,0 segundos. ¿Cuál es la aceleración angular de las ruedas?

**35** ●● **SSM** **SOLVE** La cinta de una "cassette" de vídeo VHS estándar tiene una longitud  $L = 246$  m; su duración en funcionamiento es de 2,0 horas (figura 9.41). Al comienzo, el carrete que contiene la cinta tiene un radio externo de aproximadamente  $R = 45$  mm, mientras que su radio interno es  $r = 12$  mm aproximadamente. En cierto punto de su recorrido, ambos carretes tienen la misma velocidad angular. Calcular esta velocidad angular en radianes por segundo y revoluciones por minuto.

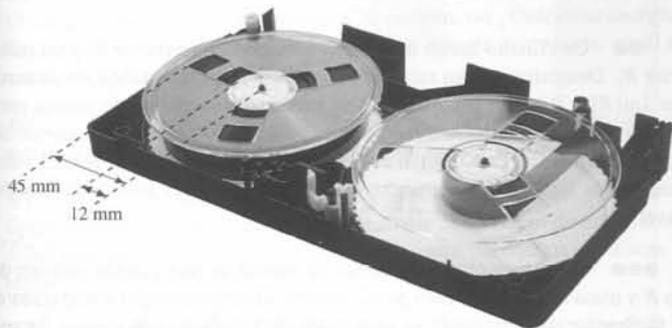


Figura 9.41 Problema 35

### Momento de una fuerza, momento de inercia y segunda ley de Newton aplicada a la rotación

**36** ● **SOLVE** Una muela de afilar en forma de disco tiene una masa de 1,7 kg y un radio de 8 cm y está girando a 730 rev/min. Cuando se desconecta el motor, una mujer continúa afilando su hacha manteniéndola contra la muela durante 9 s hasta que ésta se detiene. (a) Hallar la aceleración angular de la muela de afilar. (b) ¿Cuál es el momento que ejerce el hacha sobre la muela? Suponer constante la aceleración angular y que no existen otros momentos de fuerzas de rozamiento.

**37** ● **SSM** Un cilindro de 2,5 kg y radio 11 cm, inicialmente en reposo, puede girar alrededor de su eje. Sobre él, se arrolla una cuerda de masa despreciable que tira con una fuerza de 17 N. Determinar (a) el momento ejercido por la cuerda, (b) la aceleración angular del cilindro y (c) la velocidad angular del cilindro al cabo de  $t = 5$  s.

**38** ●● **SOLVE** Una rueda montada sobre un eje con rozamiento se encuentra inicialmente en reposo. Durante 20 s se aplica a la rueda un momento externo de  $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ , con lo cual la rueda adquiere una velocidad angular de 600 rev/min. Se retira entonces el momento externo y la rueda alcanza el reposo 120 s más tarde. Determinar (a) el momento de inercia de la rueda y (b) el momento de rozamiento, supuesto constante.

**39** ●● Un péndulo formado por una cuerda de longitud  $L$  y una lenteja de masa  $m$  oscila en un plano vertical. Cuando la cuerda forma un ángulo  $\theta$  con la vertical, (a) ¿cuál es la componente tangencial de la aceleración de la lenteja? (b) ¿Cuál es el momento ejercido respecto al punto pivote? (c) Demostrar que  $\tau = I\alpha$  con  $a_t = L\alpha$  da lugar a la misma aceleración tangencial deducida en el apartado (a).

**40** ●●● **SSM** Una barra uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$  pivota sobre un extremo y cuelga como se muestra en la figura 9.42, de modo que puede oscilar sin rozamiento alrededor del pivote. Una fuerza horizontal  $F_0$  golpea la barra durante un corto tiempo  $\Delta t$  a una distancia  $x$  por debajo del pivote, como indica la figura. (a) Demostrar que la velocidad del centro de masas de la barra inmediatamente después del golpe es  $v_0 = 3F_0x \Delta t / 2ML$ . (b) Determinar la componente horizontal de la fuerza suministrada por el pivote y demostrar que esta componente de la fuerza es cero si  $x = \frac{2}{3}L$ . (Nota: el punto  $x = \frac{2}{3}L$  se llama centro de percusión de la barra.)

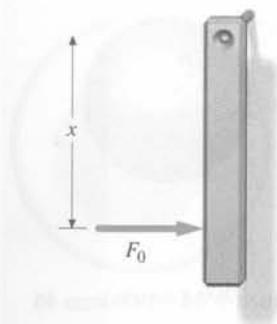


Figura 9.42 Problema 40

**41** ●●● Un disco horizontal uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  gira alrededor del eje vertical que pasa por su centro con una velocidad angular  $\omega$ . Cuando se sitúa sobre una superficie horizontal, el coeficiente de rozamiento cinético entre el disco y la superficie es  $\mu_c$ . (a) Determinar el momento  $d\tau$  ejercido por la fuerza de rozamiento sobre un elemento circular de radio  $r$  y anchura  $dr$ . (b) Determinar el momento resultante ejercido por el rozamiento sobre el disco. (c) Determinar el tiempo necesario para que el disco se detenga.

### Cálculo del momento de inercia

**42** ● **SOLVE** Una pelota de tenis posee una masa de 57 g y un diámetro de 7 cm. Determinar el momento de inercia alrededor de su diámetro. Suponer que la pelota es una esfera hueca de paredes delgadas.

**43** ● **SSM** **SOLVE** Cuatro partículas están en los vértices de un cuadrado unidas por varillas sin masa, de modo que  $m_1 = m_4 = 3 \text{ kg}$  y  $m_2 = m_3 = 4 \text{ kg}$ . La longitud del lado del cuadrado es  $L = 2 \text{ m}$  (figura 9.43). Hallar el momento de inercia respecto al eje  $z$ .

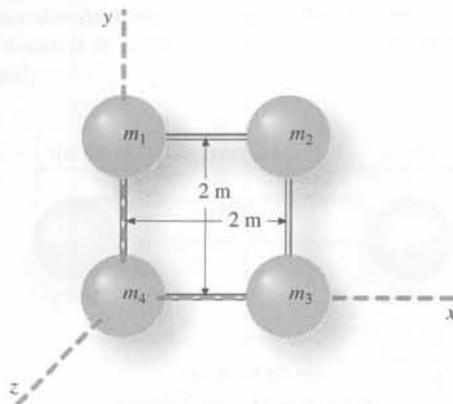


Figura 9.43 Problemas 43–45

44 ● Utilizar el teorema de los ejes paralelos y los resultados del problema 43 para hallar el momento de inercia del sistema de cuatro partículas de la figura 9.43 alrededor de un eje perpendicular al plano de la configuración y que pasa por el centro de masas. Comprobar el resultado mediante cálculo directo.

45 ● Para el sistema de cuatro partículas de la figura 9.43, (a) hallar el momento de inercia  $I_x$  alrededor del eje  $x$  que pasa por  $m_3$  y  $m_4$ . (b) Hallar  $I_y$  alrededor del eje  $y$  que pasa por  $m_1$  y  $m_3$ .

46 ● **ISOLAR** Utilizar el teorema de los ejes paralelos para hallar el momento de inercia de una esfera maciza de masa  $M$  y radio  $R$  alrededor de un eje tangente a la esfera (figura 9.44).

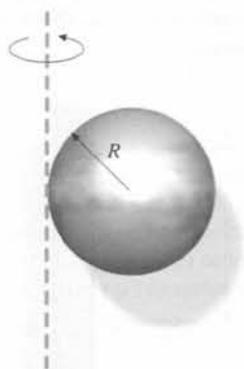


Figura 9.44 Problema 46

47 ●● **ISOLAR** Una rueda de vagón de 1,0 m de diámetro está formada por una llanta delgada de masa 8 kg y seis radios, cada uno de los cuales tiene una masa de 1,2 kg. Determinar el momento de inercia de la rueda respecto a su eje de rotación.

48 ●● **SSM** **ISOLAR** Dos masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$  están separadas por una barra sin masa de longitud  $L$ . (a) Deducir una expresión para el momento de inercia de este sistema respecto a un eje perpendicular a la barra que pasa a través de ésta por un punto situado a la distancia  $x_1$  de la masa  $m_1$ . (b) Calcular  $dI/dx$  y demostrar que  $I$  es mínimo cuando el eje pasa por el centro de masas del sistema.

49 ●● Una placa rectangular uniforme tiene una masa  $m$  y sus lados valen  $a$  y  $b$ . (a) Demostrar por integración que su momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la placa y que pasa por uno de sus vértices es  $\frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ . (b) ¿Cuál es el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de masas y que sea perpendicular a la placa?

50 ●● **SSM** Dos jóvenes  $A$  y  $B$  están realizando un trabajo de investigación intensiva sobre el "bastón acrobático giratorio teórico". Ambos utilizan el mismo modelo de bastón: dos esferas uniformes, cada una de masa 500 g y

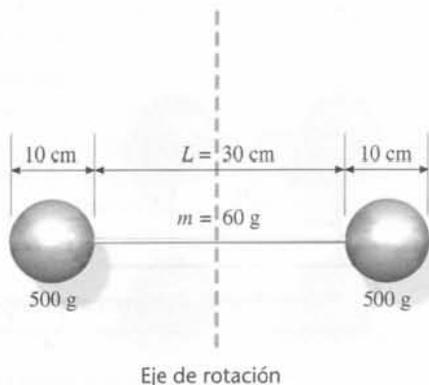


Figura 9.45 Problema 50

radio 5 cm, montadas en los extremos de una varilla uniforme de 30 cm de longitud y masa 60 g (figura 9.50).  $A$  y  $B$  desean calcular el momento de inercia del bastón modelo respecto a un eje perpendicular a la varilla que pasa por su centro.  $A$  utiliza la aproximación de que las dos esferas pueden considerarse como partículas puntuales que distan 20 cm del eje de rotación y que la masa de la varilla es despreciable.  $B$ , sin embargo, hace los cálculos sin aproximaciones. (a) Comparar los dos resultados. (b) Si las esferas tuvieran la misma masa, pero fueran huecas, ¿aumentaría o disminuiría la inercia rotacional? Justificar la respuesta brevemente. No es necesario calcular el nuevo valor de  $I$ .

51 ●● La molécula de metano ( $\text{CH}_4$ ) tiene cuatro átomos de hidrógeno localizados en los vértices de un tetraedro regular de lado 0,18 nm, con el átomo de carbono en el centro (figura 9.46). Determinar el momento de inercia de esta molécula respecto a un eje de rotación que pase a través del átomo de carbono y uno de los átomos de hidrógeno.

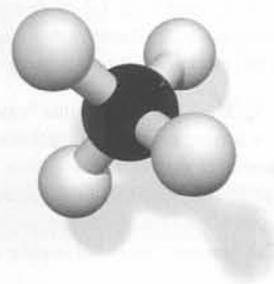


Figura 9.46 Problema 51

52 ●● Un cilindro hueco de masa  $m$  tiene un radio exterior  $R_2$  y un radio interior  $R_1$ . Demostrar que su momento de inercia respecto a su eje de simetría es  $I = \frac{1}{2}m(R_2^2 + R_1^2)$ . En la sección 9.3 se encontró el momento de inercia para un cilindro sólido integrando directamente, primero calculando el momento de inercia para un disco. Este cálculo es el mismo que aquél excepto para el valor de uno de los límites de integración y la expresión para el área de la sección transversal.

53 ●●● Demostrar que el momento de inercia de una corteza esférica de radio  $R$  y masa  $m$  es  $\frac{2}{3}mR^2$ . Esto puede hacerse directamente por integración o, más fácilmente, determinando el incremento del momento de inercia de una esfera sólida cuando cambia su radio. Para hacer esto último demostrar en primer lugar que el momento de inercia de una esfera sólida de densidad  $\rho$  es  $I = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$ . Después, calcular la variación  $dI$  del momento de inercia  $I$  para una variación  $dR$  del radio y tener en cuenta que la masa de esta corteza es  $dm = 4\pi R^2\rho dR$ .

54 ●●● **SSM** La densidad de la Tierra no es uniforme. Varía con la distancia  $r$  al centro de la Tierra en la forma  $\rho = C(1,22 - r/R)$ , en donde  $R$  es el radio de la Tierra y  $C$  una constante. (a) Determinar  $C$  en función de la masa total  $M$  y el radio  $R$ . (b) Determinar el momento de inercia de la Tierra (véase problema 53).

55 ●●● Utilizar el cálculo integral para determinar el momento de inercia de un cono sólido homogéneo circular recto de altura  $H$ , radio de la base  $R$  y densidad  $\rho$  respecto a su eje de simetría.

56 ●●● Utilizar el cálculo integral para determinar el momento de inercia de un disco delgado uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  respecto a un diámetro como eje de rotación. Comprobar la respuesta en la tabla 9.1.

57 ●●● Un vendedor de helados junto a la carretera utiliza conos rotatorios para llamar la atención de los viajeros. Cada cono gira alrededor de un eje perpendicular a su eje de simetría que pasa por el vértice. Los tamaños de los conos son variables y el propietario piensa si sería más rentable energéticamente utilizar varios conos más pequeños o unos pocos muy grandes. Para obtener una respuesta debe calcular el momento de inercia de un cono circular recto homogéneo de altura  $H$ , radio de la base  $R$  y densidad  $\rho$ . ¿Cuál es el resultado?

**Energía cinética de rotación**

**58** ● Las partículas de la figura 9.47 se unen mediante una varilla muy ligera cuyo momento de inercia puede despreciarse. Giran alrededor del eje  $y$  con velocidad angular  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ . (a) Hallar la velocidad de cada partícula y utilizarla para calcular la energía cinética de este sistema directamente a partir de  $\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ . (b) Hallar el momento de inercia alrededor del eje  $y$  y calcular la energía cinética a partir de  $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$ .

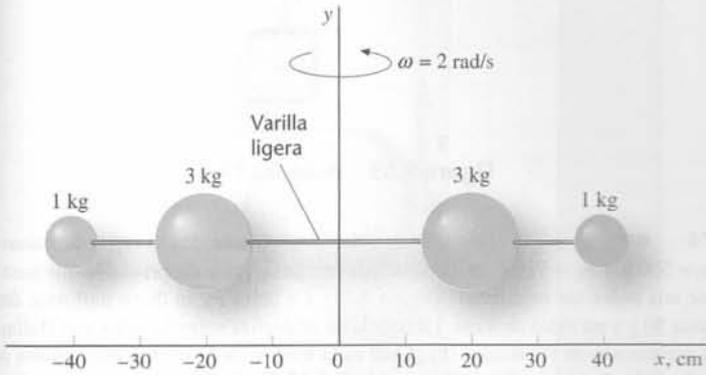


Figura 9.47 Problema 58

**59** ● **SSM** **¡SOLVE!** Una bola sólida de masa 1,4 kg y diámetro 15 cm gira alrededor de su diámetro a 70 rev/min. (a) ¿Cuál es su energía cinética? (b) Si se suministran 2 J de energía a su energía de rotación, ¿cuál será la nueva velocidad angular de la bola?

**60** ● Un motor desarrolla un par de 400 N · m a 3700 rev/min. Determinar la potencia suministrada por el motor.

**61** ● Dos masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$  están conectadas por una varilla ligera de longitud  $L$ . El conjunto gira alrededor de su centro de masas con velocidad angular  $\omega$ . Demostrar que la relación entre las energías cinéticas de las masas es  $E_{c1}/E_{c2} = m_2/m_1$ .

**62** ● **¡SOLVE!** ✓ Calcular la energía cinética de rotación de la Tierra alrededor de su eje y compararla con la energía cinética del movimiento del centro de masas de la Tierra en su órbita alrededor del Sol. Suponer que la Tierra es una esfera homogénea de masa  $6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$  cuyo radio vale  $6,4 \times 10^6 \text{ m}$ . El radio de la órbita terrestre es  $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ .

**63** ● **SSM** **¡SOLVE!** Un bloque de 2000 kg asciende a una velocidad constante de 8 cm/s mediante un cable de acero que pasa por una polea de masa despreciable y se arrolla en el tambor de un torno impulsado por un motor (figura 9.48). El radio del tambor es de 30 cm. (a) ¿Qué fuerza ejerce el cable? (b) ¿Qué momento ejerce la tensión del cable sobre el tambor? (c) ¿Cuál es la velocidad angular del tambor? (d) ¿Qué potencia debe desarrollar el motor para hacer girar el tambor del torno?

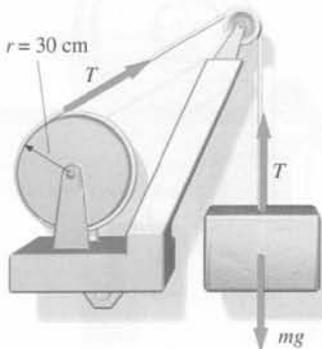


Figura 9.48 Problema 63

**64** ● Un disco uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  puede girar libremente respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano del disco. Se sujeta una pequeña partícula de masa  $m$  al borde del disco y en su parte superior, directamente encima del eje de rotación. El sistema se hace girar inicialmente con suavidad. (a) ¿Cuál es la velocidad angular del disco cuando la partícula se encuentra en el punto más bajo de su trayectoria? (b) En este punto, ¿cuál es la fuerza ejercida por el disco sobre la partícula para que ésta permanezca en el disco?

**65** ● Un anillo de 1,5 m de diámetro pivota sobre un punto de su circunferencia de modo que gira alrededor de un eje horizontal. Inicialmente la línea que pasa por el soporte y por el centro del anillo es horizontal (figura 9.49). (a) Si se deja oscilar libremente desde el reposo, ¿cuál es su velocidad angular máxima? (b) ¿Qué velocidad angular debe imprimirse inicialmente para que dé justamente una revolución completa ( $360^\circ$ )?

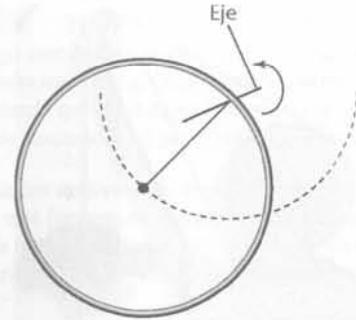


Figura 9.49

**66** ● **¡SOLVE!** Queremos diseñar un coche que utilice la energía almacenada en un volante formado por un cilindro de 100 kg uniforme y de radio  $R$ . El volante debe suministrar una media de 2 MJ/km de energía mecánica, con una velocidad angular máxima de 400 rev/s. Determinar el valor mínimo de  $R$ , tal que el coche pueda recorrer 300 km sin que el volante necesite ser recargado.

**67** ● Una escalera portátil de 8,6 m de longitud y masa 60 kg se sitúa en posición casi vertical contra la pared de un edificio. Una persona que pretende bajar por la escalera está de pie sobre un peldaño de modo que tiene su centro de masas a la altura de la parte más alta de la escalera. Su masa es de 80 kg. Al inclinarse ligeramente, la escalera comienza a girar alrededor de su base, alejándose de la pared. ¿Qué es menos peligroso para esta persona: saltar rápidamente de la escalera al suelo o agarrarse a la escalera y saltar justo un momento antes de que el extremo de la escalera choque contra el suelo?

**Poleas, yo-yos y objetos colgantes**

**68** ● **SSM** **¡SOLVE!** ✓ Un bloque de 4 kg que descansa sobre una plataforma horizontal sin rozamiento está conectado a otro bloque colgante de 2 kg mediante una cuerda que pasa por una polea (figura 9.50). Esta polea está formada por un disco uniforme de radio 8 cm y una masa de 0,6 kg. (a) Determinar la velocidad del bloque de 2 kg después de haber descendido desde el reposo una distancia de 2,5 m. (b) ¿Cuál es la velocidad angular de la polea en ese momento?

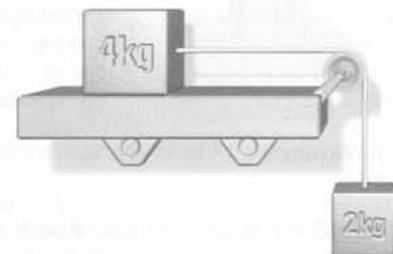


Figura 9.50 Problemas 68–70

69 ●● En el sistema del problema 68, determinar la aceleración lineal de cada bloque y la tensión de la cuerda.

70 ●● Analizar el problema 68 para el caso en que el coeficiente de rozamiento entre el bloque de 4 kg y la plataforma sea 0,25.

71 ●● Mediante un torno de engranaje se está procediendo a levantar un coche de 1200 kg del modo que se indica en la figura 9.51. El coche está a 5,0 m sobre la superficie del agua. En ese instante, se rompen los engranajes del torno y el coche cae desde el reposo. Durante la caída del coche no hay deslizamiento entre la cuerda (sin masa) la polea y el tambor. El momento de inercia del tambor del torno es igual a  $320 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y el de la polea  $4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ; el radio del tambor es de 0,80 m y el de la polea de 0,30 m. Calcular la velocidad con la que el coche golpea la superficie del agua.

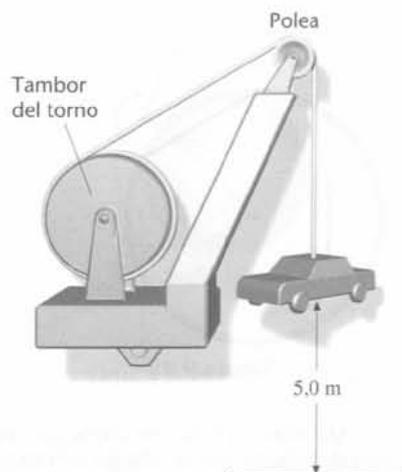


Figura 9.51 Problema 71

72 ●● SSM El sistema de la figura 9.52 se deja libre desde el reposo. El cuerpo de 30 kg se encuentra a 2 m de la plataforma. La polea es un disco uniforme de 10 cm de radio y 5 kg de masa. Calcular (a) la velocidad del cuerpo de 30 kg justo antes de que llegue a tocar la plataforma, (b) la velocidad angular de la polea en ese instante, (c) las tensiones de las cuerdas y (d) el tiempo que invierte el cuerpo de 30 kg en alcanzar la plataforma. Suponer que la cuerda no desliza sobre la polea.

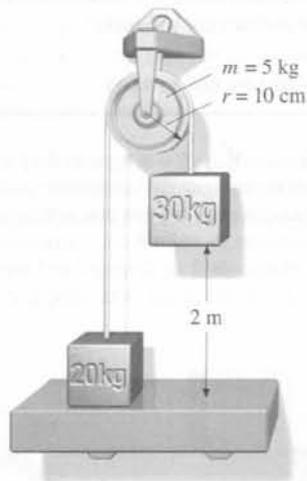


Figura 9.52 Problema 72

73 ●● Una esfera uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  puede girar libremente respecto a un eje horizontal que pasa por su centro. Se enrolla una cuerda alrededor de la esfera y se une a un cuerpo de masa  $m$  como se indica en la figura 9.53. Calcular (a) la aceleración del cuerpo y (b) la tensión en la cuerda.

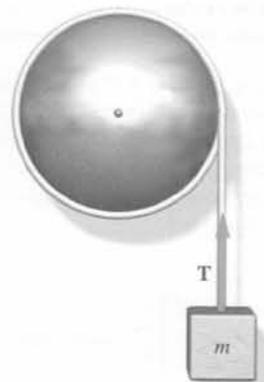


Figura 9.53 Problema 73

74 ●● **RESOLVER** Una máquina de Atwood tiene dos cuerpos de masas  $m_1 = 500 \text{ g}$  y  $m_2 = 510 \text{ g}$ , unidos por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento (figura 9.54). La polea es un disco uniforme de masa 50 g y un radio de 4 cm. La cuerda no se desliza sobre la polea. (a) Hallar la aceleración de las masas. (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda que soporta a  $m_1$ ? ¿Y la de la cuerda que soporta a  $m_2$ ? ¿En cuánto difieren? (c) ¿Cuáles serían las respuestas dadas si se hubiese despreciado la masa de la polea?

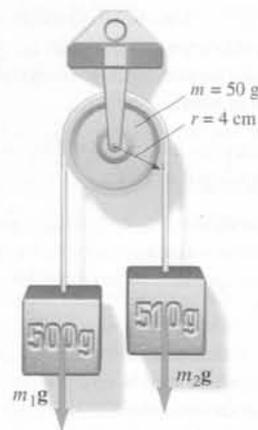


Figura 9.54 Problema 74

75 ●● SSM Dos objetos cuelgan de dos cuerdas unidas a dos ruedas capaces de girar respecto a un mismo eje del modo que se indica en la figura 9.55. El momento de inercia total de las dos ruedas es de  $40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Los radios son  $R_1 = 1,2 \text{ m}$  y  $R_2 = 0,4 \text{ m}$ . (a) Si  $m_1 = 24 \text{ kg}$ , calcular el valor de  $m_2$  para que

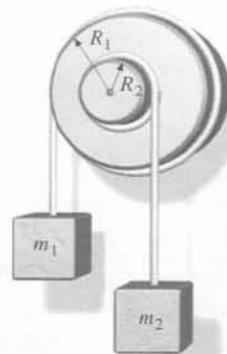


Figura 9.55 Problema 75

sea nula la aceleración angular de las ruedas. (b) Si se colocan con suavidad 12 kg sobre la parte superior de  $m_1$ , calcular la aceleración angular de las ruedas y la tensión en las cuerdas.

76 ●● La cuerda que envuelve el cilindro de la figura 9.56 está sostenida por la mano de una persona que acelera hacia arriba sin que se mueva el centro de masas del cilindro. Determinar (a) la tensión de la cuerda, (b) la aceleración angular, (c) la aceleración de la mano.

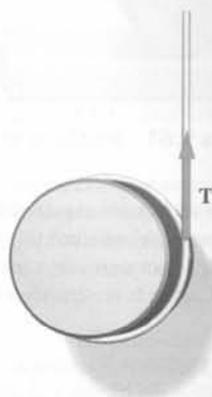


Figura 9.56 Problemas 76 y 80

77 ●● Un cilindro uniforme de masa  $m_1$ , y radio  $R$  gira sobre un eje sin rozamiento. Se enrolla una cuerda alrededor del mismo conectada a un bloque de masa  $m_2$ , el cual está apoyado en un plano inclinado sin rozamiento de ángulo  $\theta$ , como se ve en la figura 9.57. El sistema se deja en libertad desde el reposo con  $m_2$  a una altura  $h$  sobre la base del plano inclinado. (a) ¿Cuál es la aceleración del bloque? (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (c) ¿Cuál es la energía total del sistema cilindro-bloque-Tierra cuando  $m_2$  está a la altura  $h$ ? (d) ¿Cuál es la energía total cuando  $m_2$  está en la base del plano inclinado y posee una velocidad  $v$ ? (e) ¿Cuál es el valor de  $v$ ? (f) Analizar las respuestas para los casos extremos de  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 90^\circ$  y  $m_1 = 0$ .

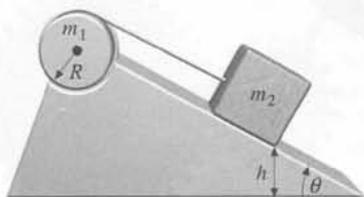


Figura 9.57 Problema 77

78 ●● SSM En la figura 9.58 se muestra un dispositivo para medir el momento de inercia de un objeto. Una plataforma circular posee un tambor concéntrico de radio 10 cm alrededor del cual se enrolla una cuerda. Esta

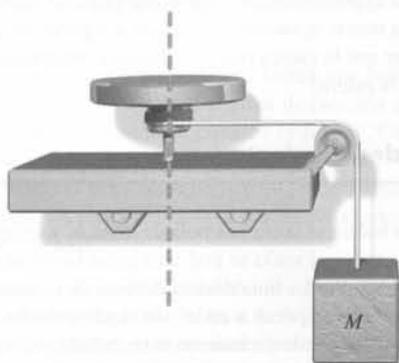


Figura 9.58 Problema 78

cuerda pasa por una polea sin rozamiento y de su extremo cuelga un peso de masa  $M$ . El peso se deja caer desde el reposo y se mide el tiempo que transcurre cuando cae una distancia  $D$ . El sistema entonces se rebobina, el objeto cuyo momento de inercia se desea medir se sitúa sobre la plataforma y el sistema se deja libre de nuevo desde el reposo. El tiempo requerido ahora para que el peso descienda la misma distancia  $D$  proporciona los datos necesarios para el cálculo de  $I$ . Con  $M = 2,5$  kg y  $D = 1,8$  m, el tiempo es 4,2 s. (a) Determinar el momento de inercia combinado de la plataforma, el eje, el tambor y la polea. (b) Con un objeto situado sobre la plataforma, el tiempo es 6,8 s para  $D = 1,8$  m. Determinar el momento de inercia del objeto respecto al eje de la plataforma.

### Objetos rodantes sin deslizamiento

79 ●● **ISOLVE** En 1993, un yo-yo gigante de masa 400 kg y unos 1,5 m de radio se dejó caer desde una grúa de 57 m de altura. Uno de los extremos de la cuerda estaba atada a la grúa, de manera que el yo-yo se desenrollaba al descender. Suponiendo que el eje de yo-yo tenía un radio de  $r = 0,1$  m, determinar la velocidad de descenso en el punto más bajo de su recorrido.

80 ●● Un cilindro uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  tiene arrollada una cuerda. Esta cuerda está fuertemente sujeta, y el cilindro cae verticalmente, tal como se indica en la figura 9.56. (a) Demostrar que la aceleración del cilindro está dirigida hacia abajo y que su módulo es  $a = 2g/3$ . (b) Calcular la tensión de la cuerda.

81 ●● Un yo-yo de 0,1 kg está formado por dos discos sólidos de radio 10 cm unidos entre sí por una barra sin masa de radio 1 cm y una cuerda arrollada a la barra. Un extremo de la cuerda se mantiene fijo y está bajo la tensión constante  $T$  cuando se suelta el yo-yo. Determinar la aceleración del yo-yo y la tensión  $T$ .

82 ● SSM Un cilindro sólido homogéneo rueda sin deslizamiento sobre una superficie horizontal. La energía cinética total es  $E_c$ . La energía cinética debida a la rotación alrededor de su centro de masas es (a)  $\frac{1}{2}E_c$ . (b)  $\frac{1}{3}E_c$ . (c)  $\frac{4}{5}E_c$ . (d) Ninguna de las anteriores.

83 ● **ISOLVE** Un cilindro homogéneo de radio 18 cm y masa 60 kg rueda sin deslizamiento sobre una superficie horizontal a la velocidad de 5 m/s. ¿Qué trabajo se necesitó para ponerlo en movimiento?

84 ● Calcular los porcentajes de energía cinética total asociada con la rotación y con la traslación de un objeto que rueda sin deslizarse si éste es, respectivamente, (a) una esfera uniforme, (b) un cilindro uniforme, (c) un aro.

85 ● Un aro de 0,40 m de radio y 0,6 kg rueda sin deslizarse con una velocidad de 15 m/s hacia un plano inclinado de  $30^\circ$ . ¿Cuál será la distancia subida por el aro en el plano? (Suponer que rueda sin deslizarse.)

86 ●● SSM Una esfera uniforme rueda sin deslizar por un plano inclinado. ¿Cuál tiene que ser el ángulo del plano inclinado para que la aceleración del centro de masas de la esfera sea  $0,2g$ ?

87 ●● Repetir el problema 86 para una esfera hueca.

88 ●● Una pelota rueda sin deslizar por un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Calcular en función del coeficiente de rozamiento  $\mu_c$ , (a) la aceleración de la pelota, (b) la fuerza de rozamiento, y (c) el máximo ángulo de inclinación para que la pelota pueda rodar sin deslizarse.

89 ●● Repetir el problema 88 para un cilindro sólido de madera.

90 ●● SSM Una esfera hueca y otra sólida (y uniforme) de iguales masas  $m$  y radios  $R$  ruedan sin deslizamiento por un plano inclinado desde la misma altura  $H$  (figura 9.59). Ambas se mueven horizontalmente al salir de la rampa. Cuando las esferas chocan contra el suelo, el alcance de la esfera hueca es  $L$ . Determinar el alcance  $L'$  de la esfera uniforme sólida.



Figura 9.59 Problema 90

**91** ●● Un cilindro de paredes delgadas y otro cilindro sólido uniforme ruedan horizontalmente sin desplazamiento. La velocidad del cilindro hueco es  $v$ . Ambos cilindros encuentran un plano inclinado por el que trepan sin deslizar. Si la altura máxima que alcanzan es la misma, determinar la velocidad  $v'$  del cilindro sólido.

**92** ●● Un cilindro hueco, de paredes delgadas, y una esfera sólida parten del reposo y ruedan sin deslizamiento por un plano inclinado de longitud 3 m. El cilindro llega a la base del plano 2,4 s después de la esfera. Determinar el ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal.

**93** ●●● Una rueda posee una delgada llanta de 3,0 kg y cuatro radios, cada uno de masa 1,2 kg. Determinar la energía cinética de la rueda al rodar sobre una superficie horizontal a la velocidad de 6,0 m/s.

**94** ●● **¡OLVÉ!** Dos discos uniformes y pesados están conectados por una corta barra. El sistema se sitúa sobre un plano inclinado de tal modo que los discos cuelgan sobre los lados. Cada disco posee una masa de 20 kg y un radio de 30 cm y la barra de conexión tiene un radio de 2 cm y una masa de 1 kg. El plano está inclinado  $30^\circ$  y la barra rueda sobre el plano sin deslizamiento. (a) ¿Cuál es la aceleración lineal del sistema que desciende por el plano? (b) ¿Cuál es la aceleración angular del sistema? (c) Si el sistema parte del reposo, ¿cuál es la energía cinética de traslación cuando ha rodado 2 m sobre el plano? (d) ¿Cuál es la energía cinética de rotación al cabo de dicho desplazamiento?

**95** ●●● Una rueda de radio  $R$  rueda sin deslizamiento con velocidad  $V$ . Las coordenadas del centro de la rueda son  $X, Y$ . (a) Demostrar que las coordenadas  $x$  e  $y$  del punto  $P$  de la figura 9.60 son  $X + r_0 \cos \theta$  y  $R + r_0 \sin \theta$ , respectivamente. (b) Demostrar que la velocidad total  $v$  del punto  $P$  tiene por componentes  $v_x = V + (r_0 V \sin \theta)/R$  y  $v_y = -(r_0 V \cos \theta)/R$ . (c) Demostrar que en el instante en que  $X = 0$ ,  $v$  y  $r$  son perpendiculares entre sí calculando su producto escalar. (d) Demostrar que  $v = r\omega$ , siendo  $\omega = V/R$  la velocidad angular de la rueda. Estos resultados demuestran que en el caso de rodar sin deslizamiento, el movimiento es el mismo que si el objeto que rueda estuviese girando instantáneamente alrededor del punto de contacto con velocidad angular  $\omega = V/R$ .

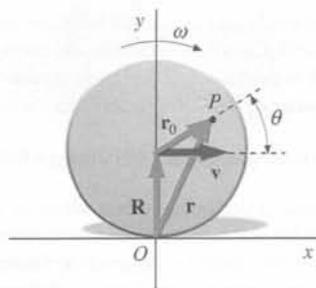


Figura 9.60 Problema 95

**96** ●●● **SSM** Un cilindro uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  descansa sobre un bloque de masa  $m$ , el cual a su vez se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal sin rozamiento (figura 9.61). Si aplicamos al bloque una fuerza horizontal  $F$ , éste acelera y el cilindro rueda sin deslizamiento. Determinar la aceleración del bloque.

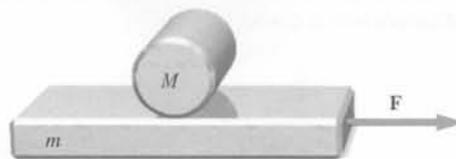


Figura 9.61 Problema 96-98

**97** ●●● (a) Determinar la aceleración angular del cilindro en el problema 96. ¿Es horaria o antihoraria la rotación del cilindro? (b) ¿Cuál es la aceleración lineal del cilindro respecto a la mesa? Tomemos como sentido positivo el mismo que indica la dirección de  $F$ . (c) ¿Cuál es la aceleración lineal del cilindro respecto al bloque?

**98** ●●● Si la fuerza del problema 96 actúa a lo largo de una distancia  $d$ , determinar (a) la energía cinética del bloque y (b) la energía cinética del cilindro. (c) Demostrar que la energía cinética total es igual al trabajo realizado sobre el sistema.

**99** ●● En la figura 9.62 se muestra dos grandes engranajes, cada uno de los cuales puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro. Uno tiene un radio  $R_1 = 0,5$  m y el otro  $R_2 = 1$  m. El momento de inercia del engranaje 1 es  $I_1 = 1$  kg·m<sup>2</sup> y el del engranaje 2 es  $I_2 = 16$  kg·m<sup>2</sup>. La palanca fija al engranaje 1 tiene una longitud de 1 m. (a) Si se aplica una fuerza de 2 N al extremo de la palanca, tal como se ve en la figura, ¿cuál será la aceleración angular de los engranajes 1 y 2?, (a) ¿Qué fuerza ha de aplicarse tangencialmente al extremo del engranaje 2 para evitar que el engranaje gire?

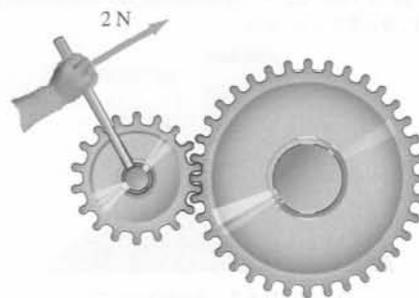


Figura 9.62 Problema 99

**100** ●● **SSM** Una canica de 1 cm de radio, inicialmente en reposo, rueda desde la cima de una esfera grande de 80 cm de radio, que se mantiene fija. (a) Suponiendo que la canica rueda sin deslizar mientras está en contacto con la esfera (lo cual es poco realista), determinar el ángulo desde la cima hasta el punto de la esfera donde la canica se empieza a separar. (b) ¿Por qué es tan poco realista suponer que la canica rueda sin deslizar mientras está en contacto con la superficie de la esfera?

**Rodadura con deslizamiento**

**101** ● En una bolera se lanza una bola de masa  $M$  y radio  $R$  de modo que en el instante en que toque el suelo se esté moviendo horizontalmente con una velocidad  $v_0$  sin rodamiento. La bola desliza durante un tiempo  $t_1$  a lo largo de una distancia  $s_1$  antes de empezar a rodar sin deslizamiento. (a) Si  $\mu_c$  es el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre la bola y el suelo, calcular  $s_1$ ,  $t_1$  y la velocidad final  $v_1$  de la bola. (b) Determinar la relación entre la energía mecánica final e inicial de la bola. (c) Evaluar estas magnitudes para  $v_0 = 8$  m/s y  $\mu_c = 0,06$ .

**102** ●● SSM Una bola de billar de radio  $r$  se encuentra inicialmente en reposo sobre una mesa de billar horizontal (figura 9.63). Se la golpea mediante un taco que desarrolla una fuerza de módulo  $P_0$  durante un tiempo muy corto  $\Delta t$ . El taco golpea la bola en un punto situado a una distancia  $h$  del punto de contacto con la mesa. Demostrar que la velocidad angular  $\omega_0$  está relacionada con la velocidad lineal inicial del centro de masas  $v_0$  por  $\omega_0 = (5/2)v_0(h-r)/r^2$ .

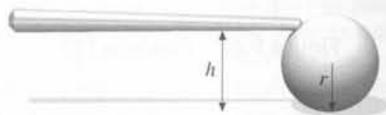


Figura 9.63 Problema 102

**103** ●● Una pelota esférica uniforme se pone en rotación respecto a un eje horizontal con una velocidad angular  $\omega_0$  y se deja en reposo sobre el suelo. Si el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre la pelota y el suelo es  $\mu_c$ , calcular la velocidad del centro de masas de la pelota cuando ésta comienza a rodar sin deslizamiento.

**104** ●● Una pelota sólida homogénea con una masa de 20 g y un radio de 5 cm descansa sobre una superficie horizontal. En dirección horizontal y a una distancia de 9 cm sobre la superficie se aplica a la bola una fuerza instantánea. La fuerza crece linealmente desde 0 hasta un valor máximo de 40 000 N en  $10^{-4}$  s y después decrece linealmente a 0 en  $10^{-4}$  s. (a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después del impacto? (b) ¿Cuál es la velocidad angular de la pelota después del impacto? (c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando comienza a rodar sin deslizamiento? (d) ¿Durante cuánto tiempo la pelota ha deslizado sobre la superficie? Supóngase que  $\mu_c = 0,5$ .

**105** ●● **¡SOLVE!** Una bola de billar de 0,16 kg y radio 3 cm es golpeada por el taco mediante un impulso horizontal que pasa por su centro. La velocidad inicial de la bola es de 4 m/s. El coeficiente de rozamiento cinético es 0,6. (a) ¿Durante cuántos segundos desliza la bola antes de que comience a rodar sin deslizamiento? (b) ¿Qué distancia recorre deslizando? (c) ¿Cuál es su velocidad cuando comienza a rodar sin deslizamiento?

**106** ●● Una bola de billar inicialmente en reposo recibe un golpe instantáneo mediante un taco. El impulso es horizontal y se aplica a una distancia  $2R/3$  por debajo de la línea central (figura 9.64). La velocidad inicial de la bola es  $v_0$  y el coeficiente de rozamiento cinético  $\mu_c$ . (a) ¿Cuál es la velocidad angular inicial  $\omega_0$ ? (b) ¿Cuál es la velocidad de la bola una vez que comienza a rodar sin deslizamiento? (c) ¿Cuál es la energía cinética inicial de la bola? (d) ¿Cuál es el trabajo de rozamiento realizado cuando desliza por la mesa?

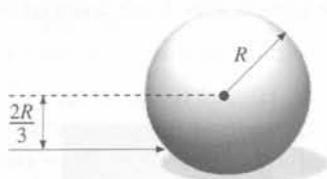


Figura 9.64 Problema 106

**107** ●● Se lanza por la pista de una bolera una bola de radio  $R$  con una velocidad inicial  $v_0$  y una velocidad angular de rotación  $\omega_0 = 3v_0/R$  hacia adelante. El coeficiente de rozamiento cinético es  $\mu_c$ . (a) ¿Cuál es la velocidad de la bola cuando comienza a rodar sin deslizamiento? (b) ¿Durante cuánto tiempo ha deslizado la bola antes de que empiece a rodar sin deslizamiento? (c) ¿Qué distancia ha recorrido la bola por la pista antes de que comience a rodar sin deslizamiento?

**108** ●● SSM Un cilindro sólido de masa  $M$  descansa lateralmente sobre una superficie horizontal. Un taco de billar lo golpea violentamente de modo que la fuerza aplicada es horizontal y pasa por el centro del cilindro. Éste inicia un movimiento de traslación con velocidad inicial  $v_0$ . El coeficiente de rozamiento deslizante entre el cilindro y la superficie es  $\mu_c$ . (a) ¿Cuál es la velocidad de traslación del cilindro al rodar sin deslizamiento? (b) ¿Qué distan-

cia recorre el cilindro antes de rodar sin deslizamiento? (c) ¿Qué fracción de su energía mecánica inicial se disipa en el rozamiento?

**109** ●● Considerar una bola de radio  $r$  y masa total  $m$  con una distribución de masa no uniforme sino radialmente simétrica, de forma que puede tener un momento de inercia  $I$  casi arbitrario.

(a) Demostrar que si la bola se lanza desde el suelo con una velocidad inicial  $v$  de forma que primero resbale (es decir, que su velocidad inicial de rotación sea  $\omega = 0$ ), su velocidad final cuando rueda sin resbalar es

$$v_f = \frac{1}{1 + I/mr^2} v,$$

independiente del coeficiente de rozamiento cinético con el suelo.

(b) Demostrar que la energía cinética total de la bola es

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{m}{(1 + I/mr^2)} v^2$$

(Obsérvese que  $I/mr^2$  es independiente de la masa y del radio de la bola; depende sólo de la distribución de masa dentro de ésta.)

### Problemas generales

**110** ● SSM La Luna gira sobre sí misma al mismo tiempo que gira alrededor de la Tierra, de modo que muestra siempre la misma cara. Utilizar este hecho para determinar la velocidad angular (en rad/s) de la Luna alrededor de su eje. (El periodo de revolución de la Luna alrededor de la Tierra es 27,3 días.)

**111** ● Determinar el momento de inercia de un aro alrededor de un eje perpendicular al plano del aro que pase por un punto de su borde.

**112** ●● Con objeto de poner en marcha un tiiovivo, se enrolla una cuerda alrededor de él y se tira de la misma. Se ejerce durante 12 s una fuerza de 260 N sobre la cuerda. Durante este tiempo el tiiovivo, que tiene un radio de 2,2 m, realiza una rotación completa. (a) Hallar la aceleración angular del tiiovivo admitiendo que es constante. (b) ¿Qué momento ejerce la cuerda sobre el tiovivo? (c) ¿Cuál es el momento de inercia del tiovivo?

**113** ● Un bastón uniforme de 2 m de longitud se apoya sobre el hielo formando un ángulo de  $30^\circ$  con la superficie horizontal. El bastón cae desde el reposo, manteniendo en todo momento su extremo inferior en contacto con la superficie del hielo. ¿Qué distancia se ha movido este extremo del bastón cuando éste ha caído completamente sobre la superficie helada? Supóngase que el hielo no ejerce rozamiento.

**114** ●● **¡SOLVE!** Un disco uniforme de radio 0,12 m y masa 5 kg tiene un eje central de modo que puede girar libremente a su alrededor. Se enrolla una cuerda alrededor del disco y se tira de ella con una fuerza de 20 N (figura 9.65). (a) ¿Cuál es el momento ejercido sobre el disco? (b) ¿Cuál es la aceleración angular del mismo? (c) Si el disco parte del reposo, ¿cuál es su velocidad angular después de 5 s? (d) ¿Cuál es su energía cinética después de 5 s? (e) Hallar el ángulo total  $\theta$  que gira del disco en 5 s. (f) Demostrar que el trabajo realizado por el momento,  $\tau \Delta\theta$ , es igual a la energía cinética.

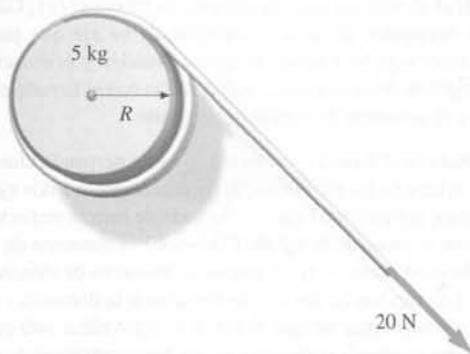


Figura 9.65 Problema 114

**115** ●● Una barra de 0,25 kg y longitud 80 cm está suspendida de un pivote por uno de sus extremos. Se considera que el pivote no tiene rozamiento. La barra se mantiene horizontal y se deja caer. Inmediatamente después de su liberación, (a) ¿cuál es la aceleración del centro de la barra? (b) ¿Y la aceleración inicial de un punto del extremo de la barra? (c) Determinar la velocidad lineal del centro de masas de la barra cuando está en posición vertical.

**116** ●● Una bolita de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizamiento hacia abajo por la pista de la izquierda desde la altura  $h_1$  como indica la figura 9.66. La bolita sube entonces por la pista *sin rozamiento* de la derecha hasta una altura  $h_2$ . Determinar  $h_2$ .

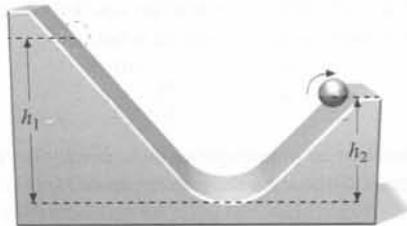


Figura 9.66 Problema 116

**117** ●● **SSM** **RESOLVE** Un disco uniforme con una masa de 120 kg y un radio de 1,4 m rueda inicialmente con una velocidad angular de 1100 rev/min. (a) A una distancia radial de 0,6 m se aplica una fuerza tangencial. ¿Qué trabajo debe realizar esta fuerza para detener el disco? (b) Si la rueda se detiene en 2,5 min, ¿qué momento produce la fuerza? ¿Cuál es el módulo de la fuerza? (c) ¿Cuántas revoluciones da la rueda en estos 2,5 min?

**118** ●● **RESOLVE** Un tiovivo de un parque tiene una plataforma circular de 4,00 m de diámetro y una masa de 240 kg. Cuatro niños que corren a su alrededor empujan tangencialmente la plataforma hasta que el tiovivo, partiendo del reposo, alcanza una velocidad estacionaria de una revolución completa cada 2,8 s. (a) Si cada niño ejerce una fuerza de 26 N, ¿qué distancia han recorrido? (b) ¿Cuál es la velocidad angular del tiovivo? (c) ¿Cuánto trabajo ha realizado cada niño? (d) ¿Cuál es la energía cinética del tiovivo?

**119** ●● **RESOLVE** Un aro de masa 1,5 kg y radio 65 cm tiene una cuerda arrollada a su circunferencia y está apoyado en posición plana sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Se tira de la cuerda con una fuerza de 5 N. (a) ¿Qué distancia recorrerá el centro del aro en 3 s? (b) ¿Cuál es la velocidad angular del aro respecto a su centro de masas al cabo de 3 s?

**120** ●● Una rueda vertical de molino está constituida por un disco uniforme de masa 60 kg y 45 cm de radio. Posee un manubrio de 65 cm de radio y de masa despreciable. Se une un peso de 25 kg al manubrio cuando éste se encuentra en posición horizontal. Despreciando el rozamiento, calcular (a) la aceleración angular inicial de la rueda y (b) la velocidad angular máxima de la misma.

**121** ●● **SSM** Considérense dos bloques uniformes de madera, idénticos en forma y en composición, donde uno es más largo que otro por un factor  $S$  en todas las dimensiones. (a) ¿Cuál es la relación entre el área de los dos bloques? (b) ¿Cuál es la relación entre la masa de los bloques? (c) ¿Cuál es la relación entre los momentos de inercia alrededor de un eje que pase por cada bloque, suponiendo que éstos tienen la misma posición y orientación relativa? Este es un ejemplo de *leyes de escala*: cómo varían con el tamaño el área superficial, la masa y el momento de inercia de un objeto.

**122** ●● Deducir el llamado teorema de los ejes perpendiculares para figuras planas que relaciona los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares al plano de la figura 9.67 con el momento de inercia respecto a un tercer eje perpendicular al plano de la figura. Considerar el elemento de masa  $dm$  de la figura situado en el plano  $xy$ . (a) Expresar el momento de inercia de la figura respecto al eje  $z$  en función de  $dm$  y  $r$ . (b) Relacionar la distancia  $r$  a  $dm$  con las distancias  $x$  e  $y$  y demostrar así que  $I_z = I_x + I_y$ . (c) Aplicar este resultado a la determinación del momento de inercia de un disco uniforme de radio  $R$  respecto a un diámetro del disco.

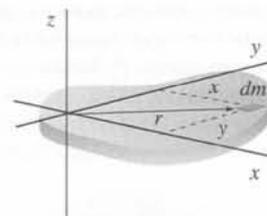


Figura 9.67 Problema 122

**123** ●● **RESOLVE** Un disco uniforme de radio  $R$  y masa  $M$  pivota alrededor de un eje horizontal que pasa por su borde, paralelamente al eje de simetría, de tal manera que puede oscilar libremente en un plano vertical (figura 9.68). Desde una posición de reposo, con su centro de masas a la misma altura que el pivote, se deja caer. (a) ¿Cuál es la velocidad angular del disco cuando su centro de masas está directamente por debajo del pivote? (b) ¿Qué fuerza ejerce el pivote en ese momento?

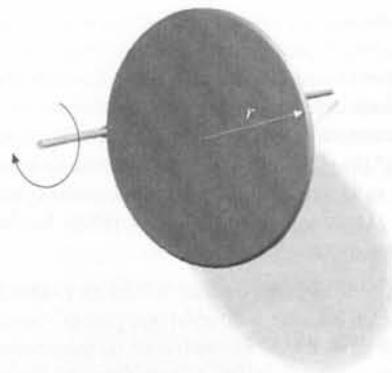


Figura 9.68 Problema 123

**124** ●● El techo del comedor de la residencia de estudiantes del colegio St. Mary se aguanta gracias a vigas de madera reforzadas que tienen la forma que se muestra en la figura 9.69. Cada viga vertical tiene una longitud de 365 cm y una anchura de 61 cm. Cada viga horizontal tiene una longitud de 183 cm y una anchura de también 61 cm. Las vigas verticales tienen una masa de 350 kg y las vigas horizontales de 175 kg. Cuando se estaban instalando, una de las estructuras empezó a caer antes de que fuera anclada (afortunadamente los trabajadores consiguieron sujetarla antes de que cayera del todo) (a) Si empezó a

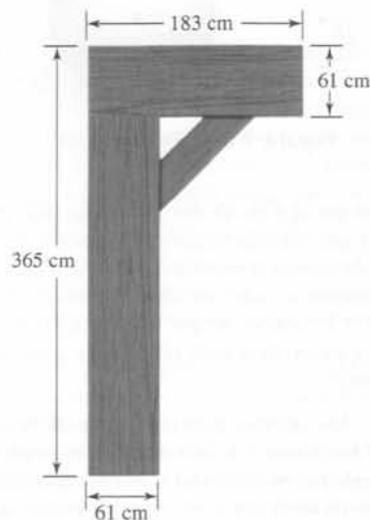


Figura 9.69 Problema 124

caer desde una posición vertical, ¿cuál fue la aceleración angular inicial de la estructura? Supongamos que el pie no resbaló y que la caída ocurría en el plano vertical definido por las vigas vertical y horizontal de la figura. (b) ¿Cuál fue la aceleración lineal inicial de la viga horizontal en el extremo derecho de la misma cuando la estructura empezaba a caer? (c) ¿Cuál fue la componente horizontal de esta aceleración?

**125** ●● Un carrito de masa  $M$  descansa sobre un plano inclinado a una distancia  $D$  medida desde el fondo. El carrito tiene un radio máximo  $R$  y un radio mínimo,  $r$ , y un momento de inercia  $I$  respecto a su eje. Una larga cuerda de masa despreciable se arrolla múltiples veces alrededor del centro del carrito y el otro extremo se sujeta a la parte más alta del plano, inclinado de modo que la cuerda siempre se mantiene paralela al plano como muestra la figura 9.70. (a) Supongamos que inicialmente la pendiente está recubierta de una capa de hielo, de modo que *no* hay rozamiento. ¿Cómo se mueve el carrito al descender por la pendiente? Utilizar consideraciones energéticas para determinar la velocidad del centro de masas del carrito cuando alcanza la base del plano inclinado. Dar la respuesta en función de  $M, I, r, R, g, D$  y  $\theta$ . (b) Supongamos ahora que el hielo ha desaparecido y que cuando se deja en libertad el carrito hay suficiente rozamiento para evitar el deslizamiento sobre la pendiente. ¿Cuál es en este caso la dirección y el módulo de la fuerza de rozamiento?

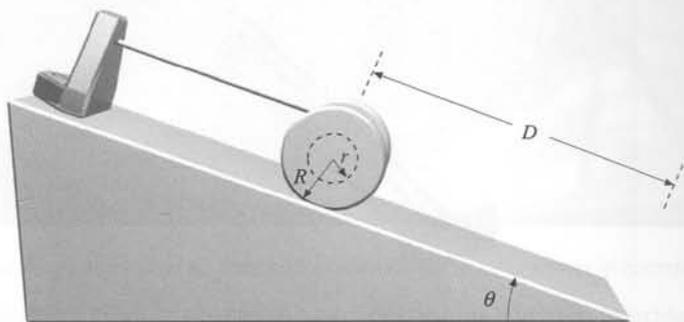


Figura 9.70 Problema 125

**126** ●● **ISOLVE** Una barra metálica sólida de 1,5 m de longitud puede girar libremente sin rozamiento alrededor de un eje horizontal fijo, perpendicular a la barra y que pasa por un extremo. El otro extremo se mantiene en posición horizontal. Una serie de pequeñas monedas de masa  $m$  se sitúan sobre la barra a 25 cm, 50 cm, 76 cm, 1 m, 1,25 m y 1,50 m desde el soporte. Se deja ahora caer el extremo libre, calcular la fuerza inicial ejercida sobre cada moneda por la barra. La masa de las monedas es despreciable en comparación con la masa de la barra.

**127** ●● **SSM** Un experimento de clase muy común consiste en mantener una regla de un metro de longitud en posición horizontal con el brazo extendido con unas monedas repartidas uniformemente a lo largo de toda su longitud. A medida que pasa el tiempo, la persona que sostiene la regla se cansa y, poco a poco, va bajando el brazo. Suponiendo que este proceso se haga de forma regular, se observa que las monedas que están más allá de una cierta distancia del eje de rotación caen y las que están más cerca no. (a) ¿Cuál es la aceleración en el extremo de la regla?, (b) ¿A qué distancia del extremo de la regla debe estar una moneda para no caer?

**128** ●● **ISOLVE** La figura 9.71 muestra un cilindro hueco de longitud 1,8 m, masa 0,8 kg y radio 0,2 m. El cilindro puede girar libremente alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y es perpendicular al eje del cilindro. Dentro del cilindro existen dos masas de 0,2 kg cada una, conectadas a sendos muelles, de constante  $k$  y longitudes naturales 0,4 m. Las paredes interiores del cilindro carecen de rozamiento. (a) Determinar el valor de la constante del muelle sabiendo que las masas están localizadas a 0,8 m del centro del cilindro cuando éste gira a 24 rad/s. (b) ¿Qué trabajo es necesario para que el sistema pase de  $\omega = 0$  a  $\omega = 24$  rad/s?

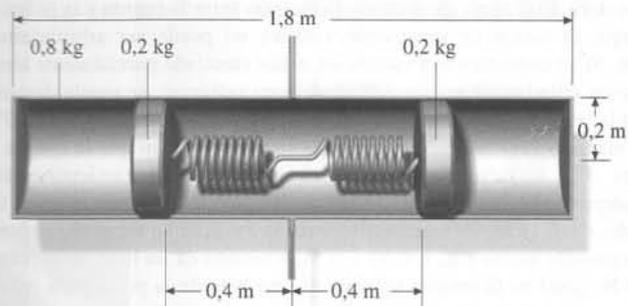


Figura 9.71 Problema 128

**129** ●● Supongamos que en el sistema descrito en el problema 128, las constantes de los muelles son, para cada uno,  $k = 60$  N/m. El sistema parte del reposo y lentamente acelera hasta que las masas se encuentran a 0,8 m del centro del cilindro. ¿Qué trabajo se ha realizado en este proceso?

**130** ●● Una cuerda se arrolla alrededor de un cilindro uniforme de radio  $R$  y masa  $M$  que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se tira horizontalmente de la cuerda desde la parte superior con una fuerza  $F$ . (a) Demostrar que la aceleración angular del cilindro es el doble que la necesaria para rodar sin deslizamiento, de modo que el cilindro desliza hacia atrás contra la mesa. (b) Determinar el módulo y dirección de la fuerza de rozamiento entre la masa y el cilindro necesaria para que el cilindro ruede sin deslizarse. ¿Cuál es la aceleración del cilindro en este caso?

**131** ●● **SSM** Calculemos la posición y de la carga atada al extremo del torno del ejemplo 9.7 en función del tiempo mediante una integración numérica. Para llevarlo a cabo, obsérvese que  $v(y) = dy/dt$ , o bien

$$t = \int_0^y \frac{1}{v(y')} dy' \approx \sum_{i=1}^N \frac{1}{v(y'_i)} \Delta y'$$

donde  $\Delta y'$  es un incremento pequeño,  $y'_i = i(\Delta y)$ , e  $y = y'_N = n(\Delta y)$ . Por consiguiente, se puede calcular  $t$  en función de  $y$  sumando numéricamente. Representar gráficamente  $y'$  frente a  $t$  entre los valores de 0 y 2 s. Suponga  $M = 10$  kg,  $R = 0,5$  m,  $m = 5$  kg,  $L = 10$  m y  $m_c = 3,5$  kg. Use  $\Delta y' = 0,1$  m. Comparar este resultado con el que se daría si el cubo con el agua cayera en caída libre.

**132** ●● En la figura 9.72 se muestra un cilindro macizo de masa  $M$  y radio  $R$  al cual se sujeta un cilindro hueco de radio  $r$ . Alrededor del cilindro hueco se arrolla una cuerda. El cilindro macizo descansa sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el cilindro y la superficie es  $\mu_s$ . Si se aplica una ligera tensión a la cuerda en dirección vertical, el cilindro rueda hacia la izquierda; si la tensión se aplica con la cuerda extendida horizontalmente, el cilindro rueda hacia la derecha. Determinar el ángulo que debe formar la cuerda con la horizontal para que el cilindro permanezca estacionario al aplicar una pequeña tensión a la cuerda.



Figura 9.72 Problema 132

**133** ●● **SSM** En los problemas donde intervienen poleas con momentos de inercia distintos de cero, los módulos de las tensiones de la cuerda a ambos lados de la polea no son iguales. El valor distinto de la ten-

sión se debe a la fuerza de rozamiento estático entre la cuerda y la polea. Sin embargo, la fuerza de rozamiento estática no puede ser arbitrariamente grande. Si se considera una cuerda sin masa enrollada parcialmente alrededor de un cilindro un ángulo  $\Delta\theta$  (medido en radianes), se puede demostrar que si la tensión a un lado de la pulea es  $T$  y al otro lado es  $T'$  ( $T' > T$ ), el valor máximo de  $T'$  en relación a  $T$  que se puede dar sin que la cuerda resbale es  $T'_{\max} = T e^{\mu_e \Delta\theta}$ , donde  $\mu_e$  es el coeficiente de rozamiento estático. Consideremos la máquina de Atwood de la figura 9.73, donde la pulea tiene un radio  $r = 0,15$  m, un momento de inercia  $I = 0,35$  kg·m<sup>2</sup> y un coeficiente de rozamiento estático  $\mu_e = 0,30$ . (a) Si la tensión en un lado de la pulea es de 10 N, ¿cuál es la tensión máxima al otro lado de la pulea para prevenir que la cuerda resbale sobre ésta? (b) Si la masa de uno de los bloques es de 1 kg y ambos bloques se dejan libres, ¿cuál es la masa del otro bloque para que la pulea gire sin que se produzca deslizamiento de la cuerda?. (c) ¿Cuál es la aceleración de los bloques en este caso?

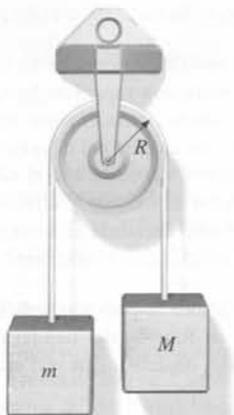


Figura 9.73 Problema 133

**134 ●●●** Un cilindro homogéneo pesado tiene una masa  $m$  y un radio  $R$ . Se ve acelerado por una fuerza  $T$  que se aplica mediante una cuerda arrollada a lo largo de un tambor ligero de radio  $r$  unido al cilindro (figura 9.74). El coeficiente de rozamiento estático es suficiente para que el cilindro ruede sin deslizarse. (a) Hallar la fuerza de rozamiento. (b) Hallar la aceleración  $a$  del centro del cilindro. (c) Demostrar que es posible escoger  $r$  de modo que  $a$  sea mayor que  $T/m$ . (d) ¿Cuál es el sentido de la fuerza de rozamiento en las circunstancias descritas en el apartado (c)?



Figura 9.74 Problema 134

**135 ●●●** Una barra uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos, como se muestra en la figura 9.75. La barra se deja caer desde el reposo cuando  $\theta = \theta_0$  con la vertical. Demostrar que la fuerza que ejerce sobre la barra viene dada por  $F_{\parallel} = \frac{1}{2} Mg(5 \cos \theta - 3 \cos \theta_0)$  y  $F_{\perp} = \frac{1}{4} Mg \sin \theta$ , donde  $F_{\parallel}$  es la componente de la fuerza paralela a la barra y  $F_{\perp}$  es la componente perpendicular.

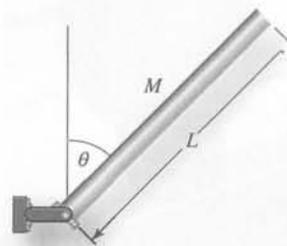


Figura 9.75 Problema 135

# CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

## Capítulo 10



- 10.1 Naturaleza vectorial de la rotación
- 10.2 Momento de una fuerza y momento angular
- 10.3 Conservación del momento angular
- \*10.4 Cuantización del momento angular

El análogo al momento lineal en dinámica de la rotación es el momento angular.

Cuando los niños se acercan al centro del tiovivo, éste gana velocidad. ¿Por qué ocurre esto? (Véase el ejemplo 10.4.)

En este capítulo extendemos nuestro estudio del movimiento de rotación a situaciones en las que la dirección del eje de giro puede variar.

Comenzaremos analizando las propiedades vectoriales de la velocidad angular y del momento de una fuerza y después introduciremos el concepto de momento angular, que es el análogo rotacional del momento lineal. Después demostraremos que el momento resultante que actúa sobre un sistema es equivalente a la tasa de cambio de su momento angular, resultado equivalente a la segunda ley de Newton aplicada al movimiento de rotación. Por lo tanto, el momento angular se conserva en los sistemas con momento resultante externo nulo. Lo mismo que la conservación del momento lineal, el principio de conservación del momento angular es una ley fundamental de la naturaleza que se aplica incluso en el dominio atómico, donde falla la mecánica newtoniana.

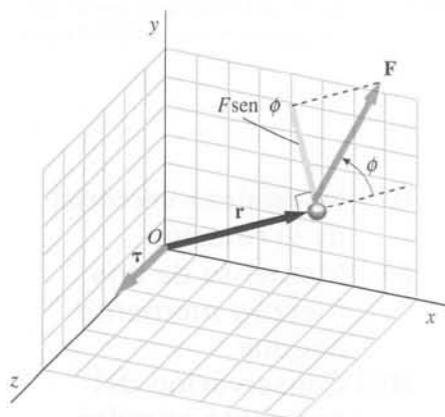
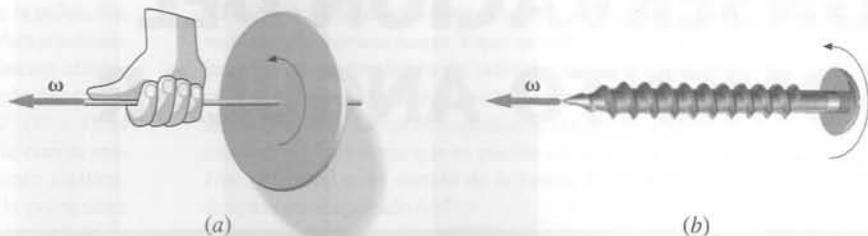
## 10.1 Naturaleza vectorial de la rotación

En el capítulo 9 señalábamos el sentido de rotación respecto a un eje *fijo* asignando signos más o menos para indicar el sentido de la velocidad angular, de un modo análogo al utilizado para indicar el sentido de la velocidad en el movimiento lineal en una dimensión. Pero cuando la dirección del eje de rotación *no* está fija en el espacio, los signos más o menos no son suficientes para describir el sentido de la velocidad angular. Esta insuficiencia se supera tratando la velocidad angular como un vector  $\omega$  dirigido a lo largo del eje de rotación. Con-



Figura 10.1

**Figura 10.2** (a) Cuando los dedos de la mano derecha siguen el sentido de la rotación, el pulgar extendido apunta en la dirección de  $\omega$ . (b) Esta dirección coincide también con el avance de un tornillo ordinario.



**Figura 10.3**

sideremos, por ejemplo, el disco rotatorio de la figura 10.1. Determinaremos el sentido de  $\omega$  por una convención conocida como la **regla de la mano derecha**, lo cual se ilustra en la figura 10.2. Así, si la rotación tiene el sentido que muestra la figura 10.1,  $\omega$  tendrá el sentido indicado; si se invierte el sentido de la rotación, también lo hace el sentido de  $\omega$ .

Podemos aplicar consideraciones semejantes al momento de una fuerza. La figura 10.3 muestra una fuerza  $F$  que actúa sobre una partícula en cierta posición  $r$  relativa al origen  $O$ . El momento  $\tau$  ejercido por esta fuerza respecto al origen  $O$  se define como un vector perpendicular al plano formado por  $F$  y  $r$ , de módulo  $Fr \sin \phi$ , en donde  $\phi$  es el ángulo formado por  $F$  y  $r$ . (El ángulo entre dos vectores es el ángulo *entre las direcciones* de los dos vectores.) Si  $F$  y  $r$  están en el plano  $xy$ , como en la figura 10.3, el vector momento tiene la dirección del eje  $z$ . Si  $F$  está aplicada en el borde de un disco de radio  $r$ , como muestra la figura 10.4, el momento tiene la magnitud  $Fr$ , y está dirigido a lo largo del eje de rotación como se indica.

### Producto vectorial

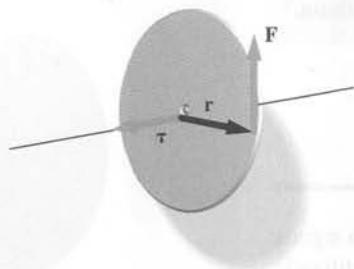
El momento se expresa matemáticamente como el **producto vectorial** de  $r$  y  $F$ :

$$\tau = r \times F \tag{10.1}$$

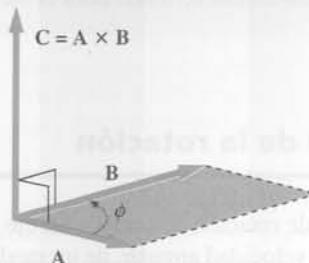
El producto vectorial de dos vectores  $A$  y  $B$  se define como un vector  $C = A \times B$  cuyo módulo es igual al área del paralelogramo formado por los dos vectores (figura 10.5) y cuya dirección es perpendicular al plano que contiene  $A$  y  $B$ , con el sentido dado por la regla de la mano derecha cuando  $A$  gira hacia  $B$  recorriendo el ángulo más pequeño que forman ambos vectores (figura 10.6). Si  $\phi$  es el ángulo entre los dos vectores y  $n$  un vector unitario perpendicular a cada uno de ellos en el sentido de  $C$ , el producto vectorial de  $A$  y  $B$  es

$$A \times B = AB \sin \phi n \tag{10.2}$$

DEFINICIÓN —PRODUCTO VECTORIAL



**Figura 10.4**



**Figura 10.5** El producto vectorial  $A \times B$  es un vector  $C$  perpendicular tanto a  $A$  como a  $B$  y de módulo  $AB \sin \phi$ , que es igual al área del paralelogramo indicado.



**Figura 10.6** La dirección de  $A \times B$  viene dada por la regla de la mano derecha cuando los dedos giran desde  $A$  hacia  $B$  a lo largo del ángulo  $\phi$ .

Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son paralelos,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es cero. A partir de la definición del producto vectorial se deduce que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (10.3)$$

y

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (10.4)$$

Debe señalarse especialmente que es importante el orden en que se multiplican los dos vectores. A continuación mencionaremos algunas de las propiedades del producto vectorial de dos vectores:

1. El producto vectorial cumple la ley distributiva de la suma:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \quad (10.5)$$

2. Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son funciones de alguna variable tal como  $t$ , la derivada de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  se obtiene mediante la regla normal para las derivadas de los productos:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \left( \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) + \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \quad (10.6)$$

3. Los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  (figura 10.7), mutuamente perpendiculares, tienen productos vectoriales dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (10.7a)$$

Además

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \quad (10.7b)$$

## 10.2 Momento angular

La figura 10.8 muestra una partícula de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  en una posición  $\mathbf{r}$  relativa al origen  $O$ . El momento lineal de las partículas es  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . El **momento angular**  $\mathbf{L}$  de la partícula respecto al origen  $O$  se define como el producto vectorial de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (10.8)$$

DEFINICIÓN — MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Si  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  se encuentran en el plano  $xy$ , como en la figura 10.8, entonces  $\mathbf{L}$  es paralelo al eje  $z$  y viene dado por  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = mvr \sin \phi \mathbf{k}$ . Lo mismo que el momento de una fuerza, el momento angular se define *respecto a un punto del espacio*.

La figura 10.9 muestra una partícula de masa  $m$  ligada a un disco circular de masa despreciable que está en el plano  $xy$  con su centro en el origen. El disco gira alrededor de su eje con velocidad angular  $\omega$ . La velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula y el módulo de su velocidad angular  $\omega$  vienen relacionados por la expresión  $v = r\omega$ . El momento angular de la partícula respecto al centro del disco es

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = rmv \sin 90^\circ \mathbf{k} = rmv\mathbf{k} = mr^2\omega\mathbf{k} = mr^2\omega$$

El vector momento angular posee la misma dirección y sentido que la velocidad angular.

Como  $mr^2$  es el momento de inercia de una sola partícula respecto al eje  $z$ , resulta:

$$\mathbf{L} = mr^2\omega = I\omega$$

Este resultado no es válido para el momento angular alrededor de un punto cualquiera del eje  $z$ . La figura 10.10 muestra el vector momento angular  $\mathbf{L}'$  para la misma partícula ligada en el mismo disco, pero referido a un punto del eje  $z$  que no coincide con el centro del círculo. En este caso, el momento angular no es paralelo a la velocidad angular  $\omega$ , la cual está dirigida a lo largo del eje  $z$ .

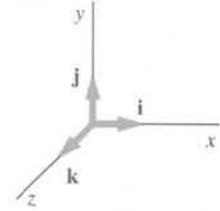


Figura 10.7

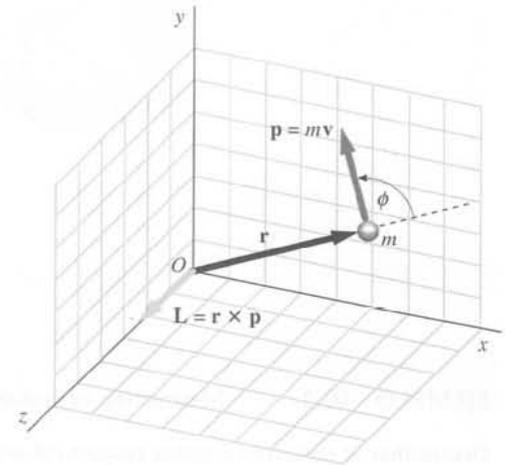


Figura 10.8

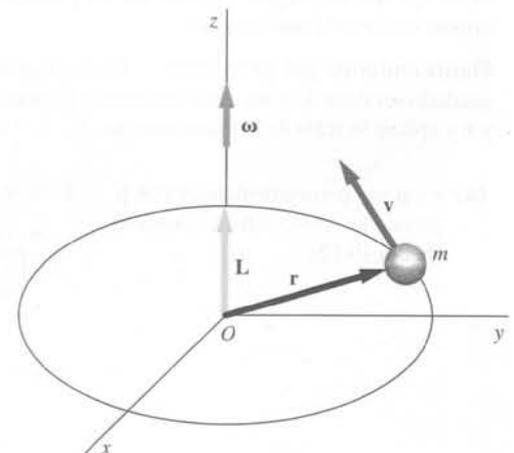


Figura 10.9

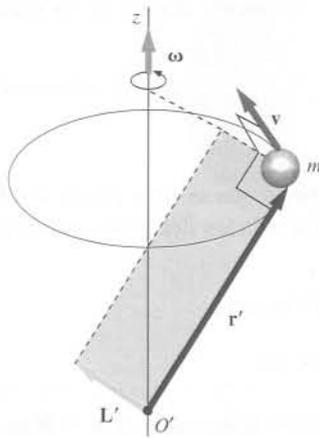


Figura 10.10

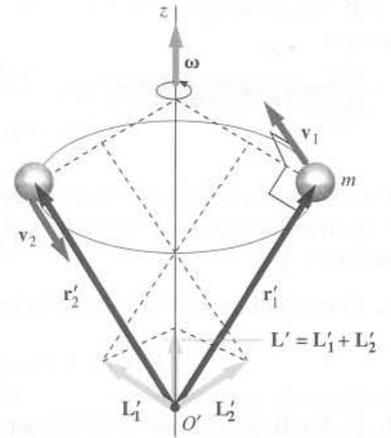


Figura 10.11

En la figura 10.11 hemos añadido una segunda partícula de igual masa que se mueve en el mismo disco. Los vectores momento angular  $L'_1$  y  $L'_2$  están representados respecto al mismo punto  $O'$ . El momento angular total  $L'_1 + L'_2$  del sistema formado por las dos partículas es de nuevo paralelo a la velocidad angular  $\omega$ . En este caso, el eje de rotación, el eje  $z$ , pasa a través del centro de masas del sistema de las dos partículas, y la distribución de masa es simétrica respecto a este eje, que se denomina **eje de simetría**. Para cualquier sistema de partículas que gira alrededor de un eje de simetría, el momento angular total (que es la suma de los momentos angulares de las partículas individuales) es paralelo a la velocidad angular y viene dado por

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{10.9}$$

MOMENTO ANGULAR DE UN SISTEMA QUE GIRA ALREDEDOR DE UN EJE DE SIMETRÍA

**EJEMPLO 10.1 | Momento angular respecto al origen**

Determinar el momento angular respecto al origen en las siguientes situaciones. (a) Un coche de masa 1200 kg se mueve en un círculo de 20 m de radio con velocidad de 15 m/s. El círculo se halla en el plano  $xy$ , centrado en el origen. Mirado desde un punto situado en la parte positiva del eje  $z$ , el coche se mueve en sentido antihorario. (b) El mismo coche se mueve con velocidad  $\mathbf{v} = -(15 \text{ m/s})\mathbf{i}$  a lo largo de la línea  $y = y_0 = 20 \text{ m}$  en el plano  $xy$  paralela al eje  $x$ . (c) Un disco en el plano  $xy$  de radio 20 m y masa 1200 kg gira con la velocidad angular de 0,75 rad/s alrededor de su eje, que es el eje  $z$ . Visto desde un punto situado en la parte positiva del eje  $z$ , el disco se mueve en sentido antihorario.

**Planteamiento del problema** En los apartados (a) y (b) úsese la relación  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . En el apartado (c) úsese  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ . Para determinar la dirección de  $\mathbf{L}$ , representar gráficamente los vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{r}$  y aplicar la regla de la mano derecha.

(a)  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  son perpendiculares y  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  posee la dirección  $z$  positiva (figura 10.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = rmv \text{ sen } 90^\circ \mathbf{k} \\ &= (20 \text{ m})(1200 \text{ kg})(15 \text{ m/s})\mathbf{k} \\ &= \boxed{3,6 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \mathbf{k}} \end{aligned}$$

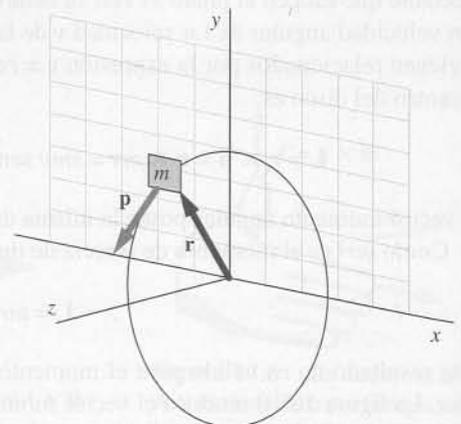


Figura 10.12

(b) 1. El mismo coche se mueve en el sentido decreciente de  $x$  a lo largo de la línea  $y = y_0 = 20$  m. Expresamos  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  en función de los valores unitarios:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = -mv\mathbf{i}$$

2. Calcular  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  (figura 10.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (x\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}) \times (-mv\mathbf{i}) \\ &= -xmv(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) - y_0mv(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \\ &= 0 - y_0mv(-\mathbf{k}) = y_0mv\mathbf{k} \\ &= (20 \text{ m})(1200 \text{ kg})(15 \text{ m/s})\mathbf{k} \\ &= \boxed{3,6 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \mathbf{k}} \end{aligned}$$

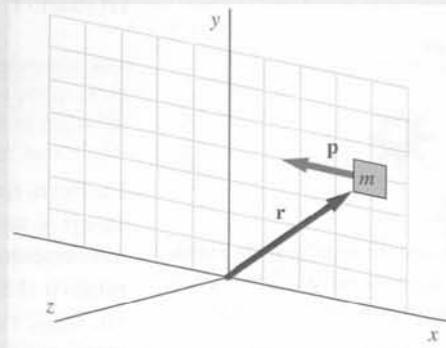


Figura 10.13

(c) Utilizar  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$  (figura 10.14):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= I\boldsymbol{\omega} = I\omega\mathbf{k} = \frac{1}{2}mR^2\omega\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2}(1200 \text{ kg})(20 \text{ m})^2(0,75 \text{ rad/s})\mathbf{k} \\ &= \boxed{1,8 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \mathbf{k}} \end{aligned}$$

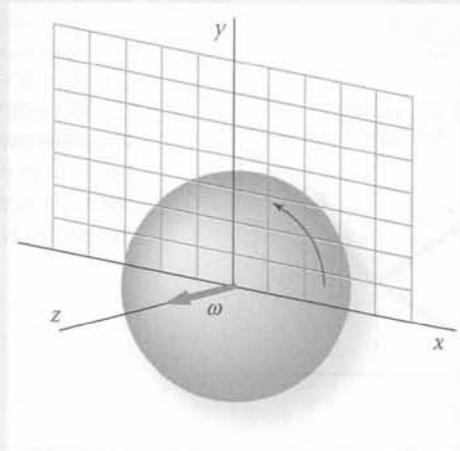


Figura 10.14

**Observación** El momento angular del coche que se mueve en círculo en (a) coincide con el del coche que se mueve en línea recta en (b). En (c), la velocidad de un punto en el borde del disco es  $v = R\omega = (20 \text{ m})(0,75 \text{ rad/s}) = 15 \text{ m/s}$ , es decir, la misma que posee el coche en los apartados (a) y (b). El momento de inercia de un disco de 1200 kg, de radio 20 m, es menor que el de un coche de 1200 kg a 20 m del eje porque gran parte de la masa del disco está más próxima al eje de rotación.

Hay varios resultados adicionales que se refieren al momento y al momento angular de un sistema de partículas. El primero de ellos es

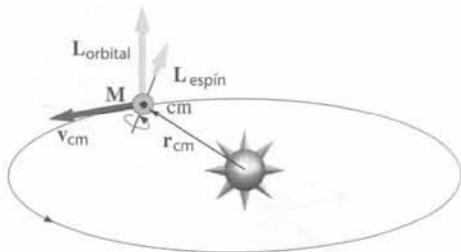
$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto ext}} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{sist}}}{dt} \quad (10.10)$$

El momento externo neto que actúa sobre un sistema es igual a la tasa de cambio del momento angular del sistema.

#### SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

En la ecuación 10.10 el momento externo neto es el vector suma de los momentos externos que actúan sobre el sistema. Si se integran los dos términos de esta ecuación con respecto del tiempo se obtiene

$$\Delta\mathbf{L}_{\text{sist}} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\tau}_{\text{neto ext}} dt \quad (10.11)$$



**Figura 10.15** El momento angular de la Tierra respecto al centro del Sol es la suma del momento angular de espín y el momento angular orbital.

A menudo es útil dividir el momento angular total de un sistema alrededor de un punto arbitrario  $O$  en el momento angular orbital y el momento angular de espín:

$$\mathbf{L}_{\text{sist}} = \mathbf{L}_{\text{órbita}} + \mathbf{L}_{\text{espín}} \tag{10.12}$$

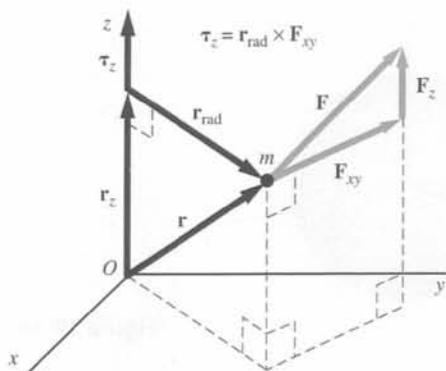
La Tierra tiene un momento angular de espín debido al movimiento de rotación alrededor de su eje y un momento angular de rotación orbital respecto del centro del Sol debido a su movimiento orbital alrededor de éste (figura 10.15). El momento angular total de la Tierra relativo al Sol es el vector suma del momento angular de espín y del momento angular orbital.  $\mathbf{L}_{\text{espín}}$  es el momento angular de un sistema alrededor de su centro de masas y  $\mathbf{L}_{\text{órbita}}$  es el momento angular de una partícula puntual de masa  $M$  localizada en el centro de masas del objeto y que se mueve a la velocidad que tendría el centro de masas. Es decir

$$\mathbf{L}_{\text{órbita}} = \mathbf{r}_{\text{cm}} \times M\mathbf{v}_{\text{cm}} \tag{10.13}$$

En el capítulo 9 los momentos no se calcularon respecto de puntos sino respecto de ejes. La relación entre el momento respecto a un eje y el momento respecto a un punto es directa. Si el punto  $O$  es el origen y una fuerza  $\mathbf{F}$  ejerce un momento  $\boldsymbol{\tau}$  respecto de  $O$ , entonces el momento correspondiente ejercido respecto del eje  $z$  es  $\tau_z$  (la componente  $z$  de  $\boldsymbol{\tau}$ ). Tratar con las componentes de un producto vectorial requiere un cuidado especial. Si  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , entonces

$$\tau_z = \mathbf{r}_{\text{rad}} \times \mathbf{F}_{xy} \tag{10.14}$$

MOMENTO RESPECTO DEL EJE  $z$



**Figura 10.16**

en donde  $\tau_z$ ,  $\mathbf{r}_{\text{rad}}$  y  $\mathbf{F}_{xy}$  (véase la figura 10.16) son las componentes de los vectores de  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{r}$ , y  $\mathbf{F}$ . (La componente en una dirección determinada es la componente escalar en esa dirección por el vector unitario en la misma dirección. Por ejemplo,  $\tau_z = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k}$ .)  $\mathbf{r}_{\text{rad}}$  es la componente de  $\mathbf{r}$  dirigida radialmente desde el eje  $z$  hacia el punto donde está la masa y  $\mathbf{F}_{xy}$  es la componente de  $\mathbf{F}$  en el plano  $xy$  (el plano perpendicular al eje  $z$ ). La relación entre el momento angular respecto de un eje y el momento angular respecto de un punto es también directa. El momento angular respecto de un eje es

$$\mathbf{L}_z = \mathbf{r}_{\text{rad}} \times \mathbf{p}_{xy} \tag{10.15}$$

MOMENTO ANGULAR RESPECTO DEL EJE  $z$

en donde  $\mathbf{p}_{xy}$  es la proyección del momento lineal  $\mathbf{p}$  en el plano  $xy$ . Tomando las componentes  $z$  en ambos términos de la ecuación 10.10 nos da

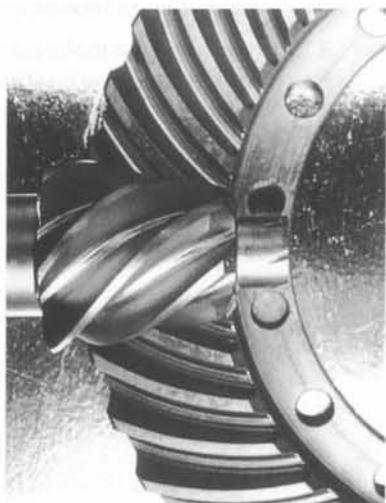
$$\tau_{\text{neto ext},z} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{sist},z}}{dt} \tag{10.16}$$

Si un objeto rígido gira alrededor del eje  $z$ ,  $\mathbf{L}_{\text{sist},z} = I_z \boldsymbol{\omega}$ , donde  $I_z$  es el momento de inercia alrededor del eje  $z$ . Sustituyendo esta relación en la ecuación 10.16 da

$$\tau_{\text{neto ext},z} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{sist},z}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \boldsymbol{\omega}) = I_z \boldsymbol{\alpha} \tag{10.17}$$

en donde el vector aceleración angular  $\boldsymbol{\alpha}$  se define como  $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ . (La ecuación 10.17 es la forma vectorial de la ecuación 9.18.)

En un sistema de partículas, el momento angular total respecto del eje  $z$  es igual a la suma de los momentos angulares respecto del eje  $z$  de las partículas individuales. Asimismo, el momento total respecto del eje  $z$  es la suma de los momentos respecto del eje  $z$  que actúan sobre el sistema.



## EJEMPLO 10.2 | La máquina de Atwood revisada

Una máquina de Atwood posee dos bloques de masa  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) conectados por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea que carece de rozamiento. La polea es un disco uniforme de masa  $M$  y radio  $R$ . La cuerda no desliza por la polea. Aplicar la ecuación 10.16 al sistema formado por los dos bloques, la cuerda y la polea para determinar la aceleración angular de ésta, así como la aceleración lineal de los bloques.

**Planteamiento del problema** Consideramos la polea y los bloques en el plano  $xy$ , con el eje  $z$  hacia fuera de la página y pasando por el centro de la polea en el punto  $O$ , como se muestra en la figura 10.17. Calculamos los momentos de las fuerzas y los momentos angulares respecto al eje  $z$  y aplicamos la segunda ley de Newton para el movimiento angular (ecuación 10.10). Como  $m_1$  es mayor que  $m_2$ , el disco girará en sentido contrario a las agujas del reloj, lo que corresponde a un sentido de  $\omega$  en la dirección  $z$  positiva hacia fuera de la página. Todas las fuerzas están en el plano  $xy$ , de modo que todos los momentos están dirigidos a lo largo del eje  $z$ . También las velocidades se hallan en el plano  $xy$ , por lo que todos los vectores momento angular también tienen la dirección de  $z$ . Como los momentos de las fuerzas, la velocidad angular y los momentos angulares son todos ellos vectores dirigidos a lo largo del eje  $z$ , podemos olvidar su naturaleza vectorial y tratar el problema como si fuera unidimensional, con valor positivo asignado al movimiento antihorario y negativo al movimiento horario. La aceleración  $a$  de los bloques está relacionada con la aceleración angular  $\alpha$  de la polea por la condición no deslizante  $a = R\alpha$ .

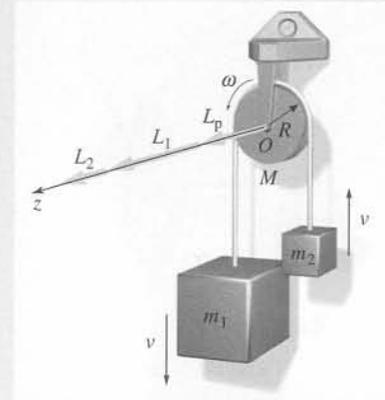


Figura 10.17

1. Dibujar un esquema de las fuerzas que actúan sobre el sistema (figura 10.18). Los cojinetes de la polea son los únicos elementos externos que están en contacto con el sistema. Las fuerzas externas sobre el sistema son pues, la fuerza normal de los cojinetes de la polea en la polea y la fuerza de la gravedad sobre los dos bloques y la polea.
2. Expresar la componente  $z$  de la segunda ley de Newton para la rotación (ecuación 10.16):
3. El momento externo total respecto del eje  $z$  es la suma de los momentos ejercidos por las fuerzas externas. Los brazos de palanca de  $F_1$  y de  $F_2$  cada uno coinciden con  $R$ . (Los brazos de palanca de las otras dos fuerzas son cero.)  $F_1 = m_1g$  y  $F_2 = m_2g$ :
4. El momento angular total respecto del eje  $z$  es igual al momento angular de la polea  $L_p$  más el momento angular del bloque 1,  $L_1$ , y del bloque 2,  $L_2$ , ambos en la dirección positiva del eje  $z$ . La polea tiene momento angular de espín pero no tiene momento angular orbital, mientras que cada bloque tiene momento angular orbital pero no tiene momento angular de espín.

$$\sum \tau_{\text{ext},z} = \frac{dL_z}{dt}$$

$$\begin{aligned} \sum \tau_{\text{ext},z} &= \tau_n + \tau_p + \tau_1 + \tau_2 \\ &= 0 + 0 + m_1gR - m_2gR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_z &= L_p + L_1 + L_2 \\ &= I\omega + m_1vR + m_2vR \end{aligned}$$

5. Sustituir estos resultados en la segunda ley de Newton para la rotación del paso 2.

$$\sum \tau_{\text{ext},z} = \frac{dL_z}{dt}$$

$$m_1gR - m_2gR = \frac{d}{dt}(I\omega + m_1vR + m_2vR)$$

$$m_1gR - m_2gR = I\alpha + (m_1 + m_2)Ra$$

$$m_1gR - m_2gR = \frac{1}{2}MR^2 \frac{a}{R} + (m_1 + m_2)Ra$$

por lo tanto

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)}, \text{ y}$$

$$\alpha = a/R =$$

$$= \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)R}$$

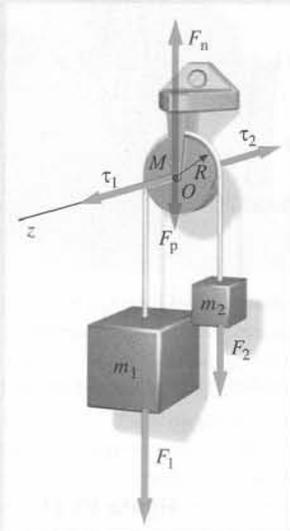


Figura 10.18

**Observación** 1. Este problema puede resolverse también escribiendo las tensiones  $T_1$  a la izquierda y  $T_2$  a la derecha y utilizando  $\tau = I\alpha$  para la polea (ecuación 10.17), así como  $\sum F_y = ma_y$  en cada bloque. Sin embargo, el uso del momento angular (ecuación 10.16) es más fácil, ya que una vez se ha despejado la aceleración, la obtención de las dos tensiones es directa. 2. Como  $L_2 = \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{v}_2$  (figura 10.19), la dirección de  $L_2$  se obtiene aplicando la regla de la mano derecha (figura 10.6). Además, como  $\tau_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$  (figura 10.19), la dirección de  $\tau_2$  se obtiene también a partir de la regla de la mano derecha.

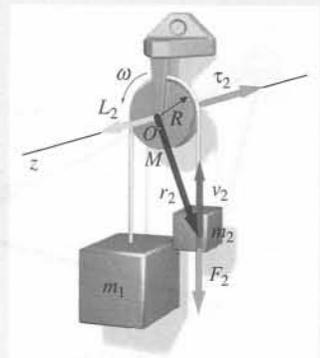


Figura 10.19

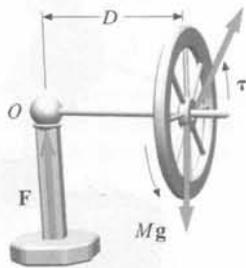
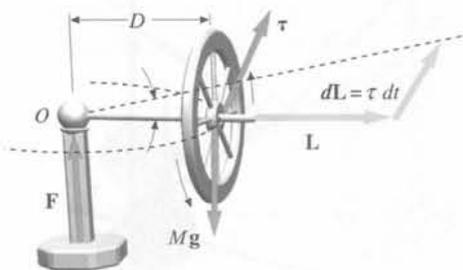
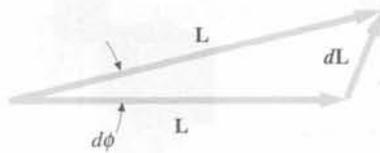


Figura 10.20



(a)



(b)

Figura 10.21

En muchos problemas, las fuerzas, vectores posición y velocidades son todos paralelos a un plano, de modo que los momentos, velocidades angulares y momentos angulares son todos magnitudes vectoriales dirigidas a lo largo de un eje de rotación que permanece fijo en el espacio. En tales casos, podemos asignar valores positivos y negativos a las rotaciones antihorarias y horarias, respectivamente, como hicimos en el ejemplo 10.2 y tratar el caso como un problema unidimensional. Sin embargo, hay otras situaciones, como el movimiento de un giroscopio, en donde las naturalezas vectoriales (multidimensionales) del momento, velocidad angular y momento angular son importantes.

### Movimiento de un giroscopio

Un giroscopio (o giróscopo) es un ejemplo común de movimiento en el cual el eje de rotación cambia de dirección. La figura 10.20 muestra un giroscopio que consiste en una rueda de bicicleta libre de girar alrededor de su eje. Este eje pivota en un punto situado a una distancia  $D$  del centro de la rueda y es libre de girar en cualquier dirección. Para poder entender cuantitativamente el complicado movimiento de este sistema, utilizaremos la segunda ley de Newton para la rotación,

$$\tau_{\text{neto}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (\text{o } d\mathbf{L} = \tau_{\text{neto}} dt)$$

junto con las relaciones

$$\tau_{\text{neto}} = \mathbf{r} \times M\mathbf{g}$$

y

$$\mathbf{L} = I_s \boldsymbol{\omega}_s$$

en donde  $I_s$  y  $\boldsymbol{\omega}_s$  son respectivamente el momento de inercia y la velocidad angular de la rueda respecto a su eje de espín. Todo lo que realmente debemos recordar para describir el movimiento de un giroscopio es que el *cambio* en el momento angular de la rueda debe verificarse en la dirección del momento de la fuerza que actúa sobre la rueda.

Supongamos que el eje se mantiene horizontalmente y luego se deja en libertad. Si la rueda está desprovista de giro, ésta, como es lógico, caerá girando alrededor de un eje horizontal que pasa por  $O$  y es perpendicular a  $\mathbf{r}$ . El momento es horizontal, perpendicular a la página y dirigido hacia dentro. En este caso el momento angular inicial es cero, de modo que el *cambio* de momento angular es igual al propio momento angular el cual, en este ejemplo, también es horizontal, perpendicular a la página y dirigido hacia dentro. Sin embargo, si la rueda *está* girando sobre sí misma y posee un momento angular grande a lo largo de su eje, no cae cuando se deja en libertad. Si la rueda cayera como antes, el eje apuntaría hacia abajo, dando lugar a una gran componente del momento angular en esta dirección. Sin embargo, no existe momento en la dirección hacia abajo. El momento es horizontal. Lo que realmente ocurre cuando el eje de la rueda gira en posición horizontal y se deja en libertad, es que el eje se desplaza en un plano horizontal en dirección hacia dentro del papel. La rueda se mueve de este modo cuando está girando porque así el *cambio* en el momento angular tiene la dirección del momento resultante. Este proceso viene ilustrado en la figura 10.21a, con un gran momento angular a lo largo del eje de la rueda y un cambio de momento angular  $d\mathbf{L}$  en la dirección del momento de la fuerza  $\boldsymbol{\tau}$ . Este movimiento, sorprendente cuando se observa por primera vez, se llama **precesión**. La velocidad angular de precesión  $\omega_p$  puede calcularse del modo siguiente. En un pequeño intervalo de tiempo  $dt$ , el cambio experimentado por el momento angular tiene el módulo  $dL$ :

$$dL = \tau dt = MgD dt$$

en donde  $MgD$  es el módulo del momento respecto al punto donde pivota. Según la figura 10.21b, el ángulo  $d\phi$  barrido por el eje en su movimiento es

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{MgD dt}{L}$$

La velocidad angular de la precesión es, por lo tanto,

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{MgD}{L} = \frac{MgD}{I_s \omega_s} \quad (10.18)$$

Si el momento angular respecto al giro de la rueda es muy grande, la precesión será muy lenta.

En el análisis precedente se supone que el momento angular de espín de la rueda es muy grande comparado con el momento angular orbital asociado al movimiento de precesión.

Si mediante la mano impedimos la precesión de un giróscopo que gira, al dejarlo libre éste iniciará el movimiento de precesión con un movimiento de rebote hacia arriba y hacia abajo llamado nutación. Este movimiento puede evitarse proporcionando al eje de rotación del giróscopo una velocidad angular igual a la asociada con el movimiento de precesión.

## 10.3 Conservación del momento angular

Si el momento externo resultante que actúa sobre el sistema es cero, resulta:

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{sist}}}{dt} = 0$$

o sea,

$$\mathbf{L}_{\text{sist}} = \text{constante} \quad (10.19)$$

Esta ecuación es un enunciado del **principio de conservación del momento angular**.

Si el momento externo resultante que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante.

### CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Este principio es análogo al de conservación del momento lineal. Si un sistema está aislado de sus alrededores de modo que sobre él no actúan fuerzas o momentos externos, se conservan tres magnitudes: energía, momento lineal y momento angular. La ley de conservación del momento angular es una ley fundamental de la naturaleza. Incluso a la escala microscópica de la física atómica y nuclear, donde la mecánica newtoniana no se cumple, el momento angular de un sistema aislado permanece constante en el tiempo.

El resultado experimental de la conservación del momento angular en ausencia de un momento resultante externo implica que la suma de los momentos internos debe ser nula. Este hecho viene sugerido por la tercera ley de Newton. Consideremos las dos partículas de la figura 10.22. Sea  $\mathbf{F}_{1,2}$  la fuerza ejercida por la partícula 1 sobre la partícula 2, y  $\mathbf{F}_{2,1}$  la ejercida por la partícula 2 sobre la 1. Por la tercera ley de Newton  $\mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2}$ . La suma de los momentos ejercidos por estas fuerzas respecto al origen  $O$  es

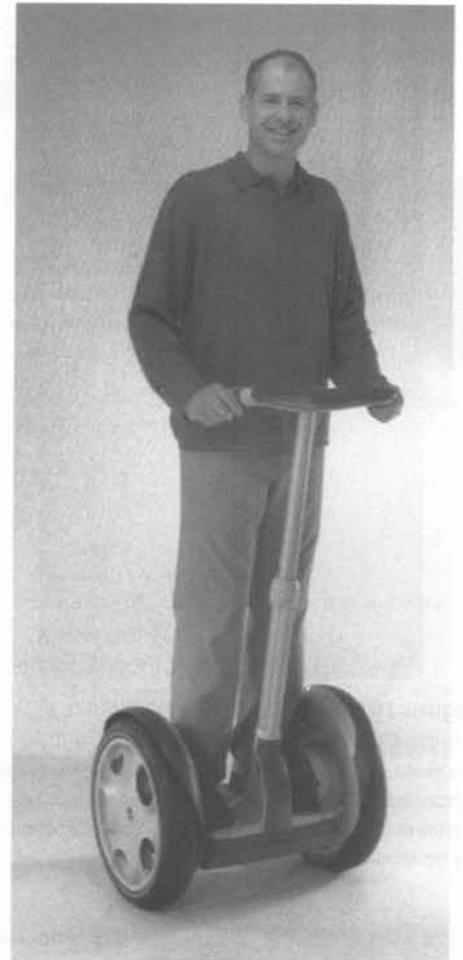
$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{2,1} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{1,2} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{2,1} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}_{1,2}) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{2,1}$$

El vector  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  está dirigido a lo largo de la línea que une las dos partículas. Si  $\mathbf{F}_{2,1}$  actúa paralelamente a la línea que une  $m_1$  y  $m_2$ ,  $\mathbf{F}_{2,1}$  y  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  son paralelos o antiparalelos y por lo tanto

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{2,1} = 0$$

Si esto es cierto para todas las fuerzas internas, los momentos internos se anulan por pares.

Existen múltiples ejemplos de la conservación del momento angular en la vida diaria. Las figuras 10.23 y 10.24 ilustran la conservación del momento angular en un saltador acrobático de trampolín y en una patinadora sobre hielo.



El Segway™ HT, inventado por Dean Kamen, se ha descrito como “el primer transporte de personas autoequilibrado”. Cuando la persona se inclina hacia delante, el movimiento rotacional del dispositivo es detectado por giróscopos de silicio que detectan el movimiento rotacional y emiten una señal al sistema de control interno. Éste la interpreta y activa los motores que dan a las ruedas el impulso adecuado para que el conductor pueda mantener el equilibrio.

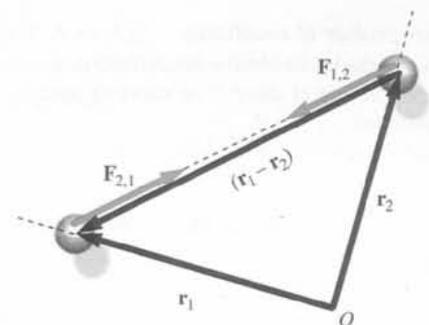


Figura 10.22



**Figura 10.24** Patinadora girando sobre sí misma. Como el momento ejercido por el hielo es pequeño, el momento angular de la patinadora es aproximadamente constante. Cuando reduce su momento de inercia acercando sus brazos al cuerpo, su velocidad angular aumenta.

**Figura 10.23** Fotografía múltiple de un saltador de trampolín. El centro de masas del deportista se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica después de abandonar la tabla. El momento angular está suministrado por el momento inicial externo ejercido por la fuerza de la tabla. Esta fuerza no pasa por el centro de masas del saltador si éste se inclina hacia delante al saltar. Si el saltador desea dar una o más revoluciones en el aire, encogerá sus brazos y piernas para disminuir su momento de inercia e incrementar, por lo tanto, su velocidad angular.



### EJEMPLO 10.3 | Un disco girando

Un disco con momento de inercia  $I_1$  está girando con velocidad angular inicial  $\omega_i$  alrededor de su eje de simetría sin rozamiento. Le cae encima otro disco con momento de inercia  $I_2$  que está inicialmente en reposo en el mismo eje (figura 10.25). Debido al rozamiento superficial, los dos discos finalmente adquieren una velocidad angular común  $\omega_f$ . Determinar  $\omega_f$ .

**Planteamiento del problema** Determinamos la velocidad angular final a partir del momento angular final, que es igual al momento angular inicial, ya que no existen fuerzas exteriores que actúen sobre el sistema. Obsérvese que *no* utilizaremos la conservación de la energía mecánica. La velocidad angular del disco superior se reduce, mientras que la del disco inferior incrementa por la fuerza de rozamiento cinético que actúa entre las superficies. Como el rozamiento cinético disipa energía mecánica, es de esperar que la energía mecánica total disminuya.

1. La velocidad angular final está relacionada con la inicial por el principio de conservación del momento angular:

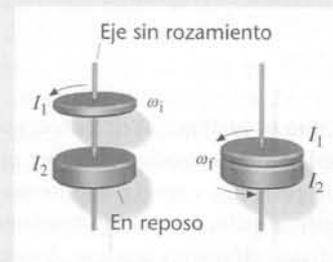
$$L_f = L_i$$

$$(I_1 + I_2) \omega_f = I_1 \omega_i$$

2. Despejar la velocidad angular final:

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega_i$$

**Comprobar el resultado** Si  $I_2 \ll I_1$ , la colisión tendría poco efecto sobre el disco 1. De nuestros resultados se obtiene efectivamente que  $\omega_f \rightarrow \omega_i$ . Si  $I_2 \gg I_1$ , entonces el disco 1 llegaría a detenerse sin que el disco 2 se moviera apenas. Por lo tanto,  $\omega_f \rightarrow 0$ , como se deduce de nuestros resultados.



**Figura 10.25**

En el choque de los dos discos del ejemplo 10.3, la energía mecánica no se conserva. Para comprobarlo escribamos la energía en función del momento angular. En general, si un sistema con momento de inercia  $I$  gira con velocidad angular  $\omega$ , su energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I}$$

en donde  $I\omega$  es el momento angular  $L$ . La energía cinética está, por lo tanto, relacionada con el momento angular por

$$E_c = \frac{L^2}{2I} \quad (10.20)$$

Comparemos este resultado con la energía cinética del movimiento lineal,  $E_c = p^2/2m$  (ecuación 8.25). La energía cinética inicial en el ejemplo 10.3 es

$$E_{c_i} = \frac{L_i^2}{2I_1}$$

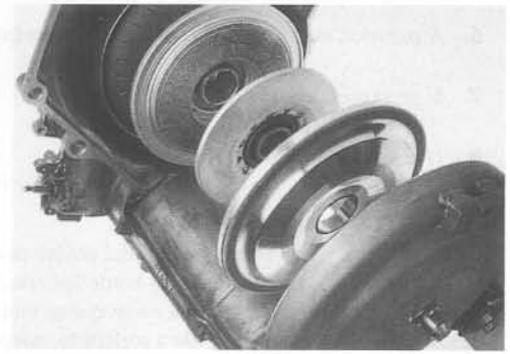
y la energía cinética final

$$E_{c_f} = \frac{L_f^2}{2(I_1 + I_2)}$$

Como  $L_f = L_i$ , la relación entre las energías cinéticas final e inicial es

$$\frac{E_{c_f}}{E_{c_i}} = \frac{I_1}{I_1 + I_2},$$

que es menor que uno. Esta interacción de los discos es análoga a una colisión inelástica unidimensional de dos objetos.



Las placas rotatorias de la transmisión de un camión verifican choques durante el embarque

#### EJEMPLO 10.4 | Fango en tu ojo

Beny, un estudiante de física en una escuela de secundaria, durante las horas de recreo es uno de los chicos más pendencieros de la escuela, y cuatro de sus compañeros de curso deciden darle una escarmiento usando la conservación del momento angular. Su plan consiste en darle un susto mediante el tiovivo que hay en el patio de la escuela (figura 10.26), y con el que Beny se divierte tanto. El tiovivo es un disco de 3 m de diámetro que gira y que tiene un momento de inercia de  $130 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Los cuatro amigos planean subir al tiovivo todos a la vez, junto con Beny, situándose en el borde del tiovivo cuando éste gira a  $20 \text{ rev/min}$ . Cuando uno de los cuatro dé una señal, los cuatro se moverán hacia el centro de modo que el tiovivo acelere. Ellos esperan que la aceleración centrípeta despidiera hacia fuera a Beny antes de que éste se dé cuenta, y que el muchacho caiga en el fango que se ha formado debido a las intensas lluvias recientes. Beny es fuerte y rápido, por lo que la aceleración necesaria ha de ser  $4g$ . ¿Funcionará su plan? (Suponer que los estudiantes tienen una masa de  $60 \text{ kg}$ .)

**Planteamiento del problema** Los cuatro estudiantes, al moverse hacia el centro del tiovivo, disminuyen el momento de inercia del sistema tiovivo-estudiantes. No actúan momentos externos sobre el sistema, por lo que el momento angular respecto del eje de rotación es constante, es decir, el producto del momento de inercia por la velocidad angular también es constante, por lo que la disminución del momento de inercia significa un aumento de la velocidad angular. Se usa la velocidad angular para determinar la aceleración centrípeta en el borde.

1. La aceleración centrípeta depende de la velocidad angular  $\omega$  y del radio  $R$ :
2. El momento angular se conserva. Si se dan rotaciones respecto a un eje fijo,  $L = I\omega$ :
3. El momento de inercia del sistema es la suma de los momentos de inercia de los estudiantes más el momento de inercia del tiovivo. Cada estudiante tiene una masa  $m$ :
4. Para determinar el momento de inercia final, suponemos que los cuatro estudiantes se sitúan a una distancia de  $30 \text{ cm}$  del centro de rotación:
5. Usando la conservación del momento angular de rotación, se despeja la velocidad angular final:

$$a_c = \omega^2 R$$

$$\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_i$$

$$I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

$$\begin{aligned} I_i &= 5 \times mR^2 + I_t \\ &= 5(60 \text{ kg})(1,5 \text{ m})^2 + 130 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\ &= 805 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_f &= mR^2 + 4 \times mr^2 + I_t \\ &= (60 \text{ kg})(1,5 \text{ m})^2 + 4(60 \text{ kg})(0,3 \text{ m})^2 + 130 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\ &= 287 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_f &= \frac{I_i}{I_f} \omega_i = \frac{805 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}{287 \text{ kg}\cdot\text{m}^2} 20 \text{ rev/min} \\ &= 56,2 \text{ rev/min} = 5,88 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

#### ¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

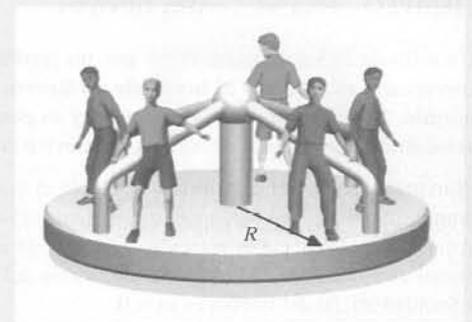


Figura 10.26

- A partir de  $\omega$  se obtiene la aceleración centrípeta:
- Si se expresa en función de  $g$ :
- ¿Acaba Beny cayendo al barro?

$$a_c = \omega^2 R = (5,88 \text{ rad/s})^2 (1,5 \text{ m}) = 51,9 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = 51,9 \text{ m/s}^2 \times \frac{1 \text{ g}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 5,29g$$

Definitivamente, Beny estará sometido a una aceleración mayor que  $4g$ , por lo que caerá y se precipitará sobre el barro.

**Observación** La velocidad lineal del tiovivo es mayor en el borde que en el centro, haciéndose cero en el mismo eje de rotación. En el borde los estudiantes se mueven en un círculo. A medida que se mueven hacia el centro acceden a zonas que se mueven más despacio que ellos, por lo que ejercen una fuerza sobre el tiovivo que tiende a acelerarlo, mientras que el tiovivo ejerce sobre ellos una fuerza que tiende a frenarlos. Las fuerzas de rozamiento estáticas ejercidas por sus pies ejercen un momento neto sobre el tiovivo, incrementando su momento angular respecto al eje de rotación. Igualmente, el tiovivo ejerce unas fuerzas de rozamiento estático de igual módulo y de signo contrario sobre los pies de los estudiantes, de modo que el momento de estas fuerzas disminuye su momento angular. Los dos momentos son de igual módulo y de signo contrario, como también lo son los cambios del momento asociados. Así, el momento angular del sistema tiovivo-estudiantes permanece constante.

El momento de inercia del sistema tiovivo-estudiantes disminuye a medida que éstos se desplazan hacia el centro. Por lo tanto, el momento de inercia del sistema disminuye, mientras que el momento angular es constante y, en consecuencia, a partir de la ecuación 10.20 se ve que la energía cinética del sistema tiovivo-estudiantes aumenta. En este caso el aumento de la energía proviene de la energía interna de los estudiantes.

### EJEMPLO 10.5 | Más tiovivos

Un niño de 25 kg de masa corre por un jardín con una velocidad de 2,5 m/s de forma que su trayectoria es *tangente* al borde de un tiovivo de 500 kg·m<sup>2</sup> de momento de inercia, que está parado. El niño salta sobre el tiovivo y lo pone en movimiento (figura 10.27). Determinar la velocidad angular final del niño y del tiovivo cuando se mueven juntos.

**Planteamiento del problema** Desde el momento en que el niño salta sobre el tiovivo, no hay ningún momento que actúe sobre el sistema tiovivo-niño, por lo que el momento angular total del sistema respecto al eje de rotación del tiovivo se conserva. El niño tiene 25 kg de masa, su velocidad inicial es  $v = 2,5 \text{ m/s}$ , el momento de inercia del tiovivo es  $I = 500 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  y su radio  $R = 2,0 \text{ m}$ . La velocidad inicial del tiovivo es  $\omega_i = 0$ .

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

- Escribir una expresión para el momento angular inicial del niño respecto al centro del tiovivo.
- Expresar el momento angular total del sistema niño-tiovivo en función de su velocidad angular final  $\omega_f$ .
- Igualar las expresiones de los pasos 1 y 2 y despejar  $\omega_f$ .

#### Respuestas

$$L_i = mvR$$

$$L_f = (mR^2 + I_m)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{mvR}{mR^2 + I_m} = \boxed{0,208 \text{ rad/s}}$$

**Ejercicio** Calcular las energías cinéticas inicial y final del sistema niño-tiovivo. (Respuesta  $E_{ci} = 78,2 \text{ J}$ ,  $E_{cf} = 13,0 \text{ J}$ .)

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

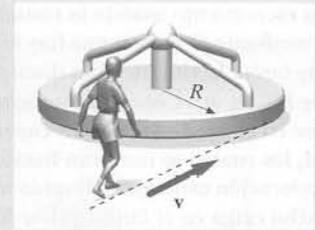
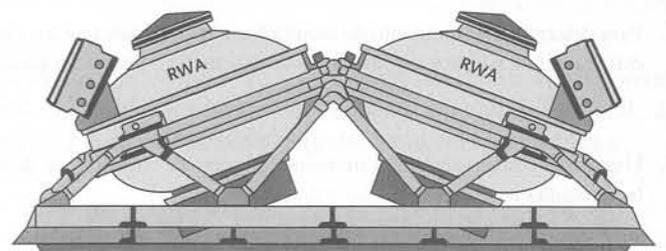


Figura 10.27

El telescopio espacial Hubble se apunta a un blanco determinado regulando las velocidades de giro de dos volantes de 45 kg de ejes distintos que pueden alcanzar las 3000 rpm. Estas variaciones de velocidad de rotación que generan el momento angular que hace virar el telescopio espacial a nuevas posiciones están controladas mediante programas de ordenador. Este mecanismo de puntería puede alcanzar y mantener un blanco en unos 0,005 segundos de arco, lo cual equivale a la precisión que tendría un haz luminoso emitido en Los Angeles que incidiera y se mantuviese sobre una moneda situada en San Francisco.





Un astronauta examina el volante mecánico del telescopio espacial Hubble.

**EJEMPLO 10.6 | Tirando por un agujero**

Una partícula de masa  $m$  se mueve con velocidad  $v_0$  en una circunferencia de radio  $r_0$  sobre la superficie de una mesa sin rozamiento. La partícula está atada a una cuerda que pasa a través de un agujero de la mesa, como indica la figura 10.28. Tirando de la cuerda lentamente hacia abajo, la partícula se mueve en una circunferencia de menor radio  $r_f$ . (a) Determinar la velocidad final en función de  $r_0$ ,  $v_0$  y  $r_f$ . (b) Determinar la tensión de la cuerda cuando la partícula se mueve en una circunferencia de radio  $r$  en función de  $m$ ,  $r$  y el momento angular  $L$ . (c) Calcular el trabajo realizado sobre la partícula por la tensión  $T$  integrando  $T \cdot d\ell$  desde  $r_0$  a  $r_f$ . Expresar la respuesta en función de  $r$  y  $L_0$ .

**Planteamiento del problema** La velocidad de la partícula está relacionada con su momento angular. El momento neto es igual a la tasa de cambio del momento angular. La fuerza neta que actúa sobre la partícula es la fuerza de tensión  $T$  ejercida por la cuerda, la cual siempre está orientada hacia el agujero. Por lo tanto, el momento respecto al agujero es cero. Así, el momento angular respecto a este eje es constante.

(a) La conservación del momento angular relaciona la velocidad final con la inicial y los radios inicial y final:

$$L_f = L_0$$

$$mv_f r_f = mv_0 r_0$$

por lo tanto

$$v_f = \frac{r_0 v_0}{r_f}$$

(b) 1. Se aplica la segunda ley de Newton para relacionar  $T$  con  $v$  y  $r$ :

$$T = m \frac{v^2}{r}$$

2. A partir de la definición del momento angular se obtiene una relación entre  $L$ ,  $r$  y  $v$ :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$L = rmv \sin 90^\circ = mvr$$

3. Se despeja  $v$  del resultado del paso 2 del apartado (b) y se sustituye en el paso 1 del apartado (b) obteniendo una expresión para  $T$ :

$$T = m \frac{v^2}{r} = \frac{m}{r} \left( \frac{L}{mr} \right)^2 = \frac{L_0^2}{mr^3}$$

(c) 1. Dibujar la partícula cuando se mueve cerca del agujero (figura 10.29). Cuando la partícula experimenta un desplazamiento  $d\ell$ , su distancia  $r$  respecto del eje cambia una cantidad infinitesimal  $dr$ . Como  $r$  disminuye,  $dr$  es negativa y se cumple:

$$dr = -|dr|$$

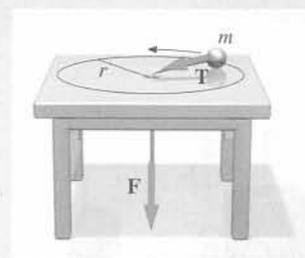
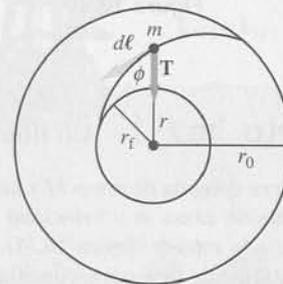
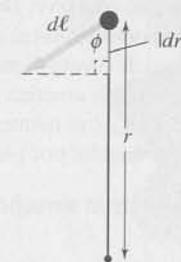


Figura 10.28



(a)



(b)

Figura 10.29

2. Usando el paso 1 escribir  $dW = \mathbf{T} \cdot d\ell$  en función de  $T$  y  $dr$ :

$$dW = \mathbf{T} \cdot d\ell = T d\ell \cos \phi$$

ya que

$$|dr| = d\ell \cos \phi$$

$$dW = T|dr| = -T dr$$

3. Integrar desde  $r_0$  hasta  $r_f$  después de sustituir  $T$  por el resultado obtenido en el paso 3 del apartado (b):

$$W = -\int_{r_0}^{r_f} T dr = -\int_{r_0}^{r_f} \frac{L^2}{mr^3} dr$$

$$= -\frac{L^2}{m} \int_{r_0}^{r_f} r^{-3} dr = -\frac{L^2 r^{-2}}{m(-2)} \Big|_{r_0}^{r_f}$$

$$= \frac{L^2}{2m} \left( \frac{1}{r_f^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

**Comprobar el resultado** Obsérvese que para tirar de la cuerda hacia abajo debe realizarse un trabajo. Como  $r_f$  es menor que  $r_0$ , el trabajo es positivo. Este trabajo se invierte en incrementar la energía cinética. La variación de energía cinética puede calcularse también directamente. En efecto,  $E_c = L^2/2I$ . Haciendo  $L_0 = L_f = L$  e  $I = mr^2$ , la variación de la energía cinética es  $E_{c_f} - E_{c_i} = (L^2/2mr_f^2) - (L^2/2mr_0^2) = (L^2/2m)(r_0^2 - r_f^2)$ , que es el mismo resultado obtenido por integración.

**Observación** El aumento de trabajo  $dW$  también puede obtenerse expresando el desplazamiento  $d\ell$  como  $dr$ , el cambio en el vector posición  $\mathbf{r}$ . El producto escalar  $\mathbf{T} \cdot d\mathbf{r}$  se expresa en componentes de forma que queda  $dW = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} = T_r dr = -T dr$ . En este desarrollo  $T_r = -T$  es la componente radial de  $\mathbf{T}$  y  $dr$  es la componente radial de  $d\mathbf{r}$ .

**Ejercicio** ¿Para qué radio  $r_N$  la tensión es  $N$  veces la tensión correspondiente al radio  $r_0$ ? (Respuesta  $r_N = r_0/\sqrt[3]{N}$ .)

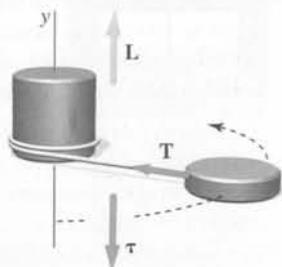


Figura 10.30

Sobre un plano sin rozamiento (figura 10.30) descansa un disco al que se da una velocidad inicial  $v_0$ . El disco está atado a una cuerda que se enrolla alrededor de un cilindro vertical fijo. Esta situación parece semejante al ejemplo 10.6, pero no es lo mismo. Aquí no hay un agente que realice trabajo sobre el disco, ni ningún mecanismo que produzca una disipación energética. Por lo tanto, la energía mecánica debe conservarse. Como  $E_c = L^2/2I$  es constante e  $I$  decrece al disminuir  $r_0$ ,  $L$  también debe decrecer. Obsérvese que la tensión no actúa hacia el centro del cilindro. La tensión produce un momento respecto al centro del cilindro en dirección hacia abajo, el cual reduce el momento angular del disco, dirigido hacia arriba.

**EJEMPLO 10.7 | Un nuevo péndulo balístico**

Una barra delgada de masa  $M$  y longitud  $d$  cuelga de un pivote en su parte superior. Una masa de arcilla de masa  $m$  y velocidad  $v$  choca contra la barra a una distancia  $x$  del pivote y se adhiere a la misma (figura 10.31). Determinar la razón entre la energía cinética del sistema inmediatamente después e inmediatamente antes de la colisión.

**Planteamiento del problema** La colisión es inelástica, y por lo tanto no es de esperar que la energía mecánica se conserve. Durante el choque, el pivote ejerce una gran fuerza sobre la barra y por lo tanto, el momento lineal no se conserva. Sin embargo, no existen momentos externos que actúen en el punto de pivotamiento sobre el sistema barra-arcilla y por lo tanto, el momento angular se conserva. La energía cinética después de la colisión inelástica puede expresarse en función del momento angular  $L_{\text{sis}}$  y el momento de inercia  $I'$  del sistema combinado barra-arcilla. La conservación del momento angular nos permite relacionar  $L_{\text{sis}}$  con la masa  $m$  y la velocidad  $v$  de la arcilla.

*¡INTÉNTELO USTED MISMO!*

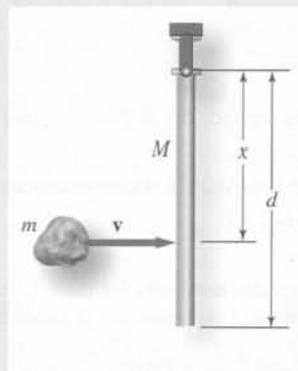


Figura 10.31

Tapé la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

**Pasos**

1. Antes de la colisión, la energía cinética del sistema es la energía cinética de la masa de arcilla.

**Respuestas**

$$E_{c_i} = \frac{1}{2}mv^2$$

2. Después de la colisión, la energía cinética es la energía cinética del sistema barra-arcilla. Escribir la energía cinética después de la colisión en función del momento angular  $L_{\text{sist}}$  y del momento de inercia  $I'$  del sistema barra-arcilla.

$$E_{ci} = \frac{L_{\text{sist}}^2}{2I'}$$

3. Durante la colisión se conserva el momento angular. Escribir el momento angular  $L_{\text{sist}}$  en función de  $m$ ,  $v$ , y  $x$ .

$$L_{\text{sist}} = mvx$$

4. Expresar  $I'$  en función de  $m$ ,  $x$ ,  $M$  y  $d$ .

$$I' = mx^2 + \frac{1}{3}Md^2$$

5. Sustituir estas expresiones de  $L_{\text{sist}}$  e  $I'$  en la ecuación de  $E_{ci}$ .

$$\begin{aligned} E_{ci} &= \frac{L_{\text{sist}}^2}{2I'} = \frac{(mvx)^2}{2(mx^2 + \frac{1}{3}Md^2)} \\ &= \frac{3}{2} \frac{m^2x^2v^2}{(3mx^2 + Md^2)} \end{aligned}$$

6. Dividir la energía total del sistema después de la colisión por la energía inicial de la arcilla.

$$\frac{E_{ci}}{E_{ci}} = \frac{\frac{3}{2} \frac{m^2x^2v^2}{(3mx^2 + Md^2)}}{\frac{1}{2}mv^2} = \boxed{\frac{1}{1 + \frac{Md^2}{3mx^2}}}$$



**Observación** Este ejemplo es el análogo rotacional del péndulo balístico visto en el ejemplo 8.14. En aquel ejemplo, utilizamos la conservación del momento lineal para determinar la energía del péndulo después de la colisión.

La figura 10.32 nos muestra una estudiante haciendo una demostración de la conservación del momento angular respecto a un eje. Está sentada sobre una plataforma giratoria que está dotada de cojinetes sin rozamiento, con lo cual la componente vertical del momento ejercido sobre el sistema plataforma-estudiante-rueda se mantiene igual a cero. En consecuencia, la componente vertical del momento angular del sistema también permanece constante. Inicialmente, la plataforma está estacionaria y la rueda de bicicleta gira con rapidez alrededor de su eje, que inicialmente es horizontal, tal como se muestra en la figura 10.32a. El momento angular inicial del sistema  $\mathbf{L}_{\text{sist } i}$  coincide con el momento angular de espín inicial de la rueda  $\mathbf{L}_{r,e i}$ , que es horizontal. Esto significa que la componente vertical de  $\mathbf{L}_{\text{sist } i}$  es cero. Si ahora la estudiante (figura 10.32b) inclina el eje de la rueda hacia arriba, el vector momento angular de espín de la rueda  $\mathbf{L}_{r,e}$  se inclina con ella, y el sistema empieza a girar en la dirección de las agujas del reloj (visto desde arriba) alrededor del eje de la plataforma. El vector momento angular asociado con esta rotación del sistema a favor de las agujas del reloj alrededor del eje de rotación de la plataforma, tiene una componente  $z$ ,  $L_{p,z}$  dirigida hacia abajo. Como la componente vertical de  $\mathbf{L}_{\text{sist}}$  se mantiene igual a cero, podemos concluir que  $L_{p,z}\mathbf{k}$  es igual y opuesto a  $L_{r,e,z}\mathbf{k}$ .

A menos que usted haya visto esta demostración antes, el giro que experimenta la plataforma es sorprendente. Examinemos por qué se produce. La estudiante ejerce un momento hacia arriba, sobre la rueda que gira, para inclinar su momento angular hacia arriba. (Debido al producto vectorial, un momento hacia arriba necesita fuerzas horizontales.) La rueda ejerce un momento hacia abajo (también ejerce fuerzas horizontales) de igual módulo sobre la estudiante. Es precisamente este momento hacia abajo sobre la estudiante el que produce que el sistema empiece a girar en el sentido de las agujas del reloj alrededor del eje de la plataforma.

**Ejercicio** Supongamos que cuando la pasamos a la estudiante, la rueda de bicicleta gira ya con su eje vertical y con su vector momento angular dirigido hacia arriba. ¿En qué dirección girará la plataforma cuando la estudiante incline el eje hacia la dirección horizontal? (Respuesta Visto desde arriba, en la dirección contraria a las agujas del reloj).

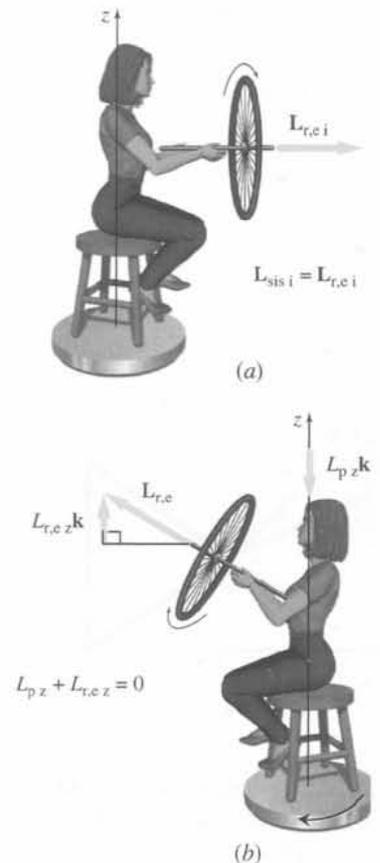


Figura 10.32

### Demostraciones de las ecuaciones 10.10, 10.12, 10.13, 10.14, y 10.15

**Demostración de la ecuación 10.10** A continuación demostraremos que la segunda ley de Newton exige que la derivada del momento angular de una partícula sea igual al momento resultante que actúa sobre la misma. Si tenemos cierto número de fuerzas aplicadas sobre una partícula, el momento resultante respecto al origen  $O$  es la suma de los momentos debidos a cada fuerza:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots = \mathbf{r} \times \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{neto}}$$

Según la segunda ley de Newton, la fuerza neta o resultante es igual a la derivada respecto al tiempo del momento lineal  $d\mathbf{p}/dt$ . Así,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{neto}} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (10.21)$$

Comparemos ahora esta expresión con la derivada respecto al tiempo del momento angular. La definición del momento angular de una partícula (ecuación 10.8) es

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Podemos calcular  $d\mathbf{L}/dt$  utilizando la regla de derivación de un producto:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}\right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)$$

El primer término del segundo miembro de esta ecuación es cero, porque  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , de modo que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Comparando este resultado con la ecuación 10.21 resulta

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (10.22)$$

El momento resultante aplicado a un sistema de partículas es la suma de los momentos individuales que actúan sobre el sistema. Generalizando la ecuación 10.22 a un sistema de partículas resulta

$$\sum_i \boldsymbol{\tau} = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{L}_i = \frac{d\mathbf{L}_{\text{sist}}}{dt}$$

En esta ecuación, la suma de los momentos puede incluir momentos internos y momentos debidos a fuerzas externas al sistema. La suma de los momentos internos debe ser cero. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{sist}}}{dt} \quad (10.10)$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

**\*Demostración de las ecuaciones 10.12 y 10.13** A continuación demostraremos que el momento angular de un sistema de partículas se escribe como la suma del momento angular orbital más el momento angular de espín.

La figura 10.33 muestra un sistema de partículas. El momento angular  $L_i$  de la partícula  $i$  respecto a un punto arbitrario  $O$  viene dado por

$$L_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (10.23)$$

y el momento angular del sistema respecto a  $O$  es

$$\mathbf{L} = \sum L_i = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

El momento angular respecto al centro de masas viene dado por

$$L_{cm} = \sum (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{u}_i)$$

donde  $\mathbf{r}'_i$  y  $\mathbf{u}_i$  son la posición y la velocidad relativa al centro de masas de la partícula  $i$ . A partir de la figura, puede verse que

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}'_i$$

Derivando con respecto del tiempo en ambos lados se obtiene

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{u}_i$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación 10.23, tenemos

$$L_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = (\mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{u}_i)$$

Desarrollando los términos de la derecha se llega a

$$L_i = (\mathbf{r}_{cm} \times m_i \mathbf{v}_{cm}) + (\mathbf{r}_{cm} \times m_i \mathbf{u}_i) + (m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_{cm}) + (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{u}_i)$$

Sumamos ambos lados para todas las partículas y extraemos el factor común en las sumas, obteniendo

$$L_{sist} = \sum L_i = (\mathbf{r}_{cm} \times \sum (m_i) \mathbf{v}_{cm}) + (\mathbf{r}_{cm} \times \sum (m_i \mathbf{u}_i)) + (\sum (m_i \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{v}_{cm}) + (\sum (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{u}_i))$$

Dado que  $\sum (m_i \mathbf{r}'_i)$  y  $\sum (m_i \mathbf{u}_i)$  son cero y que  $\sum m_i = M$  y  $\sum (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{u}_i) = L_{cm}$  tenemos  $L_{sist} = \mathbf{r}_{cm} \times M \mathbf{v}_{cm} + L_{cm}$ , o bien,

$$L_{sist} = L_{órbita} + L_{espín} \quad (10.12)$$

$$\text{en donde } L_{espín} = L_{cm} \text{ y } L_{órbita} = \mathbf{v}_{cm} \times M \mathbf{v}_{cm} \quad (10.13)$$

**\*Demostración de las ecuaciones 10.14 y 10.15** A continuación, para obtener las fórmulas para el momento y el momento angular respecto de un eje fijo, tomamos las componentes  $z$  de los vectores momento y momento angular alrededor de un punto. El momento angular de una partícula respecto del origen es  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , por lo que determinar la componente  $z$  del momento angular significa determinar la componente  $z$  del producto vectorial  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , para lo cual expresamos  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{rad} + \mathbf{r}_z \text{ y } \mathbf{p} = \mathbf{p}_{xy} + \mathbf{p}_z$$

en donde  $\mathbf{r}_{rad}$ ,  $\mathbf{r}_z$ ,  $\mathbf{p}_{xy}$  y  $\mathbf{p}_z$  son las componentes de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  (véase la figura 10.34). Sustituyendo  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  se obtiene

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (\mathbf{r}_{rad} + \mathbf{r}_z) \times (\mathbf{p}_{xy} + \mathbf{p}_z)$$

y desarrollando el término de la derecha se obtiene

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r}_{rad} \times \mathbf{p}_{xy}) + (\mathbf{r}_{rad} \times \mathbf{p}_z) + (\mathbf{r}_z \times \mathbf{p}_{xy}) + (\mathbf{r}_z \times \mathbf{p}_z)$$

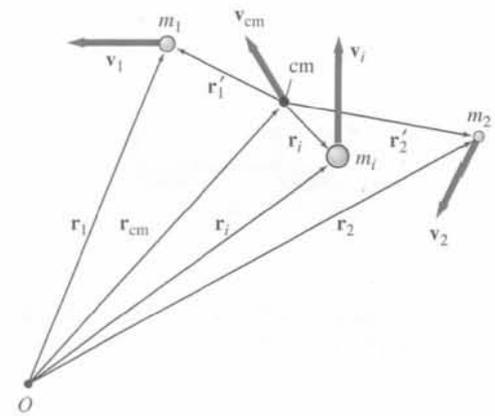


Figura 10.33

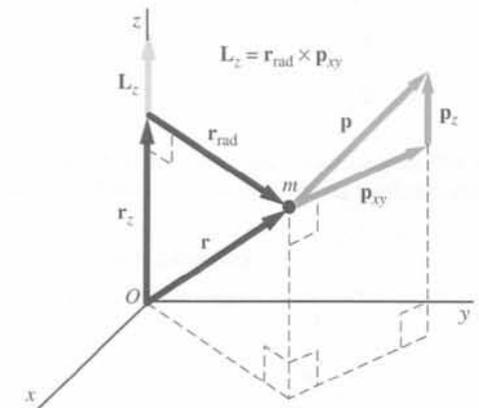


Figura 10.34 Las componentes  $\mathbf{r}_{rad}$ ,  $\mathbf{r}_z$ ,  $\mathbf{p}_{xy}$  y  $\mathbf{p}_z$  de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  se usan para calcular el momento angular respecto el eje  $z$ ,  $L_z$ .



El producto vectorial de dos vectores es perpendicular a ambos, por lo que el producto  $\mathbf{r}_{\text{rad}} \times \mathbf{p}_{xy}$  es paralelo al eje  $z$ . En cada uno de los tres productos restantes al menos un vector es paralelo al eje  $z$ , por lo que la componente  $z$  de cada uno de estos productos es cero. Por consiguiente,

$$\mathbf{L}_z = \mathbf{r}_{\text{rad}} \times \mathbf{p}_{xy} \quad (10.14)$$

MOMENTO ANGULAR RESPECTO AL EJE  $Z$

El momento respecto al origen asociado con una fuerza que actúa sobre la partícula viene dado por  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  (ecuación 10.1). Siguiendo el mismo procedimiento con el momento como el que seguimos con el momento angular se obtiene

$$\boldsymbol{\tau}_z = \mathbf{r}_{\text{rad}} \times \mathbf{F}_{xy} \quad (10.15)$$

MOMENTO RESPECTO DEL EJE  $Z$

## \* 10.4 Cuantización del momento angular

El momento angular desempeña un papel importante en la descripción de los átomos, moléculas y partículas elementales. Lo mismo que la energía, el momento angular está **cuantizado**, es decir, las variaciones del momento angular pueden tener lugar sólo en cantidades discretas.

El momento angular de una partícula asociado a su movimiento constituye el llamado momento angular orbital. El módulo del momento angular orbital de una partícula sólo puede tener los valores

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)} \hbar \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (10.24)$$

en donde  $\hbar$  ("h barrada") es la **unidad fundamental del momento angular**, relacionada con la constante de Planck,  $h$ :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (10.25)$$

La componente del momento angular orbital a lo largo de cualquier línea del espacio está también cuantizada y puede tener sólo los valores  $\pm m\hbar$ , en donde  $m$  es un número entero no negativo menor o igual que  $\ell$ . Por ejemplo, si  $\ell = 2$ ,  $m$  puede ser 2, 1, ó 0.

El cuanto del momento angular,  $\hbar$ , es tan pequeño, que la cuantización del momento angular no se aprecia en el mundo macroscópico. Consideremos, por ejemplo, una partícula de masa  $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$  que se mueve en un círculo de radio  $1 \text{ cm}$  con un periodo de  $1 \text{ s}$ . Su momento angular orbital es

$$L = mvr = mr^2\omega = mr^2 \frac{2\pi}{T} = (10^{-3} \text{ kg})(10^{-2} \text{ m})^2 \frac{2\pi}{1 \text{ s}} = 6,28 \times 10^{-7} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Si dividimos por  $\hbar$  resulta

$$\frac{L}{\hbar} = \frac{6,28 \times 10^{-7} \text{ J} \cdot \text{s}}{1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} = 6 \times 10^{27}$$

El momento angular de este sistema macroscópico contiene  $6 \times 10^{27}$  unidades de la unidad fundamental del momento angular. Aunque pudiésemos medir  $L$  con la precisión de una parte en mil millones, nunca podríamos apreciar la cuantización de este momento angular macroscópico.

La cuantización del momento angular orbital conduce a la cuantización de la energía cinética de rotación. Consideremos una molécula que gira alrededor de su centro de masas con momento angular  $L$  (figura 10.35). Sea  $I$  su momento de inercia. Su energía cinética es

$$E_c = \frac{L^2}{2I} \quad (10.26)$$

$L^2$  está cuantizando según los valores  $L^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2$  con  $\ell = 0, 1, 2 \dots$ . Por lo tanto, la energía cinética está cuantizada según los valores  $E_{c_\ell}$  dados por

$$E_{c_\ell} = \frac{L^2}{2I} = \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2I} = \ell(\ell + 1)E_{0r} \quad (10.27a)$$

en donde

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} \quad (10.27b)$$

La figura 10.36 muestra un diagrama de niveles energéticos de una molécula en rotación con momento de inercia constante  $I$ . Obsérvese que, al contrario de lo que ocurre en los niveles energéticos de un sistema en vibración (sección 7.4), los niveles energéticos de rotación no están igualmente espaciados y el nivel más bajo es cero.

La materia estable contiene sólo tres tipos de partículas: electrones, protones y neutrones. Además de su momento angular orbital, cada una de estas partículas posee también un momento angular intrínseco llamado su **espín**. El momento angular de espín de una partícula, como su masa y carga eléctrica, es una propiedad fundamental de la partícula que no puede modificarse. El módulo del vector momento angular de espín para electrones y otros fermiones es  $s = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)}\hbar$  y la componente a lo largo de cualquier línea del espacio puede tener sólo dos valores,  $+\frac{1}{2}\hbar$  y  $-\frac{1}{2}\hbar$ . Por ello, estas partículas se llaman "partículas de espín un medio". Los electrones, protones, neutrones y otras partículas de espín un medio se llaman **fermiones**. Otras partículas como los fotones y las partículas  $\alpha$ , llamadas **bosones**, tienen espín cero o entero. El espín es una propiedad cuántica que no tiene nada que ver con el movimiento de la partícula.

La imagen de un electrón como una bola que gira sobre sí misma y se mueve en órbita alrededor del núcleo (del mismo modo que la Tierra gira sobre sí misma y alrededor del Sol) es un modelo útil, pero no totalmente exacto. Mientras el momento angular de una bola que gira sobre sí misma puede aumentar o disminuir, el espín de un electrón es una propiedad fija que no se modifica. Además, hoy sabemos que un electrón es una partícula puntual que carece de tamaño.

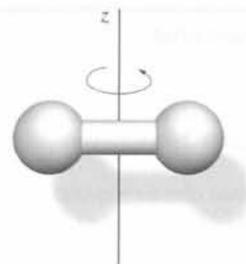


Figura 10.35 Modelo de una molécula diatómica rígida que gira alrededor del eje  $z$ .

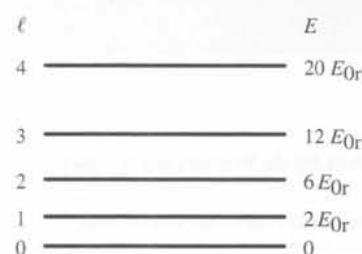


Figura 10.36 Diagrama de niveles energéticos de una molécula en rotación.

## Resumen

- 1 El momento angular es una magnitud dinámica importante derivada de la física macroscópica. En la física microscópica, el momento angular es una propiedad intrínseca fundamental, de las partículas elementales.
- 2 La conservación del momento angular es una ley fundamental de la naturaleza.
- 3 La cuantización del momento angular es una ley fundamental de la naturaleza.

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### 1. Naturaleza vectorial de la rotación

Velocidad angular  $\omega$

Cuando la dirección del eje de rotación en el espacio no es fija, los signos más y menos son insuficientes para describir el sentido de la dirección de la velocidad angular.

La dirección de la velocidad angular  $\omega$  coincide con el eje de rotación en el sentido dado por la regla de la mano derecha.

Momento de fuerza,  $\tau$

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (10.1)$$

## 2. Producto vectorial

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \phi \mathbf{n} \quad (10.2)$$

en donde  $\phi$  es el ángulo entre los dos vectores y  $\mathbf{n}$  es un vector unitario perpendicular al plano de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  en el sentido dado por la regla de la mano derecha cuando  $\mathbf{A}$  gira hacia  $\mathbf{B}$ .

Propiedades

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (10.3)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (10.4)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}\right) \quad (10.6)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (10.7a)$$

## 3. Momento angular

Para una partícula

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (10.8)$$

Para un sistema que gira alrededor de un eje de simetría

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (10.9)$$

Para cualquier sistema

El momento angular respecto a un punto cualquiera  $O$  es igual al momento angular respecto al centro de masas (momento angular de espín) más el momento angular asociado al movimiento del centro de masas alrededor de  $O$  (momento angular orbital).

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{orbital}} + \mathbf{L}_{\text{espín}} = (\mathbf{r}_{\text{cm}} \times M\mathbf{v}_{\text{cm}}) + \left(\sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{u}_i\right) \quad (10.12)$$

Segunda ley de Newton para la rotación

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto,ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (10.10)$$

Conservación del momento angular

Si el momento externo es nulo, el momento angular del sistema se conserva. (Si la componente del momento neto externo en una dirección dada es cero, la componente del momento angular del sistema en esa dirección se conserva.)

Energía cinética de un objeto en rotación

$$E_c = \frac{L^2}{2I} \quad (10.20)$$

Cuantización del momento angular

El módulo del momento angular orbital de una partícula puede tener sólo los valores

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

en donde

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (10.25)$$

es la unidad fundamental del momento angular y  $h$  es la constante de Planck.

\*Cuantización de cualquier componente del momento angular orbital

La componente del momento angular orbital a lo largo de cualquier línea del espacio está también cuantizada y puede tener sólo los valores  $\pm m \hbar$ , en donde  $m$  es un entero no negativo menor o igual a  $\ell$ .

Espín

Los electrones, protones y neutrones tienen un momento angular intrínseco llamado espín. El módulo del vector momento angular de espín para estas partículas es

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)} \hbar$$

y la componente a lo largo de cualquier línea del espacio sólo puede tener dos valores,

$$+\frac{1}{2} \hbar \text{ y } -\frac{1}{2} \hbar$$

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLV ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

## Problemas conceptuales

- 1 ● **SSM** Verdadero o falso:
- (a) Si dos vectores son paralelos, su producto vectorial es cero.  
 (b) Cuando un disco gira alrededor de su eje de simetría, el vector  $\omega$  está dirigido a lo largo del eje.  
 (c) El momento ejercido por una fuerza es siempre perpendicular a la fuerza.
- 2 ● Dos vectores **A** y **B** poseen el mismo módulo. Su producto vectorial alcanza su módulo máximo cuando **A** y **B** son (a) paralelos, (b) iguales, (c) perpendiculares, (d) antiparalelos, (e) forman entre sí un ángulo de  $45^\circ$ .
- 3 ● ¿Cuál es el ángulo que forman el momento lineal **p** de una partícula y su momento angular **L**?
- 4 ● Una partícula de masa *m* se mueve con velocidad *v* a lo largo de una línea que pasa a través del punto *P*. ¿Cuál es el momento angular de la partícula respecto a dicho punto *P*? (a) *mv*. (b) Cero. (c) Cambia de signo cuando la partícula pasa a través del punto *P*. (d) Depende de la distancia del punto *P* al origen de coordenadas.
- 5 ●● **SSM** Una partícula describe una trayectoria circular y el punto *P* está en el centro del círculo. (a) Si su momento lineal *p* se duplica, ¿cómo se modifica su momento angular respecto a *P*? (b) Si el radio del círculo se duplica, pero su velocidad no varía, ¿cómo se modifica el momento angular de la partícula respecto a *P*?
- 6 ●● Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta a velocidad constante. ¿Cómo varía con el tiempo su momento angular respecto a cualquier punto?
- 7 ● Verdadero o falso: Si el momento resultante sobre un sistema que gira es cero, la velocidad angular del sistema no puede modificarse.
- 8 ●● **SSM** Si una persona está de pie en una plataforma que inicialmente está en reposo, ¿es posible hacerla girar  $180^\circ$ ? Suponer que no actúan momentos externos sobre el sistema persona – plataforma. *Sugerencia: Mientras que una persona no puede cambiar su masa fácilmente tiene, en cambio, formas de cambiar su momento de inercia.*
- 9 ● Si el momento angular de un sistema es constante, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta? (a) Ningún momento actúa sobre ninguna parte del sistema. (b) Un momento constante actúa sobre cada una de las partes del sistema. (c) Un momento resultante nulo actúa sobre cada parte del sistema. (d) Un momento externo constante actúa sobre el sistema. (e) Un momento resultante cero actúa sobre el sistema.
- 10 ●● En el ejemplo 10.4, ¿realiza trabajo la fuerza ejercida por el tiovivo sobre Benny?
- 11 ●● En un tiovivo en rotación, ¿qué es más fácil: andar radialmente hacia afuera o andar radialmente hacia adentro? ¿Por qué?
- 12 ●● **SSM** Un bloque que se desliza sobre una mesa sin rozamiento está atado a una cuerda que pasa por un agujero de la mesa. Inicialmente el bloque se desliza con velocidad  $v_0$  sobre una circunferencia de radio  $r_0$ . Una persona bajo la mesa tira lentamente de la cuerda. ¿Qué ocurre cuando el bloque gira en espiral hacia dentro? (Razonar con argumentos la respuesta correcta.) (a) Su energía y momento angular se conservan. (b) Su momento angular se conserva y su energía crece. (c) Su momento angular se conserva y su energía decrece. (d) Su energía se conserva y su momento angular crece. (e) Su energía se conserva y su momento angular decrece.
- 13 ●● **SSM** ¿Hay alguna forma de distinguir un huevo cocido de uno crudo sin romperlo? Una forma consiste en colocar el huevo sobre una superficie horizontal e intentar darle vueltas. El huevo cocido girará fácilmente, mientras que si el huevo está crudo hay que aplicar un esfuerzo mayor. Sin embargo, cuando ya estén rodando, el huevo crudo tiene un comportamiento peculiar: si con un dedo paramos su movimiento y lo soltamos, puede ponerse a girar de nuevo. Explicar la diferencia en el comportamiento de ambas clases de huevo.

14 ● Verdadero o falso: Cuando un giroscopio no gira, la expresión  $\tau = d\mathbf{L}/dt$  no vale.

15 ● **RESOLVA** Un objeto de masa *M* gira alrededor de un eje fijo con momento angular *L*. Su momento de inercia alrededor de este eje es *I*. ¿Cuál es su energía cinética? (a)  $IL^2/2$ . (b)  $L^2/2I$ . (c)  $ML^2/2$ . (d)  $IL^2/2M$ .

16 ● Explicar por qué un helicóptero con un solo rotor principal posee un segundo rotor más pequeño montado en un eje horizontal en la parte trasera del aparato, como muestra la figura 10.37. Describir el movimiento resultante del helicóptero si este rotor trasero fallase durante el vuelo.



Figura 10.37 Problema 16

17 ●● El vector momento angular de una rueda que gira alrededor de su eje está dirigido a lo largo del eje y apunta hacia el este. Para que este vector apunte al sur es necesario ejercer una fuerza en el extremo este del eje en dirección: (a) Hacia arriba. (b) Hacia abajo. (c) Hacia el norte. (d) Hacia el sur. (e) Hacia el este.

18 ●● **SSM** Un hombre que pasea hacia el norte, lleva una caja que contiene un giroscopio en movimiento de giro, montado sobre un eje apoyado en la parte delantera y trasera de la caja. La velocidad angular del giroscopio apunta al norte. El hombre comienza a girar para continuar su paseo hacia el este. En consecuencia, el extremo frontal de la caja (a) se resiste al intento de giro y tratará de permanecer apuntando al norte, (b) luchará contra el intento de giro y empujará hacia el oeste, (c) se elevará hacia arriba, (d) se hundirá hacia abajo, (e) no experimentará ningún efecto.

19 ●● El momento angular de la hélice de un pequeño aeroplano está dirigido hacia adelante. Vista desde detrás, la hélice se mueve en sentido horario. (a) Mientras el aeroplano despegue, su parte delantera se levanta y tiende a virar hacia un lado. ¿Hacia qué lado y por qué? (b) Si el aeroplano se encuentra volando horizontalmente y de repente gira hacia la derecha, ¿su parte delantera tiende a moverse hacia arriba o hacia abajo? ¿Por qué?

20 ●● Un automóvil funciona con la energía almacenada en un solo volante de momento angular **L**. Analizar los problemas que surgirían para distintas orientaciones de **L** y diversas maniobras del coche. Por ejemplo, ¿qué ocurriría si **L** apuntase verticalmente hacia arriba y el coche subiese por una colina o descendiese a un valle? ¿Qué ocurriría si **L** apuntase hacia delante o hacia un lado del coche y éste intentase girar a la izquierda o a la derecha? En cada caso que se analice, considerar el sentido del momento ejercido sobre el coche por la carretera.

21 ●● **RESOLVA** Una mujer se sienta sobre un taburete de piano en rotación con sus brazos cruzados. Si extiende sus brazos en cruz, su energía cinética. (a) Crece. (b) Decrece. (c) Permanece sin variación.

22 ●● **SSM** En un juego de jardín, una pelota se ata a una cuerda sujeta a un poste vertical por el otro extremo. Al golpear la pelota con una paleta, la cuerda se arrolla alrededor del poste y la bola se acerca cada vez más al poste siguiendo una curva espiral. Despreciando la resistencia del aire, ¿qué ocurre cuando la pelota se balancea alrededor del poste? Argumentar debidamente las afirmaciones que considere correctas entre las siguientes. (a) La energía mecánica y el momento angular de la bola se conservan. (b) El momento angular de la bola se conserva, pero su energía mecánica crece. (c) El momento angular de la bola se conserva, pero su energía mecánica disminuye. (d) La energía mecánica

nica de la bola se conserva y su momento angular crece. (e) La energía mecánica de la bola se conserva y su momento angular disminuye.

**23** ●● Una barra uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$  se encuentra sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Una porción de masilla de masa  $m = M/4$  se mueve a lo largo de una línea perpendicular a la barra, choca contra ésta cerca de su extremo y se adhiere en el punto de contacto. Describir cualitativamente el movimiento subsiguiente de la barra y la masilla.

**24** ● SSM Verdadero o falso:

- (a) La variación respecto al tiempo del momento angular de un sistema es siempre paralela al momento externo resultante.  
 (b) Si el momento resultante sobre un cuerpo es nulo, el momento angular debe ser cero.

### Estimaciones y aproximaciones

**25** ●● SSM **¡SOLVE!** Una patinadora sobre hielo comienza su pirueta con los brazos extendidos girando sobre sí misma a 1,5 rev/s. Estimar su velocidad de rotación (en revoluciones por segundo) cuando ella pone sus brazos verticalmente a lo largo de su cuerpo.

**26** ●● **¡PENSE!** Los casquetes polares de la Tierra contienen aproximadamente  $2,3 \times 10^{19}$  kg de hielo. Su masa contribuye muy poco al momento de inercia de la Tierra, ya que está localizada en los polos, próxima al eje de rotación. Estimar el cambio de duración del día que tendría lugar si los casquetes polares se fundieran y el agua resultante se distribuyera uniformemente por toda la superficie de la Tierra. (El momento de inercia de una corteza esférica de masa  $m$  y radio  $r$  es  $2mr^2/3$ .)

**27** ● Una partícula de 2 g se mueve con velocidad constante de 3 mm/s alrededor de un círculo de radio 4 mm. (a) Determinar el módulo del momento angular de la partícula. (b) Si  $L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar$ , donde  $\ell$  es un entero, determinar el valor de  $\ell(\ell + 1)$  y el valor aproximado de  $\ell$ . (c) Explicar por qué la cuantización del momento angular no se observa en la física macroscópica.

**28** ●● SSM Uno de los retos de la astrofísica durante los años 1960 fue explicar los pulsares: fuentes astronómicas extremadamente regulares de pulsos de radio con periodos que abarcan desde los segundos a los milisegundos. Durante aquel tiempo estas fuentes de radio se conocían con el acrónimo LGM, que corresponde a la denominación inglesa "Little Green Men" (hombrecillos verdes), que se refería a la idea de que aquellos pulsos de radio podían ser señales de civilizaciones extraterrestres. La explicación actual no es menos interesante: el Sol, que es una estrella típica, tiene una masa de  $1,99 \times 10^{30}$  kg, y un radio de  $6,96 \times 10^8$  m. Aunque no gira uniformemente, porque no es un cuerpo sólido, su velocidad media de rotación puede considerarse que es 1 rev/25 días. Las estrellas más grandes que el Sol acaban su vida en explosiones espectaculares —las supernovas— que dejan como resto una estrella denominada estrella de neutrones. ¡Estas estrellas de neutrones tienen una masa comparable a la masa inicial de la estrella pero un radio de unos pocos kilómetros! La gran velocidad de rotación que tienen se debe a la conservación del momento angular durante el colapso. Estas estrellas emiten haces de ondas de radio. A causa de la rápida velocidad angular de las estrellas, el haz barre la Tierra a intervalos regulares de tiempo. Para producir los pulsos de ondas de radio que se observan, la estrella ha de girar con velocidades del orden de 1 rev/s o 1 rev/ms. (a) Usando los datos que hay en el libro, estime la velocidad de rotación que tendría el Sol si colapsara en una estrella de neutrones de 10 km de radio. El Sol no es una esfera uniforme de gas, por lo que su momento de inercia viene dado por la expresión  $I = 0,059MR^2$ . Supóngase que la estrella de neutrones es esférica y que tiene una distribución de masa uniforme. (b) ¿La energía cinética rotacional del Sol sería mayor o menor después del colapso? ¿Con qué factor cambiaría, y de dónde provendría o a dónde iría la energía?

**29** ●● El momento de inercia de la Tierra alrededor de su eje de rotación es aproximadamente  $8,03 \times 10^{37}$  kg·m<sup>2</sup>. (a) La Tierra casi es esférica, por lo tanto puede suponerse que el momento de inercia se escribe como  $I = CMR^2$ ,

donde  $C$  es una constante sin dimensiones,  $M = 5,98 \times 10^{24}$  kg es la masa de la Tierra, y  $R = 6370$  km es el radio. Determinar  $C$ . (b) Si la distribución de masa de la Tierra fuera uniforme,  $C$  sería 2/5. A partir del valor de  $C$  obtenido en el apartado (a), ¿la densidad de la Tierra es mayor en el núcleo o en la corteza?

**30** ●● SSM Estimar la velocidad angular y el momento angular del saltador de la figura 10.23 (página 292) respecto de su centro de masa. Haga las aproximaciones que crea razonables.

**31** ●● Estimar la velocidad angular del saltador de la figura 10.23 (página 294) si hace un tirabuzón a medio salto.

**32** ●● SSM Estimar la velocidad de Timothy Goebel (figura 10.38) al iniciar el salto, su velocidad de rotación y su momento angular si realiza una pirueta de tal modo que desde que salta hasta que vuelve a entrar en contacto con el hielo da cuatro giros en el aire. Haga cualquier suposición que considere razonable, siempre que esté preparado para justificarla. La masa del patinador es de 60 kg y la altura del salto es de 0,6 m. Obsérvese que la velocidad angular cambia durante el salto, ya que comienza el ejercicio con los brazos extendidos y progresivamente los va pegando al cuerpo. Si se tiene suficiente cuidado, la respuesta puede ser suficientemente precisa, dentro de un factor 2.



Figura 10.38 Problema 32

### Naturaleza vectorial de la rotación

**33** ● Se aplica una fuerza de módulo  $F$  horizontalmente en el sentido negativo de las  $x$ , al borde de un disco de radio  $R$ , como se muestra en la figura 10.39. Escribir  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{r}$  en función de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  y calcular el momento producido por la fuerza respecto al origen situado en el centro del disco.

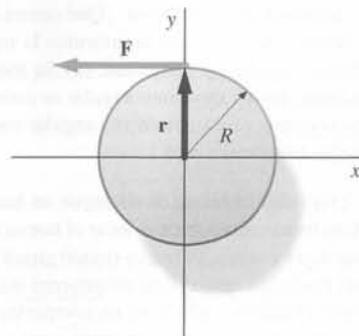


Figura 10.39 Problema 33

34 ● Calcular el momento respecto al origen debido a la fuerza  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$  que actúa sobre una partícula situada en  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ , y demostrar que este momento es independiente de la coordenada  $y$ .

35 ● **RESOLVER** Hallar  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  en el caso de (a)  $\mathbf{A} = 4\mathbf{i}$  y  $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ , (b)  $\mathbf{A} = 4\mathbf{i}$  y  $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$ , (c)  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$  y  $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ .

36 ● **SSM** ¿En qué condiciones es el módulo de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  igual a  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ?

37 ●● Una partícula se mueve en un círculo centrada en el origen. La partícula está en la posición  $\mathbf{r}$  y tiene velocidad angular  $\omega$ . (a) Demostrar que su velocidad es  $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ . (b) Demostrar que su aceleración centrípeta es  $\mathbf{a}_c = \omega \times \mathbf{v} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ .

38 ●● **RESOLVER** Si  $\mathbf{A} = 4\mathbf{i}$ ,  $B_z = 0$ ,  $|\mathbf{B}| = 5$  y  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 12\mathbf{k}$ , determinar  $\mathbf{B}$ .

39 ● Si  $\mathbf{A} = 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 9\mathbf{i}$  y  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 12$ , determinar  $\mathbf{B}$ .

40 ●● Use el cálculo con determinantes para demostrar que si

$$\mathbf{A} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$$

entonces

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

41 ●● Dados tres vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , y  $\mathbf{C}$  que no están situados en el mismo plano, demostrar que  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  es el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores.

42 ●● **SSM** Mediante el uso del producto vectorial, compruebe la ley de los senos para el triángulo de la figura 10.40: si  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son las longitudes de cada lado del triángulo, demostrar que  $A/\sin a = B/\sin b = C/\sin c$ .

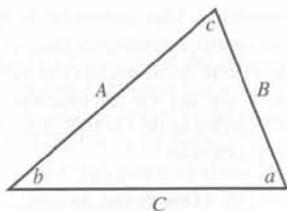


Figura 10.40 Problema 42

**Momento angular**

43 ● Una partícula que se mueve a velocidad constante, tiene un momento angular nulo respecto a un determinado punto. Demostrar que la partícula ha pasado por dicho punto, está en dicho punto o pasará por él.

44 ● Una partícula de masa 2 kg se mueve con velocidad constante de 3,5 m/s describiendo una circunferencia de 4 m de radio. (a) ¿Cuál es su momento angular respecto al centro de la circunferencia? (b) ¿Cuál es su momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de la circunferencia y es perpendicular al plano del movimiento? (c) ¿Cuál es la velocidad angular de la partícula?

45 ● **RESOLVER** Un cuerpo de 2 kg se mueve a velocidad constante de 4,5 m/s a lo largo de una línea recta. (a) ¿Cuál es el módulo de su momento angular respecto a un punto situado a 6 m de la línea? (b) Describir cualitativamente cómo varía en el tiempo su velocidad angular respecto a dicho punto.

46 ●● **SSM** Una partícula se mueve con velocidad constante  $\mathbf{v}$  a lo largo de una línea que está a una distancia  $b$  del origen  $O$  (figura 10.41). Sea  $dA$  el área barrida por el vector posición (desde  $O$  a la partícula) en el tiempo  $dt$ . Demostrar que  $dA/dt$  es constante en el tiempo e igual a  $\frac{1}{2}L/m$ , en donde  $L$  es el momento angular de la partícula respecto al origen.

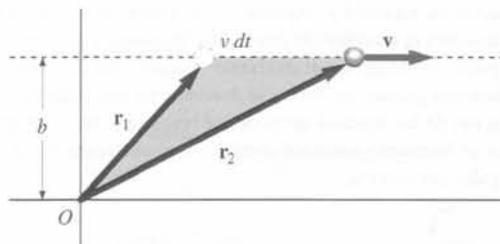


Figura 10.41 Problema 46

47 ●● **RESOLVER** Una moneda de 15 g y diámetro 1,5 cm gira a 10 rev/s alrededor de un diámetro vertical sobre un punto fijo de una mesa. (a) ¿Cuál es el momento angular de la moneda respecto de su centro de masas? (Una moneda es un cilindro de longitud  $L$  y radio  $R$ , donde  $L$  es despreciable comparada con  $R$ . Su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por su diámetro puede obtenerse en la tabla 9.1.) (b) ¿Cuál es el momento angular respecto a un punto de la mesa situado a 10 cm de la moneda? (c) Si la moneda gira de igual modo, pero su centro de masas se traslada en línea recta sobre la mesa con velocidad de 5 cm/s, ¿cuál es el momento angular de la moneda alrededor de un punto sobre la línea de movimiento? (d) ¿Cuál es el momento angular de la moneda respecto a un punto situado a 10 cm de la línea de movimiento? (Existen dos respuestas a esta cuestión. Explicar por qué y expresar ambas.)

48 ●● Dos partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$  están localizadas en las posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  respecto al mismo origen  $O$  como indica la figura 10.42. Estas partículas ejercen fuerzas iguales y opuestas, una sobre otra. Calcular el momento resultante ejercido por estas fuerzas internas alrededor del origen  $O$  y demostrar que es nulo si las fuerzas  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  están dirigidas a lo largo de la línea que une ambas partículas.

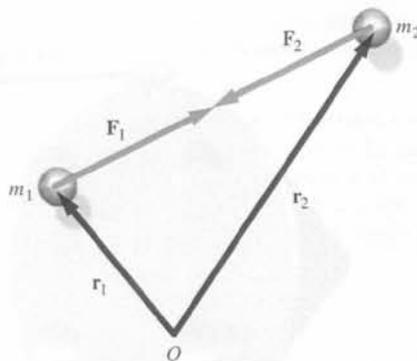


Figura 10.42 Problema 48

**Momento de una fuerza y momento angular**

49 ● **RESOLVER** Una partícula de 1,8 kg se mueve en una circunferencia de radio 3,4 m. El módulo de su momento angular relativo al centro del círculo depende del tiempo según la expresión  $L = (4 \text{ N} \cdot \text{m}) t$ . (a) Determinar el módulo del momento que actúa sobre la partícula. (b) Determinar la velocidad angular de la partícula en función del tiempo.

50 ●● **RESOLVER** Un cilindro uniforme de masa 90 kg y radio 0,4 m está dispuesto de modo que gira sin rozamiento alrededor de su eje de simetría, gracias a una correa de transmisión que se enrolla sobre su perímetro y ejerce un momento constante. En el tiempo  $t = 0$  su velocidad angular es cero. En el tiempo  $t = 25$  s su velocidad angular es de 500 rev/min. (a) ¿Cuál es su momento angular en  $t = 25$  s? (b) ¿Cómo se incrementa el momento angular en cada unidad de tiempo? (c) ¿Qué momento externo actúa sobre el cilindro? (d) ¿Cuál es el módulo de la fuerza que actúa sobre la periferia del cilindro?

51 ●● **SSM** En la figura 10.43 el plano inclinado carece de rozamiento y la cuerda pasa a través del centro de masas de cada bloque. La polea

tiene un momento de inercia  $I$  y una radio  $R$ . (a) Determinar el momento resultante que actúa sobre el sistema (las dos masas, la cuerda y la polea) respecto al centro de la polea. (b) Expresar el momento angular total del sistema respecto al centro de la polea cuando las masas se mueven con velocidad  $v$ . (c) Determinar la aceleración de las masas a partir de los resultados de (a) y (b) igualando el momento resultante con la derivada respecto al tiempo del momento angular del sistema.

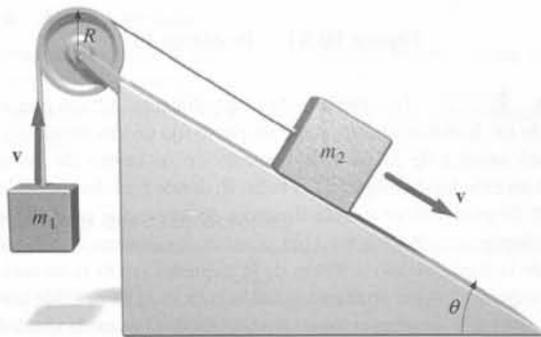


Figura 10.43 Problema 51

52 ●● **RESOLVER** La figura 10.44 muestra la parte trasera de un vehículo espacial que gira alrededor de su eje longitudinal a 6 rev/min. Los ocupantes desean detener esta rotación. Para ello disponen de pequeñas toberas montadas tangencialmente a una distancia  $R = 3$  m del eje, como se indica en la figura. Cada una de ellas lanza un chorro de 10 g/s de gas a una velocidad de 800 m/s. ¿Durante cuánto tiempo deben estar funcionando estas toberas para detener la rotación? La inercia rotacional del vehículo alrededor de su eje (supuesta constante) es de  $4000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

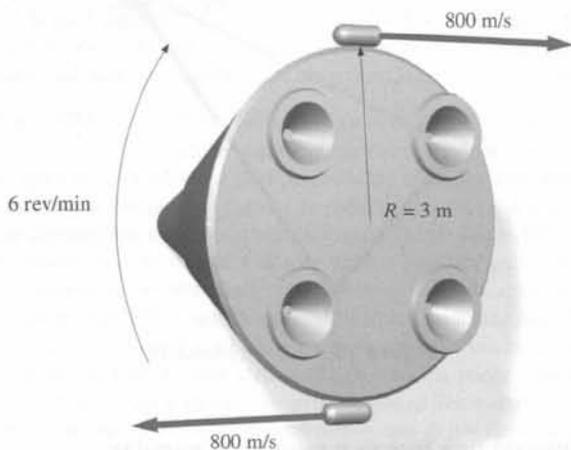


Figura 10.44 Problema 52

53 ●● Un proyectil de masa  $M$  se lanza con un ángulo  $\theta$  y con una velocidad inicial  $V$ . Considerando el momento y el momento angular respecto del punto del lanzamiento, demostrar explícitamente que  $dL/dt = \tau$ . Ignorar los efectos de la resistencia del aire. (Las ecuaciones que describen el movimiento de los proyectiles se analizan en el capítulo 3.)

**Conservación del momento angular**

54 ● **SSM RESOLVER** Un planeta se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol, estando éste en un foco de la elipse (figura 10.45). (a) ¿Cuál es el momento producido por la fuerza gravitatoria de atracción del Sol sobre el

planeta? (b) En la posición A, el planeta está a una distancia  $r_1$  del Sol y se está moviendo con velocidad  $v_1$  perpendicular a la línea que va del Sol al planeta. En la posición B, está a una distancia  $r_2$  y se mueve con velocidad  $v_2$ , de nuevo perpendicular a la línea que va del Sol al planeta. ¿Cuál es la relación de  $v_1$  y  $v_2$  en función de  $r_1$  y  $r_2$ ?

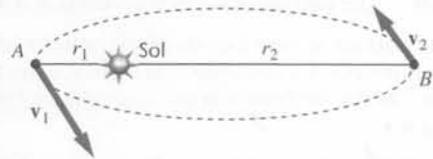


Figura 10.45 Problema 54

55 ●● **RESOLVER** Un hombre está de pie sobre una plataforma sin rozamiento que gira con una velocidad angular de 1,5 rev/s. Sus brazos están extendidos y sostiene en cada mano una bola pesada. El momento de inercia del hombre, los pesos extendidos y la plataforma es  $6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Cuando el hombre impulsa los pesos hacia su cuerpo, el momento de inercia decrece a  $1,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . (a) ¿Cuál es la velocidad angular resultante de la plataforma? (b) ¿Cuál es la variación de energía cinética experimentada por el sistema? (c) ¿De dónde procede este incremento de energía?

56 ●● **SSM RESOLVER** Una pequeña porción de masilla de masa  $m$  cae desde el techo sobre el borde exterior de un tocadiscos de radio  $R$  y momento de inercia  $I_0$ , que está girando libremente con velocidad angular  $\omega_i$  alrededor de su eje de simetría vertical fijo. (a) ¿Cuál es la velocidad angular del tocadiscos más la masilla después del choque? (b) Después de varias vueltas, la masilla se desprende del borde del tocadiscos hacia fuera. ¿Cuál es la velocidad angular del tocadiscos después de desprenderse la masilla?

57 ●● Un cilindro macizo de plástico de  $R = 15$  cm y de  $M = 0,25$  kg se ajusta de modo que puede girar alrededor de un eje vertical mediante unos cojinetes que no ejercen rozamiento. Una cucaracha de 0,015 kg de masa está sobre el cilindro a 8 cm del centro. Inicialmente tanto el cilindro como la cucaracha están en reposo. De repente la cucaracha echa a andar por un camino circular a una distancia de 8 cm del eje de rotación. Si la velocidad de la cucaracha con respecto al cilindro es de  $v = 0,01$  m/s, ¿cuál es la velocidad de la cucaracha con respecto al exterior?

58 ●● **SSM RESOLVER** Dos discos de masa idéntica, pero de radios diferentes ( $r$  y  $2r$ ) giran sobre cojinetes sin rozamiento a la misma velocidad angular  $\omega_0$ , pero en sentidos opuestos (figura 10.46). Lentamente los dos discos son impulsados el uno hacia el otro hasta que sus superficies entran en contacto. La fuerza de rozamiento superficial da lugar a que finalmente ambos posean la misma velocidad angular. ¿Cuál es el módulo de esta velocidad angular final?

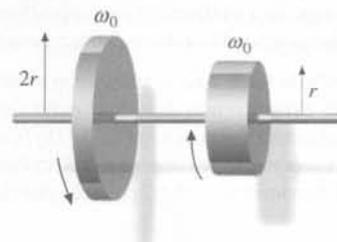


Figura 10.46 Problema 58

59 ●● **RESOLVER** Un bloque de masa  $m$  que desliza sobre una mesa sin rozamiento está atado a una cuerda que pasa por un agujero de la mesa. Inicialmente el bloque desliza con velocidad  $v_0$  en un círculo de radio  $r_0$ . Determinar (a) el momento angular del bloque, (b) su energía cinética, (c) la tensión de la cuerda. Una persona situada bajo la mesa, tira suavemente de la cuerda. ¿Cuánto trabajo se necesita para reducir el radio del círculo de  $r_0$  a  $r_0/2$ ?

**60** ●● SSM Una masa puntual de 0,2 kg que se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento está atada a una cinta de caucho cuyo otro extremo está fijo en el punto  $P$ . La cinta de caucho ejerce una fuerza  $F = bx$  hacia  $P$  en donde  $x$  es la longitud de la cinta y  $b$  un coeficiente desconocido. La masa se mueve a lo largo de la línea de puntos de la figura 10.47. Cuando pasa por el punto  $A$ , su velocidad es de 4 m/s en la dirección que se muestra. La distancia  $AP$  es de 0,6 m y  $BP$  es 1,0 m. (a) Determinar la velocidad de la masa en los puntos  $B$  y  $C$ . (b) Determinar el coeficiente  $b$ .

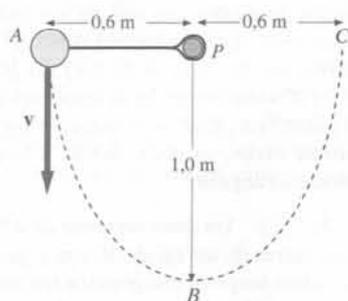


Figura 10.47 Problema 60

### \*Cuantización del momento angular

**61** ● SSM La componente  $z$  del espín de un electrón es  $\frac{1}{2}\hbar$ , pero el módulo del vector espín es  $\sqrt{0,75}\hbar$ . ¿Qué ángulo forma el vector momento angular de espín del electrón con el eje  $z$ ?

**62** ●● Demostrar que la diferencia energética entre un estado rotacional y el siguiente estado más elevado es proporcional a  $\ell + 1$  (véase ecuación 10.27a).

**63** ●● En la molécula HBr, la masa del núcleo de bromo es 80 veces superior a la masa del núcleo de hidrógeno (un solo protón); en consecuencia, al estudiar el movimiento rotacional de esta molécula, es correcto suponer, con buena aproximación, que el núcleo de Br permanece estacionario mientras el átomo de H (masa,  $1,67 \times 10^{-27}$  kg) gira a su alrededor. La separación entre el átomo de H y el núcleo de Br es 0,144 nm. Calcular (a) el momento de inercia de la molécula HBr respecto al núcleo de Br y (b) las energías de rotación correspondientes a  $\ell = 1$ ,  $\ell = 2$  y  $\ell = 3$ .

**64** ●● **¡SOLVE!** La separación de equilibrio entre los núcleos de la molécula de nitrógeno es 0,11 nm. La masa de cada núcleo de nitrógeno es 14 u, en donde  $u = 1,66 \times 10^{-27}$  kg. Deseamos calcular las energías de los tres estados de la molécula de nitrógeno de menor momento angular. (a) Considerar un modelo de la molécula de nitrógeno formado por una pesa de gimnasia, rígida, con dos masas puntuales iguales en sus extremos y calcular el momento de inercia alrededor de su centro de masas. (b) Determinar los niveles energéticos de rotación mediante la relación  $E_\ell = \ell(\ell + 1)\hbar^2/2I$ .

**65** ●● SSM ¿Con qué velocidad ha de moverse una molécula de nitrógeno para que su energía cinética de traslación tenga el mismo valor que la energía cinética de rotación del estado cuántico con  $\ell = 1$ ?

### Colisiones

**66** ●● **¡SOLVE!** Una barra de 16,0 kg y 2,4 m de longitud está apoyada sobre el filo de una cuchilla por su punto medio. Una bola de 3,2 kg de arcilla se deja caer desde el reposo, de una altura de 1,2 m y produce un choque con la barra completamente inelástico a 0,9 m del punto de soporte (figura 10.48). Determinar el momento angular del sistema barra más arcilla, inmediatamente después de la colisión inelástica.

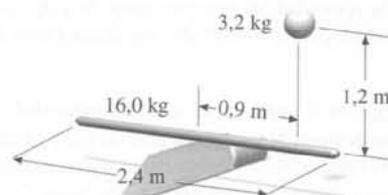


Figura 10.48 Problema 66

**67** ●● SSM La figura 10.49 muestra una barra delgada de longitud  $L$  y masa  $M$  y una pequeña cantidad de masilla de masa  $m$ . El sistema está apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento. La masilla se mueve hacia la derecha con velocidad  $v$ , choca contra la barra a una distancia  $d$  del centro de la misma y se adhiere en el punto de contacto. Determinar las expresiones correspondientes a la velocidad del centro de masas del sistema y a la velocidad angular del sistema respecto a su centro de masas.

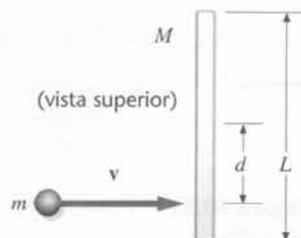


Figura 10.49 Problemas 67 y 68

**68** ●● En el problema 67, reemplazar la bola de masilla por una pequeña esfera dura de tamaño despreciable que choca elásticamente contra la barra. Determinar el valor de  $d$  para que la esfera quede en reposo después del choque.

**69** ●● **¡SOLVE!** La figura 10.50 muestra una barra uniforme de longitud  $d$  y masa  $M$  cuelga de un pivote en la parte superior. La barra, inicialmente en reposo, recibe el choque de una partícula de masa  $m$  en un punto  $x = 0,8d$  por debajo del pivote. Suponer que la masilla se pega a la barra. ¿Cuál debe ser el módulo de la velocidad  $v$  de la partícula para que el ángulo máximo entre la barra y la vertical sea de  $90^\circ$ ?

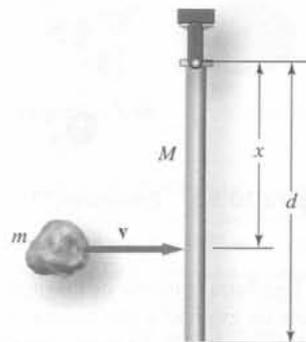


Figura 10.50 Problemas 69 y 70

**70** ●● Si para el sistema del problema 69,  $d = 1,2$  m,  $M = 0,8$  kg y  $m = 0,3$  kg y el ángulo máximo entre la barra y la vertical es  $60^\circ$ , determinar la velocidad de la partícula antes del impacto.

**71** ●● Una barra uniforme de masa  $M$  está en reposo sobre una mesa sin rozamiento cuando, de repente, cerca de uno de sus extremos es golpeada con un impulso  $K$  en la dirección horizontal perpendicular a la barra. Inmediatamente después del golpe, (a) ¿cuál es la velocidad del centro de masas de la

barra?, (b) ¿cuál es la velocidad del extremo donde es golpeada?, (c) ¿cuál es la velocidad del otro extremo de la barra? (d) ¿hay algún punto de la barra que no se mueva?

**72** ●● Un proyectil de masa  $m_p$  se mueve a velocidad constante  $v_0$  hacia un disco estacionario de masa  $M$  y radio  $R$ , libre de girar alrededor de un pivote que pasa por su eje  $O$  (figura 10.51). Antes del impacto, el proyectil se desliza a lo largo de una línea situada a la distancia  $b$  por debajo del eje. El proyectil choca contra el disco y se adhiere al punto  $B$ . Tratar al proyectil como una masa puntual. (a) Antes del impacto, ¿cuál es el momento angular total  $L_0$  del proyectil y el disco alrededor del eje  $O$ ? (b) ¿Cuál es la velocidad angular  $\omega$  del sistema disco y proyectil justo después del impacto? (c) ¿Cuál es la energía cinética del sistema disco y proyectil después del impacto? (d) ¿Cuánta energía mecánica se pierde en esta colisión?

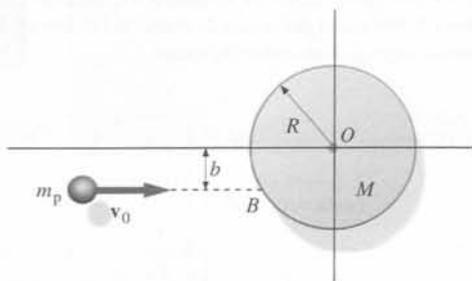


Figura 10.51 Problema 72

**73** ●● SSM Una barra uniforme de longitud  $L_1$  y masa  $M = 0,75$  kg se soporta con una bisagra en un extremo y puede girar libremente en el plano vertical (figura 10.52). La barra se libera desde el reposo en la posición indicada. De la bisagra pende una partícula de masa  $m = 0,5$  kg en el extremo de una cuerda de longitud  $L_2$ . Al producirse el contacto, la partícula se adhiere a la barra. ¿Cuál debe ser la relación  $L_2/L_1$  para que  $\theta_{\text{máx}} = 60^\circ$  después de la colisión.

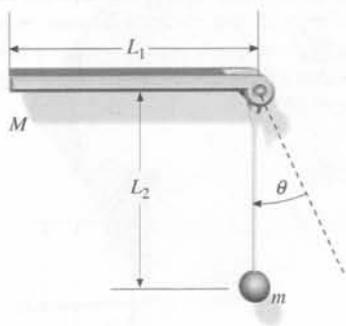


Figura 10.52 Problemas 73–76

**74** ●● **¡SOLVE!** Una barra uniforme de longitud  $L_1 = 1,2$  m y de masa  $M = 2,0$  kg. está sujeta por un extremo a una bisagra de tal forma que puede girar en el plano vertical (figura 10.52). La barra, inicialmente en reposo en la posición de la figura, cae. Una partícula de masa  $m$  cuelga de una cuerda delgada de longitud  $L_2 = 0,8$  m de la misma bisagra. La partícula cuando choca con la barra se engancha a ella. Después de la colisión la barra sigue girando hasta formar un ángulo  $\theta = \theta_{\text{máx}} = 37^\circ$ . (a) Calcular  $m$ . (b) ¿Cuánta energía se disipa durante la colisión?

**75** ●● Una barra uniforme de longitud  $L_1 = 1,2$  m y de masa  $M = 2,0$  kg. está sujeta por un extremo a una bisagra de tal forma que puede girar en el plano vertical (figura 10.52). Con un martillo se golpea la barra dándole una velocidad angular inicial que le hace iniciar la caída. Una partícula de masa  $m$  está colgada de una cuerda delgada de longitud  $L_2 = 0,8$  m de la misma bisagra. La partícula cuando choca con la barra se engancha a ella. Después de la colisión

la barra sigue girando y acaba dando una vuelta completa. ¿Cuál es la velocidad angular mínima que imprime el martillo sobre la barra? ¿Cuánta energía se disipa durante la colisión?

**76** ●●● Repetir el problema 74, suponiendo que la colisión entre la barra y la partícula es elástica.

**77** ●● **¡SOLVE!** Una rueda de bicicleta está montada en el punto medio de un eje de 50 cm de largo. El neumático y la llanta pesan 30 N y la rueda tiene un radio de 28 cm. La rueda se hace girar a 12 rev/s y el eje se coloca entonces en una posición horizontal con uno de sus extremos descansando sobre un pivote. (a) ¿Cuál es el momento angular debido al giro sobre sí mismo de la rueda? (Considérese que la rueda es un aro.) (b) ¿Cuál es la velocidad angular de precesión? (c) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que el eje recorra  $360^\circ$  alrededor del pivote? (d) ¿Cuál es el momento angular asociado con el movimiento del centro de masas, es decir, debido a la precesión? ¿En qué dirección actúa este momento angular?

**78** ●● SSM **¡SOLVE!** Un disco uniforme de 2,5 kg de masa y radio 6,4 cm se monta en el centro de un eje de 10 cm y gira sobre sí mismo a 700 rev/min. El eje se coloca luego en una posición horizontal con un extremo descansando sobre un pivote. Al otro extremo se le da una velocidad horizontal inicial de modo que la precesión es suave sin nutación. (a) Hallar la velocidad angular de precesión. (b) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas durante la precesión? (c) ¿Cuáles son el módulo y la dirección de la aceleración del centro de masas? (d) ¿Cuáles son las componentes vertical y horizontal de la fuerza ejercida por el pivote?

### Problemas generales

**79** ● **¡SOLVE!** Una partícula de masa 3 kg se mueve con velocidad  $v = 3$  m/s a lo largo de la línea  $z = 0, y = 5,3$  m. (a) Determinar el momento angular  $L$  relativo al origen cuando la partícula está en el punto  $x = 12$  m,  $y = 5,3$  m. (b) Una fuerza  $F = -3$  N  $i$  se aplica a la partícula. Determinar el momento producido por esta fuerza respecto al origen.

**80** ● **¡SOLVE!** El vector posición de una partícula de masa 3 kg viene dado por  $r = 4i + 3t^2j$ , en donde  $r$  se expresa en metros y  $t$  en segundos. Determinar el momento angular y el momento que actúa sobre la partícula respecto al origen.

**81** ●● **¡SOLVE!** Dos patinadores sobre hielo cogidos de las manos giran en conjunto dando una revolución en 2,5 s. Sus masas son 55 kg y 85 kg y están separados 1,7 m. Determinar (a) el momento angular del sistema respecto a su centro de masas y (b) la energía cinética total del sistema.

**82** ●● SSM Una bola de 2 kg atada a una cuerda de longitud 1,5 m se mueve en una circunferencia horizontal como un péndulo cónico (figura 10.53). La cuerda forma un ángulo  $\theta = 30^\circ$  con la vertical. (a) Demostrar que el momento angular de la bola respecto al punto de soporte  $P$  tiene una componente horizontal dirigida hacia el centro del círculo, así como una componente vertical, y determinar sus valores. (b) Determinar el módulo de  $dL/dt$  y demostrar que es igual al módulo del momento ejercido por la gravedad respecto al punto de soporte.

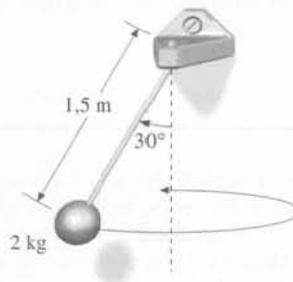


Figura 10.53 Problema 82

**83** ●● Una masa  $m$  situada sobre una superficie horizontal sin rozamiento está sujeta a una cuerda que se arrolla alrededor de un poste cilíndrico vertical, de modo que cuando se pone en movimiento sigue una trayectoria en espiral hacia dentro. (a) ¿Se conserva el momento angular de la masa? (b) ¿Se conserva la energía de la masa? (c) Si la velocidad de la masa es  $v_0$  cuando la longitud de la cuerda es  $r$ , ¿cuál será su velocidad cuando la longitud de la cuerda no arrollada sea  $r/2$ ?

**84** ●● La figura 10.54 muestra un tubo cilíndrico hueco de masa  $M$ , longitud  $L$  y momento de inercia  $ML^2/10$ . Dentro del cilindro se encuentran dos discos de masa  $m$  separados una distancia  $\ell$  y atados a un vástago central por una cuerda delgada. El sistema puede girar alrededor de un eje vertical a través del cilindro. Cuando el sistema gira con la velocidad angular  $\omega$ , las cuerdas que mantienen los discos se rompen súbitamente. Obtener las expresiones correspondientes a la velocidad angular final y a las energías inicial y final del sistema. Suponer que las paredes interiores del cilindro carecen de rozamiento.

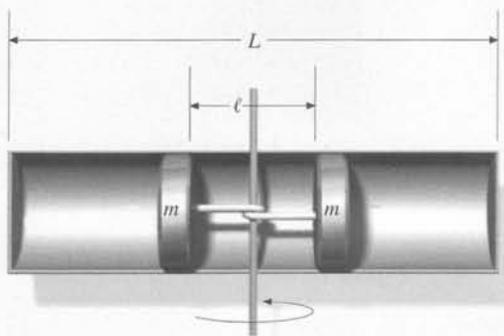


Figura 10.54 Problemas 84–88

**85** ●● Repetir el problema 84 suponiendo ahora que existe rozamiento entre los discos y las paredes del cilindro. Sin embargo, el coeficiente de rozamiento no es suficiente para evitar que los discos alcancen los extremos del cilindro. ¿Puede determinarse la energía final del sistema sin saber el coeficiente de rozamiento cinético?

**86** ●● **¡SOLVE!** Supongamos que en la figura 10.54,  $\ell = 0,6$  m,  $L = 2,0$  m,  $M = 0,8$  kg y  $m = 0,4$  kg. El sistema gira con la velocidad angular  $\omega$ , de tal modo que la tensión en la cuerda es 108 N justo antes de que se rompa. Determinar las velocidades angulares inicial y final, así como las energías inicial y final del sistema. Suponer que las paredes interiores del cilindro carecen de rozamiento.

**87** ●● Determinar en el problema 84 la velocidad radial de cada masa justo antes de que alcance el extremo del cilindro.

**88** ●● Con los datos numéricos del problema 86, suponer que el coeficiente de rozamiento entre las masas y las paredes del cilindro es tal que las masas dejan de deslizarse 0,2 m antes de alcanzar los extremos del cilindro. Determinar las velocidades angulares inicial y final del sistema y la energía disipada por el rozamiento.

**89** ●● **SSM** La segunda ley de Kepler establece que *el radio vector del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales*. Demostrar que esta ley resulta directamente del principio de conservación del momento angular, teniendo en cuenta además, que la fuerza de atracción gravitatoria entre un planeta y el Sol actúa a lo largo de la línea que une los dos objetos celestes.

**90** ●● La figura 10.55 muestra un cilindro hueco de longitud 1,8 m, masa 0,8 kg y radio 0,2 m que puede girar libremente alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y es perpendicular al eje del cilindro. Dentro del cilindro hay dos discos delgados de 0,2 kg cada uno conectados a sendos muelles de constante de fuerza  $k$  y longitudes naturales 0,4 m. El sistema alcanza una velocidad de rotación de 8 rad/s con los muelles bloqueados de modo que no puedan alargarse. Los muelles se desbloquean—entonces súbitamente. Debido al rozamiento que experimentan en la pared interna del cilindro, los

discos se detienen a una distancia de 0,6 m del eje central. ¿Cuál será entonces la velocidad angular del cilindro? ¿Cuánta energía cinética se disipa en el rozamiento entre los discos y la pared del cilindro?

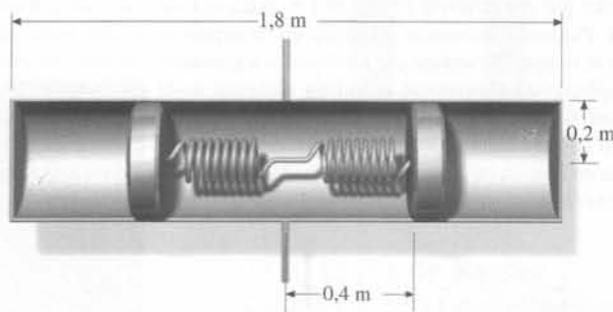


Figura 10.55 Problema 90

**91** ●● Se dispone de un disco pesado de metal (parecido a una moneda grande) como se muestra en la figura 10.56, de 0,500 kg de masa, de 0,125 m de radio y de un espesor despreciable. Se coloca el disco en una plataforma giratoria, que consiste en un cilindro macizo estrecho de 0,735 kg de masa y 0,250 m de radio que gira alrededor de un eje que pasa por su centro mediante unos cojinetes que no producen rozamiento. Se imprime al disco un movimiento de rotación alrededor de un diámetro del disco y en el centro de la plataforma. Al hacerlo, se mantiene la plataforma sujeta, pero inmediatamente se la deja mover de forma independiente. El disco tiene una velocidad angular inicial de 30 rev/min. (a) Si el disco se para de tal forma que su eje de simetría coincide con el eje de rotación de la plataforma, ¿cuál es la velocidad angular final de la plataforma? (b) ¿Cuál será la velocidad angular final si cuando se para el eje del disco está a 0,10 m del eje de la plataforma?

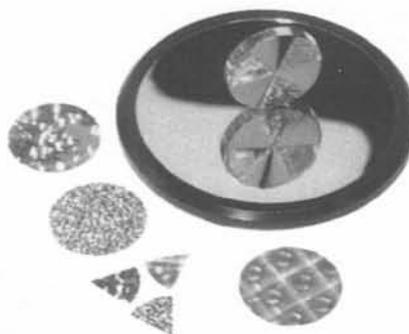


Figura 10.56 Problema 91

**92** ●● (a) Suponiendo que la Tierra es una esfera homogénea de radio  $r$  y masa  $m$ , demostrar que el periodo  $T$  de la rotación terrestre alrededor de su eje está relacionado con el radio por  $T = br^2$ , en donde  $b = (4/5) \pi m/L$  y es el momento angular de espín de la Tierra debido a su rotación. (b) Suponer que el radio  $r$  cambia en una cantidad muy pequeña  $\Delta r$  debido a algún efecto interno, como la dilatación térmica. Demostrar que el cambio fraccional en el periodo  $\Delta T/T$  viene dado aproximadamente por  $\Delta T/T = 2 \Delta r/r$ . Sugerencia: Utilizar las diferenciales  $dr$  y  $dT$  como aproximaciones de estas magnitudes. (c) ¿Cuántos kilómetros tendría que expansionarse la Tierra para que el periodo cambiase 0,25 días/año, de modo que los años bisiestos no fueran necesarios?

**93** ●● **SSM** La dirección del eje de rotación de la Tierra no está fija en el espacio, sino que se mueve en un círculo de radio de  $23^\circ$  con un periodo de 26 000 años, produciendo lo que se conoce con el nombre de precesión de los equinoccios. Por esta razón la estrella polar actual Polaris no será la estrella polar indefinidamente. La Tierra es un giróscopo gigante, con un momento ejercido por el Sol y por la Luna sobre ella. Calcular un valor aproximado para este momento, sabiendo que el periodo de rotación de la Tierra es de 1 día y que su momento de inercia es  $8,03 \times 10^{37}$  kg·m<sup>2</sup>.

**94 ●●●** **RESOLVER** La figura 10.57 muestra un cilindro hueco de masa  $M = 1,2$  kg y longitud  $L = 1,6$  m que puede girar libremente alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. En su interior hay dos discos, cada uno de masa  $m = 0,4$  kg, que están atados a un vástago central por una cuerda delgada y separados por una distancia  $\ell = 0,8$  m. La cuerda se rompe si la tensión excede 100 N. Partiendo del reposo se aplica un momento al sistema hasta que la cuerda se rompe. (Se supone que los discos son puntuales y el radio del cilindro es despreciable.) Determinar el trabajo realizado hasta ese instante. En ese momento deja de aplicarse el momento y se supone que las paredes del cilindro carecen de rozamiento. Obtener una expresión para la velocidad angular del sistema en función de  $x$  para  $x < L/2$ , siendo  $x$  la distancia entre cada disco y el vástago central.

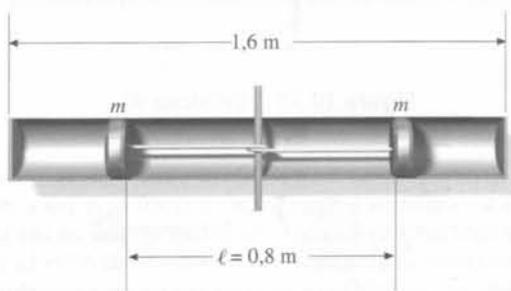


Figura 10.57 Problemas 94–96

**95 ●●●** Determinar en el problema 94 la velocidad angular del sistema justamente antes y después de los discos puntuales pasen por los extremos del cilindro.

**96 ●●●** Repetir el problema 94 con el radio del cilindro hueco igual a 0,4 m y las masas tratadas como discos delgados en lugar de masas puntuales.

**97 ●●●** **SSM** La figura 10.58 muestra una polea formada por un disco uniforme, del cual pende una cuerda pesada. La circunferencia de la polea es de 1,2 m y su masa es de 2,2 kg. La cuerda tiene 0,8 m de longitud y su masa es 4,8 kg. En el instante mostrado en la figura, el sistema está en reposo y la diferencia de altura de los dos extremos de la cuerda es 0,6 m. (a) ¿Cuál es la velocidad angular de la polea cuando la diferencia de altura entre los extremos de la cuerda es de 7,2 m? (b) Obtener una expresión para el momento angular del sistema en función del tiempo, prescindiendo del caso en que cualquiera de los extremos de la cuerda está por encima del centro de la polea. No hay deslizamiento entre la cuerda y la polea.

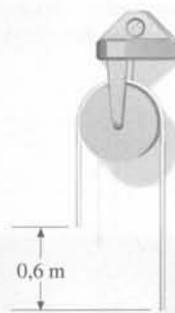
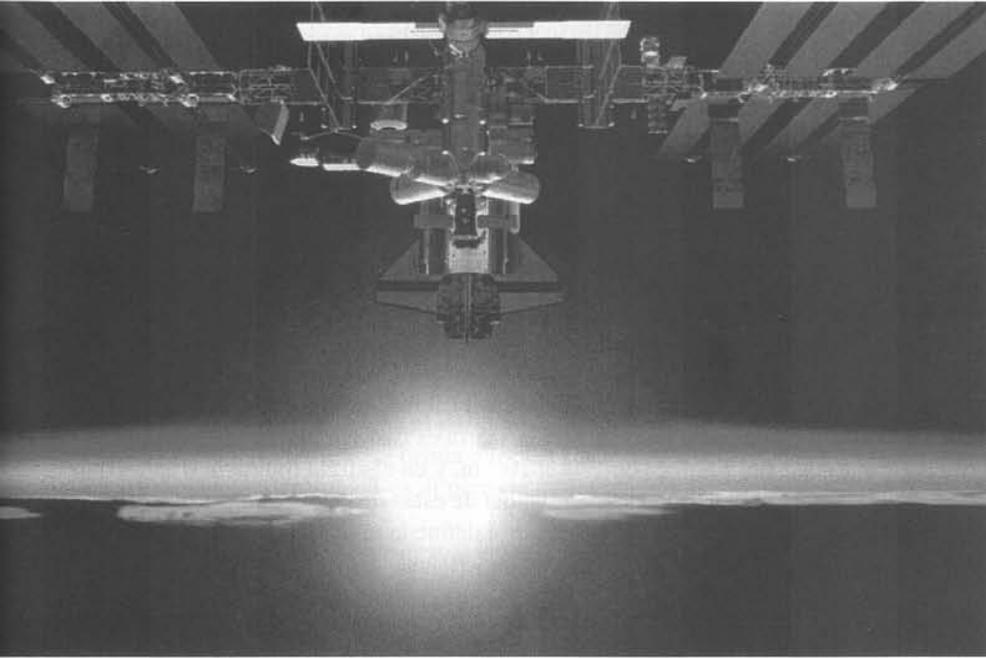


Figura 10.58 Problema 97



Una persona ve pasar la Estación Espacial Internacional (EEI) por encima de su cabeza mientras habla con un amigo con su teléfono móvil desde la azotea del edificio de su apartamento en la ciudad de Nueva York durante una noche serena de otoño.

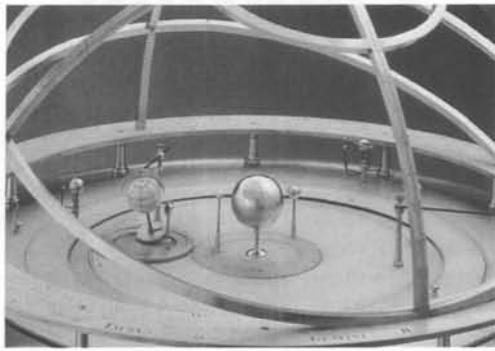
¿Cómo usamos nuestro conocimiento de la gravedad para determinar cuál será la próxima vez que la EEI pasará sobre su ciudad? (Véase el ejemplo 11.3.)

La fuerza gravitatoria es la más débil de las cuatro fuerzas básicas. Es despreciable en las interacciones de las partículas elementales y, por lo tanto, no desempeña ningún papel en el estudio de las moléculas, átomos y núcleos. La atracción gravitatoria entre objetos de tamaño ordinario, tal como la que ejerce un edificio sobre un automóvil es demasiado pequeña para ser observada. Sin embargo, la gravedad es de importancia capital cuando consideramos las interacciones entre cuerpos de tamaño astronómico como planetas, satélites y estrellas. La fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre nosotros y los objetos que nos rodean es una parte fundamental de nuestra experiencia. La gravedad es la que nos liga a la Tierra y la que mantiene a los planetas, incluido el nuestro, dentro del sistema solar. La fuerza gravitatoria juega un papel importante en la evolución de las estrellas y en el comportamiento de las galaxias. A la mayor escala que podemos imaginar, la gravedad controla la evolución del universo.

Durante la época de Newton, muchos creían que en el vasto universo la naturaleza seguía reglas distintas de las de aquí, sobre la Tierra. La ley de Newton de la gravitación universal y las tres leyes de la dinámica, mostraron que la naturaleza sigue las mismas reglas en todas partes; esto produjo un efecto profundo sobre la visión actual que se tiene del universo.

➤ **En este capítulo usaremos las herramientas que nos proporcionan la conservación del momento angular, las leyes de Newton del movimiento, y la ley de Newton de la gravitación para predecir el movimiento de los planetas y de los otros objetos celestes, incluidos aquellos objetos que nosotros hemos enviado al espacio.**

- 11.1 Leyes de Kepler
- 11.2 Ley de la gravitación de Newton
- 11.3 Energía potencial gravitatoria
- 11.4 El campo gravitatorio  $g$
- \*11.5 Cálculo de la ecuación correspondiente al campo gravitatorio de una corteza esférica por integración



Modelo mecánico del sistema solar, denominado planetario, de la colección de Instrumentos científicos históricos de la Universidad de Harvard.

## 11.1 Leyes de Kepler

El cielo nocturno, con sus miríadas de estrellas y sus planetas brillantes, ha fascinado siempre a la humanidad. Hacia finales del siglo XVI, el astrónomo Tycho Brahe estudió los movimientos de los planetas e hizo observaciones considerablemente más exactas que las realizadas previamente. Utilizando los datos de Brahe, Johannes Kepler, descubrió que las trayectorias reales de los planetas alrededor del Sol eran elipses (figura 11.1). También demostró que los planetas no se movían con velocidad constante, sino más rápidamente cuando estaban más cerca del Sol que cuando estaban más lejos. Finalmente, Kepler desarrolló una relación matemática precisa entre el periodo de un planeta y su distancia media al Sol (ver tabla 11.1). Kepler expresó sus resultados en tres leyes empíricas del movimiento planetario. Estas leyes proporcionaron a Newton la base para su descubrimiento de la ley de la gravedad. Las leyes de Kepler son:

**Ley 1** Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol situado en un foco.

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos llamados focos  $F$  es constante (figura 11.2). La figura 11.3 muestra una trayectoria elíptica de un planeta con el Sol en un foco. La órbita de la Tierra es casi circular; la distancia al Sol en el perihelio (punto más próximo) es de  $1,48 \times 10^{11}$  m, y en el afelio (punto más lejano) de  $1,52 \times 10^{11}$  m. El semieje mayor, que es la semisuma de estas distancias, vale  $1,50 \times 10^{11}$  m para la órbita terrestre. La distancia media Tierra-Sol define la unidad astronómica (UA):

$$1 \text{ UA} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m} = 93,0 \times 10^6 \text{ mi} \quad (11.1)$$

La UA se utiliza frecuentemente en los problemas relacionados con el sistema solar.

**Ley 2** La recta que une cualquier planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

La figura 11.4 ilustra la segunda ley de Kepler, o la ley de las áreas iguales. Un planeta se mueve más rápidamente cuando está más próximo al Sol que cuando está más lejos, de tal modo que el área barrida por el radio vector en un determinado intervalo de tiempo es la misma a lo largo de toda la órbita. Esta ley de las áreas iguales está relacionada con la ley de conservación del momento angular, como veremos en la sección próxima.

TABLA 11.1 Radios orbitales medios y periodos orbitales de los planetas

Planeta	Radio orbital medio $r$ ( $\times 10^{10}$ m)	Periodo $T$ (años)
Mercurio	5,79	0,241
Venus	10,8	0,615
Tierra	15,0	1,00
Marte	22,8	1,88
Júpiter	77,8	11,9
Saturno	143	29,5
Urano	287	84
Neptuno	450	165
Plutón	590	248

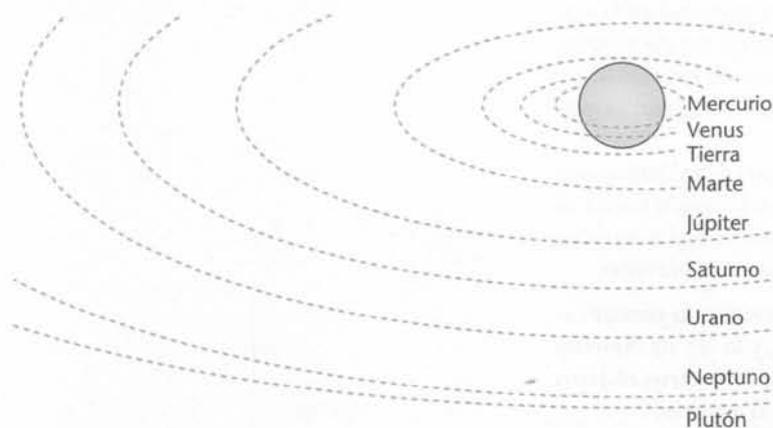


Figura 11.1 Órbitas de los planetas alrededor del Sol.

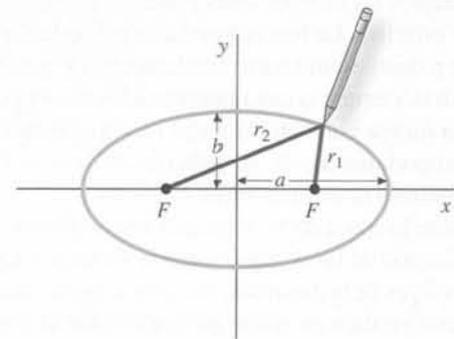
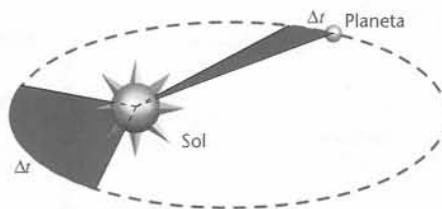
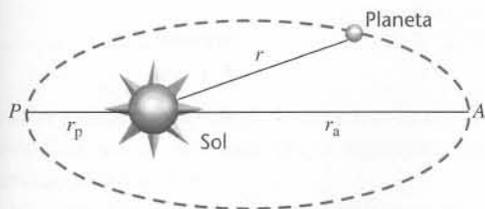


Figura 11.2 Una elipse es el lugar geométrico de los puntos para los cuales  $r_1 + r_2 = \text{constante}$ . La distancia  $a$  es el semieje mayor y  $b$  el semieje menor. Una elipse puede dibujarse con una cuerda fijando cada extremo en un foco y utilizándola como guía para un lápiz. El círculo es un caso especial en el que los dos focos coinciden en un mismo punto.



**Figura 11.3** Recorrido elíptico de un planeta con el Sol en un foco. El punto  $P$ , donde el planeta está más cerca del Sol, se llama perihelio y el punto  $A$ , donde está más lejos, afelio. La distancia media entre el planeta y el Sol, que se define como  $(r_p + r_a)/2$ , es igual al semieje mayor.

**Figura 11.4** Cuando un planeta está próximo al Sol, se mueve más deprisa que cuando está más lejos. Las áreas barridas por el radio vector en un intervalo de tiempo determinado son iguales.

**Ley 3** El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.

La tercera ley de Kepler relaciona el periodo de un planeta con su distancia media al Sol, que es igual al semieje mayor de su órbita elíptica. En forma algebraica, si  $r$  es la distancia media entre un planeta y el Sol y  $T$  es el periodo de revolución del planeta, la tercera ley de Kepler establece que

$$T^2 = Cr^3 \quad (11.2)$$

en donde la constante  $C$  tiene el mismo valor para todos los planetas. Esta ley es una consecuencia simple del hecho de que la fuerza ejercida por el Sol sobre un planeta varía inversamente con el cuadrado de la distancia del Sol al planeta. Lo demostraremos en la sección siguiente para el caso especial de una órbita circular.

### EJEMPLO 11.1 | Órbita de Júpiter

La distancia media del Sol a Júpiter es 5,20 UA. ¿Cuál es el periodo de la órbita de Júpiter alrededor del Sol?

**Planteamiento del problema** Utilizaremos la tercera ley de Kepler para relacionar el periodo de Júpiter con su radio orbital medio. La constante  $C$  puede deducirse a partir de la distancia media al Sol y el periodo de la Tierra, que son conocidos. Para la Tierra  $T_T = 1$  año y  $r_T = 1$  UA. Para Júpiter  $r_J = 5,20$  UA y llamemos  $T_J$  a su periodo.

1. La tercera ley de Kepler relaciona el periodo de Júpiter  $T_J$  con su distancia media al Sol,  $r_J$ :
2. Aplicar la tercera ley de Kepler a la Tierra para determinar  $C$  en función de  $T_T$  y  $r_T$ :
3. Dividir las dos ecuaciones, eliminando  $C$ , y despejar  $T_J$ :

$$T_J^2 = Cr_J^3$$

$$T_T^2 = Cr_T^3$$

$$\frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{r_J^3}{r_T^3}$$

por lo tanto

$$T_J = T_T \left( \frac{r_J}{r_T} \right)^{3/2} = (1 \text{ año}) \left( \frac{5,20 \text{ UA}}{1 \text{ UA}} \right)^{3/2} = \boxed{11,9 \text{ años}}$$

**Observación** En la figura 11.5 se representan el periodo de las órbitas de la Tierra, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno en función de la distancia media al Sol. En (a) el periodo se representa en función de la distancia media al Sol mientras que en (b) se representa el periodo al cuadrado respecto a la tercera potencia de la distancia media al Sol. En este caso los puntos se alinean en una línea recta.

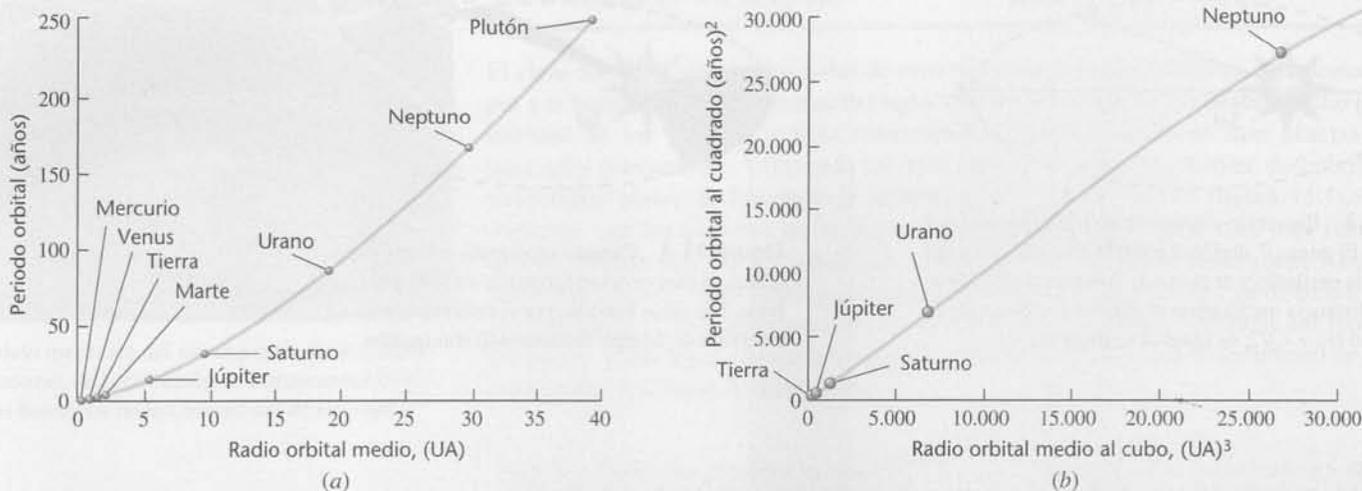


Figura 11.5

**Ejercicio** El periodo de Neptuno es 164,8 años. Calcular su distancia media al Sol. (Respuesta: 30,1 UA.)

**Ejercicio** Si se representa el logaritmo del periodo de la Tierra, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno en función del logaritmo de la distancia media al Sol, todos los puntos se sitúan en una curva. ¿Cuál es la forma de esa curva? (Respuesta: Una línea recta)

## 11.2 Ley de la gravitación de Newton

Aunque las leyes de Kepler constituyeron un paso importante en la comprensión de los movimientos planetarios, en realidad fueron simples leyes empíricas obtenidas a partir de las observaciones astronómicas de Brahe. Fue Newton quien dio un paso de gigante al atribuir la aceleración de un planeta en su órbita a una fuerza ejercida sobre él por el Sol. Newton demostró que una fuerza que varía en razón inversa al cuadrado de la distancia entre el Sol y un planeta era la causa de las órbitas elípticas observadas por Kepler. Newton hizo además la atrevida hipótesis de que tal fuerza existía entre dos objetos cualesquiera del universo. Antes de Newton ni se aceptaba generalmente que las leyes de la física observables en la Tierra fueran aplicables a los cuerpos celestes. La **ley de la gravitación de Newton** postula que existe una fuerza de atracción entre cada par de objetos que es proporcional al producto de las masas de los objetos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Sean  $m_1$  y  $m_2$  las masas de las partículas puntuales 1 y 2 (situadas en las posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , respectivamente) y sea  $\mathbf{r}_{1,2}$  el vector que apunta desde la partícula 1 a la partícula 2 (figura 11.6a).

La fuerza  $\mathbf{F}_{1,2}$  que la partícula 1 ejerce sobre la partícula 2 es

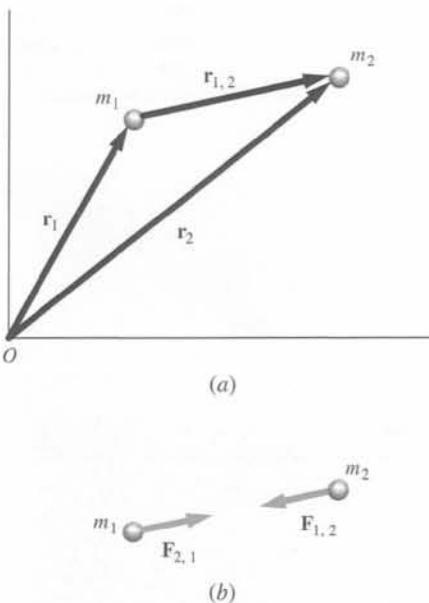
$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2} \quad (11.3)$$

LEY DE LA GRAVITACIÓN DE NEWTON

donde  $\hat{\mathbf{r}}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,2}/r_{1,2}$  es el vector unitario que apunta de 1 a 2 y  $G$  es la **constante de la gravitación universal**, que vale

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \quad (11.4)$$

De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza  $\mathbf{F}_{2,1}$  ejercida por 2 sobre 1 es la opuesta a la fuerza  $\mathbf{F}_{1,2}$  (figura 11.6b). El módulo de la fuerza gravitatoria ejercida por una partícula de masa  $m_1$  sobre otra partícula de masa  $m_2$  a una distancia  $r$  viene dada por



**Figura 11.6** (a) Partículas en  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ . (b) Las partículas ejercen fuerzas iguales y opuestas una sobre otra.

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (11.5)$$

Newton publicó su teoría de la gravitación en 1686, pero hubo que esperar un siglo para que Cavendish, como veremos en la siguiente sección, determinase experimentalmente con exactitud el valor de  $G$ .

El valor conocido de  $G$  puede utilizarse para calcular la atracción gravitatoria entre dos objetos ordinarios.

**Ejercicio** Determinar la fuerza gravitatoria de atracción de un joven de 65 kg y una muchacha de 50 kg separados 0,5 m. Suponer que sus masas son puntuales. (Respuesta  $8,67 \times 10^{-7}$  N.)

Este ejercicio demuestra que la fuerza gravitatoria ejercida entre sí por dos objetos de tamaño ordinario es extraordinariamente pequeña. Para comparar, un mosquito pesa aproximadamente  $1 \times 10^{-7}$  N. El peso de una persona de 50 kg es de 491 N, es decir, 500 millones de veces superior a la fuerza de atracción calculada en el ejercicio. La atracción gravitatoria sólo puede apreciarse fácilmente cuando al menos uno de los objetos es extraordinariamente masivo. La atracción gravitatoria entre la muchacha del ejemplo y la Tierra es considerable.

Para comprobar la validez de la ley de la inversa del cuadrado de la distancia correspondiente a la fuerza gravitatoria, Newton comparó la aceleración de la Luna en su órbita con la aceleración de caída libre de los objetos próximos a la superficie de la Tierra (tal como la legendaria manzana). Para ello hizo la hipótesis de que la atracción gravitatoria debida a la Tierra era la causa de ambas aceleraciones. En primer lugar suponía que la Tierra y la Luna podían considerarse como partículas puntuales con sus masas totales concentradas en los centros respectivos. La fuerza que actúa sobre una partícula de masa  $m$  a una distancia  $r$  del centro de la Tierra es

$$F = \frac{GM_T m}{r^2} \quad (11.6)$$

Si ésta es la única fuerza que actúa sobre la partícula, su aceleración es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GM_T}{r^2} \quad (11.7)$$

Para objetos próximos a la superficie de la Tierra,  $r = R_T$  y la aceleración de caída libre es  $g$ :

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} \quad (11.8)$$

La distancia a la Luna es aproximadamente 60 veces el radio de la Tierra ( $r = 60R_T$ ). Sustituyendo en la ecuación 11.7, resulta  $a = g/60^2$ , de modo que la aceleración de la Luna es su órbita casi circular es la aceleración de caída libre  $g$  cerca de la superficie de la Tierra dividida por  $60^2$ . Es decir, la aceleración de la Luna  $a_L$  tendría que ser  $(9,81 \text{ m/s}^2)/60^2$ . Esta aceleración centrípeta de la Luna puede calcularse a partir de su distancia conocida desde el centro de la Tierra,  $r = 3,84 \times 10^8$  m y su periodo,  $T = 27,3$  días  $= 2,36 \times 10^6$  s:

$$a_L = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2(3,84 \times 10^8 \text{ m})}{(2,36 \times 10^6 \text{ s})^2} = 2,72 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Por lo tanto,

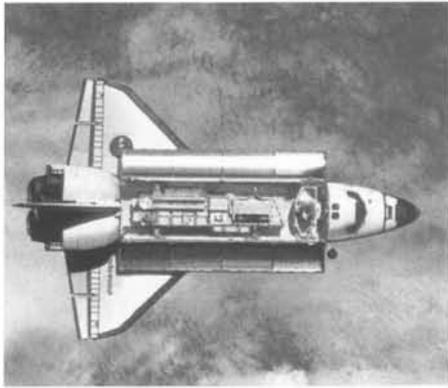
$$\frac{g}{a_L} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{2,72 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2} = 3607 \approx 60^2$$

Newton dijo: "He comparado la fuerza necesaria para mantener la Luna en su órbita con la fuerza gravitatoria sobre la superficie de la Tierra y el resultado es bastante bueno".

La hipótesis de que la Tierra y la Luna pueden tratarse como partículas puntuales en el cálculo de la fuerza sobre la Luna es razonable, pues ésta se encuentra lejos de la Tierra en



Visión de la Tierra tomada el 16 de julio de 1969 desde el Apolo 11 en su órbita alrededor de la Luna.



comparación con los radios terrestre o lunar, pero esta hipótesis es cuestionable cuando se aplica a la fuerza ejercida por la Tierra sobre un objeto próximo a su superficie. Después de un esfuerzo considerable, Newton consiguió probar que la fuerza ejercida por un objeto con simetría esférica sobre una masa puntual situada sobre su superficie o exteriormente, es la misma que tendría si toda la masa del objeto estuviera concentrada en su centro. La prueba exige el cálculo integral que Newton desarrolló para resolver este problema.

Como  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  se mide fácilmente y el radio de la Tierra es conocido, la ecuación 11.8 puede utilizarse para determinar el valor del producto  $GM_T$ . Newton estimó el valor de  $G$  a partir de una estimación de la masa de la Tierra. Cuando Cavendish determinó  $G$  unos cien años más tarde, midiendo la fuerza entre pequeñas esferas de masas y separación conocidas, decía que el objetivo de su aparato era “pesar la Tierra”. Saber el valor de  $G$  comporta que puede determinarse la masa del Sol o la masa de cualquier planeta con sus satélites. El método para calcularla se describe en la sección 11.4.

### EJEMPLO 11.2 | Cayendo hacia la Tierra

¿Cuál es la aceleración en caída libre de un objeto a la altura de la órbita del transbordador espacial, unos 400 km por encima de la superficie terrestre?

**Planteamiento del problema** La fuerza de atracción gravitatoria viene dada por la ecuación 11.6 con  $r = R_T + 400 \text{ km}$ .

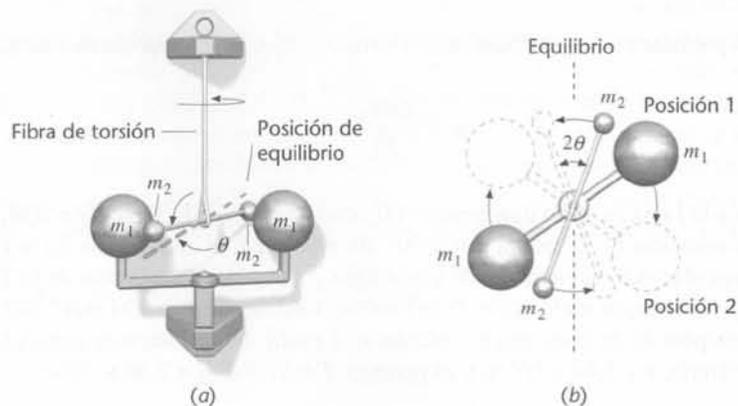
1. La aceleración es  $a = F/m$ , en donde  $F$  viene dada por la ley de la gravitación de Newton:
2. La distancia  $r$  está relacionada con el radio de la Tierra,  $R_T$ , y la altura  $h$ :
3. La aceleración es, por lo tanto:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GmM_T/r^2}{m} = \frac{GM_T}{r^2}$$

$$r = R_T + h = 6370 \text{ km} + 400 \text{ km} = 6770 \text{ km}$$

$$a = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{(6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5,98 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6,77 \times 10^6 \text{ m})^2} = \boxed{8,70 \text{ m/s}^2}$$

**Observación** Ésta es también la aceleración de los astronautas del transbordador “en estado de ingravidez” cuando aceleran en su órbita circular.



**Figura 11.7** (a) Dos pequeñas esferas, cada una de masa  $m_2$ , están en los extremos de una varilla ligera colgada de una fibra muy delgada. Medidas cuidadosas determinan el momento necesario para que la fibra se retuerza un determinado ángulo. Dos grandes esferas, cada una de masa  $m_1$ , se sitúan entonces próximas a las esferas pequeñas. Debido a la atracción gravitatoria de las esferas grandes  $m_1$  sobre las pequeñas, la fibra gira un ángulo muy pequeño  $\theta$  a partir de su posición de equilibrio. (b) El mismo aparato visto desde arriba. Una vez que el aparato alcanza el reposo se invierten las posiciones de las esferas grandes (como indican las líneas de trazos), de modo que estén a la misma distancia de la posición de equilibrio, pero en el lado opuesto. Cuando el aparato vuelva al reposo, la fibra habrá girado un ángulo  $2\theta$  en respuesta a la inversión del momento. Conocida la constante de torsión de la fibra, las fuerzas entre las masas  $m_1$  y  $m_2$  pueden determinarse a partir de la medida del ángulo de torsión. Como las masas y sus separaciones son conocidas,  $G$  puede calcularse. Cavendish obtuvo un valor de  $G$  con una precisión del orden del 1% respecto al valor hoy aceptado y que viene dado por la ecuación 11.4.

El cálculo realizado en este ejemplo 11.2 puede simplificarse usando la ecuación 11.8 para eliminar  $GM_E$  a partir de la ecuación 11.7. En ese caso la aceleración a una distancia  $r$  es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GM_T}{r^2} = g \frac{R_T^2}{r^2} \quad (11.9)$$

**Ejercicio** ¿A qué distancia por encima de la superficie de la Tierra la aceleración de la gravedad vale la mitad del valor que tiene en el nivel del mar? (*Respuesta* 2640 km.)

## Medida de $G$

Henry Cavendish fue el primero que, en 1798 y usando el aparato que se muestra en la figura 11.7, midió la constante de la gravitación universal  $G$ . La medida de  $G$  ha sido repetida por otros experimentadores con diversas mejoras y refinamientos. Todas las medidas de  $G$  son difíciles a causa de la extraordinaria pequeñez de la atracción gravitatoria. Por ello, el valor de  $G$  se conoce hoy sólo con una precisión de 1 parte en 10 000. Aunque  $G$  fue una de las primeras constantes físicas universales determinadas, sigue siendo una de las conocidas con menor exactitud.

## Masa gravitatoria y masa inercial

La propiedad de un cuerpo responsable de la fuerza gravitatoria que éste ejerce sobre otro cuerpo recibe el nombre de masa *gravitatoria*. Por otro lado, la propiedad de un cuerpo que mide su resistencia frente a la aceleración recibe el nombre de masa *inercial* (o inerte). Para estas dos propiedades hemos estado utilizando el símbolo  $m$  porque experimentalmente las masas gravitatorias e inercial de un cuerpo son iguales. Por conveniencia, las unidades se definen de tal forma que la constante de proporcionalidad sea uno. El hecho de que la fuerza gravitatoria ejercida por un cuerpo sea proporcional a su masa inercial es una característica única que sólo cumple la fuerza de gravedad. Una de las consecuencias es que, si se desprecia la resistencia del aire, todos los objetos próximos a la Tierra caen con la misma aceleración. Este hecho ha sorprendido al mundo desde tiempos ya lejanos. La historia ya conocida de cómo Galileo demostró este hecho dejando caer objetos desde la torre inclinada de Pisa es sólo uno de los ejemplos sobre el interés que esta cuestión suscitó en el siglo XVI.

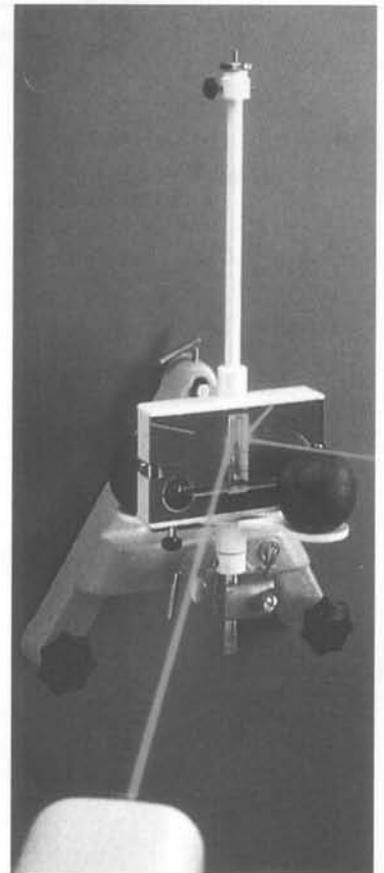
Podríamos imaginar fácilmente que las masas gravitatoria e inercial de un cuerpo no son iguales. Supongamos que designamos a la masa gravitatoria con el símbolo  $m_G$  y la masa inercial con  $m$ . En este caso la fuerza ejercida por la Tierra sobre un objeto próximo a su superficie sería

$$F = \frac{GM_T m_G}{R_T^2} \quad (11.10)$$

en donde  $M_T$  es la masa gravitatoria terrestre. Por lo tanto, la aceleración de caída libre de un cuerpo próximo a la superficie de la Tierra será

$$a = \frac{F}{m} = \left( \frac{GM_T}{R_T^2} \right) \frac{m_G}{m} \quad (11.11)$$

Si la gravedad fuera otra propiedad distinta de la materia, como el color o la rigidez, sería razonable pensar que la relación  $m_G/m$  fuese función de magnitudes tales como la composición química del cuerpo o su temperatura. De esta forma la aceleración de caída libre sería diferente para diferentes objetos. Sin embargo, el hecho experimental es que  $a$  es la misma para todos los cuerpos. Como este es el caso, no es necesario mantener la distinción entre  $m_G$  y  $m$  y podemos escribir  $m_G = m$ . Sin embargo, no debe olvidarse que esta es una conclusión experimental y, como tal, limitada por la exactitud con la que se lleve a cabo el experimento. En la década de 1580-90, Simon Stevin realizó una serie de experimentos que comprobaron esta equivalencia. Galileo difundió esta ley ampliamente, y sus contemporáneos lograron considerables mejoras en la exactitud experimental con que fue establecida.



Balanza gravitatoria de torsión utilizada en los laboratorios de prácticas de alumnos para la medida de  $G$ . Una pequeña desviación angular de la balanza origina una gran desviación angular del haz de láser que se refleja en el espejo de la balanza.

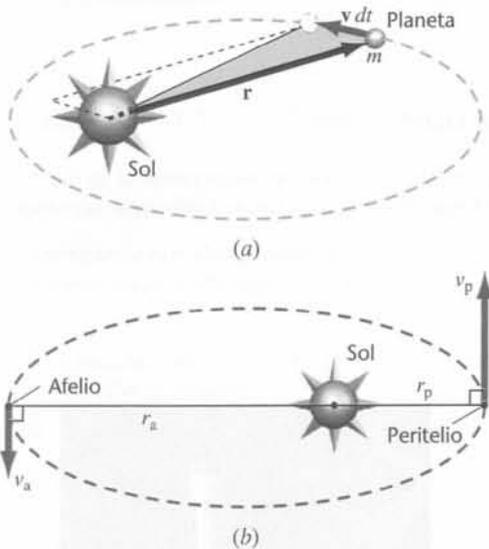


Figura 11.8

Los experimentos más precisos llevados a cabo para comparar las masas gravitatoria e inercial fueron realizados por Newton utilizando péndulos simples, en lugar de cuerpos que caían libremente. De este modo estableció la equivalencia entre ambas masas con una precisión aproximada de 1 parte en 1000. Los experimentos que comparan la masa inercial y la masa gravitatoria han sido mejorados continuamente a lo largo de los años. Actualmente la equivalencia entre  $m_G$  y  $m$  se encuentra establecida aproximadamente en 1 parte en  $10^{12}$ . Por lo tanto, de todas las leyes físicas, la equivalencia entre las masas gravitatoria e inercial es una de las mejores establecidas. La equivalencia entre las masas gravitatoria e inercial es la base del llamado principio de equivalencia, que es fundamento de la teoría de la relatividad general de Einstein.

### Deducción de las leyes de Kepler

Newton demostró que cuando un objeto, como un planeta o un cometa, se mueve alrededor de un centro, tal como el Sol, por la acción de una fuerza que depende de  $1/r^2$ , la trayectoria del objeto es una sección cónica (una elipse, una parábola o una hipérbola). Las trayectorias parabólica e hiperbólica se aplican a objetos que pasan una sola vez junto al Sol y nunca regresan. Tales órbitas no son cerradas. Las únicas órbitas cerradas en un campo de fuerzas  $1/r^2$  son elipses. Así, la primera ley de Kepler es una consecuencia directa de la ley de gravitación de Newton. La segunda ley de Kepler o ley de las áreas iguales, resulta del hecho de que la fuerza ejercida por el Sol sobre un planeta está dirigida hacia el Sol. Esta es una **fuerza central**. La figura 11.8a muestra un planeta que se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el tiempo  $dt$ , el planeta se desplaza una distancia  $v dt$  y el radio vector barre el área indicada en la figura. Esta es la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v} dt$ , es decir,  $|\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt|$ . Por lo tanto, el área  $dA$  barrida por el radio vector  $\mathbf{r}$  en el tiempo  $dt$  es

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt| = \frac{1}{2m} |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| dt$$

o sea,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} L \quad (11.12)$$

en donde  $L = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}|$  es el módulo del momento angular del planeta respecto al Sol. El área barrida en un determinado intervalo de tiempo  $dt$  es, por lo tanto, proporcional al momento angular  $L$ . Como la fuerza que actúa sobre un planeta está dirigida a lo largo de la línea que une el planeta con el Sol, el momento respecto al Sol es nulo. Por lo tanto, el momento angular del planeta se conserva, es decir,  $L$  es constante y el área barrida en cierto intervalo de tiempo es la misma para todas las partes de la órbita, que es la segunda ley de Kepler. Asimismo, por el hecho que  $L$  es constante se sabe que  $rv \sin \phi$  también lo es. Tanto en el perihelio como en el afelio  $\phi = 90^\circ$  (figura 11.8b), por lo que  $r_a v_a = r_p v_p$ .

A continuación demostraremos que la ley de gravitación de Newton implica la tercera ley de Kepler para el caso especial de una órbita circular. Consideremos un planeta que se mueve con velocidad  $v$  en una órbita circular de radio  $r$  alrededor del Sol. La fuerza gravitatoria de atracción entre el Sol y el planeta proporciona la aceleración centrípeta  $v^2/r$ . Según la segunda ley de Newton,

$$F = M_p a$$

$$\frac{GM_s M_p}{r^2} = M_p \frac{v^2}{r} \quad (11.13)$$

en donde  $M_s$  es la masa del Sol y  $M_p$  la del planeta. Despejando  $v^2$  tenemos

$$v^2 = \frac{GM_s}{r} \quad (11.14)$$

Como el planeta recorre la distancia  $2\pi r$  en el tiempo  $T$ , su velocidad está relacionada con el periodo por

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (11.15)$$

Sustituyendo  $v$  por esta expresión en la ecuación 11.14 se obtiene

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_s}{r}$$

o sea,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3 \quad (11.16)$$

TERCERA LEY DE KEPLER

La tercera ley de Kepler dada por la ecuación 11.16 equivale a la ecuación 11.2 haciendo  $C = 4\pi^2/GM_s$ . La ecuación 11.16 se aplica también a las órbitas de los satélites de cualquier planeta, reemplazando la masa del Sol,  $M_s$ , por la masa del planeta.

### EJEMPLO 11.3 | La estación espacial orbital

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

La Estación Espacial Internacional se mueve en una órbita prácticamente circular alrededor de la Tierra, a 385 km por encima de la superficie de ésta. En un lugar determinado, calcular cuánto tiempo hay que esperar entre dos avistamientos consecutivos de la estación. (Suponer que puede despreciarse la resistencia del aire.)

**Planteamiento del problema** Para detectar visualmente la estación hace falta que sea de noche y que la estación esté por encima del horizonte de nuestro lugar de observación. Por lo tanto, el tiempo mínimo entre dos avistamientos aproximadamente coincide con el periodo orbital. Para determinar el periodo orbital usamos la tercera ley de Kepler reemplazando  $M_s$  de la ecuación 11.16 por la masa de la Tierra  $M_T$ . El cálculo numérico se simplifica un poco si se usa  $GM_T = R_T^2 g$  a partir de la ecuación 11.8.

1. Aplicar la tercera ley de Kepler a la estación espacial:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} r^3$$

2. A una altura  $h = 385$  km,  $r = R_T + h = 6755$  km. Sustituir  $r = R_T + h$  y despejar el periodo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} (R_T + h)^3$$

3. Utilizar  $GM_T = R_T^2 g$  para expresar  $T$  en función de  $g$ :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{R_T^2 g} (R_T + h)^3$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{R_T \sqrt{g}} (R_T + h)^{3/2} \\ &= \frac{2\pi(6,755 \times 10^6 \text{ m})^{3/2}}{(6,37 \times 10^6 \text{ m})(9,81 \text{ m/s}^2)^{1/2}} \\ &= 5529 \text{ s} = \boxed{92,1 \text{ min}} \end{aligned}$$

**Ejercicio** ¿Cuántos grados gira la Tierra durante el tiempo en que la estación orbital da una órbita completa? (Respuesta La Tierra gira  $360^\circ$  en  $24 \text{ h} = 1440 \text{ min}$ . En  $92,1 \text{ min}$  la Tierra gira  $23,0^\circ$ .)

**Observación** La Estación Espacial Internacional se mueve en una órbita casi circular que está inclinada unos  $52^\circ$  con el plano del ecuador. Si la estación está directamente sobre nuestra cabeza en el tiempo  $t$ ,  $92,1 \text{ min}$  más tarde volverá a estar sobre una localidad  $23,0^\circ$  hacia el oeste. Por ejemplo, Kansas City está situada  $23^\circ$  al oeste de la ciudad de Nueva York. Si se avista la estación orbital a medianoche en Nueva York,  $92,1$  minutos más tarde pasará por la vertical de Kansas City.

**Ejercicio** Determinar el radio de la órbita circular de un satélite que describe una órbita alrededor de la Tierra con un periodo de 1 día. (Respuesta  $r = 6,63 R_T = 4,22 \times 10^7 \text{ m}$ . Si este satélite está en órbita alrededor del ecuador y se mueve en la misma dirección que la rotación de la Tierra, respecto a la superficie de la Tierra parece que esté fijo. Muchos satélites están "aparcados" en estas condiciones que se denominan órbitas geosíncronas.)

Si se sabe cuánto vale  $G$  mediante el uso de la ecuación 11.16, la medida del periodo  $T$  y del radio orbital medio  $r$  de un satélite que se mueve alrededor de un objeto astronómico permite determinar su masa. Al establecer la ecuación 11.16 se supuso que la masa del satélite era despreciable con respecto de la masa del objeto central. Esto significa que el objeto central permanecía estacionario mientras que el satélite orbitaba a su alrededor. En realidad, el objeto central y el satélite se mueven alrededor de un punto común, su centro de masas. Si la masa del satélite no es despreciable, el resultado es

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} r^3 \quad (11.17)$$

en donde  $r$  es la separación entre los centros de ambos. (Para órbitas elípticas más generales, las matemáticas son más desafiantes pero el resultado es el mismo). Si la masa del satélite no es despreciable, como es el caso de la mayor parte de los sistemas binarios, lo que se determina es sólo la suma de las masas, como aparece explícitamente señalado en la ecuación 11.17. La Luna, al igual que planetas como Mercurio y Venus, no tienen satélites naturales, por lo que sus masas no fueron bien conocidas hasta los años 60, cuando se colocaron satélites artificiales en órbita a su alrededor.

**Ejercicio** El satélite de Marte Phobos tiene un periodo de 460 min y un radio orbital medio de 9400 km. ¿Cuál es la masa de Marte? (Respuesta  $6,45 \times 10^{23}$  kg =  $0,108M_T$ )



### EXPLORANDO

¿Cuál es la diferencia entre la masa gravitatoria y la masa inercial? Explore acerca de estos conceptos y mucho más en [www.whfreeman.com/tipler5e](http://www.whfreeman.com/tipler5e)

## 11.3 Energía potencial gravitatoria

En las proximidades de la superficie terrestre, la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre un objeto es constante, ya que la distancia al centro de la Tierra,  $r = R_T + h$  es siempre aproximadamente  $R_T$  para  $h \ll R_T$ . La energía potencial de un objeto próximo a la superficie terrestre es  $mgh = mg(r - R_T)$ , en donde se ha elegido  $U = 0$  en la superficie de la Tierra,  $r = R_T$ . Si estamos lejos de la superficie de la Tierra, debemos tener en cuenta el hecho de que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra no es constante sino que disminuye con la distancia en la forma  $1/r^2$ . La definición general de la energía potencial (ecuación 6.19b) es

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

en donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza que actúa sobre una partícula y  $d\mathbf{s}$  es el desplazamiento general de la partícula. Para la fuerza gravitatoria radial  $\mathbf{F}$  dada por la ecuación 11.6 tenemos

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -F\hat{r} \cdot d\mathbf{s} = -F_r dr = -\left(-\frac{GM_T m}{r^2}\right) dr = \frac{GM_T m}{r^2} dr \quad (11.18)$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación resulta

$$U = -\frac{GM_T m}{r} + U_0 \quad (11.19)$$

en donde  $U_0$  es una constante de integración. Como en la energía potencial sólo importan los cambios, podemos darle el valor cero en cualquier posición. La superficie de la Tierra es una buena elección para muchos problemas cotidianos, pero no siempre. Por ejemplo, si consideramos la energía potencial asociada a un sistema planeta-Sol, no hay ninguna razón para elegir la superficie del Sol como origen. De hecho, casi siempre es más conveniente elegir que el origen de la energía potencial gravitatoria de un sistema de dos objetos sea cero cuando la separación de los objetos es infinita. Por ello, la elección  $U_0 = 0$  suele ser muy conveniente. Así

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (11.20)$$

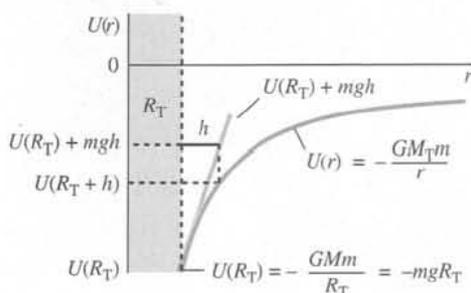


Figura 11.9

en donde  $U = 0$  si  $r = \infty$ . La figura 11.9 es un gráfico de  $U(r)$  en función de  $r$  para esta elección de  $U = 0$  en  $r = \infty$  para un objeto de masa  $m$  y la Tierra de masa  $M_T$ . Esta función comienza con el valor negativo  $U = -GM_T m/R_T = -mgR_T$  en la superficie de la Tierra y crece cuando  $r$  aumenta, aproximándose al valor cero para  $r$  infinito. La pendiente de esta curva es  $r = R_T$  es  $GM_T m/R_T^2 = mg$ , de modo que la ecuación de la recta tangente, trazada en azul, es  $f(h) = U(R_T) + mgh$ , en donde  $h = r - R_T$  es la distancia por encima de la superficie de la Tierra. De la figura se desprende que para  $h$  pequeña,  $U(R_T) + mgh \approx U(r)$ .

## Velocidad de escape

En las últimas décadas la idea de escapar del campo gravitatorio terrestre ha pasado de la fantasía a la realidad. Sondas espaciales han sido enviadas a los puntos más alejados del sistema solar. Algunas de estas sondas acabarán girando alrededor del Sol, mientras que otras abandonarán el sistema solar y se perderán en el espacio exterior. En esta sección veremos que existe una velocidad inicial mínima llamada **velocidad de escape** que es la necesaria para que un cuerpo escape de la Tierra.

Si proyectamos un cuerpo hacia arriba desde la Tierra con cierta energía cinética inicial, a medida que el cuerpo asciende, la energía cinética disminuye y la energía potencial crece. El máximo incremento de energía potencial, es  $GM_T m/R_T$ . Por lo tanto, este valor es el mismo que puede decrecer la energía cinética. Si la energía cinética inicial es mayor que  $GM_T m/R_T$ , la energía total  $E$  será mayor que cero ( $E_2$  en la figura 11.10) y el cuerpo todavía tendrá cierta energía cinética cuando  $r$  sea muy grande (o incluso cuando  $r$  sea infinito). Así, el cuerpo escapará de la Tierra si la energía cinética inicial es mayor que  $GM_T m/R_T$ . Como la energía potencial en la superficie de la Tierra es  $-GM_T m/R_T$ , la energía total  $E = E_c + U$  debe ser mayor o igual que cero para que el cuerpo escape. La velocidad del cuerpo próximo a la superficie terrestre, correspondiente a una energía total cero se denomina velocidad de escape  $v_e$ . Puede determinarse a partir de

$$E_{c_f} + U_f = E_{c_i} + U_i$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

de modo que

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} \quad (11.21)$$

VELOCIDAD DE ESCAPE

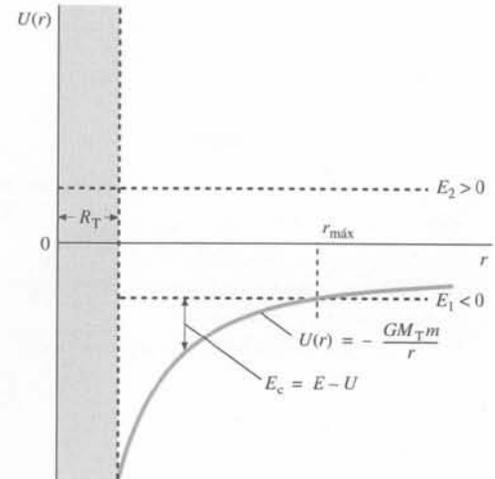
Tomando los valores  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  y  $R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$  se obtiene

$$v_e = \sqrt{2(9,81 \text{ m/s}^2)(6,37 \times 10^6 \text{ m})} = 11,2 \text{ km/s}$$

Un cuerpo con esta velocidad escapará de la gravedad Tierra. (Sin embargo, no escapará del sistema solar, pues hemos despreciado la atracción gravitatoria del Sol y otros planetas; véanse problemas 46 y 48.)

La velocidad de escape de un planeta o satélite respecto a las velocidades térmicas de las moléculas de un gas determina el tipo de atmósfera que el planeta o satélite puede tener. La energía cinética media de las moléculas del gas,  $(\frac{1}{2} m v^2)_m$ , es proporcional a la temperatura absoluta  $T$  (capítulo 18). En la superficie de la Tierra, las velocidades moleculares del oxígeno y nitrógeno son muy inferiores a la velocidad de escape, y por ello, estos gases permanecen en nuestra atmósfera. En cambio, las moléculas más ligeras de hidrógeno y helio poseen en su mayor parte velocidades superiores a la de escape y por esto estos gases no se encuentran en nuestra atmósfera. La velocidad de escape en la atmósfera de la Luna puede calcularse mediante la ecuación 11.21, utilizando la masa y el radio de la Luna para reemplazar  $M_T$  y  $R_T$ . La velocidad de escape para la Luna es de 2,3 km/s, muy inferior a la de la Tierra y demasiado pequeña para que pueda existir allí ningún tipo de atmósfera.

**Ejercicio** Determinar la velocidad de escape en la superficie de Mercurio, cuya masa es  $M = 3,31 \times 10^{23} \text{ kg}$  y cuyo radio es  $R = 2440 \text{ km}$ . (Respuesta  $v_e = \sqrt{2GM/R} = 4,25 \text{ km/s}$ .)



**Figura 11.10** La energía cinética de un cuerpo a la distancia  $r$  del centro de la Tierra es  $E - U(r)$ . Cuando la energía total es menor que cero ( $E_1$  en la figura), la energía cinética es cero para  $r = r_{\text{máx}}$  y el cuerpo está ligado a la Tierra. Cuando la energía total es mayor que cero ( $E_2$  en la figura), el cuerpo puede escapar de la Tierra.



## Clasificación energética de las órbitas

En la figura 11.10 se muestran dos valores posibles de la energía total  $E$  sobre un gráfico de  $U$  en función de  $r$ :  $E_1$  que es negativa y  $E_2$ , positiva. Una energía total negativa significa simplemente que la energía cinética en la superficie de la Tierra es menor que  $+GM_T m/R_T$ , de modo que  $E_c + U$  nunca es mayor que cero. En general, a partir de esta figura podemos ver que cuando la energía total de un sistema es negativa, la línea de energía total corta a la curva de energía potencial a cierta separación máxima  $r_{\text{máx}}$  y el sistema está ligado. Por otra parte, cuando la energía total es positiva o cero, entonces no se cortan ambas líneas y el sistema no está ligado. Los criterios para los sistemas ligados y no ligados pueden resumirse del modo siguiente:

Si  $E < 0$ , el sistema es ligado.

Si  $E \geq 0$ , el sistema es no ligado.

Cuando  $E$  es negativa su valor absoluto  $|E|$  se denomina energía de enlace. La energía de enlace es, por lo tanto, la energía que debe añadirse al sistema para que la energía total sea cero.

La energía potencial de un objeto como un planeta o cometa de masa  $m$  a una distancia  $r$  del Sol es

$$U(r) = -\frac{GM_s m}{r} \quad (11.22)$$

en donde  $M_s$  es la masa del Sol. La energía cinética del cuerpo es  $\frac{1}{2}mv^2$ . Si la energía total, cinética más potencial, es menor que cero, la órbita será una elipse (o circunferencia), y el objeto estará ligado al Sol, de manera que no podrá escapar de su campo gravitatorio. Por otro lado, si la energía total es positiva, la órbita será una hipérbola, lo que significa que el objeto se acercará al Sol, lo rodeará y se alejará para no volver nunca más. Si la energía total es exactamente cero, la trayectoria será una parábola y el objeto también escapará. En resumen, cuando la energía total es cero o positiva, los cuerpos no están ligados al campo gravitatorio del Sol y escapan. Curiosamente, no hay medidas de la energía  $E$  de un cometa o de un asteroide que, sin lugar a duda, no sean negativas. Por lo tanto, todos los cuerpos observados de este tipo están ligados al sistema solar.

### EJEMPLO 11.4 | Altura de un proyectil

Un proyectil se dispara hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial  $v_i = 8 \text{ km/s}$ . Determinar la altura máxima que alcanza despreciando la resistencia del aire.

**Planteamiento del problema** La altura máxima puede determinarse a partir del principio de conservación de la energía. Tomaremos la superficie de la Tierra como punto inicial, con  $U_i = -GM_T m/R_T$  y  $E_{c_i} = \frac{1}{2}mv_i^2$ . En su altura máxima,  $E_{c_f} = 0$ .

1. Aplicar la conservación de la energía mecánica:

$$E_{c_f} + U_f = E_{c_i} + U_i$$

$$0 - \frac{GM_T m}{r_f} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

2. Multiplicar la ecuación anterior por  $-1/(GM_T m)$ , utilizar  $GM_T = gR_T^2$  y despejar  $r$ :

$$\frac{1}{r_f} = -\frac{v_i^2}{2GM_T} + \frac{1}{R_T} = -\frac{v_i^2}{2gR_T^2} + \frac{1}{R_T}$$

por lo tanto

$$r_f = 1 / \left( \frac{1}{R_T} - \frac{v_i^2}{2gR_T^2} \right) = R_T / \left( 1 - \frac{v_i^2}{2gR_T} \right)$$

3. Reemplazar por valores numéricos para determinar  $r$  y  $h = r - R_T$ :

$$r_f = R_T / \left( 1 - \frac{(8000 \text{ m/s})^2}{2(9,81 \text{ m/s}^2)(6,37 \times 10^6 \text{ m})} \right) = 2,05R_T$$

$$h = r - R_T = \boxed{1,05R_T = 6,69 \times 10^6 \text{ m}}$$

**EJEMPLO 11.5** | Velocidad de un proyectil

Un proyectil se dispara hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial  $v_i = 15 \text{ km/s}$ . Determinar la velocidad del proyectil cuando está muy lejos de la Tierra, despreciando la resistencia del aire.

**Planteamiento del problema** Muy lejos de la Tierra significa  $r \gg R_T$ . La velocidad inicial es mayor que la velocidad de escape de  $11 \text{ km/s}$ , de modo que la energía total del proyectil es positiva y escapará de la Tierra con cierta energía cinética final. Mediante el principio de conservación de la energía es posible determinar esta energía y la velocidad final.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

**Pasos**

1. Aplicar la conservación de la energía mecánica, teniendo en cuenta que cuando  $r_f = \infty$ ,  $U_f = 0$ .
2. Despejar  $v_f^2$ , haciendo  $GM_T/R_T^2 = g$  para simplificar.
3. Sustituir los valores conocidos de  $g$  y  $R_T$  para calcular  $v_f$ .

**Observación** En la figura 11.11 se representa la velocidad del proyectil en kilómetros por segundo en función de  $h/R_T$ , siendo  $h$  la altura por encima de la superficie terrestre. Para valores muy grandes de  $h/R_T$ , la velocidad se aproxima a la línea horizontal,  $v_f = 10 \text{ km/s}$ .

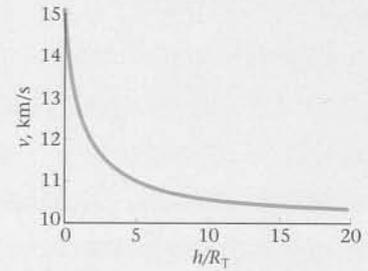
**¡INTÉNELO USTED MISMO!**

Figura 11.11

**Respuestas**

$$E_{c_i} + U_i = E_{c_f} + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

$$v_f^2 = v_i^2 - \frac{2GM_T}{R_T} = v_i^2 - \frac{2gR_T^2}{R_T} = v_i^2 - 2gR_T$$

$$v_f = \sqrt{(15 \times 10^3 \text{ m/s})^2 - 2(9,81 \text{ m/s}^2)(6,37 \times 10^6 \text{ m})}$$

$$= 10^4 \text{ m/s} = \boxed{10 \text{ km/s}}$$

**EJEMPLO 11.6** | Energía total de un satélite

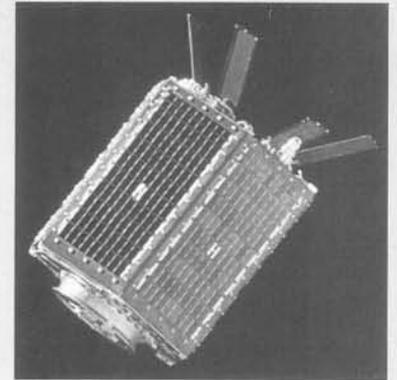
Mostrar que la energía total de un satélite que describe una órbita circular es igual a la mitad de su energía potencial.

**Planteamiento del problema** La energía total de un satélite en órbita es la suma de su energía potencial y de su energía cinética,  $E = U + E_c$ . La segunda ley de Newton nos permite encontrar la velocidad  $v$  del satélite en función de su radio orbital  $r$ . La energía cinética depende la velocidad, por lo que podemos determinar la energía cinética en función de  $r$ . Suponer que la masa de la Tierra es mucho mayor que la del satélite.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

**Pasos**

1. Escribir la energía total como la suma de la energía cinética más la energía potencial.
2. Aplicar la segunda ley de Newton al satélite y despejar el cuadrado de la velocidad.
3. Sustituir en el resultado del paso 1 y simplificar.
4. Comparar el resultado del paso 3 con  $U$  del paso 1.

**¡INTÉNELO USTED MISMO!****Respuestas**

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r}$$

$$F = ma$$

$$\frac{GM_T m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

por lo tanto

$$v^2 = \frac{GM_T}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m \frac{GM_T}{r} - \frac{GM_T m}{r}$$

$$= \frac{GM_T m - 2GM_T m}{2r} = -\frac{GM_T m}{2r}$$

$$E = -\frac{GM_T m}{2r} = \frac{1}{2} \left( -\frac{GM_T m}{r} \right) = \boxed{\frac{1}{2}U}$$

**Ejercicio** Un satélite de masa  $450 \text{ kg}$  gira alrededor de la Tierra en una órbita circular situada a  $6830 \text{ km}$  por encima de su superficie. Hallar (a) la energía potencial, (b) la energía cinética y (c) la energía total del satélite. (Respuestas Obsérvese que  $r = R_T + h = 13\,200 \text{ km}$ . (a)  $U = -13,6 \times 10^9 \text{ J}$ , (b)  $E_c = 6,80 \times 10^9 \text{ J}$ , (c)  $E = -6,80 \times 10^9 \text{ J}$ .)

## 11.4 El campo gravitatorio $g$

La fuerza gravitatoria ejercida por una masa puntual  $m_1$  sobre una segunda masa  $m_2$  situada a la distancia  $r_{1,2}$  viene dada por

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2}$$

en donde  $\hat{\mathbf{r}}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,2}/r_{1,2}$  es un vector unitario que apunta de  $m_1$  a  $m_2$ . El campo gravitatorio en un punto  $P$  se determina colocando una masa puntual de ensayo de masa  $m$  en  $P$  y calculando la fuerza gravitatoria  $\mathbf{F}$  ejercida por el resto de partículas. La fuerza gravitatoria  $\mathbf{F}$  dividida por  $m$  se denomina **campo gravitatorio  $g$**  en  $P$ .

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (11.23)$$

DEFINICIÓN —CAMPO GRAVITATORIO

El punto  $P$  se denomina **punto campo**. El campo gravitatorio en un punto debido a un conjunto de masas puntuales es igual a la suma vectorial de los campos debidos a las masas individuales en dicho punto.

$$\mathbf{g} = \sum_i \mathbf{g}_i \quad (11.24a)$$

Los puntos donde están localizadas estas partículas se denominan **puntos fuente**. Para determinar el campo gravitatorio en un punto debido a un cuerpo continuo, se calcula el campo  $d\mathbf{g}$  debido a un pequeño elemento de volumen con masa  $dm$  y se integra sobre el cuerpo entero (el conjunto completo de puntos).

$$\mathbf{g} = \int d\mathbf{g} \quad (11.24b)$$

El campo gravitatorio de la Tierra a una distancia  $r \geq R_T$  está dirigido hacia la Tierra y su módulo  $g(r)$  viene dado por

$$g(r) = \frac{F}{m} = \frac{GM_T}{r^2} \quad (11.25)$$

CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

### EJEMPLO 11.7 | Campo gravitatorio de dos partículas puntuales

Dos partículas cada una de masa  $M$  están fijas sobre el eje  $y$  en  $y = +a$  e  $y = -a$  (figura 11.12). Determinar el campo gravitatorio en todos los puntos del eje  $x$  en función de  $x$ .

**Planteamiento del problema** Dos partículas de masa  $M$  producen un campo gravitatorio en el punto  $P$  localizado en  $x$ . La distancia entre  $P$  y cualquiera de las partículas es  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ . El campo resultante  $g$  es la suma vectorial de los campos  $g_1$  y  $g_2$  debido a cada una de las masas.

1. Calcular el módulo de  $g_1$  o  $g_2$ :

$$g_1 = \frac{GM}{r^2}$$

2. La componente  $y$  del campo resultante es cero. La componente  $x$  es la suma de  $g_{1x}$  y  $g_{2x}$ :

$$g_x = g_{1x} + g_{2x} = 2g_{1x} = 2g_1 \cos \theta$$

3. Expresar  $\cos \theta$  en función de  $x$  y  $r$  a partir de la figura:

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

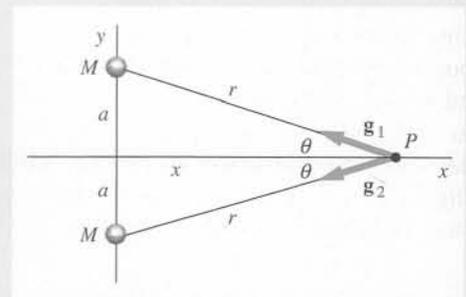


Figura 11.12

4. Combinando los dos últimos resultados se obtiene  $\mathbf{g}$ . Para expresar  $\mathbf{g}$  en función de  $x$ , sustituir  $r$  por  $(x^2 + a^2)$ :
- $$\mathbf{g} = g_x \mathbf{i} = -2 \frac{GMx}{r^2} \frac{x}{r} \mathbf{i} = -\frac{2GMx}{r^3} \mathbf{i}$$
- $$= -\frac{2GMx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{i}$$

**Comprobar el resultado** Si  $x < 0$ ,  $\mathbf{g}$  va en la dirección positiva de  $x$  y si  $x > 0$ ,  $\mathbf{g}$  va en la dirección negativa, como era de esperar. Si  $x = 0$ , resulta que  $\mathbf{g} = 0$ ; los campos debidos a las masas  $m_1$  y  $m_2$  son iguales y opuestos en  $x = 0$ , y por lo tanto se cancelan. Para  $x \gg a$ ,  $\mathbf{g} = -(2GM/x^2)\mathbf{i}$ . El campo es el mismo que si una masa única de valor  $2M$  estuviera en el origen.

### EJEMPLO 11.8 | Campo gravitatorio de una barra uniforme

Una barra uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$  está centrada en el origen y apoyada longitudinalmente a lo largo del eje  $x$  (figura 11.13). Determinar el campo gravitatorio debido a la barra en todos los puntos del eje  $x$  que cumplen  $x > L/2$ .

**Planteamiento del problema** Elegimos un elemento de masa  $dm$  de longitud  $dx$  situado en  $x$  y elegimos un punto campo  $P$  sobre el eje  $x$  en  $x = x_0$  de la región  $x > L/2$ . Cada elemento de masa crea un campo gravitatorio en  $P$  que apunta en la dirección negativa de  $x$ . Podemos calcular el campo total integrando la componente  $x$  del campo producido por  $dm$  desde  $x = -L/2$  a  $x = +L/2$ .

- Determinar la componente  $x$  del campo en  $P$  producido por el elemento  $dm$ :
 
$$dg_x = -\frac{G dm}{r^2}$$
- La masa  $dm$  es proporcional al tamaño del elemento  $dx$ :
 
$$dm = \frac{M}{L} dx$$
- Expresar la distancia  $r$  entre  $dm$  y el punto  $P$  en función de  $x$  y  $x_0$ :
 
$$r = x_0 - x$$
- Utilizar estos resultados para expresar  $dg$  en función de  $x$ :
 
$$dg_x = -\frac{G dm}{r^2} = -\frac{G(M/L) dx}{(x_0 - x)^2}$$
- Integrar para determinar la componente  $x$  del campo total:
 
$$g_x = \int dg_x = -\frac{GM}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} = -\frac{GM}{L} \left[ \frac{1}{x_0 - x} \right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$= -\frac{GM}{L} \left( \frac{1}{x_0 - L/2} - \frac{1}{x_0 + L/2} \right) = -\frac{GM}{x_0^2 - (L/2)^2}$$
- Expresar el campo resultante en forma vectorial:
 
$$\mathbf{g} = g_x \mathbf{i} = -\frac{GM}{x_0^2 - (L/2)^2} \mathbf{i}$$
- $x_0$  es un punto arbitrario en la región del eje  $x$  si  $x > L/2$ , por lo que lo podemos reemplazar por  $x$ :
 
$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{x^2 - (L/2)^2} \mathbf{i}$$

**Comprobar el resultado** Para  $x \gg L/2$ , el resultado se aproxima al campo de una masa puntual de masa  $M$ ,  $\mathbf{g} = -(GM/x^2)\mathbf{i}$ .

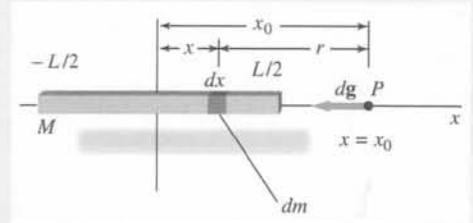


Figura 11.13

### Campo gravitatorio $\mathbf{g}$ de una corteza esférica y de una esfera sólida

Una de las motivaciones que tuvo Newton para desarrollar el cálculo diferencial fue la de poder demostrar que el campo gravitatorio en un punto exterior de una esfera maciza es el mismo que se obtendría si toda la masa de la esfera estuviese concentrada en su centro. Esto lo demostraremos en la próxima sección. Aquí sólo analizaremos los resultados de esta demostración. Consideremos primero una corteza esférica uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  (figura 11.14). Se mostrará que el campo gravitatorio creado por la corteza a distancia  $r$  de su centro viene dado por

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{para } r > R \quad (11.26a)$$

$$\mathbf{g} = 0 \quad \text{para } r < R \quad (11.26b)$$

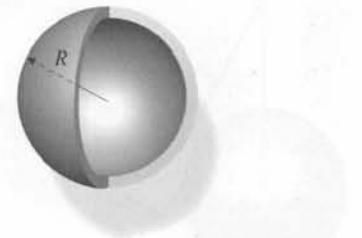
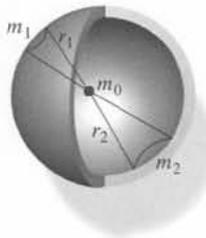
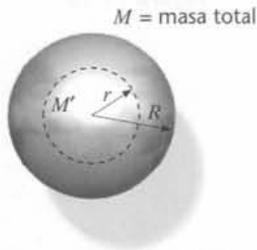


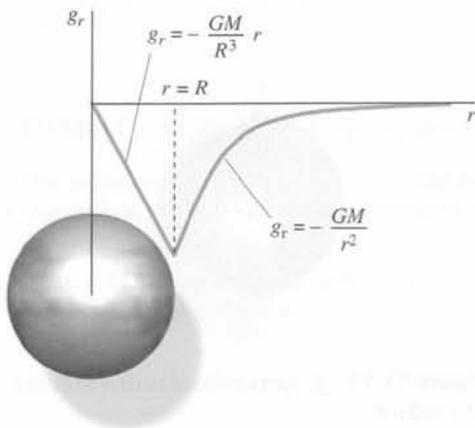
Figura 11.14 Corteza esférica uniforme de masa  $M$  y radio  $R$ .



**Figura 11.15** Una masa puntual  $m_0$  en el interior de una corteza esférica uniforme no aprecia ninguna fuerza neta.



**Figura 11.16** Esfera sólida uniforme de radio  $R$  y masa  $M$ . Sólo la masa  $M'$ , contenida en el interior de la esfera de radio  $r$ , contribuye al campo gravitatorio que se ejerce a la distancia  $r$ .



**Figura 11.17** Representación de  $g$ , en función de  $r$  para una esfera maciza uniforme de masa  $M$ . El valor del campo aumenta con  $r$  dentro de la esfera y disminuye según  $1/r^2$  en su exterior.

Este resultado ( $g = 0$  dentro de la corteza esférica) puede comprenderse analizando la figura 11.15 que muestra una masa puntual  $m_0$  en el interior de una corteza esférica. En esta figura, las masas de los segmentos de corteza  $m_1$  y  $m_2$  están relacionadas por

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{o} \quad \frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$$

Como la fuerza debida a cada una decrece inversamente al cuadrado de la distancia, la fuerza debida a la masa más pequeña situada a la izquierda es equilibrada exactamente por la debida a la más distante y de mayor masa situada a la derecha.

El campo gravitatorio en el exterior de una esfera sólida es una simple extensión de la ecuación 11.26a. Basta considerar que la esfera sólida está compuesta por un conjunto continuo de cortezas esféricas. Como el campo debido a cada una de las cortezas es el mismo que si toda su masa estuviera concentrada en el centro, el campo debido a la esfera completa es igual al que se origina si la totalidad de su masa estuviese concentrada en su centro:

$$g_r = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{para } r > R \quad (11.27)$$

Este resultado es válido aunque la densidad de la esfera no sea constante, con tal de que la densidad dependa únicamente de  $r$ , de modo que se conserve la simetría esférica.

### Campo $g$ en el interior de una esfera sólida

Utilizaremos ahora las ecuaciones 11.26a y 11.26b para determinar el campo gravitatorio en el interior de una esfera sólida de densidad constante en un punto a una distancia  $r$  del centro, donde  $r$  es menor que el radio  $R$  de la esfera. Esto se aplicaría, por ejemplo, al caso de que fuese necesario encontrar el peso de un objeto situado en el fondo del pozo de una mina muy profunda. Como hemos visto, el campo en el interior de una corteza esférica es cero. Así pues, en la figura 11.16 la masa de la porción de esfera exterior a  $r$  no ejerce ninguna fuerza en su interior. Por consiguiente, sólo la masa  $M'$  dentro del radio  $r$  contribuye al campo gravitatorio en  $r$ . Esta masa produce un campo igual al de una masa puntual  $M'$  situada en el centro de la esfera. La fracción de la masa total de la esfera que está dentro de  $r$  es igual al cociente entre el volumen de una esfera de radio  $r$  y el de una esfera de radio  $R$ . Por lo tanto, en el caso de una distribución uniforme de masa, si  $M$  es la masa total de la esfera,  $M'$  vendrá dada por

$$M' = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} M = \frac{r^3}{R^3} M \quad (11.28)$$

El campo gravitatorio a la distancia  $r$  es, por lo tanto,

$$g_r = -\frac{GM'}{r^2} = -\frac{GM}{r^2} \frac{r^3}{R^3}$$

o sea,

$$g_r = -\frac{GM}{R^3} r \quad \text{para } r < R \quad (11.29)$$

El valor del campo aumenta con la distancia  $r$  en el interior de la esfera. La figura 11.17 muestra una gráfica del campo  $g_r$  en función de  $r$  para una esfera maciza de densidad constante.

**EJEMPLO 11.9** | Un planeta vacío

Un planeta, cuyo núcleo está vacío, consiste en una corteza esférica gruesa de masa  $M$ , de radio exterior  $R$  y de radio interior  $R/2$ . (a) ¿Qué masa hay entre el centro del planeta y  $\frac{3}{4}R$ ? (b) ¿Cuál es el campo gravitatorio a una distancia  $\frac{3}{4}R$  del centro?

**Planteamiento del problema** La masa de la corteza que está más próxima al centro que  $\frac{3}{4}R$  es igual al producto de la densidad por el volumen de la corteza de radio exterior  $\frac{3}{4}R$  y radio interior  $\frac{1}{2}R$ . Primero hay que determinar la densidad y el volumen, y después calcular la masa. El campo gravitatorio en  $r = \frac{3}{4}R$  únicamente se debe a la masa que está entre esta distancia y el centro del planeta.

(a) 1. La masa  $M'$  (la masa de la corteza con radio externo  $\frac{3}{4}R$  y radio interno  $\frac{1}{2}R$ ) es la densidad  $\rho$  por el volumen  $V'$ :  $M' = \rho V'$

2. La densidad es la masa  $M$  dividida por el volumen  $V$ :

$$\rho = \frac{M}{V} = M / \left[ \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \right] = \frac{M}{7\pi R^3/6}$$

3. Determinar el volumen  $V'$  de la corteza con radio externo  $\frac{3}{4}R$  y radio interno  $\frac{1}{2}R$ :

$$V' = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3R}{4}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{19}{48}\pi R^3$$

(a) 1. Determinar la masa  $M'$ :

$$M' = \rho V' = \frac{6}{7\pi R^3} \frac{19}{48}\pi R^3 M = \frac{19}{56}M$$

(b) El campo gravitatorio en  $r = \frac{3}{4}R$  lo produce únicamente la masa  $M'$ :

$$g = -\frac{GM'}{r^2} \mathbf{r} = -\frac{G \frac{19}{56}M}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2} \mathbf{r} = -\frac{38GM}{63R^2} \mathbf{r}$$

**Comprobar el resultado** Esperamos que en la región  $\frac{1}{2}R < r < \frac{3}{4}R$  haya una fracción inferior a la mitad de la masa de toda la corteza. En efecto, el resultado del ejercicio nos indica que la masa  $M'$  vale  $\frac{19}{56}$ .

**Observación** Obsérvese que el volumen  $V$  del denominador del paso 2 del apartado (a) es  $7\pi R^3/6$ , lo cual nos indica que corresponde a una fracción superior a medio volumen de la esfera de radio  $R$ . Es de esperar que el volumen de la región  $1/2R < r < R$  sea una fracción superior a la mitad del volumen de una esfera de radio  $R$ . También observemos que el volumen  $V'$  (paso 3 apartado (a)) y la masa  $M'$  (paso 4 apartado (a)) son la misma fracción de  $V$  y de  $M$ . Este resultado era de esperar ya que la corteza es uniforme.

**EJEMPLO 11.10** | Densidad que depende del radio

Una esfera sólida de radio  $R$  y masa  $M$  es esféricamente simétrica, pero no uniforme. La densidad  $\rho$ , definida como su masa por unidad de volumen, es proporcional a la distancia  $r$  medida desde el centro para  $r \leq R$ . Es decir,  $\rho = Cr$  para  $r \leq R$ , donde  $C$  es una constante. (a) Determinar  $C$ . (b) Determinar  $g_r$  para  $r \geq R$ . (c) Determinar  $g_r$  para  $r = R/2$ .

**Planteamiento del problema** (a) Podemos determinar  $C$  integrando la densidad para todo el volumen de la esfera e igualando el resultado con  $M$ . Para un volumen elemental, tomar una corteza esférica de radio  $r$  y espesor  $dr$  (figura 11.18). Su volumen es  $4\pi r^2 dr$  y su masa  $dm = \rho dV = Cr(4\pi r^2 dr)$ . (b) El campo para  $r \geq R$  es el mismo que si la masa total  $M$  estuviera en el centro de la esfera. (c) El campo en  $r = R/2$  es el mismo que si la masa  $M'$  estuviera en el centro de la esfera, donde  $M'$  es la masa dentro de la esfera de radio  $R/2$ . La masa entre  $r = R/2$  y  $r = R$  produce un campo cero en  $r = R/2$ .

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

**Pasos**

(a) 1. Integrar  $dm$  de  $r = 0$  a  $r = R$ .

2. Despejar  $C$  en función de  $M$  y de  $R$ .

**Respuestas**

$$M = \int dM = \int \rho dV = \int_0^R Cr(4\pi r^2 dr) = C\pi R^4$$

$$C = \frac{M}{\pi R^4}$$

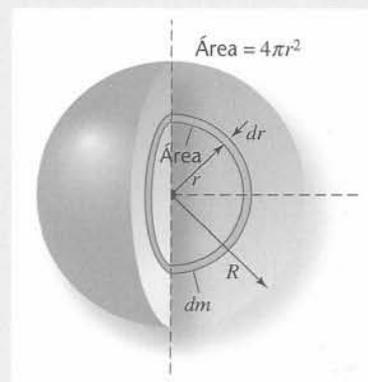
**¡INTÉNTELO USTED MISMO!**

Figura 11.18

(b) Escribir una expresión para el campo en el exterior de la esfera en función de la masa  $M$ , de la distancia del centro  $r$  y del vector unitario  $\mathbf{r}$  en la dirección creciente de  $r$ .

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{r} \quad (r > R)$$

(c) 1. Calcular la masa  $M'$  que hay en el interior del radio  $R/2$  integrando  $dm = \rho dV$  desde  $r = 0$  hasta  $r = R/2$  y usar el valor de  $C$  calculado en el paso 2 del apartado (a)

$$M' = \frac{M}{16}$$

2. Escribir una expresión para el campo en  $r = R/2$  en función de  $M$  y  $R$ .

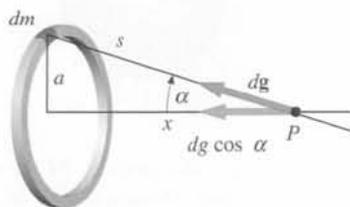
$$\mathbf{g} = -\frac{GM'}{r^2} \mathbf{r} = -\frac{GM}{4R^2} \mathbf{r} \quad \text{en } r = \frac{R}{2}$$

**Comprobar el resultado** En una esfera uniforme, la ecuación 11.29 nos da el valor  $g_r = -GM/(2R^2)$  para el campo en  $r = R/2$ , que es el doble del resultado del apartado (c) del ejemplo. Este resultado era de esperar ya que una esfera uniforme tiene una fracción mayor de su masa total en la región  $0 < r < R/2$  que una esfera como la del ejercicio.



**Observación** Las unidades para  $C$  son  $\text{kg/m}^4$ ; por lo que las unidades de  $\rho$  son  $\text{kg/m}^3$ , que corresponden a masa por unidad de volumen.

## \* 11.5 Cálculo de la ecuación correspondiente al campo gravitatorio de una corteza esférica por integración



**Figura 11.19** Campo gravitatorio en un punto  $P$  a una distancia  $x$  de un anillo uniforme. El campo debido al elemento  $dm$  apunta hacia él. El campo total debido al anillo está dirigido a lo largo de su eje.

Obtendremos la ecuación correspondiente al campo gravitatorio de una corteza esférica en dos pasos. Hallaremos primeramente el campo gravitatorio sobre el eje de un anillo de masa uniforme. Aplicaremos luego el resultado obtenido a una corteza esférica, que podemos considerar como un conjunto de anillos coaxiales.

En la figura 11.19 se muestra un anillo de masa total  $m$  y radio  $a$  y un punto  $P$  sobre el eje, a una distancia  $x$  de su centro. Escogemos un elemento de masa  $dm$  sobre el anillo, suficientemente pequeño para considerarlo como una partícula elemental. La distancia de este elemento a  $P$  es  $s$  y la línea recta que une el elemento con  $P$  forma un ángulo  $\alpha$  con el eje del anillo.

El campo en  $P$  debido al elemento  $dm$  está dirigido hacia él y su módulo  $dg$  viene dado por

$$dg = \frac{G(dm)}{s^2}$$

A partir de la simetría de la figura podemos ver que al sumar respecto a todos los elementos del anillo, el campo neto estará dirigido a lo largo del eje del mismo; es decir, la suma de todas las componentes elementales perpendiculares al eje es nula. Por ejemplo, la componente perpendicular del campo elemental indicada en la figura será equilibrada por la componente debida al elemento del anillo directamente opuesta a la indicada. Por lo tanto, el campo neto tendrá el sentido de las  $x$  negativas. La componente  $x$  del campo debida al elemento  $dm$  es

$$dg_x = -dg \cos \alpha = -\frac{Gdm}{s^2} \cos \alpha$$

Se obtiene el campo total sumando respecto a todos los elementos del anillo:

$$g_x = -\int \frac{G \cos \alpha}{s^2} dm$$

Como  $s$  y  $\alpha$  tienen el mismo valor para todos los puntos del anillo, son constantes en cuanto a la integración se refiere. Así pues,

$$g_x = -\frac{G \cos \alpha}{s^2} \int dm = -\frac{Gm}{s^2} \cos \alpha \quad (11.30)$$

en donde  $m = \int dm$  es la masa total del anillo.

Ahora utilizaremos este resultado para calcular el campo gravitatorio debido a una corteza esférica de masa  $M$  y radio  $R$  en un punto situado a una distancia  $r$  del centro de la misma. Consideremos primeramente el caso en que el punto campo  $P$  sea exterior a la corteza, como muestra la figura 11.20. Por simetría, el campo debe ser radial. Elegimos como elemento de masa la banda indicada, que puede considerarse como un anillo de masa  $dM$ . El campo debido a esta banda viene dado por la ecuación 11.30, en donde  $m$  se reemplaza por  $dM$ :

$$dg_r = -\frac{G dM}{s^2} \cos \alpha \quad (11.31)$$

La masa  $dM$  es proporcional al área de la banda  $dA$ , que es igual al producto de la circunferencia por su anchura. El área de la banda es  $R \text{ sen } \theta$ , de modo que la circunferencia es  $2\pi R \text{ sen } \theta$ . La anchura es  $R d\theta$ . Si la masa total de la corteza es  $M$ , y  $A = 4\pi R^2$ , la masa de la banda de área  $dA$  es

$$dM = \frac{M}{A} dA = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi R^2 \text{ sen } \theta d\theta = \frac{1}{2} M \text{ sen } \theta d\theta \quad (11.32)$$

Aplicando este resultado en la ecuación 11.31 se obtiene

$$dg_r = -\frac{G dM}{s^2} \cos \alpha = -\frac{GM \text{ sen } \theta d\theta}{2s^2} \cos \alpha \quad (11.33)$$

Antes de integrar respecto a la corteza completa, hemos de eliminar dos de las tres variables relacionadas entre sí:  $s$ ,  $\theta$  y  $\alpha$ . Lo más sencillo es escribir todas ellas en función de  $s$ , que varía desde  $s = r - R$  para  $\theta = 0$  hasta  $s = r + R$  para  $\theta = 180^\circ$ . Por la ley de los cosenos, tendremos

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta$$

Diferenciando, se tiene

$$2s ds = +2rR \text{ sen } \theta d\theta$$

o bien

$$\text{sen } \theta d\theta = \frac{s ds}{rR}$$

Puede obtenerse una expresión para el  $\cos \alpha$  aplicando la ley de los cosenos al mismo triángulo. Resulta

$$R^2 = s^2 + r^2 - 2sr \cos \alpha$$

o sea,

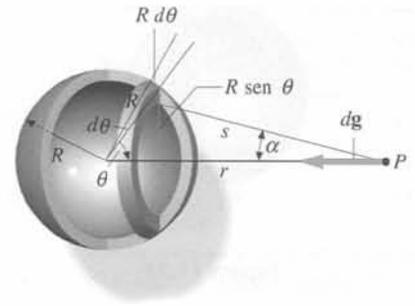
$$\cos \alpha = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr}$$

Aplicando estos resultados en la ecuación 11.33 se tiene

$$\begin{aligned} dg_r &= -\frac{GM \text{ sen } \theta d\theta}{2s^2} \cos \alpha = -\frac{GM}{2s^2} \left( \frac{s ds}{rR} \right) \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr} \\ &= -\frac{GM ds}{4s^2 r^2 R} (s^2 + r^2 - R^2) = -\frac{GM}{4r^2 R} \left( 1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2} \right) ds \end{aligned} \quad (11.34)$$

Para determinar el campo en  $P$  se integra sobre toda la corteza. Los límites de integración dependen ahora de si el punto  $P$  está fuera o dentro de la corteza. Si  $P$  está fuera  $s$  varía desde  $r - R$  ( $\theta = 0$ ) hasta  $s = r + R$  ( $\theta = 180^\circ$ ), por lo que el campo debido a la corteza completa se determina integrando desde  $s = r - R$  hasta  $s = r + R$ .

$$g_r = -\frac{GM}{4r^2 R} \int_{r-R}^{r+R} \left( 1 + \frac{(r-R)(r+R)}{s^2} \right) ds = -\frac{GM}{4r^2 R} \left[ s - \frac{(r-R)(r+R)}{s} \right]_{r-R}^{r+R}$$



**Figura 11.20** Corteza esférica uniforme delgada de radio  $R$  y masa total  $M$ . La banda indicada puede considerarse como un anillo de anchura  $R d\theta$  y circunferencia  $2\pi R \text{ sen } \theta$ .

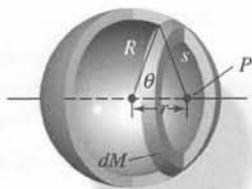


Figura 11.21

## EXPLORANDO

Las fuerzas de marea, ¿son tan fuertes como las fuerzas gravitatorias? Explore acerca de estos conceptos y mucho más en [www.whfreeman.com/tipler5e](http://www.whfreeman.com/tipler5e)

## Resumen

Al sustituir los límites superior e inferior en la expresión entre corchetes resulta un valor de  $4R$ . Por consiguiente,

$$g_r = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{para } r > R$$

que es el mismo resultado de la ecuación 11.26a.

Si el punto del campo  $P$  está contenido dentro de la corteza, el cálculo es idéntico, excepto que  $s$  varía ahora de  $R - r$  a  $R + r$ . Así,

$$g_r = -\frac{GM}{4r^2R} \left[ s - \frac{(r-R)(r+R)}{s} \right]_{R-r}^{R+r}$$

que al sustituir los límites superior e inferior da cero. Por consiguiente,

$$g_r = 0 \quad \text{para } r < R$$

que es la ecuación 11.26b.

- 1 Las leyes de Kepler son observaciones *empíricas*. También se pueden deducir a partir de las leyes de Newton.
- 2 La ley de la gravitación de Newton es una *ley fundamental* de la física.
- 3 La energía potencial gravitatoria de un sistema de dos masas relativa a  $U = 0$  a una separación infinita viene dada por  $U = -Gm_1m_2/r$ . Si el sistema está ligado, su energía total es negativa.
- 4 El campo gravitatorio es un *concepto físico fundamental* que describe el estado impuesto en el espacio por una distribución de masa.

## OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

## TEMA

## 1. Las tres leyes de Kepler

- Ley 1** Todos los planetas se mueven recorriendo órbitas elípticas estando situado el Sol en uno de sus focos.
- Ley 2** Toda línea que une un planeta cualquiera con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- Ley 3** El cuadrado del periodo de un planeta cualquiera es proporcional al cubo de la distancia media del mismo al Sol:

$$T^2 = Cr^3 \quad (11.2)$$

en donde  $C$  tiene el mismo valor para todos los planetas; según la ley de gravitación de Newton,  $C$  vale  $4\pi^2/G(M_S + M_p)$ . Si  $M_S \gg M_p$ , esta ley puede expresarse por

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} r^3 \quad (11.15)$$

Las leyes de Kepler pueden obtenerse a partir de la ley de Newton de la gravedad. Las leyes primera y tercera resultan del hecho de que la fuerza ejercida por el Sol sobre los planetas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a cada planeta del Sol. La segunda ley se deduce del hecho de que la fuerza ejercida por el Sol sobre un planeta tiene la dirección de la recta que los une y, por lo tanto, se conserva el momento angular orbital del planeta. Las leyes de Kepler son válidas también para cualquier cuerpo que gire en órbita alrededor de otro y obedezca a un campo que sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, como ocurre con todo satélite que gira alrededor de un planeta.

## 2. Ley de gravitación de Newton

Toda partícula puntual ejerce una fuerza atractiva sobre cualquier otra partícula puntual que es proporcional al producto de las masas de ambas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2} \quad (11.3)$$

Constante de gravitación universal

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \quad (11.4)$$

## 3. Energía potencial gravitatoria

La energía potencial gravitatoria  $U$  de un sistema compuesto por una partícula de masa  $m$  situada fuera de un objeto con simetría esférica de masa  $M$  a una distancia  $r$  del centro es

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad (11.20)$$

Cuando  $r$  se aproxima a infinito, esta función energía potencial tiende a cero

## 4. Energía mecánica

La energía mecánica  $E$  de un sistema compuesto por una partícula de masa  $m$  situada fuera de un objeto con simetría esférica de masa  $M$  a una distancia  $r$  del centro es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Velocidad de escape

Para un valor determinado de  $r$ , se denomina velocidad de escape,  $v_e$ , a la velocidad de la partícula para la cual  $E = 0$ . Es decir, si  $v = v_e$ ,  $E = 0$ .

## 5. Clasificación de las órbitas

Si  $E < 0$  el sistema está ligado y la órbita es una elipse (o un círculo, que es un tipo de elipse).  
Si  $E \geq 0$ , el sistema no está ligado y la órbita es una hipérbola (o una parábola para  $E = 0$ ).

## 6. Campo gravitatorio

Definición

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (11.23)$$

Campo gravitatorio terrestre

$$\mathbf{g}(r) = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (r \geq R_T) \quad (11.29)$$

Campo gravitatorio creado por una corteza esférica delgada

Fuera de la corteza, el campo gravitatorio es igual al que se crearía si toda la masa de la corteza estuviera concentrada en el centro. El campo interior a la corteza es cero.

$$\mathbf{g} = -\frac{GM_T}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{para } r > R \quad (11.26a)$$

$$\mathbf{g} = 0 \quad \text{para } r < R \quad (11.26b)$$

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

Tomar  $g = 9,81 \text{ N/kg} = 9,81 \text{ m/s}^2$  y despreciar el rozamiento en todos los problemas a menos que se indique lo contrario.

## Problemas conceptuales

- 1** ● **SSM** Verdadero o falso:
- (a) La ley de las áreas iguales de Kepler implica que la gravedad varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia.
- (b) El planeta más próximo al Sol tiene, por término medio, el periodo de revolución más corto.
- 2** ● Si la masa de un satélite se duplica, el radio de su órbita puede permanecer constante si la velocidad del satélite (a) se incrementa en un factor de 8, (b) se incrementa en un factor de 2, (c) no varía, (d) se reduce en un factor de 8, (e) se reduce en un factor de 2.
- 3** ●● **SSM** En la superficie de la Luna, la aceleración debida a su gravedad es  $a$ . A una distancia del centro de la Luna igual a cuatro veces su radio la aceleración debida a su gravedad es (a)  $16a$ , (b)  $a/4$ , (c)  $a/3$ , (d)  $a/16$ , (e) ninguna de las anteriores.
- 4** ● ¿Por qué es  $G$  tan difícil de medir?
- 5** ● Si la masa de un satélite se duplica, el radio de su órbita puede permanecer constante si la velocidad del satélite (a) se incrementa en un factor de 1,4, (b) se incrementa en un factor de 2, (c) no varía, (d) se reduce en un factor de 1,4, (e) se reduce en un factor de 2.
- 6** ●● Un objeto descubierto recientemente, parecido a un cometa, pasa alrededor del Sol. ¿Cómo podemos saber si regresará, aunque sea dentro de muchos años, o si nunca volverá a pasar?
- 7** ●● Explicar por qué dentro de una esfera de masa uniforme el campo gravitatorio es directamente proporcional a  $r$  en vez de inversamente proporcional a  $r$ .
- 8** ● **SSM** Si  $E_c$  es la energía cinética de Mercurio en su órbita alrededor del Sol, y  $U$  la energía potencial del sistema Mercurio-Sol, ¿cuál es la relación entre  $E_c$  y  $U$ ?
- 9** ●● Se lleva a una estudiante cuyo peso en la superficie de la Tierra es  $p$  hasta una altura igual al doble del radio terrestre por encima de la superficie terrestre. Su peso allí es (a)  $p/2$ , (b)  $p/4$ , (c)  $p/3$ , (d)  $p/9$ .
- 10** ●● En la novela "Los primeros hombres en la Luna" de H.G. Wells, el viaje hacia el satélite se llevó a cabo de una forma ligeramente distinta de cómo viajaban los héroes de las novelas de Julio Verne. El profesor Cavour, héroe de la novela, inventó un material, la cavourita, que protegía a los objetos de la fuerza gravitatoria. Por lo tanto, simplemente rodeando un objeto con cavourita se conseguía que éste quedara indemne a la fuerza gravitatoria. Los aventureros del libro de Wells construyeron una nave que estaba recubierta de cavourita por su parte inferior, pero no por su parte superior. Entonces colocaron la nave de forma que su parte superior apuntara hacia la Luna para que su fuerza gravitatoria la llevara hacia el satélite. Según la física real, es imposible que exista la cavourita, ya que su existencia conduciría a la violación de la ley de la conservación de la energía. Para demostrarlo utilice la cavourita para inventar un móvil perpetuo.

## Estimaciones y aproximaciones

- 11** ● Estimar la masa de la galaxia si el Sol sigue una órbita respecto del centro de la galaxia con un periodo de 250 millones de años a una distancia de 30 000 años luz. Expresar la masa en función de múltiplos de la masa solar  $M_s$ . (Despreciar la masa que está más lejos del centro de la galaxia que el Sol y considerar que la que está más cerca que éste ejerce la misma fuerza sobre el Sol que la que ejercería una partícula puntual de la misma masa.)
- 12** ●●● **SSM** Uno de los grandes avances de la astronomía de los últimos años es la detección de planetas fuera del sistema solar. Desde 1996 se han detectado 100 planetas que se mueven en órbitas alrededor de otras estrellas distintas del Sol. Los planetas no se ven directamente, pero los telescopios pueden detectar el pequeño movimiento periódico de una estrella y un planeta en el

movimiento de uno alrededor del otro alrededor de su centro de masas común. (Este efecto se mide mediante la detección del *efecto Doppler*, que se discutirá en el capítulo 15.) Mediante observaciones experimentales se determina, pues, tanto el periodo de este movimiento como la variación de la velocidad de la estrella. A partir de la observación de la luminosidad de la estrella y teniendo en cuenta la teoría de la estructura estelar, se determina la masa de una estrella. Iota Draconis es la octava estrella más brillante de la constelación Draco y las observaciones indican que alrededor de esta estrella hay un planeta que se mueve con un periodo de 1,5 años. La masa de Iota Draconis es  $1,05M_{\text{sol}}$ . (a) ¿Cuál es el tamaño (en UA) del semieje mayor de la órbita del planeta? (b) Se observa que la velocidad radial de la estrella varía en 592 m/s. Usando la conservación del momento, determinar la masa del planeta. Suponer que la órbita es circular y que no hay ningún otro planeta que tenga su órbita alrededor de Iota Draconis. Expresar la masa en función de la masa de Júpiter.

**13** ●●● Uno de los problemas sin resolver de la teoría sobre la formación del sistema solar es que, mientras que la masa del Sol representa el 99,9% de la masa total del sistema solar, el astro rey sólo concentra el 2% del momento angular total. La teoría más ampliamente aceptada sobre la formación del sistema solar sostiene como hipótesis central el colapso gravitatorio de una nube de polvo y de gas, la mayor parte de la cual formó el Sol. Sin embargo, el momento angular neto de esta masa de gas y polvo tuvo que conservarse, por lo que cualquier teoría simple predice que el Sol debería girar mucho más rápido de lo que en realidad gira. En este problema usted demostrará por qué es importante que la mayor fracción del momento angular se haya transferido de alguna manera a los planetas. (a) El Sol es una nube de gas que se mantiene unida por la fuerza de la gravedad. Si el Sol girara mucho más rápido, la gravedad no tendría suficiente fuerza para mantenerlo tal como lo conocemos. Estimar la velocidad angular máxima con que podría girar el Sol, usando los valores conocidos de su masa ( $1,99 \times 10^{30}$  kg) y de su radio ( $6,96 \times 10^8$  km), para que siguiera siendo tal como lo conocemos actualmente. ¿Cuál es el periodo de rotación que corresponde a esta velocidad angular? (b) Calcular el momento angular orbital de Júpiter y de Saturno a partir de su masa (318 y 95,1 veces la masa de la Tierra, respectivamente), de su distancia media al Sol (778 y 1430 millones de km, respectivamente), y del periodo de su órbita (11,9 y 29,5 años, respectivamente). Compararlos con el valor medido experimentalmente del momento angular del Sol ( $1,91 \times 10^{41}$  kg·m<sup>2</sup>/s). (c) Si se transfiriera todo el momento angular de Júpiter y de Saturno al Sol, ¿cuál sería el nuevo periodo orbital del astro? El Sol no es una esfera uniforme de gas, por lo tanto su momento de inercia viene dado por la fórmula  $I = 0,059MR^2$ . Comparar este resultado con el obtenido para la velocidad angular de rotación máxima obtenida en el apartado (a).

## Leyes de Kepler

- 14** ● **SSM** Se ha descubierto el nuevo cometa Alex-Casey en una órbita muy elíptica, con un periodo de 127,4 años. Si el acercamiento máximo del cometa al Sol es de 0,1 UA, ¿cuál es su distancia máxima al astro?
- 15** ● El radio de la órbita terrestre es  $1,496 \times 10^{11}$  m y el de Urano,  $2,87 \times 10^{12}$  m. ¿Cuál es el periodo de Urano?
- 16** ●  El asteroide Hector, descubierto en 1907, describe una órbita casi circular de radio 5,16 UA alrededor del Sol. Determinar el periodo de este asteroide.
- 17** ●● El asteroide Ícaro, descubierto en 1949, se denominó así porque su órbita elíptica, muy excéntrica, le acerca mucho al Sol en su perihelio. La excentricidad  $e$  de una elipse viene definida por la relación  $r_p = a(1 - e)$ , en donde  $r_p$  es la distancia al perihelio y  $a$  el semieje mayor. Ícaro tiene una excentricidad de 0,83. Su periodo es 1,1 años. (a) Determinar el semieje mayor de la órbita de Ícaro. (b) Determinar las distancias del perihelio y del afelio de la órbita de Ícaro.
- 18** ●● Se lleva mucho tiempo discutiendo las distintas posibilidades de enviar una misión tripulada a Marte y las dificultades que entrañaría a los astronautas acometer un viaje tan largo por el espacio. En este problema analizaremos el problema de una forma sencilla, considerando una de las posibilidades

que se han barajado: "la transferencia orbital de Hohmann". Según esta propuesta, se trataría de establecer una órbita elíptica tangente a la órbita de la Tierra cuando ésta esté en el punto más cercano al Sol que a la vez fuera tangente a la órbita de Marte cuando el planeta rojo esté en el punto más alejado del astro rey. Calcular el tiempo total invertido por los astronautas en viajar de un planeta a otro sabiendo que la distancia de Marte al Sol es 1,52 veces la distancia media Tierra-Sol.

**19** ●● SSM Kepler determinaba distancias entre los planetas del sistema solar a partir de los datos que había obtenido mediante sus observaciones. Por ejemplo, determinó la distancia relativa entre el Sol y Venus (comparandola con la distancia Sol-Tierra). A causa de que la órbita de Venus es más cercana al Sol que la órbita de la Tierra, Venus siempre se puede observar próximo al alba o al ocaso, ya que su posición en el cielo nunca está lejos del Sol (véase la figura 11.22). Suponiendo que la órbita de Venus alrededor del Sol es un círculo perfecto, consideremos la extensión máxima de la zona cubierta por el movimiento de estos dos planetas alrededor del Sol considerando la orientación relativa de Venus, la Tierra y el Sol cuando Venus está más alejado del Sol en el cielo. (a) En estas condiciones, demostrar que el ángulo  $b$  de la figura 11.22 es  $90^\circ$ . (b) Si el ángulo de máxima elongación entre Venus y el Sol es de  $47^\circ$ , ¿cuál es la distancia entre Venus y el Sol en UA?

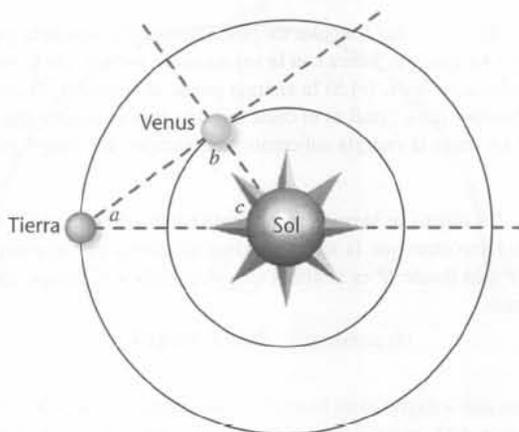


Figura 11.22 Problema 19

**20** ●● La Luna, cuando está en el apogeo de su órbita alrededor de la Tierra está a 406.395 km de distancia, mientras que en el perigeo está a 357.643 km. ¿Cuál es la velocidad de la Luna en el apogeo y en el perigeo? El periodo orbital de la Luna alrededor de la Tierra es 27,3 días.

### Ley de la gravitación de Newton

**21** ●● SSM Europa es un satélite que se mueve en una órbita de Júpiter con un periodo de 3,55 días y a una distancia media de  $6,71 \times 10^8$  m. A partir de estos datos y suponiendo que la órbita es circular, calcular la masa de Júpiter. (b) Otro satélite de Júpiter, Callisto, se mueve a una distancia media de  $18,8 \times 10^8$  m en una órbita que tiene un periodo de 16,7 días. A partir de estos datos determinar la aceleración de Callisto y de Europa y comprobar que son consistentes con una ley de la gravitación que contemple una dependencia espacial proporcional a la inversa del cuadrado de la distancia. [Nota: En el apartado (b) de este problema NO debe usarse el valor de  $G$  para nada].

**22** ● SSM Se opina comúnmente que los astronautas de la lanzadera espacial están en condiciones de ingravidez "porque están más allá de la atracción gravitatoria de la Tierra". De hecho, esta opinión es completamente falsa. (a) ¿Cuál es el módulo de la aceleración de la gravedad para los astronautas de la lanzadera espacial cuando el ingenio espacial está a 400 km por encima de la superficie de la Tierra? (b) A tenor de la respuesta al apartado (a), ¿por qué, aparentemente, los astronautas están en condiciones de ingravidez?

**23** ● SOLVE La masa de Saturno es de  $5,69 \times 10^{26}$  kg. (a) Calcular el periodo de su Luna Mimas, sabiendo que el radio medio de su órbita es  $1,86 \times 10^8$  m. (b) Calcular el radio medio de la Luna Titán, cuyo periodo es de  $1,38 \times 10^6$  s.

**24** ● SOLVE ✓ Calcular la masa terrestre a partir de los valores del periodo de la Luna  $T = 27,3$  d, el radio medio de su órbita  $r_m = 3,84 \times 10^8$  y el valor ya conocido de  $G$ .

**25** ● SOLVE ✓ Utilizar el periodo de la Tierra (1 año), el radio medio de su órbita ( $1,496 \times 10^{11}$  m), y el valor de  $G$  para calcular la masa del Sol.

**26** ● SSM SOLVE ✓ Se deja caer un cuerpo desde una altura de  $6,37 \times 10^6$  m por encima de la superficie terrestre. ¿Cuál es su aceleración inicial?

**27** ● Suponer que se realiza un aterrizaje en un planeta de otro sistema solar que tiene la misma masa por unidad de volumen que la Tierra, pero su radio es 10 veces el de la Tierra. ¿Cuál sería su peso en ese planeta en comparación con el que tiene en la Tierra?

**28** ● Suponer que la Tierra, manteniendo su masa actual, fuera comprimida hasta la mitad de su radio. ¿Cuál sería la aceleración de la gravedad  $g$  en la superficie de este nuevo planeta más compacto?

**29** ● Un planeta se mueve alrededor de un sol masivo con momento angular constante. Cuando el planeta pasa por el perihelio posee una velocidad de  $5 \times 10^4$  m/s y se encuentra a  $1,0 \times 10^{15}$  m del sol. El radio orbital en el afelio aumenta en  $2,2 \times 10^{15}$  m. ¿Cuál es la velocidad del planeta en el afelio?

**30** ● ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de una estrella de neutrones cuya masa es 1,60 veces la masa del Sol y que tiene un radio de 10,5 km?

**31** ●● SSM La velocidad de un asteroide es de 20 km/s en el perihelio y de 14 km/s en el afelio. Determinar la relación de las distancias al afelio y al perihelio.

**32** ●● Un satélite de masa 300 kg se mueve en una órbita circular de  $5 \times 10^7$  m por encima de la superficie terrestre. (a) ¿Cuál es la fuerza gravitatoria sobre el satélite? (b) ¿Cuál es la velocidad del satélite? (c) ¿Cuál es el periodo del satélite?

**33** ●● SSM SOLVE Un medidor superconductor de la gravedad puede medir cambios de esta magnitud del orden  $\Delta g/g = 10^{-11}$ . (a) Si una persona está escondida detrás de un árbol con un medidor de gravedad, ¿a qué distancia máxima se podrá acercar su amigo de 80 kg de masa sin que el detector muestre un cambio de  $g$  debido a su presencia? (b) Una persona sube a un globo aerostático con un medidor de la gravedad con el objetivo de determinar la velocidad de ascenso (supuesta constante). ¿Cuál es la altura mínima ascendida que produce un cambio del campo gravitatorio terrestre perceptible por el aparato?

**34** ●● Si suponemos que la interacción atractiva entre una estrella de masa  $M$  y un planeta de masa  $m \ll M$  es de la forma  $F = Kmm/r$ , siendo  $K$  la constante gravitatoria, ¿cuál sería la relación entre el radio de la órbita circular del planeta y su periodo?

**35** ●● SSM La masa de la Tierra es  $5,97 \times 10^{24}$  kg y su radio 6370 km. El radio de la Luna es 1738 km. La aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es  $1,62$  m/s<sup>2</sup>. ¿Cuál es la relación entre la densidad media de la Luna y la de la Tierra?

### Medida de G

**36** ● SOLVE Las masas de una balanza de Cavendish (figura 11.7) son  $m_1 = 10$  kg y  $m_2 = 0,010$  kg, respectivamente, estando separados sus centros 6 cm. Los centros de las dos masas pequeñas están separados 20 cm. (a) ¿Cuál es la fuerza de atracción entre las esferas grande y pequeña? (b) ¿Qué momento de torsión debe ejercer la fibra para equilibrar estas fuerzas?

## Masa gravitatoria inercial

**37** ● **¡SOLVE!** Un cuerpo patrón, que por definición tiene una masa de 1 kg exactamente, experimenta una aceleración de  $2,6587 \text{ m/s}^2$  cuando se le aplica una determinada fuerza. Otro objeto de masa desconocida adquiere una aceleración de  $1,1705 \text{ m/s}^2$  cuando se le aplica la misma fuerza. (a) ¿Cuál es la masa del segundo objeto? (b) La masa que se determina en la parte (a), ¿es gravitatoria o inercial?

**38** ● **¡SOLVE!** El peso de un cuerpo patrón que por definición tiene una masa exacta de 1 kg, se mide y resulta ser de 9,81 N. En el mismo laboratorio, otro objeto pesa 56,6 N. (a) ¿Cuál es la masa de este último? (b) La masa determinada en (a), ¿es gravitatoria o inercial?

**39** ● **SSM** El principio de equivalencia establece que la caída libre de cualquier cuerpo en un campo gravitatorio es independiente de la masa del objeto. Este resultado puede comprobarse a partir de la ley de gravitación universal pero, ¿se ha comprobado experimentalmente? Un experimento realizado en la década de los años 1960, el experimento de Roll-Krotkov-Dicke, indica que la aceleración de la caída libre de los cuerpos es independiente de la masa al menos con una exactitud de 1 parte en  $10^{12}$ . Supongamos que dos cuerpos caen simultáneamente, desde el reposo, en un campo gravitatorio uniforme y que, además, uno de los objetos cae con una aceleración exacta de  $9,8 \text{ m/s}^2$  mientras que el otro cae con una aceleración constante que supera los  $9,8 \text{ m/s}^2$  en 1 parte sobre  $10^{12}$ . ¿Qué distancia habrá caído el primer cuerpo cuando el segundo, en su caída, le aventaje en 1 mm? (Obsérvese que esta estimación corresponde al cálculo de un límite superior de la diferencia de aceleraciones, aunque la mayoría de los físicos creen que no hay ninguna diferencia.)

## Energía potencial gravitatoria

**40** ● (a) Considerando que la energía potencial es cero a una distancia infinita, hallar la energía potencial de un cuerpo de 100 kg en la superficie de la Tierra. (Utilizar  $6,37 \times 10^6 \text{ m}$  para el radio terrestre.) (b) Hallar la energía potencial del mismo cuerpo a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra. (c) ¿Cuál deberá ser la velocidad de escape de un cuerpo proyectado desde esta altura?

**41** ● Una masa puntual  $m_0$  está inicialmente en la superficie de una esfera grande de masa  $M$  y radio  $R$ . ¿Cuánto trabajo se necesita para separarla a una distancia muy grande de la esfera grande?

**42** ● Suponer que en el espacio existe un astro igual a la Tierra, excepto que no tiene atmósfera, no tiene movimiento de rotación ni se mueve alrededor del Sol. ¿Qué velocidad inicial debería tener un vehículo espacial en la superficie de este astro para recorrer verticalmente hacia arriba una distancia igual a un radio terrestre?

**43** ● **SSM** **¡SOLVE!** Se deja caer desde el reposo un objeto situado a una altura de  $4 \times 10^6 \text{ m}$  sobre la superficie terrestre. Si no existiese la resistencia del aire, ¿cuál sería su velocidad al chocar contra la Tierra?

**44** ● **¡SOLVE!** Se lanza un objeto hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 4 km/s. Hallar la altura máxima que alcanzará.

**45** ● **¡SOLVE!** Una corteza esférica tiene un radio  $R$  y una masa  $M$ . (a) Escribir las expresiones correspondientes a la fuerza ejercida por la corteza sobre una masa puntual  $m_0$  cuando  $m_0$  está en el exterior o en el interior de la corteza. (b) ¿Cuál es la función energía-potencial  $U(r)$  para este sistema cuando la masa  $m_0$  está a una distancia  $r$  ( $r \geq R$ ) si  $U = 0$  en  $r = \infty$ ? Calcular esta función para  $r = R$ . (c) Utilizando la relación general para  $dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F_r dr$ , demostrar que  $U$  es constante en todo punto interior a la corteza. (d) Utilizando el hecho de que  $U$  es continua en todas partes, incluidos los puntos en que  $r = R$ ,

hallar el valor de  $U$  constante en el interior de la corteza. (e) Dibujar una gráfica de  $U(r)$  en función de  $r$  para todos los valores posibles de  $r$ .

**46** ● **¡SOLVE!** El planeta Saturno tiene una masa 95,2 veces mayor que la de la Tierra y un radio 9,47 veces el de ésta. Hallar la velocidad de escape para objetos situados cerca de la superficie de Saturno.

**47** ● **¡SOLVE!** Hallar la velocidad de escape de un cohete que abandona la Luna. La aceleración de la gravedad en la Luna es 0,166 veces la de la Tierra y el radio de la Luna es  $0,273 R_T$ .

**48** ● **SSM** El escritor de ciencia ficción Robert Heinlein afirmó: "Si se consigue estar en una órbita estable, se está a medio camino de todas partes". Justificar esta frase comparando la energía cinética necesaria para colocar un satélite en una órbita baja ( $h = 400 \text{ km}$ ) con la energía necesaria para colocar el satélite completamente libre de la gravedad terrestre.

**49** ● Se lanza desde la superficie de la Tierra una partícula con una velocidad doble de la de escape. Cuando esté muy lejos de la Tierra, ¿cuál será su velocidad?

**50** ● ¿Qué velocidad inicial debe darse a una partícula para que cuando esté muy alejada de la Tierra su velocidad final sea igual a la de escape?

**51** ● **¡SOLVE!** (a) Calcular en julios la energía necesaria para lanzar una masa de 1 kg desde la Tierra con la velocidad de escape. (b) Convertir esta energía en kilovatios-hora. (c) Si la energía puede obtenerse a 10 céntimos de euro por kilovatios-hora, ¿cuál es el coste mínimo para conseguir que un astronauta de 80 kg tenga la energía suficiente para escapar del campo gravitatorio terrestre?

**52** ● Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra. Demostrar que la altura máxima alcanzada por el cuerpo es  $H = R_T H' / (R_T - H')$ , en donde  $H'$  es la altura que alcanzaría si el campo gravitatorio fuera constante.

## Órbitas

**53** ● **¡SOLVE!** Un vehículo espacial de 100 kg de masa se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura  $h = 2R_T$ . (a) ¿Cuál es el periodo de la órbita de este vehículo alrededor de la Tierra? (b) ¿Cuál es su energía cinética? (c) Expresar el momento angular  $L$  del vehículo espacial en función de su energía cinética  $E_c$  y determinar su valor numérico.

**54** ● **SSM** Habitualmente se dice que la Luna se mueve alrededor de la Tierra pero en realidad, la Luna y la Tierra se mueven alrededor de su centro de masas común, que no está en el centro de la Tierra. (a) La masa de la Tierra es  $5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$  y la masa de la Luna es  $7,36 \times 10^{22} \text{ kg}$ . La distancia media desde el centro de la Tierra al centro de la Luna es de  $3,82 \times 10^8 \text{ m}$ . (a) ¿A qué distancia de la superficie de la Tierra está el centro de masas del sistema Tierra-Luna? (b) Estimar la "velocidad media en la órbita" de la Tierra cuando se mueve alrededor del centro de masas común, usando la masa de la Luna, el periodo de la órbita de la Luna (27,3 días) y la distancia media Tierra-Luna. Considerar que no actúa ninguna fuerza externa sobre el sistema.

**55** ● **¡SOLVE!** Alrededor de la Tierra, a unos 1000 km de altura sobre la superficie terrestre hay muchos satélites en órbita. Los satélites geosíncronos están en órbita a una distancia de  $4,22 \times 10^7 \text{ m}$  del centro de la Tierra. ¿Cuánta energía adicional se requiere para lanzar un satélite de 500 kg a una órbita geosíncrona en vez de una órbita de 1000 km por encima de la superficie terrestre?

**56** ● Calcular la razón de la masa del Sol con respecto a la masa de la Tierra a partir del periodo del movimiento orbital de la Luna (27,3 días), su distancia media hasta el centro de la Tierra ( $3,82 \times 10^8 \text{ m}$ ), la duración de un año (365,25 días) y la distancia media entre la Tierra y el Sol ( $1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ ). Comparar el resultado con la razón medida,  $3,33 \times 10^5$ .

**Campo gravitatorio**

57 ● **ICM** Una masa de 3 kg experimenta una fuerza gravitatoria de 12 N i en cierto punto P. ¿Cuál es el campo gravitatorio en ese punto?

58 ● **SSM** **ICM** El campo gravitatorio en cierto punto viene dado por  $\mathbf{g} = 2,5 \times 10^{-6} \text{ N/kg j}$ . ¿Cuál es la fuerza gravitatoria sobre una masa de 4 g en ese punto?

59 ●● Una masa puntual  $m$  está sobre el eje  $x$  en el punto  $x = L$  y otra masa puntual igual está sobre el eje  $y$  en el punto  $y = L$ . (a) Determinar el campo gravitatorio en el origen. (b) ¿Cuál es el módulo de este campo?

60 ●● Cinco masas iguales  $M$  están equidistantes sobre el arco de una semicircunferencia de radio  $R$  como se indica en la figura 11.23. Se sitúa una masa  $m$  en el centro de curvatura del arco. (a) Si  $M$  es 3 kg,  $m$  vale 2 kg y  $R$  es 10 cm, ¿cuál es la fuerza sobre  $m$  debida a las cinco masas  $M$ ? (b) Si  $m$  se retira, ¿cuál es el campo gravitatorio en el centro de curvatura del arco?

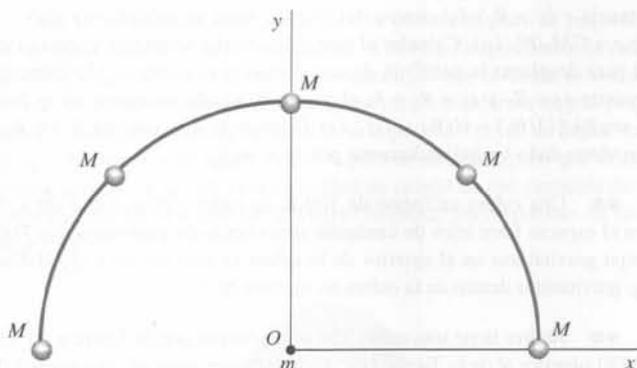


Figura 11.23 Problema 60

61 ●● Una masa puntual  $m_1 = 2 \text{ kg}$  está en el origen y una segunda masa puntual  $m_2 = 4 \text{ kg}$  está sobre el eje  $x$  en el punto  $x = 6 \text{ m}$ . Determinar el campo gravitatorio en (a)  $x = 2 \text{ m}$ . (b)  $x = 12 \text{ m}$ . (c) Determinar el punto sobre el eje  $x$ , para el cual  $g = 0$ .

62 ●● Demostrar que el máximo valor de  $|g_x|$  para el campo del ejemplo 11.7 tiene lugar en los puntos  $\pm a/\sqrt{2}$ .

63 ●● Una barra no uniforme de longitud  $L$  se encuentra alineada sobre el eje  $x$  con un extremo en el origen y el otro en  $x = L$ . Su densidad  $\lambda$  (masa por unidad de longitud) varía en la forma  $\lambda = Cx$ , en donde  $C$  es una constante. (Así, un elemento de la barra tiene una masa  $dm = \lambda dx$ .) (a) ¿Cuál es la masa total de la barra? (b) Determinar el campo gravitatorio debido a la barra en el punto  $x_0 > L$ .

64 ●● Una varilla uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$  está situada sobre el eje  $x$  con su centro en el origen. Consideremos un elemento de longitud  $dx$  a una distancia  $x$  del origen tal que  $-\frac{1}{2}L < x < \frac{1}{2}L$ . (a) Demostrar que este elemento produce un campo gravitatorio en un punto  $x_0$  sobre el eje  $x$  ( $x_0 > \frac{1}{2}L$ ) dado por

$$dg_x = -\frac{GM}{L(x_0 - x)^2} dx$$

(b) Integrar este resultado respecto a toda la varilla para hallar el campo gravitatorio total en el punto  $x_0$  debido a la misma. (c) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre un objeto de masa  $m_0$  en  $x_0$ ? (d) Demostrar que para  $x_0 \gg L$  el campo es aproximadamente igual al ejercido por una masa puntual  $M$  situada en  $x = 0$ .

**Campo gravitatorio g producido por objetos esféricos**

65 ● **ICM** Una corteza esférica tiene una radio de 2 m y una masa de 300 kg. ¿Cuál es el campo gravitatorio a las siguientes distancias del centro de la corteza: (a) 0,5 m. (b) 1,9 m. (c) 2,5 m?

66 ● **ICM** Una corteza esférica tiene un radio de 2 m y una masa de 300 kg; su centro está localizado en el origen de un sistema de coordenadas. Otra corteza esférica de radio 1 m y masa 150 kg está situada dentro de la corteza mayor con su centro a 0,6 m sobre el eje  $x$ . ¿Cuál es la fuerza gravitatoria de atracción entre las dos cortezas?

67 ● **SSM** Dos esferas sólidas  $S_1$  y  $S_2$  tienen radios iguales  $R$  y masas iguales  $M$ . La densidad de la esfera  $S_1$  es constante, mientras que la densidad de la esfera  $S_2$  depende de la distancia radial de acuerdo con la expresión  $\rho(r) = Cr$ . Si la aceleración de la gravedad en la superficie de  $S_1$  es  $g_1$ , ¿cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de la esfera  $S_2$ ?

68 ●● Dos esferas sólidas homogéneas,  $S_1$  y  $S_2$ , tienen masas iguales, pero radios distintos  $R_1$  y  $R_2$ . Si la aceleración de la gravedad en la superficie de la esfera  $S_1$  es  $g_1$ , ¿cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de la esfera  $S_2$ ?

69 ●● Dos cortezas esféricas concéntricas y uniformes poseen masas  $M_1$  y  $M_2$  y radios  $a$  y  $2a$ , como se muestra en la figura 11.24. ¿Cuál es el módulo de la fuerza gravitatoria sobre una masa puntual  $m$  localizada (a) a una distancia  $3a$  del centro de las dos cortezas? (b) a una distancia  $1,9a$  del centro de las cortezas? (c) a una distancia  $0,9a$  del centro de las cortezas?

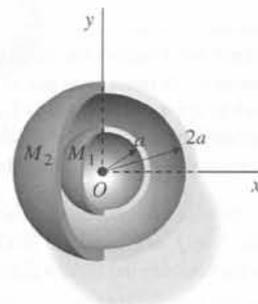


Figura 11.24 Problemas 69 y 70

70 ●● La corteza esférica interna del problema 69 se desplaza de modo que su centro está ahora en  $x = 0,8a$ . ¿Cuál es el módulo de la fuerza gravitatoria sobre una partícula puntual de masa  $m$  situada sobre el eje  $x$  en (a)  $x = 3a$ , (b)  $x = 1,9a$ , (c)  $x = 0,9a$ ?

**Campo gravitatorio g en el interior de esferas sólidas**

71 ●● **SSM** El peso de una persona (medido mediante una balanza de muelles) varía si se mide en el fondo del pozo de una mina profunda con respecto al peso que se mide en la superficie de la Tierra. Supóngase que la Tierra es una esfera homogénea y considérese este efecto con respecto a los apartados (a) y (b) que siguen.

(a) Demostrar que la fuerza de la gravedad ejercida por un planeta perfectamente esférico y homogéneo de densidad constante sobre una persona es proporcional a su distancia al centro del planeta.

(b) Demostrar que el peso efectivo de una persona aumenta linealmente debido a los efectos de la rotación a medida que se aproxima al centro. (Considere que la mina está en el ecuador).

(c) ¿Cuál de los dos efectos es más importante en la Tierra? ( $M = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ,  $R = 6370 \text{ km}$ ,  $T = 24 \text{ horas}$ ).

72 ●● Supongamos que la Tierra fuera una esfera de masa uniforme y en ella se excavara un pozo de 15 000 m de profundidad. Un estudiante que pesa 800 N en la superficie de la Tierra desciende en un montacargas hasta el fondo de dicho pozo. ¿Cuál sería allí la pérdida de peso experimentada por el estudiante?

**73** ●● Una esfera sólida de radio  $R$  tiene su centro en el origen de coordenadas. Posee una densidad de masa uniforme,  $\rho_0$ , exceptuando el hecho de que tiene un agujero esférico de radio  $r = \frac{1}{2}R$  cuyo centro se encuentra en  $x = \frac{1}{2}R$ , como se muestra en la figura 11.25. Calcular el campo gravitatorio en los puntos del eje  $x$  para los que se cumple que  $|x| > R$ . (Sugerencia: Puede considerarse la cavidad como una esfera de masa  $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$  más una esfera de masa  $-m$ .)

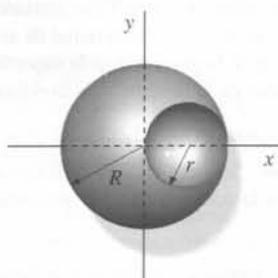


Figura 11.25 Problemas 73 y 74

**74** ●●● Demostrar para la esfera con un agujero del problema 73 que el campo gravitatorio dentro del agujero es uniforme, y calcular su módulo y dirección.

**75** ●●● Se taladra un túnel liso y recto a través de un planeta esférico cuya densidad de masa  $\rho_0$  es constante. El túnel pasa por el centro del planeta y es perpendicular al eje de rotación del mismo, que está fijo en el espacio. El planeta gira con una velocidad angular  $\omega$  determinada, de modo que los objetos dentro del túnel no tienen aceleración relativa a éste. Hallar  $\omega$ .

**76** ●●● **¡SOLVE!** La densidad de una esfera viene dada por  $\rho(r) = C/r$ . La esfera tiene un radio de 5 m y una masa de 1011 kg. (a) Determinar la constante  $C$ . (b) Obtener las expresiones del campo gravitatorio para (1)  $r > 5$  m y (2)  $r < 5$  m.

**77** ●●● **SSM** **¡SOLVE!** En la esfera del problema 76 se taladra un agujero hacia el centro de la misma a profundidad de 2 m por debajo de la superficie de la esfera. Desde la superficie se deja caer en el agujero una pequeña masa. Determinar la velocidad de esta masa al chocar contra el fondo del agujero.

**78** ●●● **¡SOLVE!** La superficie sólida de la Tierra tiene un espesor de 40 km y una densidad de  $3000 \text{ kg/m}^3$  aproximadamente. Centrado a 2000 m por debajo de dicha superficie se encuentra un depósito esférico de metales pesados con una densidad de  $8000 \text{ kg/m}^3$  y un radio de 1000 m. Encontrar el cociente  $\Delta g/g$  directamente encima de este depósito, siendo  $\Delta g$  el aumento del campo gravitatorio debido al depósito.

**79** ●●● **SSM** Dentro de una esfera de plomo de radio  $R$  se han taladrado dos huecos esféricos idénticos de radio  $R/2$ . Ambos son tangentes a la superficie de la esfera y tocan su centro como se ve en la figura 11.26. Antes de formar los huecos la masa de la esfera de plomo era  $M$ . (a) Hallar la fuerza de atracción que la esfera de plomo ejerce sobre una partícula puntual de masa  $m$  situada en la posición que indica la figura. (b) ¿Cuál es la fuerza de atracción si  $m$  se sitúa sobre el eje  $x$  en  $x = R$ ?

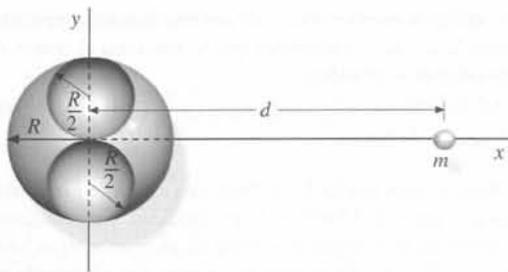


Figura 11.26 Problema 79

**80** ●● Un clúster (racimo) globular es un conjunto casi esférico de millones de estrellas que se mantienen juntas gracias a la fuerza de la gravedad. Los astrónomos miden las velocidades de las estrellas del clúster con el objetivo de estudiar su composición y de tener una idea de la distribución de masa en su interior. Si se supone que todas las estrellas tienen aproximadamente la misma masa, demostrar que la velocidad media de una estrella en una órbita circular alrededor del centro del clúster ha de aumentar linealmente con la distancia al centro del mismo.

## Problemas generales

**81** ● **SSM** La distancia media de Plutón al Sol es de 39,5 UA. Determinar el periodo de Plutón.

**82** ● Calcular la masa de la Tierra a partir de los valores de  $G$ ,  $g$  y  $R_T$ .

**83** ●● La fuerza ejercida por la Tierra sobre una partícula de masa  $m$  a la distancia  $r$  ( $r > R_T$ ) del centro del planeta tiene el módulo  $mg R_T^2/r^2$ , en donde  $g = GM_T/R_T^2$ . (a) Calcular el trabajo que debe realizarse contra la gravedad para desplazar la partícula de una distancia  $r_1$  a otra  $r_2$ . (b) Demostrar que cuando  $r_1 = R_T$  y  $r_2 = R_T + h$ , el resultado puede escribirse en la forma  $W = mgR_T^2 [(1/R_T) - 1/(R_T + h)]$ . (c) Demostrar que cuando  $h \ll R_T$ , el trabajo viene dado aproximadamente por  $W = mgh$ .

**84** ●● Una esfera uniforme de 100 m de radio y densidad  $2000 \text{ kg/m}^3$  está en el espacio libre lejos de cualquier otro cuerpo de gran masa. (a) Hallar el campo gravitatorio en el exterior de la esfera en función de  $r$ . (b) Hallar el campo gravitatorio dentro de la esfera en función de  $r$ .

**85** ●● Júpiter tiene una masa 320 veces mayor que la Tierra y un volumen 1320 superior al de la Tierra. Un "día" de Júpiter tiene una duración de 9 h 50 min. Determinar la altura  $h$  por encima de Júpiter para que un satélite en órbita de este planeta tenga un periodo igual a 9 h 50 min.

**86** ●● La densidad media de la Luna es  $\rho = 3340 \text{ kg/m}^3$ . Determinar el periodo mínimo posible  $T$  de un vehículo espacial en órbita alrededor de la Luna.

**87** ●● Un satélite gira alrededor de la Luna (radio 1700 km), próximo a la superficie, con una velocidad  $v$ . Desde la Luna se lanza verticalmente hacia arriba un proyectil con la misma velocidad inicial  $v$ . ¿Qué altura máxima alcanzará?

**88** ●● **SSM** En la novela de Julio Verne "De la Tierra a la Luna", se lanza los astronautas desde la Tierra hacia la Luna dentro de una "bala" disparada por un cañón gigante. (a) Si consideramos que la velocidad necesaria para alcanzar la Luna es la velocidad de escape de la Tierra, y que la longitud del cañón es de 274,32 m (900 pies), como dice el libro, ¿cuál es la probabilidad de que los astronautas sobrevivan al despegue? (b) Según el libro, los astronautas sienten los efectos de la gravedad terrestre hasta que llegan al punto donde la fuerza gravitatoria de la Tierra y de la Luna son iguales. A partir de este momento, todos los objetos de la nave "caen" hacia la Luna, pasando el techo a ser el suelo y viceversa. ¿A qué distancia del centro de la Tierra se encuentra ese punto? (c) ¿Es razonable esta descripción de lo que les ocurre a los astronautas? ¿Les ocurrió, en la realidad, lo mismo a los astronautas de las misiones Apolo que visitaron la Luna?

**89** ●● En un sistema de estrellas binarias, dos estrellas orbitan alrededor de su centro común de masas. Si las estrellas tienen masas  $m_1$  y  $m_2$  y están separadas por una distancia  $r$ , demostrar que el periodo de rotación está relacionado con  $r$  según la expresión  $T^2 = 4\pi r^3/[G(m_1 + m_2)]$ .

**90** ●● Dos partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$  separadas una distancia infinita se dejan libremente desde el reposo. Determinar sus velocidades  $v_1$  y  $v_2$  cuando su distancia de separación es  $r$ . La distancia de separación se dice que es grande, pero éste es un término relativo. ¿Qué distancia podemos cualificar como grande?

91 ●● SSM Cuatro planetas idénticos están distribuidos en un cuadrado tal como se muestra en la figura 11.27. Si la masa de cada planeta es  $M$  y el lado del cuadrado es  $a$ , ¿cuál ha de ser la velocidad de los planetas si se mueven alrededor del centro del cuadrado bajo la influencia de su atracción mutua?

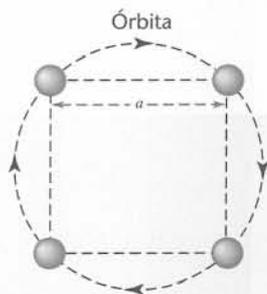


Figura 11.27 Problema 91

92 ●● Como muestra la figura 11.28, se perfora un pozo de pequeño diámetro desde la superficie de la Tierra hasta su centro. Despreciamos la rotación de la Tierra y la resistencia del aire y consideramos que la Tierra es una esfera uniforme. (a) ¿Cuánto trabajo se necesitaría para trasladar un objeto pequeño de masa  $m$  desde el centro de la Tierra a su superficie? (b) Si se dejase caer el objeto por la abertura del agujero en la superficie terrestre, ¿con qué velocidad llegaría al centro? (c) ¿Cuál es la velocidad de escape de una partícula de masa  $m$  proyectada desde el centro de la Tierra? Expresar las respuestas en función de  $m$ ,  $g$  y  $R_T$ .



Figura 11.28 Problema 92

93 ●● Una corteza esférica gruesa de masa  $M$  y densidad uniforme tiene un radio interior  $R_1$  y el radio exterior es  $R_2$ . Hallar el campo gravitatorio  $g_r$  en función de  $r$  para  $0 < r < \infty$ . Esquematar un gráfico de  $g_r$  en función de  $r$ .

94 ●● (a) Dibujar una gráfica que nos dé un campo gravitatorio  $g_x$  en función de  $x$  debido a un anillo uniforme de masa  $M$  y de radio  $R$  cuyo eje sea el eje  $x$ . (b) ¿En qué puntos es máximo el módulo de  $g_x$ ?

95 ●●● Determinar el módulo del campo gravitatorio a una distancia  $r$  de un hilo infinitamente largo cuya masa por unidad de longitud es  $\lambda$ .

96 ●●● Una cuestión importante referida al sistema solar es saber si cada uno de los anillos de Saturno es sólido o, por el contrario, está formado por una infinidad de pequeños satélites. Podría hacerse una simple observación que resolviera este enigma: la medida de la velocidad de la fracción interna y externa de un anillo. Si el anillo se mueve más lento fuera que dentro está formado por trozos pequeños sólidos, en caso contrario el anillo es sólido. (a) Suponiendo que la anchura del anillo es  $r$ , que la distancia promedio del anillo al centro de Saturno es  $R$  y que la velocidad media del anillo es  $v$ , demostrar que si el anillo es sólido  $v_{\text{fuera}} - v_{\text{dentro}} \approx rv/R$ , donde  $v_{\text{fuera}}$  es la velocidad en la zona más externa del anillo y  $v_{\text{dentro}}$  es la velocidad en la zona más interna del anillo. (b) Si, en cambio, el anillo está formado por trozos pequeños de materia sólida, demostrar que  $v_{\text{fuera}} - v_{\text{dentro}} \approx -\frac{1}{2}rv/R$ . (Suponer que  $r \ll R$ .)

97 ●●● En este problema se tiene que averiguar la energía potencial gravitatoria de la varilla del ejemplo 11.8 y de una masa puntual  $m_0$  que está sobre el eje  $x$  en  $x_0$ . (a) Demostrar que la energía potencial gravitatoria de un elemento de la varilla  $dm$  (que se muestra en la figura 11.13) y una partícula puntual  $m_0$  situada sobre el eje  $x$  en  $x_0 \geq \frac{1}{2}L$  viene dada por

$$dU = -\frac{Gm_0 dm}{x_0 - x} = \frac{GMm_0}{L(x_0 - x)} dx$$

en donde  $U = 0$  para  $x_0 = \infty$ . (b) Integrar el resultado de la parte (a) en toda la longitud de la varilla para hallar la energía potencial total del sistema. Escribir el resultado como una función general  $U(x)$  haciendo que  $x_0$  sea igual a un punto genérico  $x$ . (c) Calcular la fuerza ejercida sobre  $m_0$  en un punto  $x$  a partir de  $F_x = -dU/dx$ , y comparar el resultado con  $m_0g$ , en donde  $g$  es el campo en  $x_0$  calculado en el ejemplo 11.8.

98 ●●● SSM Una esfera uniforme de masa  $M$  está cerca de una varilla delgada y uniforme de masa  $m$  y longitud  $L$ , como se indica en la figura 11.29. Hallar la fuerza gravitatoria de atracción ejercida por la esfera sobre la varilla.

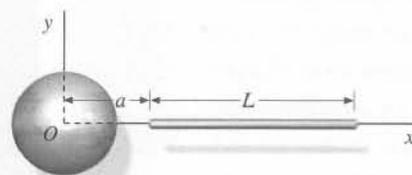


Figura 11.29 Problema 98

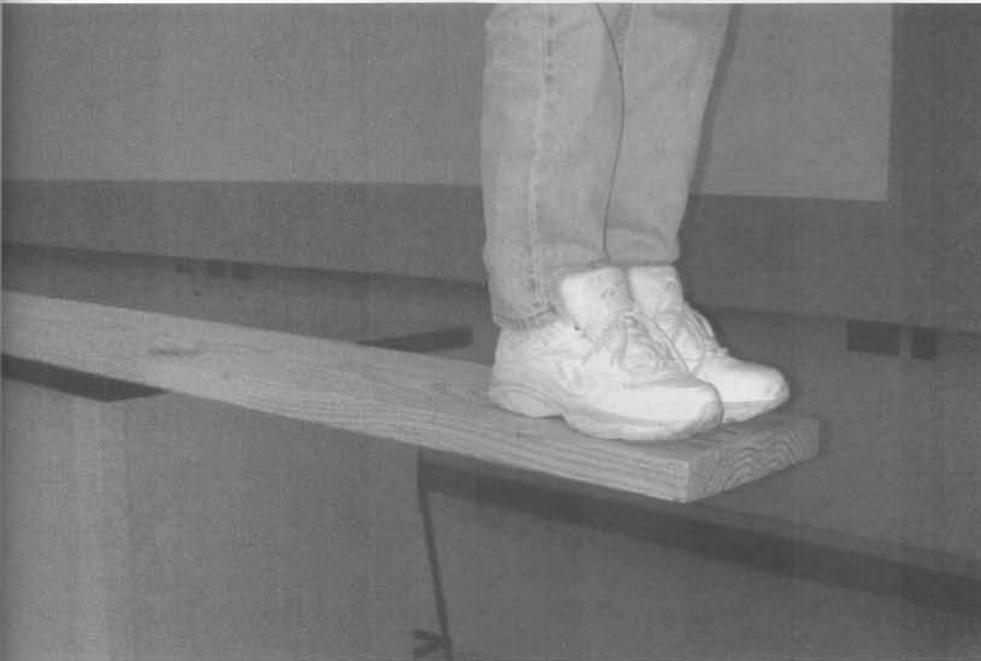
99 ●●● Una varilla uniforme de masa  $M = 20$  kg y longitud  $L = 5$  m se dobla en forma de semicircunferencia. ¿Cuál es la fuerza gravitatoria ejercida por la varilla sobre una masa puntual  $m = 0,1$  kg situada en el centro del arco?

100 ●●● SSM Las mareas se producen como consecuencia de las fuerzas gravitatorias ejercidas por el Sol y la Luna sobre los océanos de la Tierra. (a) Demostrar que el cociente entre la fuerza ejercida por el Sol y la ejercida por la Luna es  $M_s r_L^2 / M_L r_s^2$ , en donde  $M_s$  y  $M_L$  son las masas del Sol y la Luna y  $r_s$  y  $r_L$  son las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna. Evaluar este cociente. (b) A pesar de que el Sol ejerce una fuerza mucho mayor sobre el océano que la ejercida por la Luna, ésta produce un efecto mucho mayor sobre las mareas porque el hecho importante es la diferencia de fuerzas entre un lado y otro de la Tierra. Diferenciar la expresión  $F = Gm_1 m_2 / r^2$  para calcular la variación de  $F$  que se produce para una pequeña variación de  $r$ . Demostrar que  $dF/F = (-2 dr)/r$ . (c) La variación más grande de la distancia desde el Sol o la Luna a un océano en un día completo (que se produce como consecuencia de la rotación) es el diámetro terrestre. Demostrar que para una pequeña variación de la distancia, la variación de la fuerza ejercida por el Sol está relacionada con la variación de la fuerza ejercida por la Luna por  $\Delta F_s / \Delta F_L \approx (M_s r_L^3) / (M_L r_s^3)$ . Calcular esta relación.

101 ●● La nave de la Federación Unida *Excelsior* suelta dos sondas automáticas en la superficie de una estrella de neutrones con el objetivo de explorarla. La masa de la estrella de neutrones es la misma que la del Sol pero, en cambio, tiene sólo 10 km de diámetro. Las sondas están unidas entre sí por un cable de acero de 1 m de longitud y se sueltan verticalmente, es decir, una por encima de la otra. (a) Explicar por qué parece que hay una fuerza que separa las sondas una de otra (véase el problema 99). (b) ¿Hasta qué distancia llegarán de la superficie de la estrella antes que el cable se rompa? Suponer que el cable se rompe cuando alcanza la tensión de 25 000 N y que cada una de las sondas tienen una masa de 1 kg.

# EQUILIBRIO ESTÁTICO Y ELASTICIDAD

## \*Capítulo 12



La tabla de la foto está en equilibrio estático. Sobresale un sexto de su longitud y cuando un estudiante se coloca con su centro de masas en el extremo de la tabla, ésta permanece en equilibrio.

¿Cuál es la fracción máxima de la masa del estudiante con respecto a la masa de la tabla para que la tabla esté en equilibrio cuando el centro de masas del estudiante se coloca en un extremo de la misma?

- 12.1 Condiciones de equilibrio
- 12.2 Centro de gravedad
- 12.3 Ejemplos de equilibrio estático
- 12.4 Par de fuerzas
- 12.5 Equilibrio estático en un sistema acelerado
- 12.6 Estabilidad del equilibrio de rotación
- 12.7 Problemas indeterminados
- 12.8 Tensión y deformación

Si un objeto está estacionario y permanece en ese estado, se dice que se encuentra en equilibrio estático. La determinación de las fuerzas que actúan sobre un objeto en equilibrio estático tiene múltiples aplicaciones de interés. Por ejemplo, las fuerzas ejercidas por los cables de un puente colgante deben ser conocidas a fin de que los cables se construyan suficientemente resistentes para soportar el puente. De igual modo, las grúas deben diseñarse de modo que no vuelquen al levantar un peso.

Las fuerzas ejercidas por cables y vigas en una estructura se denominan fuerzas elásticas. Son el resultado de ligeras deformaciones: alargamientos o compresiones de cuerpos sólidos sometidos a tensiones de las cargas que soportan.

En este capítulo estudiaremos el equilibrio de cuerpos rígidos y analizaremos brevemente las deformaciones y fuerzas elásticas que surgen cuando los sólidos se encuentran bajo una tensión.

## 12.1 Condiciones de equilibrio

Una condición necesaria para que una partícula en reposo permanezca en ese estado es que la fuerza resultante que actúa sobre ella sea nula. Del mismo modo, el centro de masas de un cuerpo rígido permanece en reposo si la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo es cero. Sin embargo, aunque su centro de masas se encuentre en reposo, un cuerpo puede girar. Si hay rotación alrededor de cualquier punto, el cuerpo no está en equilibrio estático. Así pues, para que el equilibrio estático exista, el momento resultante que actúa sobre un cuerpo debe ser cero respecto a *cualquier* punto  $P$ . Esta condición es útil frecuentemente en la solución de problemas, pues nos permite elegir cualquier punto conveniente para el cálculo de los momentos.

Las dos condiciones necesarias para que un cuerpo rígido se encuentre en equilibrio estático son

1. La fuerza externa resultante que actúa sobre el cuerpo debe ser cero:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \tag{12.1}$$

2. El momento externo resultante respecto a *cualquier* punto debe ser cero:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = 0 \tag{12.2}$$

CONDICIONES DE EQUILIBRIO

## 12.2 Centro de gravedad

La figura 12.1a muestra un cuerpo rígido en equilibrio estático que suponemos está formado por muchas partículas pequeñas y un punto  $O$ . El peso de la partícula  $i$  es  $\mathbf{w}_i$  y el peso total del cuerpo  $\mathbf{W} = \sum \mathbf{w}_i$ . Si  $\mathbf{r}_i$  es el vector posición de la partícula  $i$  relativo al punto  $O$ , el momento  $\boldsymbol{\tau}_i$  debido a  $\mathbf{w}_i$  respecto del punto  $O$  viene dado por la expresión  $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{w}_i$ . El momento gravitatorio neto respecto de  $O$  vale  $\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{w}_i)$ . El momento gravitatorio neto respecto de cualquier punto se calcula como si todo el peso del cuerpo  $\mathbf{W}$  estuviera acumulado en un único punto, el **centro de gravedad** (véase la figura 12.1b). Es decir,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = \mathbf{r}_{\text{cg}} \times \mathbf{W} \tag{12.3}$$

DEFINICIÓN – CENTRO DE GRAVEDAD

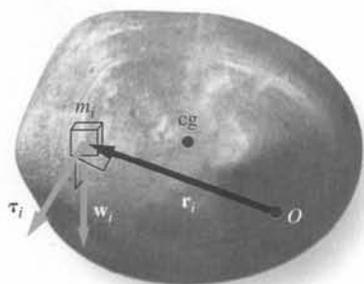
donde  $\mathbf{r}_{\text{cg}}$  es el vector posición del centro de gravedad relativo a  $O$ .

Si el campo gravitatorio  $\mathbf{g}$  es uniforme en el cuerpo (como ocurre habitualmente en objetos cuyas dimensiones no alcancen las dimensiones astronómicas), se escribe  $\mathbf{w}_i = m_i \mathbf{g}$ . Si se suma en ambos términos para todas las partículas se obtiene que  $\mathbf{W} = M \mathbf{g}$ , donde  $M = \sum m_i$  es la masa del cuerpo. El momento neto es la suma de los momentos individuales, es decir,

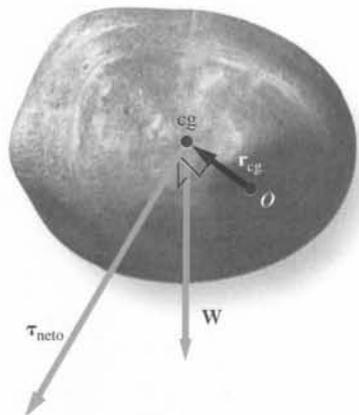
$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{w}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}) = \sum_i (m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g})$$

Si en el término de la derecha extraemos  $\mathbf{g}$  como factor común

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g}$$



(a)



(b)

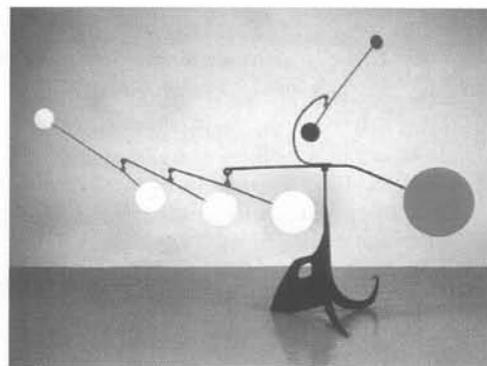
Figura 12.1

y sustituimos  $M\mathbf{r}_{\text{cm}}$  por  $\sum m_i \mathbf{r}_i$  usando la definición de centro de masas ( $M\mathbf{r}_{\text{cm}} = \sum m_i \mathbf{r}_i$ ), se obtiene

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = M\mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{\text{cm}} \times M\mathbf{g} = \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{W} \quad (12.4)$$

Las ecuaciones 12.3 y 12.4 son válidas para cualquier punto  $O$  siempre que  $\mathbf{r}_{\text{cm}} = \mathbf{r}_{\text{cg}}$ , es decir, si el cuerpo está en un campo gravitatorio uniforme, pues en él el centro de masas y el centro de gravedad coinciden.

Si  $O$  está situado justo encima del centro de gravedad,  $\mathbf{r}_{\text{cg}}$  y  $\mathbf{W}$  van en la misma dirección (hacia abajo) y, por lo tanto, se cumple  $\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = \mathbf{r}_{\text{cg}} \times \mathbf{W} = 0$ . Por ejemplo, cuando un móvil como el de la fotografía se cuelga con su centro de gravedad directamente por debajo del punto de suspensión, el momento neto sobre el objeto respecto al punto de suspensión es cero, por lo que está en equilibrio estático.



## 12.3 Ejemplos de equilibrio estático

En la mayoría de los ejemplos y problemas de este capítulo, todas las fuerzas son perpendiculares al eje  $z$ . En dichos problemas lo mejor es calcular los momentos respecto a un eje paralelo al eje  $z$ . La dirección positiva se elige perpendicular y dirigida hacia fuera del papel, lo cual equivale a elegir la dirección de las agujas del reloj como dirección negativa y la opuesta a la dirección del movimiento de las agujas del reloj como dirección positiva.

### EJEMPLO 12.1 | Sobre la tabla

Una tabla uniforme de  $L = 3$  m de longitud y de  $M = 35$  kg de masa está colocada sobre dos balanzas situadas a una distancia  $d = 0,5$  m de cada uno de los extremos, tal como se muestra en la figura 12.2. (a) Calcular qué lectura mostrarán las balanzas cuando Mary, de  $m = 45$  kg de masa, se sitúe en el extremo izquierdo de la tabla. (b) Sergio se sube en el otro extremo de la tabla y camina hacia Mary, que salta al suelo cuando la tabla empieza a inclinarse. ¿Cuál es la masa de Sergio si cuando llega al extremo izquierdo de la tabla la balanza situada a la derecha marca cero?

**Planteamiento del problema** La lectura de las balanzas es el módulo de las fuerzas que se ejercen sobre la tabla. Para determinar el módulo de estas fuerzas se aplican las dos condiciones de equilibrio.

(a) 1. Dibujar el diagrama de fuerzas cuando Mary está sobre la tabla (véase la figura 12.3). Las fuerzas  $\mathbf{F}_I$  y  $\mathbf{F}_D$  son las fuerzas ejercidas por la balanza de la izquierda y de la derecha respectivamente:

2. Se toma la dirección hacia arriba positiva y se aplica la condición de que la fuerza neta es cero:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ F_I + F_D - Mg - mg &= 0 \end{aligned}$$

3. Calcular el momento neto respecto al eje dirigido hacia fuera del papel (considerando que el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj es el sentido positivo) en el punto de aplicación de  $\mathbf{F}_I$ :

$$\Sigma \tau = F_D(L - 2d) - Mg \frac{L - 2d}{2} + mgd$$

4. Imponer que el momento total es cero y despejar para  $F_D$ :

$$0 = F_D(L - 2d) - Mg \frac{L - 2d}{2} + mgd$$

por lo tanto

$$F_D = \left( \frac{1}{2}M - \frac{d}{L - 2d}m \right)g$$

5. Sustituir este resultado de  $F_D$  en la expresión del paso 2 y despejar  $F_I$ :

$$F_I = Mg + mg - F_D = \left( \frac{1}{2}M + \frac{l-d}{l-2d}m \right)g$$

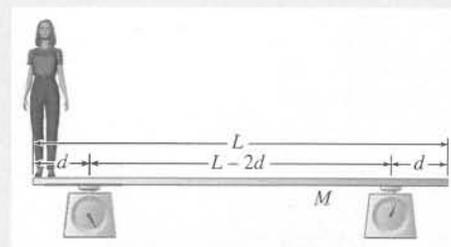


Figura 12.2

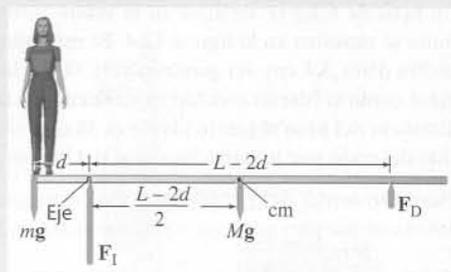


Figura 12.3

6. Con el objetivo de obtener los valores numéricos de las fuerzas sustituir los datos del problema:

$$F_D = \left( \frac{1}{2}(35 \text{ kg}) - \frac{0,5 \text{ m}}{2 \text{ m}} 45 \text{ kg} \right) (9,81 \text{ N/kg})$$

$$= \boxed{61,3 \text{ N}}$$

$$F_1 = \left( \frac{1}{2}(35 \text{ kg}) + \frac{2,5 \text{ m}}{2 \text{ m}} 45 \text{ kg} \right) (9,81 \text{ N/kg})$$

$$= \boxed{723,5 \text{ N}}$$

- (b) Usando el resultado del paso 4 del apartado (a), poner  $F_D = 0$  y despejar  $m$ :

$$0 = \left( \frac{1}{2}M - \frac{d}{L-2d}m \right)g$$

despejando  $m$  resulta

$$m = \frac{L-2d}{2d}M = \frac{2 \text{ m}}{1 \text{ m}}(35 \text{ kg}) = \boxed{70 \text{ kg}}$$

**Comprobar el resultado** La suma de las dos fuerzas del paso 6 del apartado (a) debe coincidir con la suma del peso de Mary más el peso de la tabla. El peso total es  $(M + m)g = (35 \text{ kg} + 45 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg}) = 785 \text{ N}$ . La suma de las fuerzas  $F_1 + F_D = 723,5 \text{ N} + 61,3 \text{ N} = 785 \text{ N}$ . Asimismo,  $F_D < F_1$ , como era de esperar.

**Observación** Cuando el sistema está equilibrado con  $F_D = 0$ , Sergio está a 0,5 m del eje y el centro de masas de la tabla está a 1 m del eje. Por lo tanto, la masa de Sergio es el doble de la masa de la tabla.

El ejemplo 12.1 también puede resolverse utilizando un eje que pase a través de la masa  $m$ , pero en este caso, tanto  $F_1$  como  $F_D$  aparecen en la ecuación de los momentos y el álgebra es un poco más compleja. En general, un problema estático se simplifica calculando los momentos alrededor de un eje sobre la línea de acción de una de las fuerzas desconocidas, como el eje que pasa por el punto de aplicación de la fuerza  $F_1$  en el caso del ejemplo.

Para calcular los momentos se obtiene una solución de forma sencilla si se elige el eje en el punto de aplicación de la fuerza de la que se tiene menos información.

CONSEJOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

## EJEMPLO 12.2 | La fuerza sobre el codo

Un peso de 6 kg se sostiene en la mano formando el brazo y el antebrazo un ángulo de  $90^\circ$ , como se muestra en la figura 12.4. El músculo bíceps ejerce una fuerza  $F_m$  cuyo punto de aplicación dista 3,4 cm del punto pivote  $O$ , en la articulación del codo. Tratar el antebrazo y la masa como si fueran una barra uniforme de masa  $m_h = 1 \text{ kg}$  (a) ¿Cuál es el módulo de  $F_m$  si la distancia del peso al punto pivote es 30 cm? (b) Determinar la fuerza ejercida sobre la articulación del codo por la parte superior del brazo.

**Planteamiento del problema** Para determinar las dos fuerzas, aplicar las dos condiciones que se deben cumplir para que haya equilibrio estático ( $\Sigma F = 0$  y  $\Sigma \tau = 0$ ) al antebrazo.

- (a) 1. Se dibuja el diagrama de fuerzas para el antebrazo considerando que éste es una barra horizontal (figura 12.5)

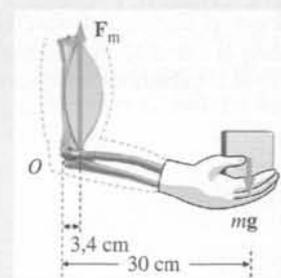


Figura 12.4

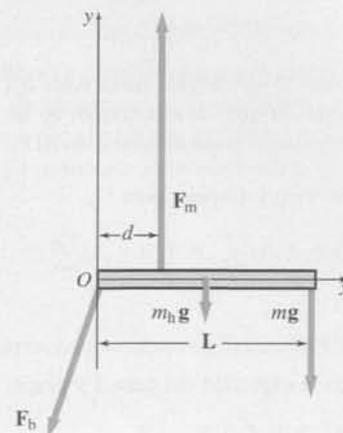


Figura 12.5

2. La fuerza de la cual tenemos menos información es la ejercida por la parte superior del brazo en la unión del codo  $F_b$  (no sabemos ni su módulo ni su dirección). Aplicamos  $\Sigma\tau = 0$  alrededor de un eje dirigido hacia fuera del papel y que pasa por el punto de aplicación de  $F_b$ :

$$F_b(0) - m_h g \frac{L}{2} + F_m d - mgL = 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} F_m &= \left(\frac{1}{2}m_h + m\right)g\frac{L}{d} \\ &= \left(\frac{1}{2}(1 \text{ kg}) + 6 \text{ kg}\right)(9,81 \text{ N/kg})\frac{30 \text{ cm}}{3,4 \text{ cm}} \\ &= \boxed{563 \text{ N}} \end{aligned}$$

- (b) Aplicamos  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$  para obtener  $F_b$ :

$$F_{b,x} + 0 + 0 + 0 = 0$$

y

$$F_{b,y} + F_m - (m_h g - mg) = 0$$

con lo que

$$F_{b,x} = 0$$

y

$$\begin{aligned} F_{b,y} &= (m + m_h)g - F_m \\ &= (7 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg}) - 563 \text{ N} \\ &= -494 \text{ N} \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$F_b = \boxed{494 \text{ N, hacia abajo}}$$

**Observación** La fuerza que debe ejercer el músculo es 9,6 veces el peso del objeto. Además cuando el músculo tira hacia arriba, el brazo superior empuja hacia abajo para mantener el antebrazo en equilibrio. La fuerza ejercida por el brazo superior es 8,4 veces mayor que el peso del objeto.

**Ejercicio** Demostrar que  $F_b$  puede determinarse en un solo paso escogiendo como pivote el punto donde el bíceps se une al antebrazo. (*Respuesta:* Igualando a cero el momento resultante, se obtiene  $F_b(3,4 \text{ cm}) + F_m(0) - (6 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})(30 \text{ cm} - 3,4 \text{ cm}) - (1 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})(15 \text{ cm} - 3,4 \text{ cm}) = 0$ , y por lo tanto,  $F_b = 494 \text{ N}$ .)

**Observación** Este ejemplo y este ejercicio demuestran que podemos elegir el punto pivote donde nos convenga más para simplificar los cálculos.

## EJEMPLO 12.3 | Colgando un anuncio

La directora de la librería del campus ha encargado un nuevo rótulo para anunciar su establecimiento. El rótulo tiene una masa de 20 kg y ha de colocarse colgado de una barra rígida que está sujeta a la pared mediante un cable (véase la figura 12.6). Para saber qué cable se necesita, la directora pide ayuda a un estudiante de física para que le calcule la tensión del cable. También le pide que calcule la fuerza que la barra ejercerá sobre la pared. La barra tiene una longitud de 2 m y una masa de 4 kg, y el cable pende de la pared de un punto situado 1 m por encima de la barra.

**Planteamiento del problema** Para que la barra esté en equilibrio tienen que cumplirse tres condiciones:  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma\tau = 0$ , y tenemos tres incógnitas:  $T$ , y las dos componentes  $F_x$  y  $F_y$  de la fuerza ejercida por la barra sobre la pared. La fuerza ejercida por la barra sobre la pared es igual pero opuesta a la fuerza ejercida por la pared sobre la barra.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

### Pasos

1. Se dibuja el diagrama de fuerzas de la barra (figura 12.7).
2. Se impone la condición  $\Sigma\tau = 0$  respecto del punto  $O$ .
3. Se usa la trigonometría para despejar  $\theta$ .
4. Utilizando el resultado del paso 2 se despeja  $T$ .

### Respuestas

$$TL \sin \theta - MgL - mg\frac{L}{2} = 0$$

$$\theta = \arctan \frac{1}{2} = 26,6^\circ$$

$$T = \boxed{483 \text{ N}}$$

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

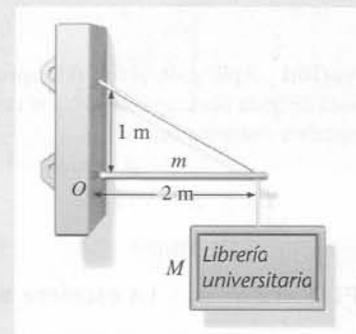


Figura 12.6

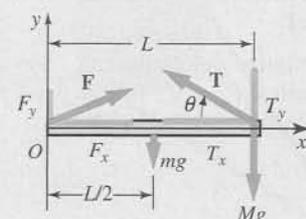


Figura 12.7

5. Se impone  $\Sigma F_x = 0$  y  $\Sigma F_y = 0$  y, usando los valores calculados de  $T$  y de  $\theta$ , se despejan  $F_x$  y  $F_y$ .

$$F_x + T_x = 0$$

$$F_y + T_y - Mg - mg = 0$$

por lo tanto,

$$F_x = 432 \text{ N}, \quad F_y = 19,2 \text{ N}$$

6. Se despeja la fuerza  $\mathbf{F}'$  ejercida por la barra sobre la pared. La fuerza ejercida por la barra sobre la pared y la fuerza ejercida por la pared sobre la barra son un par de fuerzas acción – reacción.

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{F} = \boxed{-432 \text{ Ni} - 19,2 \text{ Nj}}$$

**EJEMPLO 12.4** | La rueda que sube un escalón

Una rueda de masa  $M$  y radio  $R$  descansa sobre una superficie horizontal contra un escalón de altura  $h$  ( $h < R$ ). La rueda tiene que subir el escalón mediante la fuerza horizontal  $F$  aplicada al eje de la rueda como indica la figura 12.8. Determinar la fuerza mínima  $F_{\text{mín}}$  necesaria para elevar la rueda sobre el escalón.

**Planteamiento del problema** Si el módulo de  $F$  es menor que  $F_{\text{mín}}$ , la superficie de debajo de la rueda ejerce una fuerza normal dirigida hacia arriba sobre la rueda. Cuando  $F$  crece, esta fuerza normal disminuye. Aplicar la condición de equilibrio estático para determinar el valor de  $F$  para el cual la rueda todavía permanece en sus sitio pero la fuerza normal es cero.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

**Pasos**

1. Dibujar el diagrama de fuerzas de la rueda (figura 12.9).
2. Aplicar la condición  $\Sigma \tau = 0$  a la rueda. Se desconoce tanto la dirección como el módulo de  $\mathbf{F}'$ , por lo que conviene calcular los momentos alrededor de un eje que pase por el punto de aplicación de esta fuerza. Obtener expresiones para los brazos de palanca a partir del diagrama de fuerzas y despejar  $F_{\text{mín}}$ .
3. Usar el teorema de Pitágoras para expresar  $x$  en función de  $h$  y  $R$ .
4. Igualar los módulos de los momentos y despejar  $F$ .

**Respuestas**

$$F_{\text{mín}}(R - h) - Mgx = 0$$

por lo tanto

$$F_{\text{mín}} = \frac{Mgx}{R - h}$$

$$x = \sqrt{h(2R - h)}$$

$$F_{\text{mín}} = \boxed{\frac{Mg\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}}$$

**Observación** Aplicando  $\Sigma \tau = 0$  respecto a un eje que pasa por el centro de la rueda muestra que  $\mathbf{F}'$  está dirigida directamente hacia el centro de la rueda ya que de otro modo habría un momento neto resultante distinto a cero.

**¡INTÉNELO USTED MISMO!**

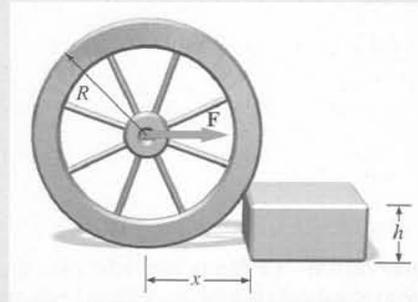


Figura 12.8

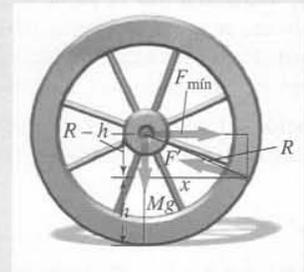


Figura 12.9

**EJEMPLO 12.5** | La escalera apoyada en la pared

Una escalera uniforme de 5 m pesa 60 N y está apoyada contra una pared vertical sin rozamiento (figura 12.10). El pie de la escalera está a 3 m de distancia de la pared. ¿Cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento estático necesario entre el suelo y la escalera para que ésta no deslice?

**Planteamiento del problema** Son necesarias tres condiciones para que la escalera se encuentre en equilibrio;  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma \tau = 0$ . Para despejar  $\mu_e$  aplicar estas condiciones junto con  $f_e \leq \mu_e F_n$ .

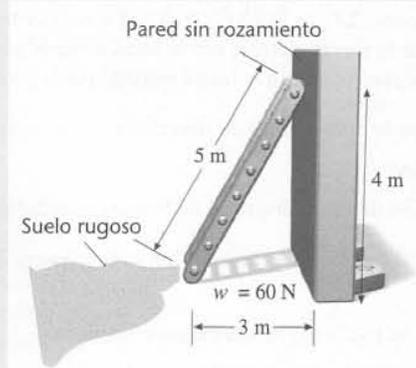


Figura 12.10

1. Dibujar el diagrama de fuerzas de la escalera tal como se muestra en la figura 12.11. Las fuerzas que actúan sobre la escalera son la fuerza de la gravedad,  $w$ , la fuerza  $F_1$  ejercida por la pared (al no haber rozamiento es solamente una fuerza normal), y la fuerza ejercida por el suelo, que consiste en una componente normal  $F_n$  y una componente de rozamiento estático  $f_e$ . Las tres condiciones para que haya equilibrio estático determinan  $F_1$ ,  $f_e$  y  $F_n$ .
2. El coeficiente de rozamiento estático mínimo está relacionado con la fuerza de rozamiento  $f_e$  y la fuerza normal  $F_n$ :
3. Establecer que  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$ :
4. Despejar  $f_e$  y  $F_n$ :
5. Aplicar  $\sum \tau = 0$  respecto a un eje dirigido hacia fuera del papel situado en el pie de la escalera, el punto de aplicación de la fuerza de la cual tenemos menos información.
6. Despejar la fuerza  $F_1$ :
7. Utilizar este resultado de  $F_1$  y  $f_e = F_1$  (paso 4) para calcular  $f_e$ :
8. Utilizar estos resultados de  $f_e$  y  $F_n$  para obtener el valor mínimo de  $\mu_e$  del paso 2:

$$\mu_{e,\min} \geq \frac{f_e}{F_n} \quad \text{por lo tanto} \quad \mu_e \geq \frac{f_e}{F_n}$$

$$f_e - F_1 = 0 \quad \text{y} \quad F_n - w = 0$$

$$f_e = F_1 \quad \text{y} \quad F_n = w = 60 \text{ N}$$

$$F_1(4 \text{ m}) - w(1,5 \text{ m}) = 0$$

$$F_1 = \frac{w(1,5 \text{ m})}{4 \text{ m}} = \frac{(60 \text{ N})(1,5 \text{ m})}{4 \text{ m}} = 22,5 \text{ N}$$

$$f_e = F_1 = 22,5 \text{ N}$$

$$\mu_{e,\min} = \frac{f_e}{F_n} = \frac{22,5 \text{ N}}{60 \text{ N}} = \boxed{0,375}$$

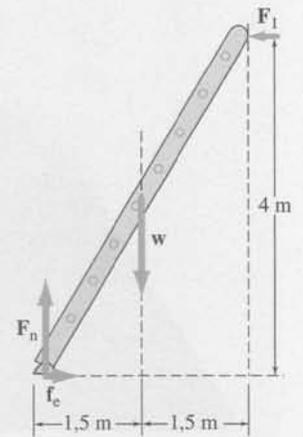


Figura 12.11

**Observación** Hay otra forma de ver este problema. En el diagrama de fuerzas de la escalera que muestra la figura 12.12, las líneas de acción del peso  $w$  y la fuerza  $F_1$  ejercida por la pared se cortan en el punto  $P$ . La línea de acción de la fuerza resultante ejercida por el suelo  $f_e + F_n$  debe pasar también por ese punto  $P$ , pues de otro modo existiría un momento no equilibrado respecto a este punto. La tangente de  $\theta'$  es igual a  $4 \text{ m}/1,5 \text{ m} = 2,67 = f_n/f_e$ . Siempre que un objeto se encuentra en equilibrio estático bajo la influencia de tres fuerzas no paralelas, las líneas de acción de estas fuerzas deben cortarse en un punto.

## 12.4 Par de fuerzas

Las fuerzas  $F_n$  y  $w$  en la figura 12.11 del ejemplo 12.5 son iguales y opuestas. Este sistema recibe el nombre de par de fuerzas y tiende a producir una rotación, aunque su fuerza resultante es cero. Las fuerzas  $f_e$  y  $F_1$  en estas figuras también constituyen un par. La figura 12.13 muestra un par formado por las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ , separadas por la distancia  $D$ . El momento producido por este par respecto a un punto arbitrario  $O$  es

$$\tau = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}_1) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 \quad (12.5)$$

Este resultado no depende de la elección del punto  $O$ . El módulo de este momento es

$$\tau = FD \quad (12.6)$$

en donde  $F$  es el módulo de una de las fuerzas y  $D$  es la distancia entre sus líneas de acción.

El momento producido por un par de fuerzas es el mismo respecto a cualquier punto del espacio.

**Ejercicio** Mostrar que el módulo del momento ejercido por el par de fuerzas de la figura 12.13 viene dado por  $FD$ , donde  $D$  es la distancia entre las líneas de acción de las dos fuerzas y  $F$  es el módulo de cualquiera de las dos fuerzas. (Respuesta El ángulo  $\beta$  entre  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{F}_1$  es  $90^\circ - \phi$ , por lo que  $|\tau| = |(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| F \sin(90^\circ - \phi) = F|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \cos \phi = FD$ .)

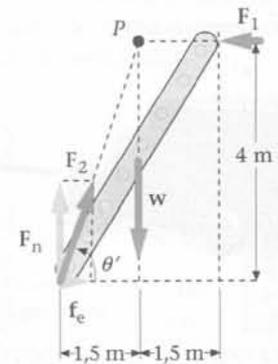


Figura 12.12

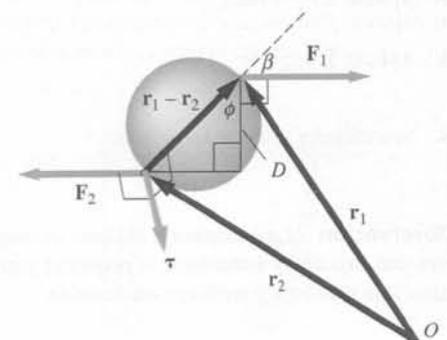


Figura 12.13

## 12.5 Equilibrio estático en un sistema acelerado

Por sistema acelerado entenderemos un sistema de referencia que está acelerando respecto a un sistema de referencia inercial. Si consideramos un objeto en reposo en un sistema de referencia acelerado, la fuerza resultante no es cero. Para que el objeto se encuentre en reposo respecto a un sistema acelerado debe tener la misma aceleración que el sistema. Las dos condiciones para que un sistema se encuentre en equilibrio estático en un sistema de referencia acelerado son

1.  $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_{\text{cm}}$   
en donde  $\mathbf{a}_{\text{cm}}$  es la aceleración del centro de masas, que es la aceleración del sistema de referencia.
2.  $\sum \tau_{\text{cm}} = 0$   
La suma de los momentos respecto al centro de masas debe ser cero.

La segunda condición resulta de la validez de la segunda ley de Newton para la rotación,  $\sum \tau_{\text{cm}} = I_{\text{cm}} \alpha$ , aplicada a los momentos alrededor del centro de masas, esté o no esté acelerado el centro de masas.<sup>1</sup>

### EJEMPLO 12.6 | Moviendo una caja

Un camión transporta una caja uniforme de masa  $m$ , altura  $h$  y una sección cuadrada de lado  $L$  (figura 12.14a). ¿Cuál es la máxima aceleración que el camión puede tomar sin que vuelque la caja? Suponer que la caja vuelca antes de resbalar.

**Planteamiento del problema** La aceleración de la caja es debida a la fuerza de rozamiento, como indica la figura 12.14b. Esta fuerza ejerce un momento antihorario respecto al centro de masas de la caja. La otra que ejerce un momento respecto al centro de masas de la caja es la fuerza normal. Si la caja no acelera, la fuerza normal se distribuye uniformemente por la cara inferior de la caja. Si la aceleración es pequeña, esta distribución se desplaza y la fuerza normal efectiva se mueve hacia la izquierda y da lugar a un momento de balanceo respecto al centro de masas. El máximo momento de balanceo que esta fuerza puede ejercer tiene lugar cuando pasa por el borde de la caja, como se muestra.

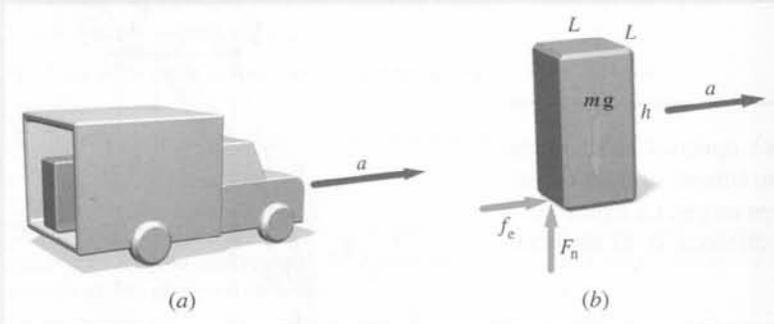


Figura 12.14

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la caja (figura 12.15)
2. Aplicar  $\sum F_y = ma_{\text{cm},y}$  a la caja y despejar la fuerza normal
3. Aplicar  $\sum F_x = ma_{\text{cm},x}$
4. Aplicar  $\sum \tau_{\text{cm}} = 0$ :
5. Sustituir  $d$ ,  $f_e$  y  $F_N$  y despejar  $a$ :

$$F_n - mg = 0 \quad \text{o} \quad F_n = mg$$

$$f_e = ma$$

$$f_e \frac{h}{2} - F_n d = 0$$

$$ma \frac{h}{2} - mg \frac{L}{2} = 0 \quad \text{o} \quad a = \boxed{\frac{L}{h} g}$$

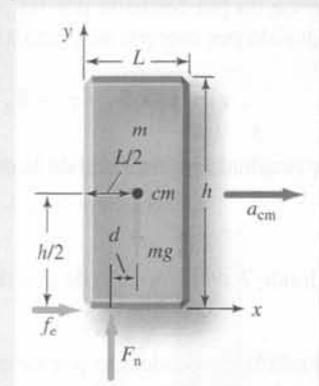
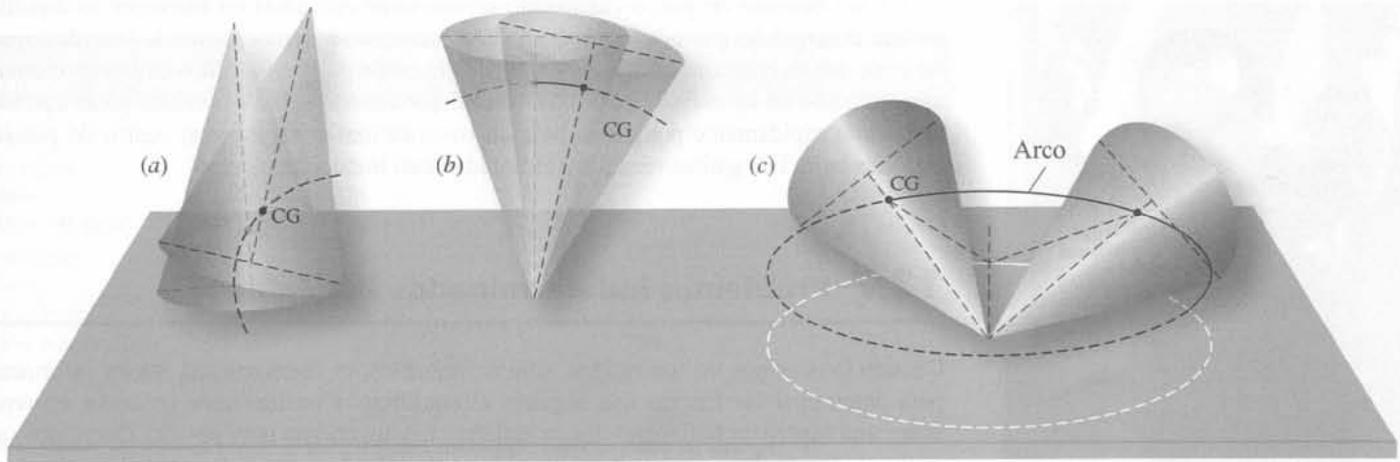


Figura 12.15

**Observación** La aceleración máxima es proporcional a  $L/h$ . Esta aceleración máxima es pequeña para una caja alta y estrecha ( $L/h$  pequeño) y grande para una caja baja y ancha ( $L/h$  grande). Por lo tanto, una caja baja y ancha es más estable.

<sup>1</sup> Véase el análisis relacionado con la ecuación 9.30.



**Figura 12.16** Si un pequeño movimiento hace que el centro de gravedad suba, como en (a), el equilibrio es estable. Si un pequeño movimiento baja el centro de gravedad, como en (b), el equilibrio es inestable. Si un pequeño movimiento ni sube ni baja el centro de gravedad, como en (c), el equilibrio es indiferente.

## 12.6 Estabilidad del equilibrio de rotación

El equilibrio de rotación de un cuerpo puede clasificarse según tres categorías: estable, inestable e indiferente. El **equilibrio de rotación estable** tiene lugar cuando los momentos que surgen de un pequeño desplazamiento angular del cuerpo obligan a éste a recuperar su posición de equilibrio. El equilibrio estable viene ilustrado en la figura 12.16a. Cuando el cono gira ligeramente alrededor de un extremo, el momento resultante respecto al punto pivote tiende a restaurar el cono a su posición original. Obsérvese que esta ligera rotación eleva el centro de gravedad, incrementando la energía potencial del cono.

El **equilibrio de rotación inestable**, ilustrado en la figura 12.16b, tiene lugar cuando los momentos que surgen de un pequeño desplazamiento angular del objeto le obligan a separarse de su posición de equilibrio. Una ligera inclinación del cono ocasiona su caída, porque el momento debido a su peso le aparta de su posición inicial. En este caso la rotación hace descender el centro de gravedad y la energía potencial del cono disminuye.

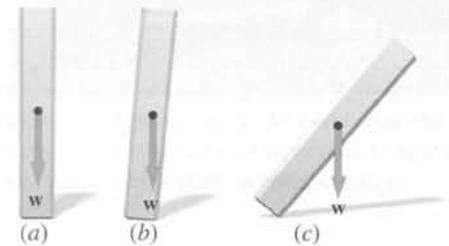
El cono que descansa sobre la superficie horizontal de la figura 12.16c ilustra el **equilibrio de rotación indiferente**. Si se hace rodar el cono ligeramente, no existe momento ni fuerza que le obligue a recuperar su posición original ni a alejarse de ella. Cuando el cono gira, la altura del centro de gravedad permanece invariable, de modo que la energía potencial no se modifica.

En resumen, si un sistema se perturba ligeramente respecto a su posición de equilibrio, éste es estable si el sistema vuelve a su posición original, inestable si se aleja del equilibrio, e indiferente si no hay momentos o fuerzas que le desplacen en alguna dirección.

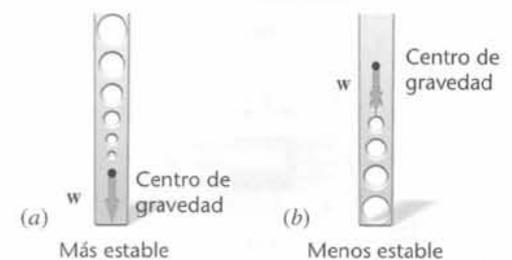
Como la expresión “perturbar ligeramente” es un término relativo, la estabilidad es también relativa. Un ejemplo de equilibrio puede ser más o menos estable que otro. Se hace balancear una barra por un extremo, como en la figura 12.17a. En este caso, si la perturbación es muy pequeña (figura 12.17b) la barra volverá a ocupar su posición original, pero si la perturbación es suficientemente grande para que la vertical que pasa por el centro de gravedad se salga de la base de soporte (figura 12.17c) la barra volcará.

Podemos mejorar la estabilidad de un sistema bajando su centro de gravedad o ampliando su base de soporte. La figura 12.18 muestra una barra no uniforme que tiene su centro de gravedad próximo a un extremo. Si la barra se sitúa verticalmente sobre su extremo más pesado, de modo que su centro de gravedad esté bajo (figura 12.18a), es mucho más estable que si está de pie sobre el otro extremo y el centro de gravedad queda más alto (figura 12.18b).

En la figura 12.19 el centro de gravedad está por debajo del punto de soporte del sistema. Este sistema es estable para cualquier desplazamiento, pues el momento resultante siempre hace girar el sistema hacia su posición de equilibrio.



**Figura 12.17** La estabilidad del equilibrio es relativa. Si se hace girar la barra en (a) ligeramente como indica (b), vuelve a su posición original de equilibrio siempre que la vertical que pasa por el centro de gravedad no sobresalga de la base de sustentación. (c) Si la rotación es demasiado grande, el centro de gravedad sobrepasa la base de sustentación y la barra vuelca.



**Figura 12.18** Cuando una barra no uniforme descansa sobre su extremo más pesado con su centro de gravedad a poca altura, como en (a), el equilibrio es más estable que cuando su centro de gravedad es alto, como ocurre en (b).



**Figura 12.19**



Un ser humano de pie, o caminando erecto, tiene dificultad en mantener su equilibrio porque el centro de gravedad está alto y debe mantenerse siempre sobre la base de soporte, los pies, que es relativamente pequeña. Esta es la razón porque los niños tardan aproximadamente un año en aprender a andar. Un animal que camina sobre sus cuatro patas aprende a andar más rápidamente porque su base de sustentación es mayor y su centro de gravedad está más bajo. Los gatitos recién nacidos andan casi inmediatamente.

## 12.7 Problemas indeterminados

Cuando los cuerpos no son rígidos, sino deformables, es necesaria una mayor información para determinar las fuerzas que requiere el equilibrio. Consideremos un coche en reposo sobre una superficie horizontal. En su maletero hay un cuerpo muy pesado. Queremos saber cuál es la fuerza de soporte vertical ejercida por la calzada sobre cada uno de los neumáticos. Supongamos que la calzada es el plano  $xy$ . Si elegimos uno de los neumáticos como origen, el momento ejercido por todas las fuerzas respecto a este punto tiene componentes  $x$  y  $y$ , pero no componente  $z$ , porque no hay fuerzas horizontales. Así obtenemos dos ecuaciones estableciendo que el momento neto sea cero, y una tercera ecuación estableciendo que la fuerza neta vertical sea nula. Necesitamos otra ecuación para determinar la fuerza ejercida por la calzada sobre cada una de las cuatro ruedas. Si extraemos aire de uno de los neumáticos o aumentamos la presión de otro, el coche sigue en equilibrio, pero la fuerza ejercida sobre cada neumático cambia. Evidentemente, las fuerzas sobre los neumáticos en este problema no están determinados por la información recibida. Los neumáticos no son cuerpos rígidos. En cierto modo, todo objeto es deformable.

## 12.8 Tensión y deformación

Si un objeto sólido está sometido a fuerzas que tienden a alargarlo, cortarlo (deformación de cizalladura) o comprimirlo, la forma del objeto varía. Si el objeto recupera su forma original después de suprimir las fuerzas, se dice que el objeto es **elástico**. La mayoría de los cuerpos tienen un comportamiento elástico al verse sometidos a la acción de fuerzas, con tal de que éstas no superen un cierto valor máximo denominado **límite elástico**. Si las fuerzas son demasiado grandes, el objeto no recupera su forma original, sino que se deforma permanentemente.

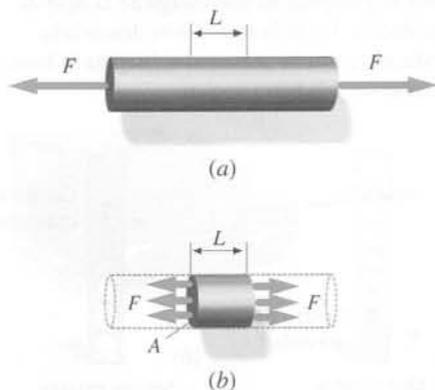
La figura 12.20 muestra una barra sólida de longitud  $L$  sometida a una tracción o **fuerza tensora**  $F$  que actúa igualmente hacia la derecha y hacia la izquierda. La barra está en equilibrio, pero las fuerzas que actúan sobre ella tienden a incrementar su longitud. La variación relativa de la barra  $\Delta L/L$  recibe el nombre de **deformación**:

$$\text{Deformación} = \frac{\Delta L}{L} \quad (12.7)$$

El cociente entre la fuerza  $F$  y el área de la sección recta  $A$  de la barra se llama **tensión de tracción** (o simplemente tensión):

$$\text{Tensión} = \frac{F}{A} \quad (12.8)$$

La figura 12.21 muestra una representación gráfica de la deformación en función de la tensión para una barra sólida típica. El gráfico es lineal hasta el punto A. Hasta este punto, que se conoce como el límite lineal, la tensión es proporcional a la deformación. El resultado de que la deformación cambie linealmente con la tensión se conoce con el nombre de ley de Hooke. El punto B de la figura 12.21 es el límite elástico del material. Si se alarga la barra por encima de este punto, se deforma permanentemente. Si la tensión a la que se somete el material es aún mayor, finalmente se rompe, como está indicado en el punto C. El cociente



**Figura 12.20** (a) Barra sólida sometida a fuerzas deformadoras  $F$  que actúan en sus extremos. (b) Pequeña sección de la barra de longitud  $L$ . Los elementos de la barra a la izquierda y a la derecha de esta sección ejercen fuerzas sobre ella. Si la sección no está muy próxima a un extremo de la barra, estas fuerzas se distribuyen por igual sobre el área transversal. La fuerza por unidad de área es la tensión.

TABLA 12.1 Módulo de Young  $Y$  y resistencia de diversos materiales<sup>a</sup>

Material	$Y$ GN/m <sup>2</sup> <sup>b</sup>	Resistencia a la tracción MN/m <sup>2</sup>	Resistencia a la compresión MN/m <sup>2</sup>
Acero	200	520	520
Aluminio	70	90	
Cobre	110	230	
Hierro (forjado)	190	390	
Hormigón	23	2	17
Hueso			
Por tracción	16	200	
Por compresión	9	–	270
Latón	90	370	
Plomo	16	12	

<sup>a</sup> Estos valores son representativos. El valor real para una muestra concreta puede ser diferente.

<sup>b</sup> 1 GN = 10<sup>3</sup> MN = 10<sup>9</sup> N.

entre la tensión y la deformación en la zona lineal del gráfico es una constante denominada **módulo de Young**  $Y$ :

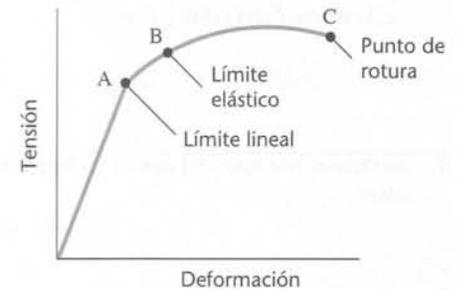
$$Y = \frac{\text{tensión}}{\text{deformación}} = \frac{F/A}{\Delta L/L} \quad (12.9)$$

DEFINICIÓN —MÓDULO DE YOUNG

Las unidades del módulo de Young son newtons por metro cuadrado. En la Tabla 12.1 se relacionan los valores del módulo de Young para diversos materiales.

**Ejercicio** El músculo bíceps del brazo derecho de cierta persona tiene un área máxima de su sección de 12 cm<sup>2</sup> = 1,2 × 10<sup>-3</sup> m<sup>2</sup>. ¿Cuál es la tensión en el músculo si ejerce una fuerza de 300 N? (*Respuesta:* Tensión =  $F/A = 2,5 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup>. La tensión máxima que puede ejercerse es aproximadamente la misma para todos los músculos humanos. Los músculos con mayor área transversal podrán ejercer fuerzas mayores.)

Si se somete una barra a la acción de fuerzas que tienden a comprimirla en lugar de alargarla, la tensión recibe el nombre de **tensión de compresión**. En muchos materiales, el módulo de Young para la tensión de compresión es el mismo que para la tensión de tracción si en la ecuación 12.7 se toma el valor de  $\Delta L$  como la *disminución* de la longitud de la barra. Si la tensión de tracción o de compresión es demasiado grande, la barra se rompe. La tensión a la que se produce la rotura se denomina **resistencia a la tracción** o, en el caso de compresión, **resistencia a la compresión**. En la Tabla 12.1 se encuentran relacionados también valores aproximados de las resistencias a la tracción y a la compresión para diversos materiales. Obsérvese que el módulo de Young de los huesos es muy distinto según se trate de deformaciones por tracción o por compresión, al contrario que en otras muchas sustancias. Este hecho tiene importancia biológica, ya que el principal objetivo de los huesos es resistir a las cargas por compresión ejercidas por músculos contráctiles.



**Figura 12.21** Tensión en función de la deformación. Hasta el punto A la deformación es proporcional a la tensión. El punto B, límite elástico, es el punto a partir del cual la barra no recuperará su longitud original cuando se suprima la tensión. En el punto C la barra se rompe.

### EJEMPLO 12.7 | La seguridad en un ascensor

En un trabajo de verano para una compañía de ingeniería, usted recibe el encargo de comprobar la seguridad de un ascensor en un nuevo edificio de oficinas. El ascensor puede llevar una carga máxima de 1000 kg (contando su propia masa), y está suspendido de un cable de acero de 3,0 cm de diámetro y 300 m de longitud cuando está del todo desenrollado. El cable, dentro de las normas de seguridad, puede estirarse como máximo 3 cm. Su trabajo consiste en determinar si el ascensor, tal como se ha diseñado, es seguro o no, teniendo en cuenta que la aceleración máxima del sistema es de 1,5 m/s<sup>2</sup>.

**¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!**

**Planteamiento del problema** Sea  $L$  la longitud sin deformar del cable,  $F$  la fuerza que actúa sobre él y  $A$  su área transversal. El alargamiento del cable  $\Delta L$  está relacionado con el módulo de Young por la expresión  $Y = (F/A)/(\Delta L/L)$ . Según la Tabla 12.1 el valor numérico de Young del acero es  $Y = 2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

1. El alargamiento del cable,  $\Delta L$  se deduce del módulo Young:
2. Para determinar la fuerza que actúa sobre el cable se aplica la segunda ley de Newton al ascensor. Hay dos fuerzas que actúan sobre el ascensor, la fuerza  $F$  del cable y el peso:
3. Sustituir el resultado del paso 1 y obtener la deformación máxima del cable:
4. Informar sobre los resultados obtenidos al jefe:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} \quad \text{por lo tanto} \quad \Delta L = \frac{FL}{AY}$$

$$F - mg = ma_y$$

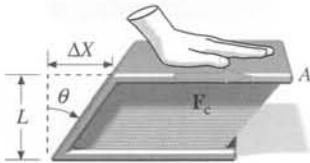
es decir,

$$\begin{aligned} F_{\text{máx}} &= m(g + a_{y, \text{máx}}) \\ &= (1000 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg} + 1,5 \text{ N/kg}) \\ &= 1,13 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{F_{\text{máx}}L}{AY} = \frac{F_{\text{máx}}L}{\pi r^2 Y} \\ &= \frac{(1,13 \times 10^4 \text{ N})(300 \text{ m})}{\pi(0,015 \text{ m})^2(2,0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2)} \\ &= 2,40 \text{ cm} \end{aligned}$$

De acuerdo con mis cálculos, el cable se alargará como mucho 2,4 cm, sólo un 20% por debajo del límite de 3,0 cm. Sin embargo, en el pie de la tabla 12.1 se indica que los valores del módulo de Young son valores representativos y que los valores reales dependen de cada muestra en concreto. Mi recomendación, entonces, reconoce la conveniencia de consultar con un ingeniero para obtener una evaluación profesional.

**Ejercicio** Un alambre de 1,5 m de largo tiene una sección recta de área  $2,4 \text{ mm}^2$ . Cuelga verticalmente y se estira 0,32 mm cuando se le ata en su extremo inferior un bloque de 10 kg. Hallar (a) la tensión, (b) la deformación y (c) el módulo de Young para este alambre. (Respuestas (a)  $4,09 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ , (b)  $2,13 \times 10^{-4}$ , (c)  $192 \text{ GN/m}^2$ .)



**Figura 12.22** La aplicación de la fuerza horizontal  $F_c$  al libro produce una tensión de cizalladura definida como la fuerza ejercida por unidad de área. El cociente  $\Delta X/L = \text{tg } \theta$  es la deformación de cizalladura.

En la figura 12.22 se aplica una fuerza  $F_c$  tangencialmente en la parte superior de un libro. Estas fuerzas reciben el nombre de **fuerzas de cizalladura**. El cociente entre la fuerza de cizalladura  $F_c$  y el área recibe el nombre de **tensión de cizalladura**:

$$\text{Tensión de cizalladura} = \frac{F_c}{A} \quad (12.10)$$

Una tensión de cizalladura tiende a deformar un libro del modo que se indica en la figura 12.22. El cociente  $\Delta X/L$  recibe el nombre de **deformación de cizalladura**:

$$\text{Deformación de cizalladura} = \frac{\Delta X}{L} = \text{tg } \theta \quad (12.11)$$

en donde  $\theta$  es el ángulo de cizalladura indicado en la figura. El cociente entre la tensión y la deformación por cizalladura recibe el nombre de **módulo de cizalladura**  $M_c$ :

$$M_c = \frac{\text{tensión de cizalladura}}{\text{deformación de cizalladura}} = \frac{F_c/A}{\Delta X/L} = \frac{F_c/L}{\text{tg } \theta} \quad (12.12)$$

DEFINICIÓN —MÓDULO DE CIZALLADURA

El módulo de cizalladura se conoce también como **módulo de torsión**. El hecho de que este módulo sea aproximadamente constante cuando las tensiones son pequeñas implica que la deformación de cizalladura varía linealmente con la tensión correspondiente (ley de Hooke para las tensiones de torsión). En una balanza de torsión, como la utilizada en el aparato de

**TABLA 12.2** Valores aproximados del módulo de cizalladura  $M_c$  de varios materiales

Material	$M_c \text{ GN/m}^2$
Acero	84
Aluminio	30
Cobre	42
Hierro	70
Latón	36
Plomo	5,6
Tungsteno	150



## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

Tomar  $g = 9,81 \text{ N/kg} = 9,81 \text{ m/s}^2$  y despreciar el rozamiento en todos los problemas a menos que se indique lo contrario.

### Problemas conceptuales

- 1 ● SSM Verdadero o falso:
- $\sum \mathbf{F} = 0$  es suficiente para que exista el equilibrio estático.
  - $\sum \mathbf{F} = 0$  es necesario para que exista el equilibrio estático.
  - En equilibrio estático, el momento resultante respecto a cualquier punto es nulo.
  - Para que un objeto esté en equilibrio es necesario que sobre él no actúe ninguna fuerza.

2 ● Verdadero o falso: El centro de gravedad se encuentra siempre en el centro geométrico de un cuerpo.

3 ● ¿Es necesario que exista materia en el centro de gravedad de un objeto?

4 ● SSM Si la aceleración de la gravedad no es constante en todas las partes de un objeto, ¿es el centro de masas o el centro de gravedad el que coincide con el punto pivote cuando el objeto está equilibrado?

5 ●● Un método para determinar el centro de masas de una figura plana irregular consiste en colgarla mediante una cuerda de un extremo y, con un lápiz, marcar la prolongación de la línea de la cuerda en la figura. Posteriormente colgar la figura de otro extremo y dibujar, al igual que antes, la línea que prolonga la cuerda. La intersección de las dos líneas da la posición del centro de masas. Explicar por qué esta metodología funciona.

6 ● SSM ¿Es posible subir por una escalera que esté apoyada en una pared, si el suelo no ejerce rozamiento y, en cambio, la pared sí? Explicarlo.

7 ● Un cable de aluminio y un cable de acero, ambos con el mismo diámetro  $D$  y longitud  $L$ , se unen para formar un cable de longitud  $2L$ . El cable se cuelga del techo y del otro extremo se cuelga un peso  $W$ . Despreciando la masa de los cables, indicar cuál de las siguientes frases es verdadera: (a) El trozo de cable de aluminio se alargará lo mismo que el trozo de cable de acero. (b) Las tensiones en los dos trozos del cable son iguales. (c) La tensión en el trozo de cable de aluminio es mayor que la tensión en el trozo de cable de acero. (d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta.

8 ● Si el momento resultante es cero respecto a un determinado punto, ¿será cero respecto a cualquier otro punto? Razonar la respuesta.

9 ● SSM La barra horizontal de la figura 12.23 permanecerá horizontal si (a)  $L_1 = L_2$  y  $R_1 = R_2$ . (b)  $L_1 = L_2$  y  $M_1 = M_2$ . (c)  $R_1 = R_2$  y  $M_1 = M_2$ . (d)  $L_1 M_1 = L_2 M_2$ . (e)  $R_1 L_1 = R_2 L_2$ .

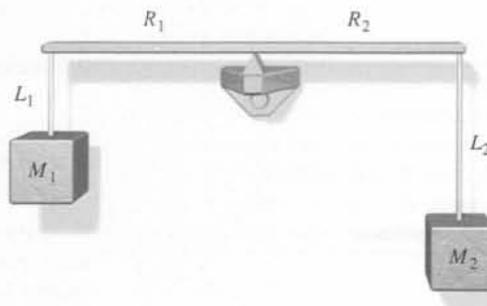


Figura 12.23 Problema 9

10 ●● Una persona está sentada en una silla con la espalda erecta. Si intenta levantarse sin inclinarse hacia delante, no puede hacerlo. ¿Por qué?

11 ●● SSM Todas las hazañas de la ingeniería de la antigüedad y de la edad media (los acueductos, las pirámides, las grandes catedrales, por citar algunos ejemplos) tienen en común dos características: que están hechas de piedra y que todas ellas son estructuras que ejercen esfuerzos de compresión, es decir, son estructuras que están construidas de modo que todos los esfuerzos son de compresión más que de tracción (o que ejercen tensiones). Averigüe la resistencia a la tracción y a la compresión de la piedra y del cemento para explicar por qué esto es cierto.

### Estimaciones y aproximaciones

12 ●● Un gran cajón que pesa 4500 N descansa sobre cuatro bloques de 12 cm de altura sobre una superficie horizontal (figura 12.24). El cajón tiene 2 m de longitud, 1,2 m de altura y 1,2 m de ancho. Una persona debe levantar un extremo del cajón mediante una larga barra de acero. El fulcro de la barra está a 10 cm del extremo que sube el cajón. Estimar la longitud de la barra de acero necesaria para que una persona pueda levantar el extremo del cajón.

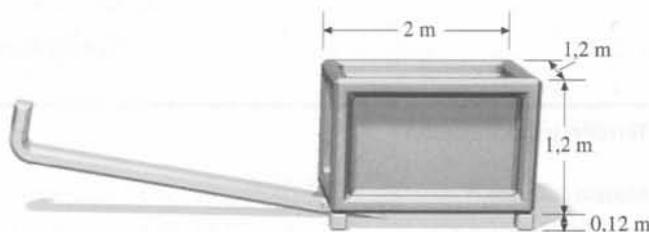


Figura 12.24 Problema 12

**13** ●● **SSM** Consideremos un modelo atómico para el módulo de Young que consiste en muchos átomos colocados en una distribución cúbica y separados una distancia  $a$ . Imaginemos que cada átomo está conectado con sus 6 átomos vecinos por pequeños muelles de constante elástica  $k$ . (Los átomos no están conectados entre sí por muelles sino por fuerzas que actúan de modo que pueden modelarse como si fueran muelles.) (a) Demostrar que este material, si está sometido a tensión, tiene un módulo de Young igual a  $k/a$ . (b) A partir de la tabla 12.1, y suponiendo que  $a = 1$  nm, estimar el valor típico para la "constante del muelle atómico"  $k$  en un metal.

**Condiciones de equilibrio**

**14** ● Un balancín de 4 m de longitud pivota en su centro. Un niño de 28 kg se sienta en uno de los extremos. ¿Dónde debe sentarse un segundo niño de 40 kg para equilibrar el balancín?

**15** ● **SOLVE** Como indica la figura 12.25, Misako hace una flexión. Su centro de gravedad se encuentra directamente sobre el punto  $P$  del suelo, el cual dista 0,9 m de sus pies y 0,6 m de sus manos. Si su masa es 54 kg, ¿cuál es la fuerza ejercida por el suelo sobre sus manos?

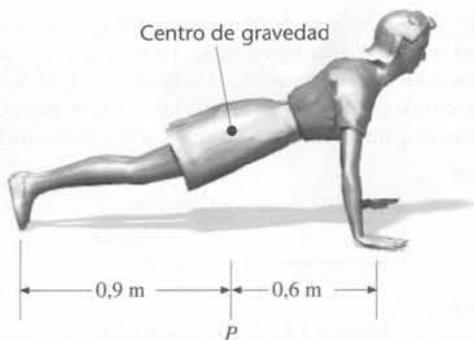


Figura 12.25 Problema 15

**16** ● **SSM** **SOLVE** Misako desea medir la fuerza de sus bíceps ejerciendo una fuerza sobre la correa y el dinamómetro de la figura 12.26. La correa dista 28 cm del punto de giro del codo, y el bíceps está unido en un punto situado a 5 cm del centro de giro. Si la escala del dinamómetro marca 18 N cuando ella ejerce su máxima fuerza, ¿qué fuerza ejerce el bíceps?

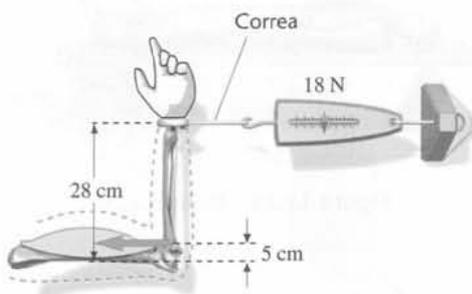


Figura 12.26 Problema 16

**17** ● Una muleta presiona contra la acera con una fuerza  $F_m$  a lo largo de su propia dirección, como indica la figura 12.27. Esta fuerza está equilibrada por una fuerza normal  $F_n$  y una fuerza de rozamiento  $f_c$  como se indica en la figura. (a) Demostrar que cuando la fuerza de rozamiento alcanza su valor

máximo, el coeficiente de rozamiento depende del ángulo  $\theta$  según la relación  $\mu_c = \tan \theta$ . (b) Explicar cómo se aplica este resultado a las fuerzas que actúan sobre el pie cuando no se utiliza la muleta. (c) ¿Por qué conviene dar pasos cortos al andar sobre hielo?

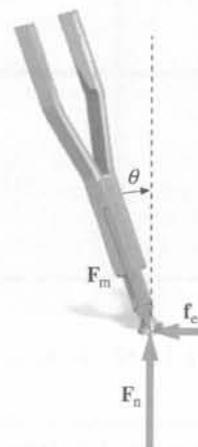


Figura 12.27

**Centro de gravedad**

**18** ● **SOLVE** Un automóvil carga el 58 por ciento de su peso sobre las ruedas delanteras. La distancia entre las ruedas delanteras y traseras es de 2 m. Determinar el centro de gravedad del automóvil respecto a las ruedas delanteras.

**19** ● **SSM** Cada uno de los objetos que se muestran en la figura 12.28 se encuentra suspendido del techo mediante una cuerda atada al punto marcado con una  $\times$  en la figura. Describir mediante un diagrama la orientación de cada uno de los objetos suspendidos.

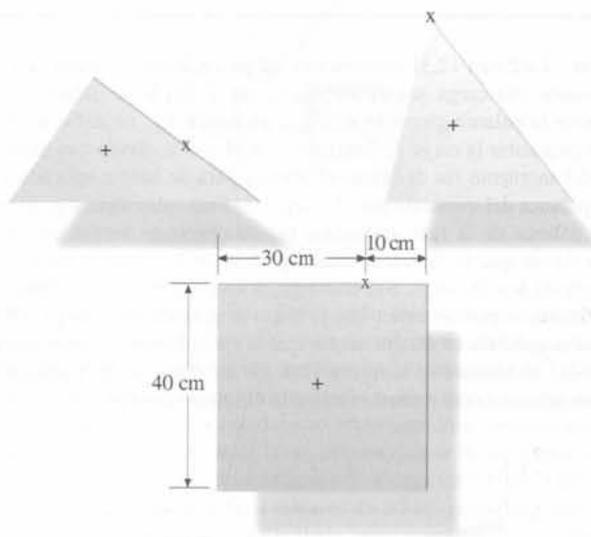


Figura 12.28 Problema 19

**20** ●● **SOLVE** Una placa cuadrada se construye soldando cuatro placas cuadradas más pequeñas, cada una de lado  $a$ , como indica la figura 12.29. La placa 1 pesa 40 N; la placa 2, 60 N; la placa 3, 30 N; y la placa 4, 50 N. Determinar el centro de gravedad  $(x_{cg}, y_{cg})$ .

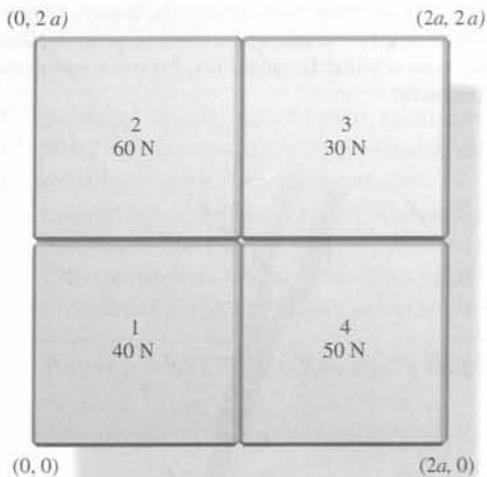


Figura 12.29 Problema 20

21 ●● **RESOLVE** Una placa rectangular uniforme tiene un hueco circular de radio  $R$  como muestra la figura 12.30. Determinar el centro de gravedad del sistema. *Sugerencia: No integrar. Utilizar la superposición de una placa rectangular menos una placa circular.*

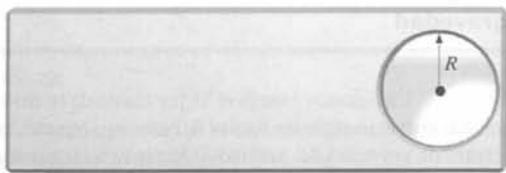


Figura 12.30 Problema 21

proa y popa por cables del modo indicado. La tensión del cable de popa (dirigido a proa) es 1000 N. Determinar la tensión en el cable de proa y la fuerza que la cubierta ejerce sobre el mástil. ¿Tiene el mástil alguna tendencia para deslizarse hacia la proa o la popa? Si fuera así, ¿dónde debería colocarse un bloque para evitar el movimiento del mástil?

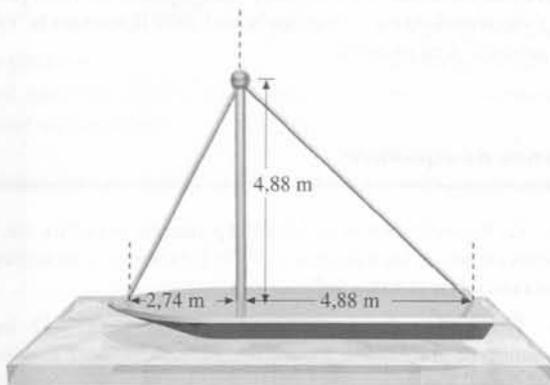


Figura 12.32 Problema 23

24 ●● **RESOLVE** Una viga de 10 m y masa 300 kg se extiende sobre una repisa horizontal como indica la figura 12.33. La viga no está sujeta, sino que simplemente descansa sobre la superficie. Un estudiante de 60 kg ha colocado la viga de tal modo que puede andar sobre ella hasta el extremo. ¿Qué distancia máxima  $x$  es admisible entre el borde de la repisa y el extremo de la viga?



Figura 12.33 Problema 33

**Ejemplos de equilibrio estático**

22 ● La figura 12.31 muestra una palanca a la que se aplica una fuerza  $f$  para levantar una carga que ejerce una fuerza  $F$ . (a) Si se define la ventaja mecánica de la palanca como  $M = F/f_{\text{mín}}$ , en donde  $f_{\text{mín}}$  es la fuerza mínima necesaria para subir la carga  $F$ , demostrar que  $M = x/X$ , donde  $x$  es el brazo de palanca del momento (la distancia al pivote) para la fuerza aplicada y  $X$  el brazo de palanca del momento para la carga. (b) Para subir una carga pesada, el brazo de palanca de la fuerza aplicada habitualmente es mayor que el de la carga, de forma que la fuerza necesaria para subir la carga es menor que la fuerza ejercida por la carga. Sin embargo, a veces el brazo de palanca de la fuerza aplicada es mucho menor que el brazo de palanca de la carga, de forma que la fuerza aplicada es mucho mayor que la ejercida por la carga (por ejemplo, tal como se muestra en la figura 12.4, los músculos en el antebrazo). ¿En qué circunstancias una distribución como la última descrita es útil?

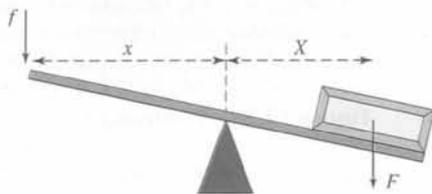


Figura 12.31 Problema 22

25 ●● **SSM** Una tabla horizontal destinada a determinar centros de gravedad está apoyada sobre un fulcro en un extremo y en una balanza en el otro. Un estudiante yace horizontalmente sobre la tabla con la cabeza sobre el fulcro, como indica la figura 12.34. La balanza está a dos metros del fulcro. El estudiante tiene una masa de 70 kg y cuando está sobre la tabla, la balanza marca 250 N. ¿Dónde está localizado el centro de gravedad del estudiante?

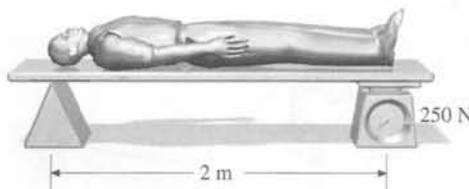


Figura 12.34 Problema 25

23 ● **RESOLVE** La figura 12.32 muestra un balandrio de 25 pies. El mástil es un palo uniforme de 120 kg soportado sobre la cubierta y amarrado a

26 ●● **RESOLVE** ✓ Un tablero de 3 m de longitud y 5 kg de masa está sujeto al suelo por uno de sus extremos con una bisagra. Se aplica una fuerza vertical  $F$  por el otro extremo con el fin de levantar una caja de 60 kg, que se encuentra en reposo sobre el tablero a 80 cm de bisagra, como se indica en la figura 12.35. (a) Calcular el módulo de la fuerza  $F$  que es necesario aplicar para mantener el tablero estacionario y formando un ángulo  $\theta = 30^\circ$ . (b) Calcular la fuerza ejercida por la bisagra cuando  $\theta = 30^\circ$ . (c) Calcular la fuerza  $F$  y la fuerza ejercida por la bisagra si  $\theta = 30^\circ$  y la fuerza  $F$  se ejerce perpendicularmente al tablero.

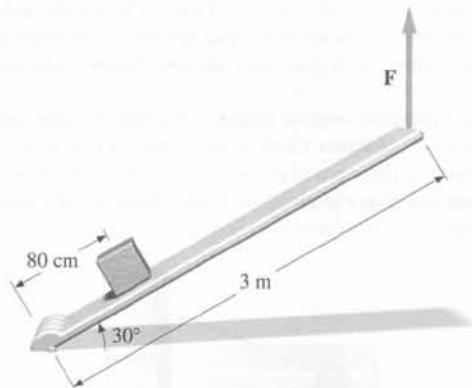


Figura 12.35 Problema 26

27 ●● **SSM** **SOLVE** Un cilindro de peso  $W$  se apoya en un sistema sin rozamiento formado por un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal a la izquierda y otro inclinado  $60^\circ$  a la derecha, como muestra la figura 12.36. Determinar la fuerza ejercida por cada plano sobre el cilindro.

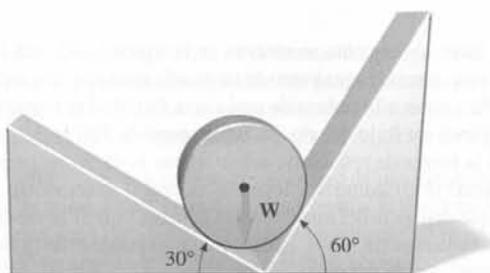


Figura 12.36 Problema 27

28 ●● **SOLVE** Un peso de 80 N está soportado mediante un cable unido a una barra que puede girar alrededor de un punto  $A$  (figura 12.37). La barra está sujeta mediante otro cable con una tensión  $T_2$ , según se ve en la figura. La masa de la barra es despreciable. (a) ¿Cuáles son las tres fuerzas que actúan sobre la barra? (b) Demostrar que la componente vertical de la tensión  $T_2$  debe ser igual a 80 N. (c) Hallar la fuerza ejercida sobre la barra por la articulación.

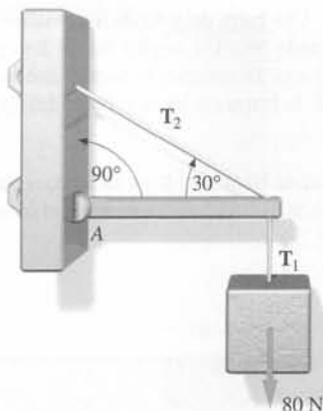


Figura 12.37 Problema 28

29 ●● Una tabla horizontal de 8,0 m de longitud es utilizada por los piratas para castigar a sus víctimas en el llamado "paseo de la plancha". Un pirata de 105 kg de masa se sitúa de pie en el extremo de la tabla en la cubierta del buque para evitar que se levante. Determinar la máxima distancia que la tabla puede sobresalir del costado del buque para que una víctima de 63 kg pueda

andar hasta el otro extremo si (a) la masa de la tabla es despreciable y (b) la masa de la tabla es 25 kg.

30 ●● Una puerta uniforme de 18 kg, 2,0 m de alto y 0,8 m de ancho cuelga de dos bisagras situadas una a 20 cm de la parte superior y otra a 20 cm de la parte inferior. Si cada bisagra soporta la mitad del peso de la puerta, determinar el sentido y el módulo de las componentes horizontales de las fuerzas ejercidas por las dos bisagras sobre la puerta.

31 ●● Determinar la fuerza ejercida por el borde del escalón sobre la rueda del ejemplo 12.4, justo cuando la rueda deja de apoyarse sobre la superficie del suelo.

32 ●● **SSM** **SOLVE** El trampolín de piscina que se muestra en la figura 12.38 tiene una masa de 30 kg. Determinar la fuerza que actúa sobre los soportes cuando el saltador de 70 kg se encuentra de pie en el extremo de la tabla. Dar el sentido de cada fuerza sobre los soportes como tensión o compresión.

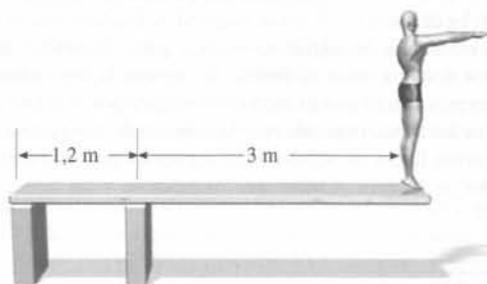


Figura 12.38 Problema 32

33 ●● Calcular la fuerza ejercida por la articulación  $A$  sobre el puntal que se muestra en la figura 12.39 si se supone (a) que la barra no tiene peso y (b) que el peso de la barra es de 20 N.

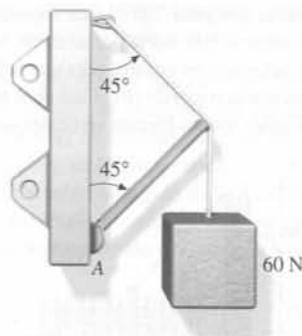


Figura 12.39 Problema 33

34 ●● Han contratado a Julie para ayudar en los trabajos de pintura de unos adornos de un edificio. Para ello se ha de utilizar un aparato cuya seguridad Julie pone en duda. Se suspende horizontalmente una tabla de 5,0 m desde lo alto del edificio mediante dos cuerdas atadas a sus extremos. Julie sabe, por su experiencia previa, que las cuerdas que están usando se rompen cuando la tensión supera 1 kN. Su capataz de 80 kg intenta disipar la preocupación de la muchacha y empieza a pintar colocándose a 1 m del extremo de la tabla. Si la masa de Julie es de 60 kg y la de la tabla es de 20 kg, ¿qué posiciones puede ocupar Julie para que estando sobre la tabla junto a su jefe, las cuerdas no se rompan?

35 ●● Un cilindro de masa  $M$  y radio  $R$  rueda contra un escalón de altura  $h$  como indica la figura 12.40. Cuando una fuerza  $F$  se aplica a la parte alta del cilindro, éste permanece en reposo. (a) ¿Cuál es la fuerza normal ejercida por el suelo sobre el cilindro? (b) ¿Cuál es la fuerza horizontal ejercida por el borde del escalón sobre el cilindro? (c) ¿Cuál es la componente vertical de la fuerza ejercida por el borde del escalón sobre el cilindro?

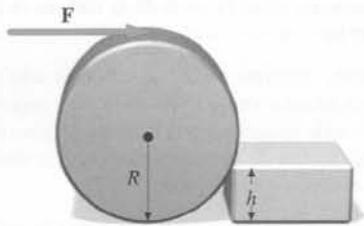


Figura 12.40 Problema 35 y 36

36 ●● Determinar la fuerza horizontal mínima  $F$  del cilindro del problema 35 para que suba el escalón sin deslizar sobre el borde.

37 ●● SSM La figura 12.41 muestra una mano sosteniendo un florete, una arma usada en el deporte de la esgrima. El centro de masas del florete que se indica en la figura 12.41, está a 21 cm del extremo de la empuñadura. El florete tiene 0,700 kg de masa y 110 cm de longitud. (a) Aplicar una de las condiciones para la existencia de equilibrio estático para determinar la fuerza (total) ejercida por la mano sobre el florete. (b) Aplicar la otra condición de equilibrio estático para determinar el momento ejercido por la mano sobre el florete. (c) Modelar las fuerzas ejercidas por la mano como dos fuerzas directamente opuestas cuyas líneas de acción están separadas por la anchura de la mano del luchador ( $\approx 10$  cm). ¿Cuáles son los módulos y las direcciones de estas dos fuerzas?

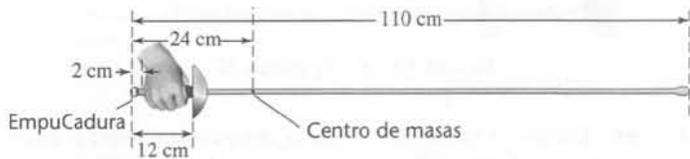


Figura 12.41 Problema 37

38 ●● Una compuerta que pesa 200 N está soportada por bisagras en la parte superior e inferior y además está sujeta por un cable, como muestra la figura 12.42. (a) ¿Cuál debe ser la tensión en el cable para que la fuerza sobre la bisagra superior no tenga componente horizontal? (b) ¿Cuál es la fuerza horizontal sobre la bisagra inferior? (c) ¿Cuáles son las fuerzas verticales sobre las bisagras?

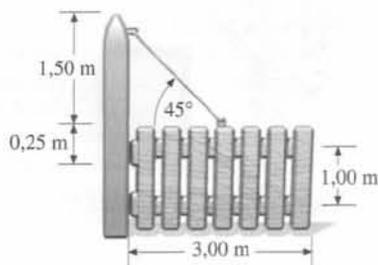


Figura 12.42 Problema 38

39 ●●● SSM Un tronco uniforme de masa 100 kg, longitud 4 m y radio 12 cm se mantiene en posición inclinada como indica la figura 12.43. El

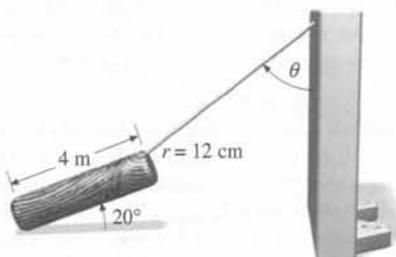


Figura 12.43 Problema 39

coeficiente de rozamiento estático entre el tronco y la superficie horizontal es 0,6. El tronco está a punto de deslizar hacia la derecha. Determinar la tensión en el alambre de soporte y el ángulo que el alambre forma con la pared vertical.

40 ●●● Un bloque rectangular grande y uniforme se sitúa sobre un plano inclinado como indica la figura 12.44. Una cuerda sujeta la parte superior del bloque para evitar que caiga por el plano. ¿Cuál es el ángulo máximo  $\theta$  para el cual el bloque no desliza por el plano inclinado? Sea  $b/a = 4$  y  $\mu_e = 0,8$ .

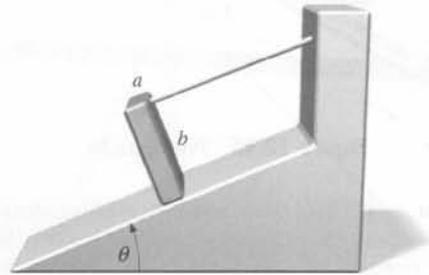


Figura 12.44 Problema 40

41 ●● SSM Tal como se muestra en la figura 12.45, una barca en un río caudaloso está amarrada al extremo de un muelle mediante una cadena de 5 m de longitud. Para dotar a la cadena de una cierta flexibilidad frente a las variaciones del régimen de flujo del río, se ata un peso de 100 N del centro de la misma. (a) Si la fuerza de resistencia sobre el bote es de 50 N, ¿cuál es la tensión de la cadena? (b) ¿Cuánto se aflojará la cadena, si se considera que ésta no pesa? (c) ¿A qué distancia del muelle estará la barca? (d) Si la tensión máxima que soporta la cadena es de 500 N, ¿cuál es el valor máximo de la fuerza que el río puede ejercer sobre la barca?

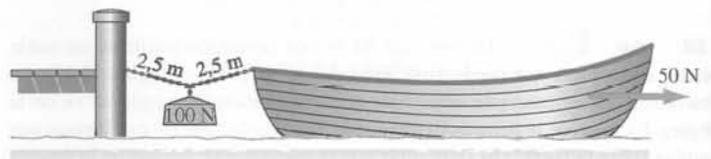


Figura 12.45 Problema 41

42 ●● SSM Una barra delgada de longitud 10 m y masa 20 kg se sitúa en un plano inclinado  $30^\circ$ . Un soporte está a 2 m y el otro a 6 m del extremo inferior de la barra. El rozamiento impide que la barra deslice sobre los soportes. Determinar la fuerza (módulo y dirección) ejercida sobre la barra por cada soporte.

43 ● Dos fuerzas de 80 N se aplican en vértices opuestos de una placa rectangular, como indica la figura 12.46. Determinar el momento producido por este par.

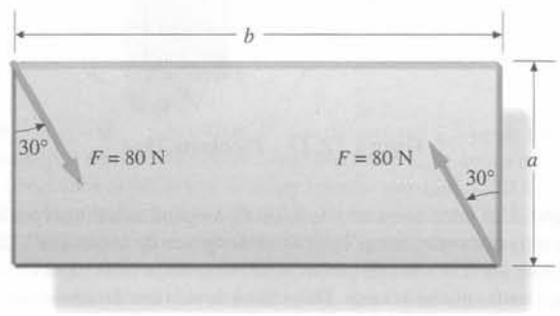


Figura 12.46 Problemas 43 y 45

44 ●● SSM Un cubo uniforme de lado  $a$  y masa  $M$  descansa sobre una superficie horizontal. Una fuerza  $F$  se aplica en la parte superior del cubo como muestra la figura 12.47. Esta fuerza no es suficiente para mover o levantar el cubo. (a) Demostrar que la fuerza de rozamiento estático ejercida por la superficie y la fuerza aplicada constituyen un par, y determinar el momento ejercido por este par. (b) Otro par, constituido por la fuerza normal ejercida por la superficie y el peso del cubo, equilibran el par anterior. Utilizar este hecho para determinar el punto efectivo de aplicación de la fuerza normal cuando  $F = Mg/3$ . (c) ¿Cuál es el valor máximo de  $F$  (en módulo), para el cual no se levanta el cubo?

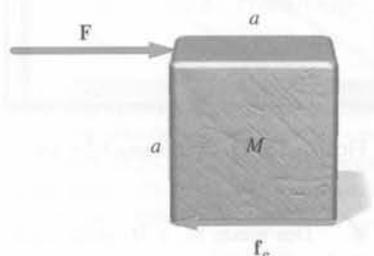


Figura 12.47 Problema 44

45 ●● Descomponer cada una de las fuerzas del problema 43 en sus componentes horizontal y vertical, produciendo dos pares. La suma algebraica de los dos pares componentes es igual al par resultante. Utilizar este resultado para determinar la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las dos fuerzas.

46 ●● SSM En una sección de una pared de una catedral como la que se muestra en la figura 12.48, el arco que está junto a la pared de 30 000 kg de masa ejerce una fuerza de  $2 \times 10^5$  N en un punto situado 10 m por encima del suelo, formando un ángulo de  $30^\circ$  por debajo de la horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre la pared y el suelo es  $\mu_e = 0,8$  y la base de la pared tiene un espesor de 1,25 m. (a) Calcular la fuerza normal efectiva, la fuerza de rozamiento y el punto en el que la fuerza normal efectiva actúa sobre la pared. (A este punto los arquitectos y los ingenieros civiles lo llaman *punto de empuje*) (b) Si el punto de empuje por cualquier motivo se mueve fuera de la pared, ésta volcará. Independientemente de la estética, colocar una estatua pesada en lo alto de la pared es útil desde el punto de vista de la ingeniería ya que desplaza el punto de empuje hacia el centro de la pared. Explicar el porqué.

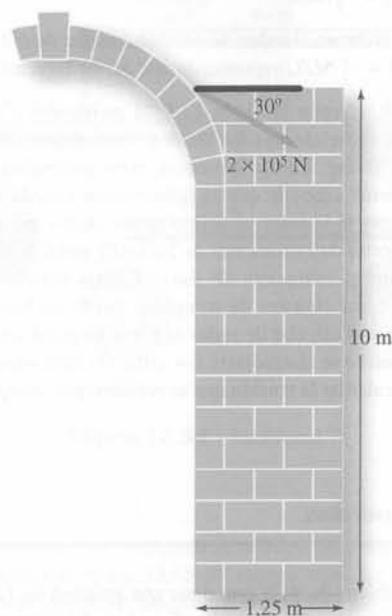


Figura 12.48 Problemas 46 y 47

47 ●● En ingeniería civil, la *línea de empuje* se determina calculando la posición del punto de empuje para cualquier altura dentro de una pared de estructura similar. Determinar la línea de empuje para la pared del problema 46 y representarla gráficamente mediante una hoja de cálculo o mediante una calculadora gráfica. (En realidad, la línea de empuje es una curva más que una recta.)

### Problemas de escaleras

48 ●● SSM **¡SOLVE!** Romeo toma una escalera uniforme de 10 m de longitud y la apoya contra la pared pulida de la residencia de los Capuleto. La masa de la escalera es de 22,0 kg y su parte inferior se apoya en el suelo a 2,8 m de la pared. Cuando Romeo, cuya masa es de 70 kg, alcanza el 90% de su camino hasta el final, la escalera comienza a deslizar. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre el suelo y la escalera?

49 ●● SSM Una escalera de masa despreciable y longitud  $L$  se apoya contra una pared pulida formando un ángulo  $\theta$  con el suelo horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la escalera y el suelo es  $\mu_e$ . Un hombre de masa  $M$  sube por la escalera. ¿Qué altura  $h$  puede ascender antes de que la escalera deslice?

50 ●● Una escalera uniforme de longitud  $L$  y masa  $m$  se apoya contra una pared vertical sin rozamiento y su extremo inferior sobre el suelo. Forma un ángulo de  $60^\circ$  con el suelo horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre la escalera y el suelo es 0,45. Una persona, cuya masa es cuatro veces mayor que la de la escalera, sube por ésta. ¿A qué altura llegará antes de que comience a deslizar?

51 ●● Una escalera de masa  $m$  y longitud  $L$  se apoya contra una pared vertical y sin rozamiento formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal. El centro de masas se encuentra a una altura  $h$  del suelo. Una fuerza  $F$  tira horizontalmente de la escalera hacia fuera en su punto medio. Determinar el coeficiente mínimo de rozamiento estático  $\mu_e$  para el cual, el extremo superior de la escalera se separará de la pared, mientras el extremo inferior no deslice.

52 ●● **¡SOLVE!** Un hombre que pesa 900 N está sentado en la parte superior de una escalera de peso despreciable que descansa sobre un suelo sin rozamiento (figura 12.49). Hay un travesaño a mitad de altura de la escalera. El ángulo que forma la escalera en la parte superior es  $\theta = 30^\circ$ . (a) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el suelo sobre cada pata de la escalera? (b) Hallar la tensión del travesaño. (c) Si el travesaño se moviese hacia la parte inferior de la escalera (manteniendo ésta al mismo ángulo  $\theta$ ), ¿sería su tensión mayor o menor?

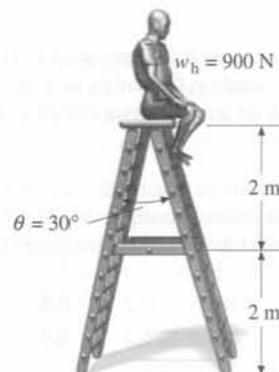


Figura 12.49 Problema 52

53 ●● SSM Una escalera uniforme se apoya contra la pared vertical sin rozamiento. El coeficiente de rozamiento estático entre la escalera y el suelo es 0,3 ¿Cuál es el menor ángulo para el cual la escalera permanece estacionaria?

## Tensión y deformación

54 ● SSM Se cuelga una bola de 50 kg de un alambre de acero de 5 m de longitud y 2 mm de radio. ¿Cuánto se alargará el alambre?

55 ● **¡SOLVE!** La tensión a la rotura de un alambre de cobre es aproximadamente de  $3 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ . (a) ¿Cuál es la carga máxima que puede colgarse de un alambre de cobre de 0,42 mm? (b) Si se cuelga la mitad de esta carga máxima del alambre de cobre, en qué porcentaje de su longitud se alargará?

56 ● **¡SOLVE!** Un alambre de acero de diámetro 0,6 mm y longitud de 1,2 m soporta una masa de 4 kg. ¿Cuál será el alargamiento del alambre bajo esta carga?

57 ● SSM **¡SOLVE!** Mientras los pies de un corredor tocan el suelo, una fuerza de cizalladura actúa sobre la suela de su zapato de 8 mm de espesor según se indica en la figura 12.50. Si la fuerza de 25 N se distribuye a lo largo de un área de  $15 \text{ cm}^2$ , calcular el ángulo  $\theta$  de cizalladura sabiendo que el módulo de cizalladura de la suela es de  $1,9 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ .



Figura 12.50 Problema 57

58 ● **¡SOLVE!** Un alambre de acero de longitud 1,5 m y diámetro 1 mm se suelda a un alambre de aluminio de dimensiones idénticas para formar un alambre de 3,0 m. ¿Cuál es la longitud del alambre compuesto cuando soporta una masa de 5 kg?

59 ● Se aplica una fuerza  $F$  a un alambre largo de longitud  $L$  y sección transversal  $A$ . Demostrar que si el alambre se considera como un muelle, la constante de fuerza  $k$  viene dada por  $k = AY/L$  y la energía almacenada en el alambre es  $U = \frac{1}{2} F \Delta L$ , en donde  $Y$  es el módulo de Young y  $\Delta L$  el incremento de longitud del alambre.

60 ● **¡SOLVE!** La cuerda E de acero de un violín está bajo una tensión de 53 N. El diámetro de la cuerda es 0,20 mm y su longitud tensada es 35,0 cm. Determinar (a) la longitud sin tensar de esta cuerda y (b) el trabajo necesario para tensar la cuerda.

61 ● SSM Una cinta de caucho de sección  $3 \text{ mm} \times 1,5 \text{ mm}$  se dispone verticalmente y varias masas se cuelgan de ella. Un estudiante obtiene los siguientes datos de la longitud de la cinta en función de la carga:

Carga, kg	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Longitud, cm	5,0	5,6	6,2	6,9	7,8	10,0

(a) Determinar el módulo de Young de la cinta de caucho para cargas pequeñas.  
(b) Determinar la energía almacenada en la cinta cuando la carga es de 0,15 kg. (Véase problema 59.)

62 ● Un gran espejo cuelga de un clavo, como se muestra en la figura 12.51. El alambre de acero que lo soporta tiene un diámetro de 0,2 mm y una longitud sin deformar de 1,7 m. La distancia entre los puntos de soporte en la parte superior del marco del espejo es 1,5 m. La masa del espejo es 2,4 kg.

¿Cuál es la distancia entre el clavo y la parte superior del marco cuando el espejo está colgado?

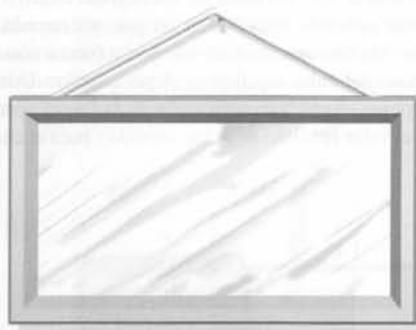


Figura 12.51 Problema 62 y 86

63 ● **¡SOLVE!** Dos masas  $M_1$  y  $M_2$  están sujetas a sendos cables que tienen igual longitud cuando no soportan ninguna carga. El alambre que soporta a  $M_1$  es de aluminio de 0,7 mm de diámetro y el que soporta a  $M_2$  es de acero de 0,5 mm de diámetro. ¿Cuál es la relación  $M_1/M_2$  si los dos cables se alargan por igual?

64 ● Una pelota de 0,5 kg se sujeta a un alambre de aluminio de diámetro 1,6 mm y longitud sin deformar 0,7 m. El otro extremo del alambre está fijo a un poste. La pelota gira alrededor del poste en un plano horizontal con una velocidad de rotación tal que el ángulo que forman el alambre y la horizontal es  $5,0^\circ$ . Determinar la tensión del alambre y su longitud.

65 ● SSM Hay que construir un cable de un ascensor a partir de un nuevo material compuesto desarrollado por los Laboratorios Acme. En el laboratorio, una muestra del cable de 2 m de longitud y de  $0,2 \text{ m}^2$  de área transversal se rompe cuando se la somete a una tensión de 1000 N. El cable del ascensor tendrá una longitud de 20 m y un área transversal de  $1,2 \text{ mm}^2$  y deberá aguantar una carga de 20 000 N. ¿Aguantará?

66 ● SSM Cuando se estira un material en una dirección, si su densidad se mantiene constante, el material se contrae en una o en las dos direcciones transversales. Sea un bloque rectangular de longitud  $x$ , anchura  $y$  y altura  $z$  que se estira de modo que se alarga hasta  $x' = x + \Delta x$ . Si  $\Delta x \ll x$  y  $\Delta y/y \ll \Delta z/z$ , demostrar que  $\Delta y/y = -\frac{1}{2} \Delta x/x$ .

67 ● Si se tiene un alambre de sección circular de radio  $r$  y longitud  $L$ , demostrar que  $\Delta r/r = -\frac{1}{2} \Delta L/L$ , suponiendo que  $\Delta L \ll L$  (véase el problema 66).

68 ● SSM Según la Tabla 12.1, la resistencia a la tracción de la mayor parte de los materiales resulta ser dos o tres órdenes de magnitud inferior al módulo de Young. En consecuencia, estos materiales, por ejemplo, el aluminio, se romperán antes de que la deformación exceda un 1%. Entre los materiales hechos por el hombre, el nailon es uno de los que tiene mayor estabilidad (puede soportar deformaciones de hasta 0,2 antes de romperse). Pero la tela de araña supera a cualquiera de éstos. Ciertas formas pueden soportar deformaciones de hasta 10 antes de romperse. (a) Si un hilo como éste tiene una sección transversal circular de radio  $r_0$  y una longitud sin estirar  $L_0$ , determinar el radio  $r$  cuando se alarga hasta  $L = 10L_0$ . (b) Si el módulo de Young del hilo de araña es  $Y$ , calcular la tensión que se requiere para romper el hilo en función de  $Y$  y  $r_0$ .

## Problemas generales

69 ● Un tablero de 90 N que tiene una longitud de 12 m está apoyado en dos soportes, cada uno de los cuales dista 1 m del extremo del tablero. Se coloca un bloque de 360 N sobre el tablero a 3 m de un extremo, como se indica en la figura 12.52. Hallar la fuerza ejercida por cada soporte sobre el tablero.

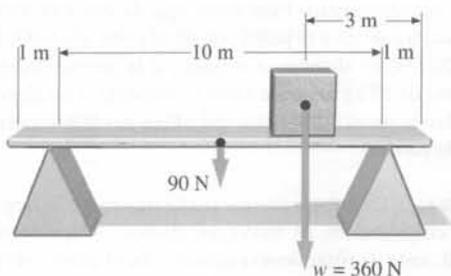


Figura 12.52 Problema 69

70 ● La altura del centro de gravedad de un hombre erecto se determina pesándole sobre una tabla de despreciable soportada por dos balanzas, como indica la figura 12.53. Si la altura del hombre es de 188 cm y la balanza de la izquierda marca 445 N y la de la derecha 400 N, ¿dónde está localizado el centro de gravedad respecto a sus pies?

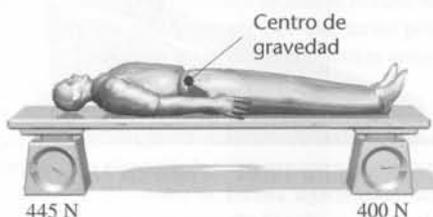


Figura 12.53 Problema 70

71 ● SSM **RESOLV** La figura 12.54 muestra un móvil formado por cuatro pesos que cuelgan de tres barras de masa despreciable. Determinar el valor de cada uno de los pesos desconocidos cuando el móvil está en equilibrio. *Sugerencia: Hallar el peso de  $p_1$ .*

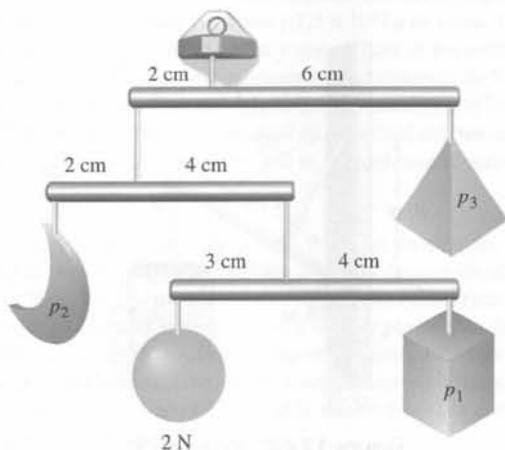


Figura 12.54 Problema 71

72 ● Una polea y un polipasto se utilizan para soportar un cuerpo de masa  $m$  como indica la figura 12.55. El cuerpo sube a velocidad constante. Cuando un trozo de cuerda de longitud  $L$  pasa por la rueda de la polea superior, la altura de la polea inferior aumenta  $h$ . (a) ¿Cuánto vale el cociente  $L/h$ ? (b) Suponer que el bloque y todo el equipo no tienen masa ni ejercen rozamiento. Demostrar que  $FL = mgh$  aplicando el principio trabajo-energía al sistema.

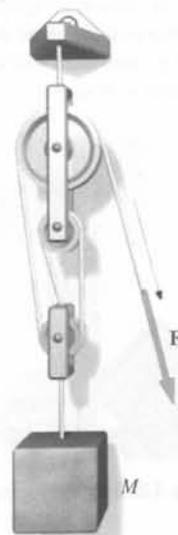


Figura 12.55 Problema 72

73 ●● Una placa que tiene la forma de un triángulo equilátero de masa  $M$  se suspende de un vértice. Otra masa  $m$  se suspende de otro vértice del triángulo. ¿Cuál debe ser la relación  $m/M$  para que la base del triángulo forme un ángulo de  $6,0^\circ$  con la horizontal?

74 ●● Un lápiz de sección exagonal se sitúa sobre un bloc de notas (figura 12.56). Determinar el coeficiente mínimo de rozamiento estático  $\mu_e$  para que el lápiz ruede hacia abajo sin deslizarse cuando el papel se inclina.

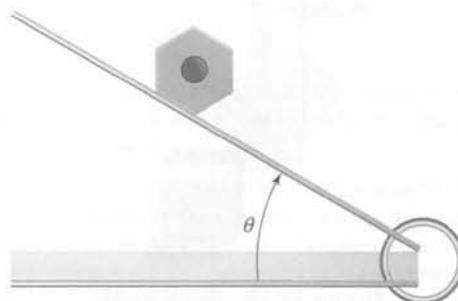


Figura 12.56 Problema 74

75 ●● SSM Una caja uniforme de 8 kg de masa y dos veces más alta que ancha, descansa sobre el suelo de un camión. ¿Cuál es el máximo coeficiente de rozamiento estático entre la caja y el suelo para que la caja deslice hacia atrás en lugar de volcar cuando el camión acelera en una carretera horizontal?

76 ●● Una balanza tiene brazos desiguales. Un bloque de 1,5 kg situado en el platillo izquierdo parece tener la misma masa que otro de 1,95 kg en el platillo derecho (figura 12.57). ¿Cuál sería la masa aparente del primero si se colocara en el platillo derecho?

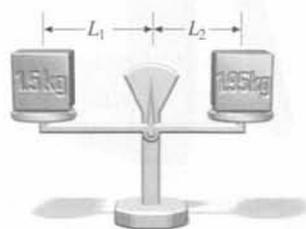


Figura 12.57 Problema 76

**77** ●● **SSM** Un cubo de masa  $M$  se apoya contra una pared sin rozamiento formando un ángulo  $\theta$  con el suelo como indica la figura 12.58. Determinar el coeficiente mínimo de rozamiento estático  $\mu_e$  entre el cubo y el suelo que permite que el cubo permanezca en reposo.

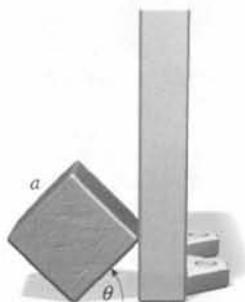


Figura 12.58 Problema 77

**78** ●● La figura 12.59 muestra una regla unida mediante una bisagra a una pared vertical y soportada mediante un alambre delgado. El alambre y la regla forman ángulos de  $45^\circ$  con la vertical. La masa de la regla es  $5,0$  kg. Cuando una masa  $M = 10,0$  kg se suspende del punto medio de la regla, la tensión  $T$  del alambre soporte es de  $52$  N. Si el alambre se rompe cuando la tensión excede los  $75$  N, ¿cuál es la máxima distancia a lo largo de la regla que permite suspender la masa de  $10,0$  kg sin que se rompa el alambre?

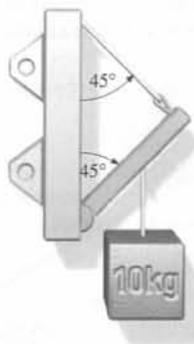


Figura 12.59 Problema 78

**79** ●● **SOLVE** La figura 12.60 muestra una escalera de  $20$  kg apoyada contra una pared sin rozamiento y descansando sobre una superficie hori-

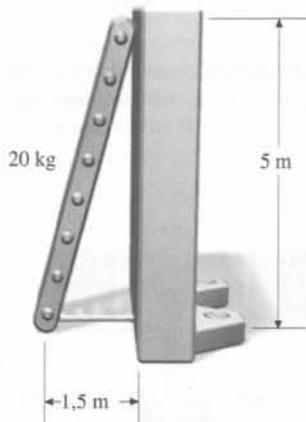


Figura 12.60 Problema 79

zontal también sin rozamiento. Para evitar que la escalera deslice, la parte inferior de la escalera se ata a la pared con un alambre delgado; la tensión del alambre es de  $29,4$  N. El alambre se romperá si la tensión supera los  $200$  N. (a) Si una persona de  $80$  kg asciende hasta la mitad de la escalera, ¿qué fuerza ejercerá ésta sobre la pared? (b) ¿Hasta qué altura puede ascender una persona de  $80$  kg con esta escalera?

**80** ●● **SSM** Un cubo uniforme puede moverse a lo largo de un plano horizontal bien empujándolo, de modo que deslice, o bien haciéndolo rodar. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre el cubo y el suelo si el trabajo necesario para el desplazamiento es el mismo en ambos casos?

**81** ●● Un bloque alto, uniforme y rectangular descansa sobre un plano inclinado del modo indicado en la figura 12.61. Si  $\mu_e = 0,4$ , ¿el bloque deslizará o volcará al incrementar lentamente el ángulo  $\theta$ ?

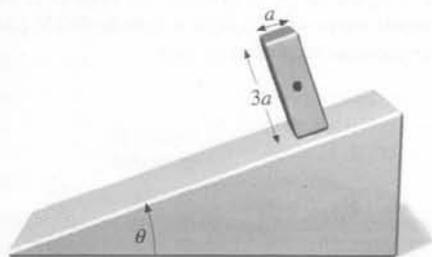


Figura 12.61 Problema 81

**82** ●● Una masa de  $360$  kg pende de un cable sujeto a una barra de acero de  $15$  m de longitud que pivota en una pared vertical y se soporta mediante un cable como indica la figura 12.62. La masa de la barra es de  $85$  kg. (a) Con el cable sujeto a la barra a  $5,0$  m del extremo inferior, como se indica, determinar la tensión del cable y la fuerza ejercida por la pared sobre la barra de acero. (b) Repetir el cálculo con un cable algo más largo sujeto a la barra de acero en un punto a  $5,0$  m de su extremo superior, manteniendo el mismo ángulo entre la barra y la pared.

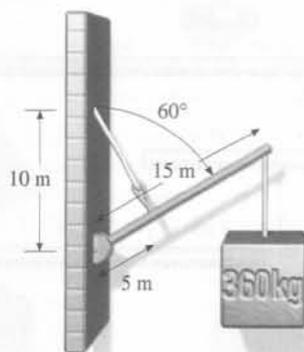


Figura 12.62 Problema 82

**83** ●● Repetir el problema 75 para el caso en que el camión acelera subiendo una pendiente que forma un ángulo de  $9,0^\circ$  con la horizontal.

**84** ●● **SSM** Una barra delgada de  $60$  cm de longitud se equilibra sobre un pivote situado a  $20$  cm de un extremo cuando una masa de  $(2m + 2)$  gramos está en el extremo más próximo al pivote y una masa  $m$  en el extremo opuesto (figura 12.63a). También se consigue el equilibrio si la masa  $(2m + 2)$  gramos se reemplaza por la masa  $m$  y en el otro extremo no se sitúa masa alguna (figura 12.63b). Determinar la masa de la barra.

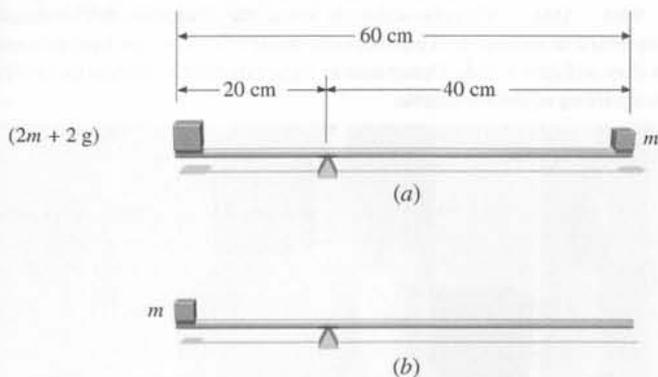


Figura 12.63 Problema 84

**85 ●● SSM** Si se sostiene en equilibrio un bastón de 1 m de longitud con dos dedos, uno de cada mano, y poco a poco se va juntando las manos, los dedos se encontrarán en el centro del bastón, independientemente de donde estaban colocados inicialmente. (a) Explicar por qué ocurre esto. (b) Al mover los dedos, primero se mueve uno y después se mueve el otro; no se mueven los dedos a la vez. Explicar cuantitativamente por qué ha de procederse de esta forma; suponer que el coeficiente de rozamiento estático entre el bastón y los dedos es  $\mu_e$  y el coeficiente de rozamiento cinético es  $\mu_c$ .

**86 ●●** Cuando se cuelga un cuadro en una pared vertical rugosa mediante un alambre y un clavo (de la misma manera que el espejo de la figura 12.51), la parte superior del marco se inclina ligeramente hacia adelante; es decir, el plano del cuadro forma un pequeño ángulo con la vertical. (a) Explicar por qué los cuadros colgados de esta manera no quedan planos contra la pared. (b) Un cuadro enmarcado de 1,5 m de ancho y 1,2 m de alto, cuya masa es 8,0 kg, se cuelga como en la figura 12.51 utilizando un alambre de 1,7 m de longitud. Los extremos del alambre están unidos a los lados del marco por la parte posterior y a una distancia de 0,4 m del borde superior. Cuando el cuadro está colgado, los planos del cuadro y de la pared forman un ángulo de  $5,0^\circ$ . Determinar la fuerza que la pared ejerce sobre la parte inferior del marco.

**87 ●● SSM** Si un tren viaja a determinada velocidad en una curva, los vagones de mercancía pueden volcar. Suponer que la carga que transporta son paralelepípedos de densidad uniforme y  $1,5 \times 10^4$  kg de masa, 10 m de longitud, 3,0 m de altura y 2,20 m de ancho y que su base se encuentra a 0,65 m por encima de las vías. Los ejes están separados una distancia de 7,6 m y cada uno está a 1,2 m de los extremos del furgón. La separación entre los carriles es de 1,55 m. Determinar la máxima velocidad de seguridad del tren si el radio de curvatura de la curva es (a) 150 m. (b) 240 m. Despréciase la masa del vagón vacío.

**88 ●●** Para caminar sobre la cuerda floja, un equilibrista utiliza una barra delgada de 8 m de longitud y curvada en forma de arco circular. En cada extremo de la barra hay una masa de plomo de 8 kg. El equilibrista, cuya masa es de 58 kg y cuyo centro de gravedad está a 0,90 m por encima de la cuerda, sujeta fuertemente la barra por su centro que se encuentra a 0,65 m por encima de la cuerda. ¿Cuál debe ser el radio de curvatura del arco de la barra para que el equilibrista se encuentre en equilibrio estable mientras avanza por la cuerda? Despreciar la masa de la barra.

**89 ●●● SSM** Se tiene un gran número de ladrillos uniformes e idénticos, cada uno de longitud  $L$ . Si los apilamos uno encima de otro a lo largo, tal como se muestra en la figura 12.64, la longitud máxima que el ladrillo superior puede sobresalir sobre el que hay debajo es  $L/2$ . (a) Demostrar que si colocamos este conjunto de dos ladrillos de forma que sobresalgan encima de un tercer ladrillo, la máxima longitud que puede sobresalir el segundo ladrillo sobre el tercero es  $L/3$ . (b) Demostrar que, en general, si tenemos una pila de  $N$  ladrillos, la distancia máxima que puede sobresalir el ladrillo  $(n - 1)$  (contado desde arriba) sobre el ladrillo  $n$  es  $L/n$ , donde  $n \leq N$ . (c) Escribir un programa mediante una hoja de cálculo que calcule cuánto pueden sobresalir todos los ladrillos (la suma de cuánto sobresale cada uno) si se apilan  $N$  ladrillos, y cal-

cular esta cifra para  $L = 1$  m y  $N = 5, 10$ , y  $100$ . (d) ¿Se aproxima esta suma a algún límite, cuando  $N \rightarrow \infty$ ? ¿Cuánto vale este límite?

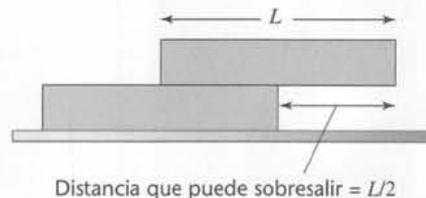


Figura 12.64 Problema 89

**90 ●●●** Una esfera uniforme de radio  $R$  y masa  $M$  se mantiene en reposo sobre un plano inclinado de ángulo  $\theta$  mediante una cuerda horizontal, como muestra la figura 12.65. Sea  $R = 20$  cm,  $M = 3$  kg y  $\theta = 30^\circ$ . (a) Determinar la tensión en la cuerda. (b) ¿Cuál es la fuerza normal ejercida sobre la esfera por el plano inclinado? (c) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento que actúa sobre la esfera?

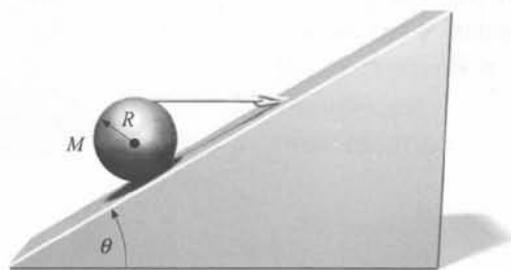


Figura 12.65 Problema 90

**91 ●●●** Las patas de un trípode forman ángulos iguales de  $90^\circ$  entre sí en el vértice, donde se unen. Un bloque de 100 kg cuelga del vértice. ¿Cuáles son las fuerzas de compresión en las tres patas?

**92 ●●** La figura 12.66 muestra una viga uniforme de 20 cm de longitud descansando sobre un cilindro de 4 cm de radio. La masa de la viga es de 5,0 kg y la del cilindro de 8,0 kg. El coeficiente de rozamiento estático entre la viga y el cilindro es cero, mientras que los coeficientes de rozamiento estático entre el cilindro y el suelo y entre la viga y el suelo son mayores que cero. ¿Hay algún valor para estos coeficientes de rozamiento estático para los cuales el sistema esté en equilibrio estático? En caso afirmativo, ¿cuánto valen? En caso negativo, razonar la respuesta.

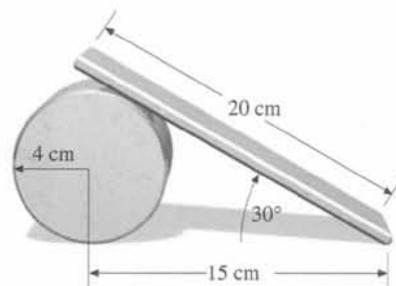


Figura 12.66 Problema 92

**93 ●●●** Dos esferas sólidas pulidas (sin rozamiento) de radio  $r$  se sitúan dentro de un cilindro de radio  $R$  como indica la figura 12.67. La masa de cada esfera es  $m$ . Determinar la fuerza ejercida por el fondo del cilindro sobre la esfera inferior, la fuerza ejercida por la pared del cilindro sobre cada una de las esferas y la fuerza ejercida por una esfera sobre la otra.

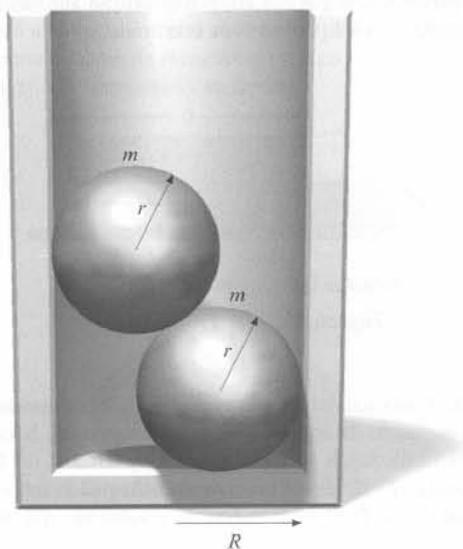


Figura 12.67 Problema 93

94 ●●● SSM Un cubo sólido de arista  $a$  equilibrado sobre un cilindro de diámetro  $d$  se encuentra en equilibrio inestable si  $d \ll a$  y en equilibrio estable si  $d \gg a$  (figura 12.68). Determinar el valor mínimo de  $d/a$  para que el cubo se encuentre en equilibrio estable.

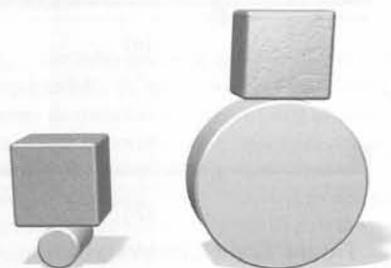
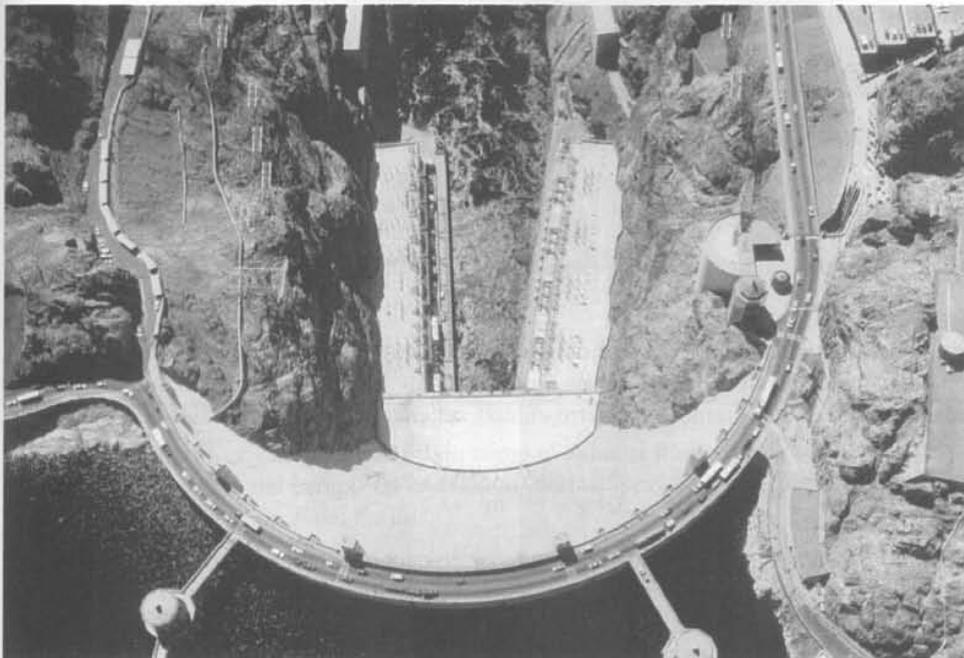


Figura 12.68 Problema 94



El fondo de la presa de Hoover tiene un espesor de 200 metros; sin embargo, su parte más alta sólo tiene 14 metros.

Las presas se diseñan con un espesor mayor en el fondo que en su parte superior. ¿Por qué? (Véase el ejemplo 13.2.)

Los fluidos incluyen los líquidos y los gases. Los líquidos fluyen bajo la gravedad hasta ocupar las zonas más bajas posibles del recipiente que los contiene. Los gases se expanden hasta llenar su recipiente. Los fluidos forman parte del ambiente al igual que de nuestro cuerpo. Entendiendo el comportamiento de un fluido, mejoramos el conocimiento sobre nosotros mismos y nuestras interacciones con el mundo que nos rodea.

➤ **Empezamos este capítulo estudiando los fluidos en reposo. Se sigue con el estudio del flujo estacionario, con especial atención al flujo laminar.**

En un gas, la distancia media entre dos moléculas es grande comparada con el tamaño de una molécula. Las moléculas interactúan poco entre sí excepto durante sus breves colisiones. En un líquido o sólido, las moléculas están muy unidas y ejercen fuerzas entre sí que son comparables a las fuerzas que unen los átomos para formar moléculas. Las moléculas de un líquido forman transitoriamente enlaces de corto alcance que se rompen continuamente debido a la energía cinética interna de las moléculas y después vuelven a formarse. Estos enlaces mantienen unido el líquido; si no existieran, el líquido se vaporizaría inmediatamente y las moléculas escaparían en forma de vapor. La fuerza de los enlaces en un líquido depende del tipo de molécula. Por ejemplo, los enlaces entre átomos de helio son muy débiles y por esta razón, el helio no se licua a la presión atmosférica a menos que la temperatura sea 4,2 K o inferior.

- 13.1 Densidad
- 13.2 Presión en un fluido
- 13.3 Flotación y principio de Arquímedes
- 13.4 Fluidos en movimiento

## 13.1 Densidad

Una propiedad importante de una sustancia es el cociente entre su masa y su volumen, llamada **densidad**:

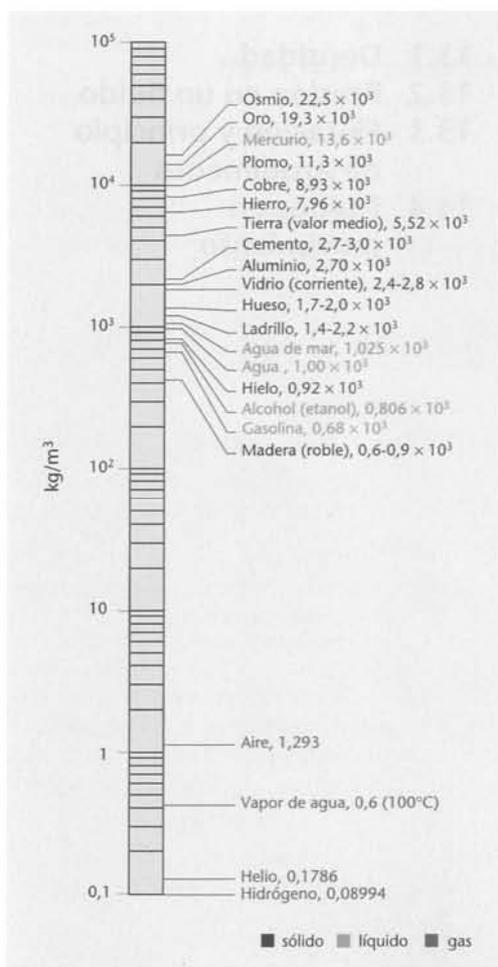
$$\text{Densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$$

Normalmente utilizaremos la letra griega  $\rho$  (rho) para designar la densidad:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (13.1)$$

DEFINICIÓN — DENSIDAD

TABLA 13.1 Densidades de sustancias seleccionadas



Puesto que originalmente el gramo se definió como la masa de  $1 \text{ cm}^3$  de agua, la densidad del agua en las unidades del sistema cgs es igual a  $1 \text{ g/cm}^3$ . Convirtiendo estas unidades en las unidades del SI de kilogramos por metro cúbico, obtenemos para la densidad del agua

$$\rho_a = \frac{1 \text{ g}}{\text{cm}^3} \times \frac{\text{kg}}{10^3 \text{ g}} \times \left(\frac{100 \text{ cm}}{\text{m}}\right)^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (13.2)$$

Las medidas precisas de la densidad deben tener en cuenta la temperatura, ya que las densidades de la mayor parte de los materiales, incluso la del agua, varían con la temperatura. La ecuación 13.2 da el valor máximo de la densidad del agua, que se tiene a  $4^\circ \text{C}$ . La tabla 13.1 relaciona las densidades de algunos materiales típicos.

Una unidad de volumen muy utilizada es el **litro** (L):

$$1 \text{ L} = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$

En función de esta unidad, la densidad del agua es  $1,00 \text{ kg/L}$ . Cuando la densidad de un objeto es mayor que la del agua, se hunde en ella; cuando su densidad es menor, flota. El cociente entre la densidad de una sustancia y la densidad del agua recibe el nombre de **densidad específica** de la sustancia. Por ejemplo, la densidad específica del aluminio es 2,7, lo cual significa que un volumen de aluminio tiene 2,7 veces la masa de un volumen igual de agua. Las densidades específicas de los objetos que se hunden en el agua están comprendidas en un intervalo entre 1 y 22,5 aproximadamente (correspondiente al elemento más denso, el osmio).

Aunque la mayor parte de los sólidos y líquidos se dilatan ligeramente cuando se calientan y se contraen ligeramente cuando se ven sujetos a un incremento de presión externa, estas variaciones de volumen son relativamente pequeñas, por lo que podemos decir que las densidades de la mayor parte de los sólidos y líquidos son aproximadamente independientes de la temperatura y presión. En cambio, la densidad de un gas depende fuertemente de la presión y temperatura. Por lo tanto, se debe especificar la temperatura y presión cuando se den las densidades de los gases. Por convención, las **condiciones estándar** para las medidas de las propiedades físicas son presión atmosférica a nivel del mar y temperatura de  $0^\circ \text{C}$ . Las densidades de las sustancias relacionadas en la tabla 13.1 se dan en condiciones estándar. Obsérvese que las densidades de los líquidos o sólidos son considerablemente mayores que las de los gases; por ejemplo, la densidad del agua es aproximadamente 800 veces mayor que la del aire en condiciones estándar.

### EJEMPLO 13.1 | Cálculo de la densidad

Un frasco de  $200 \text{ mL}$  está lleno de agua a  $4^\circ \text{C}$ . Cuando el frasco se calienta a  $80^\circ \text{C}$ , se derraman  $6 \text{ g}$  de agua. ¿Cuál es la densidad del agua a  $80^\circ \text{C}$ ? (Suponer que la dilatación del frasco es despreciable.)

**Planteamiento del problema** La densidad del agua a  $80^\circ \text{C}$  es  $\rho' = m'/V$ , en donde  $V = 200 \text{ mL} = 200 \text{ cm}^3$  es el volumen del frasco y  $m'$  es la masa que queda en el frasco después de derramarse los  $6 \text{ g}$  de agua. Hallaremos  $m'$  determinando en primer lugar la masa de agua que había originalmente en el frasco.

1. Calcular la masa original de agua en el frasco a 4 °C utilizando  $\rho = m = \rho V = (1,00 \text{ g/cm}^3)(200 \text{ cm}^3) = 200 \text{ g}$   
1,00 g/cm<sup>3</sup>:
2. Calcular la masa de agua remanente,  $m'$  después de derramar 6 g:  $m' = m - 6 \text{ g} = 200 \text{ g} - 6 \text{ g} = 194 \text{ g}$
3. Utilizar este valor de  $m'$  para determinar la densidad del agua a 80 °C:  $\rho' = \frac{m'}{V} = \frac{194 \text{ g}}{200 \text{ cm}^3} = \boxed{0,97 \text{ g/cm}^3}$

**Ejercicio** Un cubo macizo de metal de 8 cm de arista tiene una masa de 4,08 kg. (a) ¿Cuál es la densidad del cubo? (b) Si el cubo está hecho de uno solo de los elementos relacionados en la figura 13.1, ¿de qué el elemento se trata? (Respuestas (a) 7,97 kg/L, (b) hierro.)

**Ejercicio** Un lingote de oro tiene las dimensiones de 5 cm × 10 cm × 20 cm. ¿Cuál es su masa? (Respuesta 19,3 kg.)

## 13.2 Presión en un fluido

Cuando se sumerge un cuerpo en un fluido como el agua, el fluido ejerce una fuerza perpendicular a la superficie del cuerpo en cada punto de la superficie. Esta fuerza por unidad de área se denomina **presión**  $P$  del fluido:

$$P = \frac{F}{A} \quad (13.3)$$

DEFINICIÓN —PRESIÓN

La unidad de presión en el SI es el newton por metro cuadrado (N/m<sup>2</sup>), que recibe el nombre de **pascal** (Pa):

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 \quad (13.4)$$

En el sistema técnico inglés, la presión normalmente se expresa en libras por pulgada cuadrada (lb/pulg<sup>2</sup>). Otra unidad común es la atmósfera (atm), que es aproximadamente la presión del aire a nivel del mar. Actualmente la atmósfera se define como 101,325 kilopascales, que es aproximadamente igual a 14,70 lb/pulg<sup>2</sup>:

$$1 \text{ atm} = 101,325 \text{ kPa} = 14,70 \text{ lb/pulg}^2 \quad (13.5)$$

Posteriormente veremos otras unidades de presión de uso común.

La presión debida a un fluido que presiona contra un cuerpo tiende a comprimirlo. El cociente entre el cambio de presión y la disminución relativa al volumen ( $-\Delta V/V$ ) se denomina **módulo de compresibilidad**  $B$ :

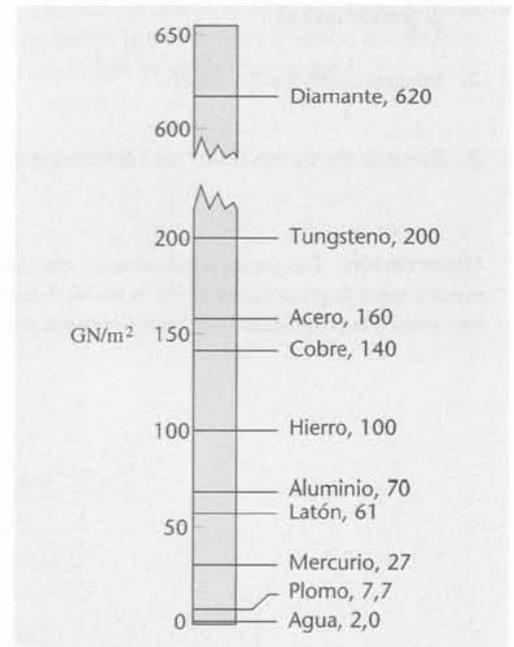
$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad (13.6)$$

DEFINICIÓN —MÓDULO DE COMPRESIBILIDAD

(El signo menos en la ecuación 13.6 se introduce para que  $B$  sea positivo, ya que todos los materiales cuando están sometidos a un aumento de la presión externa disminuyen de volumen.)

Cuanto más difícil de comprimir es un sólido, menor es su cambio relativo  $-\Delta V/V$  para una determinada presión  $\Delta P$  y, por lo tanto, mayor es su módulo de compresibilidad. La **compresibilidad** es la inversa del módulo de compresibilidad. Líquidos, gases y sólidos, todos tienen un módulo de compresibilidad. Los líquidos y los sólidos son relativamente incompresibles; es decir, poseen valores grandes del módulo de compresibilidad  $B$ , siendo estos valores relativamente independientes de la temperatura y la presión. Por el contrario, los gases se pueden comprimir fácilmente, y los valores de  $B$  dependen fuertemente de la presión y la temperatura. La tabla 13.2 indica los valores del módulo de compresibilidad para diversos materiales.

TABLA 13.2 Valores aproximados del módulo de compresibilidad  $B$  de varios materiales



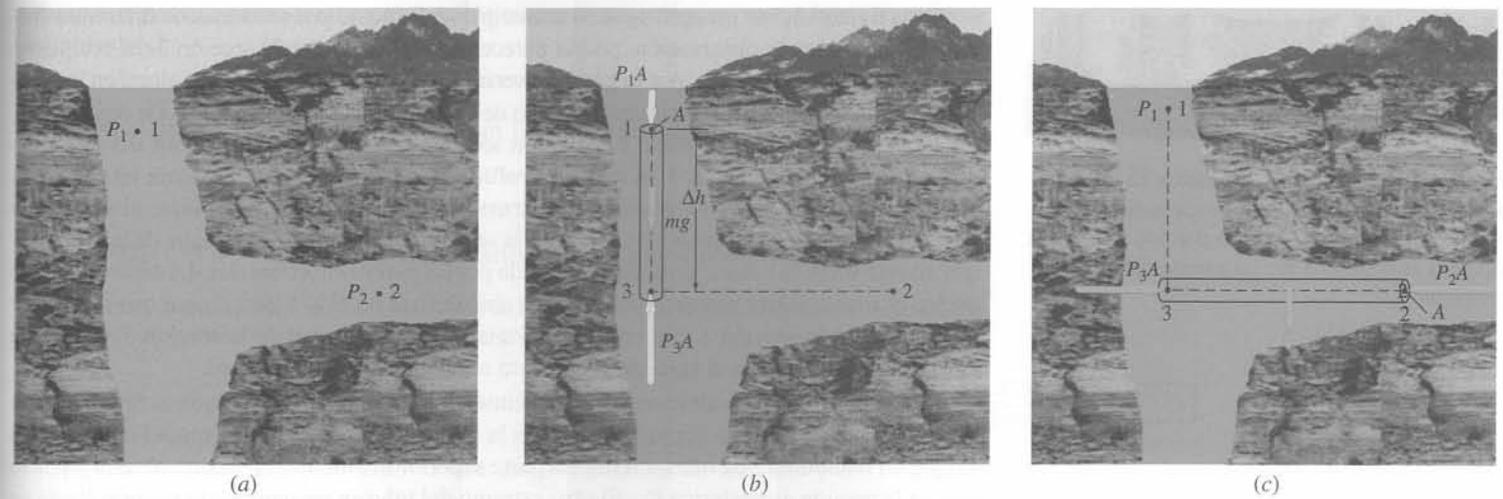


Figura 13.3

la columna ( $A\Delta h$  es el volumen de la columna). Es decir,  $P_3A = P_1A + \rho A\Delta hg$ . Dividiendo por  $A$  resulta

$$P_3 = P_1 + \rho g\Delta h$$

Consideremos ahora las fuerzas que actúan sobre el cilindro horizontal de agua, también de área transversal  $A$ , que conecta los puntos 2 y 3 (figura 13.3c). Hay dos fuerzas con componentes que van en la dirección del eje del cilindro,  $P_3A$  y  $P_2A$ . El hecho de que estas dos fuerzas se compensen una a otra significa que  $P_3 = P_2$ . Se sigue entonces que

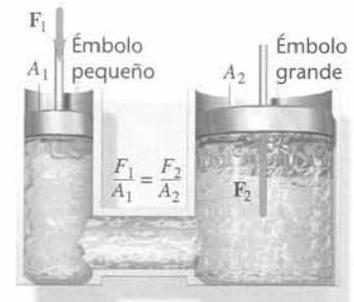
$$P_2 = P_1 + \rho g\Delta h$$

Así pues, si aumentamos  $P_0$  presionando por ejemplo sobre la superficie superior con un émbolo, el aumento de presión es el mismo en todo el seno del líquido, lo cual se conoce como **principio de Pascal**, en honor de Blaise Pascal (1623-1662):

Un cambio de presión aplicado a un líquido encerrado dentro de un recipiente se transmite por igual a todos los puntos del fluido y a las propias paredes del recipiente.

#### PRINCIPIO DE PASCAL

Una aplicación común del principio de Pascal lo constituye el elevador hidráulico indicado en la figura 13.4.



**Figura 13.4** Prensa o elevador hidráulico. Una fuerza pequeña  $F_1$  ejercida sobre el émbolo o pistón pequeño produce una variación de presión  $F_1/A_1$  que se transmite por el líquido hasta el émbolo grande. Como las presiones en los pistones grande y pequeño son iguales, las fuerzas correspondientes cumplen la relación  $F_2/A_2 = F_1/A_1$ . Como el área del pistón grande es mucho mayor que el del pistón pequeño, la fuerza sobre el pistón grande  $F_2 = (A_2/A_1)F_1$  es mucho mayor que  $F_1$ .

### EJEMPLO 13.3 | El elevador hidráulico

El émbolo grande de un elevador hidráulico tiene un radio de 20 cm. ¿Qué fuerza debe aplicarse al émbolo pequeño de radio 2 cm para elevar un coche de masa 1500 kg?

**Planteamiento del problema** La presión  $P$  multiplicada por el área  $A_2$  del pistón grande debe ser igual al peso  $mg$  del coche. La fuerza que debe ejercerse sobre el pistón pequeño  $F_1$  es esta misma presión multiplicada por el área  $A_1$  (véase figura 13.4).

1. La fuerza  $F_1$  es la presión  $P$  multiplicada por el área  $A_1$ :

$$F_1 = PA_1$$

2. La presión multiplicada por el área  $A_2$  debe ser igual al peso del coche:

$$PA_2 = mg, \quad \text{de modo que} \quad P = \frac{mg}{A_2}$$

3. Utilizar este resultado de  $P$  para calcular  $F_1$ :

$$F_1 = PA_1 = \frac{mg}{A_2} A_1 = mg \frac{A_1}{A_2} = mg \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2}$$

$$= (1500 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg}) \frac{(2 \text{ cm})^2}{(20 \text{ cm})^2} = \boxed{147 \text{ N}}$$



**Figura 13.5** Paradoja hidrostática. El nivel del agua es el mismo en todos los recipientes con independencia de su forma. La porción sombreada del agua es soportada por las paredes laterales del recipiente.

En la figura 13.5 se muestra agua en un recipiente formado por secciones de diferentes formas. En una primera observación, podría parecer que la presión en la sección 3 del recipiente sería la mayor y que el agua, por lo tanto, se vería forzada a subir a una mayor altura en las secciones más pequeñas del recipiente. El hecho de que esto no ocurra así se conoce con el nombre de la **paradoja hidrostática**. La presión sólo depende de la profundidad del agua, no de la forma del recipiente. A la misma profundidad la presión es la misma en todas las partes del recipiente, como puede demostrarse experimentalmente. Aunque el agua de la sección 4 del contenedor pesa más que la de la sección 2, la proporción de agua de la sección 4 que no está sobre la zona abierta está soportada por las paredes horizontales del contenedor. De hecho, el agua que hay por encima de la zona abierta en la sección 5 pesa menos que la que hay por encima en la sección 1. Sin embargo, el contenedor horizontal de la sección 5 ejerce una fuerza hacia abajo sobre el agua que compensa exactamente su menor peso.

Para medir presiones desconocidas podemos utilizar el resultado de que la diferencia de presión es proporcional a la profundidad. En la figura 13.6 se muestra un medidor de presión simple, el manómetro de tubo abierto. La parte superior del tubo se encuentra abierta y por lo tanto a la presión atmosférica  $P_{at}$ . El otro extremo del tubo se encuentra a la presión  $P$  que se desea medir. La diferencia  $P - P_{at}$  es igual a  $\rho gh$ , en donde  $\rho$  es la densidad del líquido en el tubo, y se denomina **presión manométrica**. La presión que se mide en la cámara de la rueda en un coche es la presión manométrica. Cuando la cámara se encuentra completamente deshinchada, la presión manométrica es igual a cero, y la presión absoluta de la llanta es igual a la presión atmosférica. La presión absoluta  $P$  se obtiene a partir de la presión manométrica sumándole la presión atmosférica:

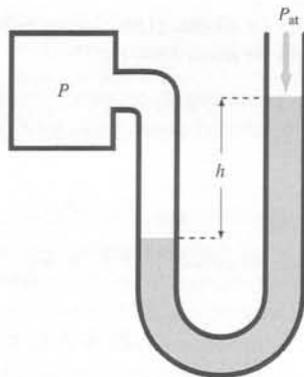
$$P = P_{\text{manométrica}} + P_{at} \quad (13.8)$$

En la figura 13.7 se muestra un barómetro de mercurio utilizado para medir la presión atmosférica. La parte superior del tubo está cerrada y se le ha hecho el vacío de forma que la presión en su interior es igual a cero. El otro extremo se encuentra abierto y a la presión atmosférica  $P_{at}$ . La presión  $P_{at}$  es  $\rho gh$ , donde  $\rho$  es la densidad del mercurio.

**Ejercicio** A  $0^\circ\text{C}$ , la densidad del mercurio es de  $13,595 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . ¿Cuál es la altura de la columna en un barómetro de mercurio si la presión es  $1 \text{ atm} = 101,325 \text{ kPa}$ ? (Respuesta  $h = P/\rho g = 0,760 \text{ m} = 760 \text{ mm}$ .)

En la práctica, la presión se mide frecuentemente en milímetros de mercurio (unidad llamada comúnmente **torr** en honor del físico italiano Torricelli) o en pulgadas de mercurio (escrito como **pulgHg**). Estas unidades de presión se relacionan entre sí del modo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 \text{ atm} &= 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ torr} = 29,9 \text{ pulgHg} \\ &= 101,325 \text{ kPa} = 14,7 \text{ lb/pulg}^2 \end{aligned} \quad (13.9)$$



**Figura 13.6** Manómetro de tubo abierto para medir una presión desconocida  $P$ . La diferencia  $P - P_{at}$  es igual a  $\rho gh$ .



**Figura 13.7**



Medidor de la presión para neumáticos. El pistón presiona la varilla hacia la derecha hasta que la fuerza del muelle más la fuerza de la presión atmosférica se equilibra con la fuerza ejercida por la presión del aire del interior del neumático.

Otras unidades utilizadas comúnmente en los mapas meteorológicos son el **bar** y el **milibar**, definidos por

$$1 \text{ bar} = 10^3 \text{ milibares} = 100 \text{ kPa} \quad (13.10)$$

Una presión de 1 atm es aproximadamente un 1,3% más grande que la presión de un bar.

### EJEMPLO 13.4 | Presión de la sangre en el interior de la aorta

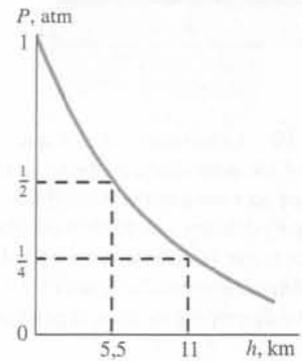
La presión manométrica medida en la aorta humana es de 100 mmHg aproximadamente. Convertir la presión sanguínea media en pascales.

Utilizamos los factores de conversión de la ecuación 13.9:

$$P = 100 \text{ mmHg} \frac{101,325 \text{ kPa}}{760 \text{ mmHg}} = \boxed{13,3 \text{ kPa}}$$

**Ejercicio** Convertir una presión de 45 kPa en (a) milímetros de mercurio y (b) atmósferas. (Respuestas (a) 338 mmHg, (b) 0,444 atm.)

La relación entre la presión y la altura (o profundidad) es más complicada en un gas que un líquido, debido a que la densidad de un gas no es constante como en un líquido, sino que depende de la presión. La presión de una columna de aire disminuye al aumentar la altitud considerada desde la superficie de la Tierra, como sucede con la presión de una columna de agua, pero a diferencia de este caso, la disminución de presión con la altura no es lineal con la distancia. En lugar de ello, la presión del aire disminuye en una fracción constante para un incremento fijo dado de altura, como se ve en la figura 13.8. A una altitud de 5,5 km aproximadamente, la presión del aire es la mitad del valor que tendría en la superficie del mar. Si ascendemos otros 5,5 km hasta una altitud de 11 km (altura típica de vuelo de un avión comercial), la presión se ha vuelto a reducir a la mitad, de modo que equivale a la cuarta parte de la que se tiene al nivel del mar, y así sucesivamente. Este ejemplo de *decrecimiento exponencial* se denomina “ley atmosférica”. Por ello, los aviones comerciales que vuelan a grandes alturas llevan sus cabinas presurizadas. Como la densidad del aire es proporcional a la presión, esta densidad también disminuye con la altura. Así, por ejemplo, se dispone de menos oxígeno en una montaña que a elevaciones normales, lo que hace más difícil la realización de ejercicios físicos en las montañas Rocosas, y ascender el Himalaya es peligroso.



**Figura 13.8** Variación de la presión con la altura por encima de la superficie terrestre. Por cada 5,5 km de incremento de altura, la presión se reduce a la mitad.

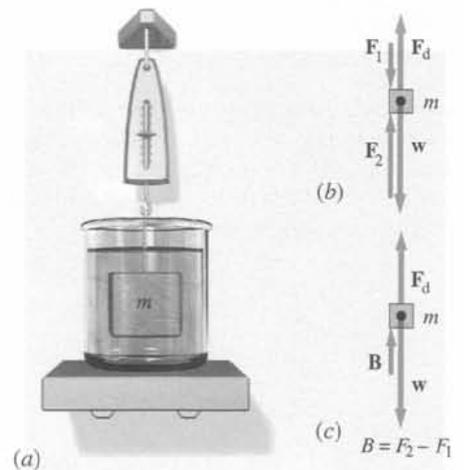
## 13.3 Flotación y principio de Arquímedes

Si pesamos un objeto pesado sumergido en agua suspendiéndolo de un dinamómetro (figura 13.9a), el peso aparente del objeto (la lectura del dinamómetro) es inferior al peso del objeto. Esto es así porque el agua ejerce una fuerza hacia arriba que equilibra parcialmente la fuerza de la gravedad. Esta fuerza es aún más evidente cuando sumergimos un trozo de corcho. Cuando el corcho está completamente sumergido, experimenta una fuerza hacia arriba ejercida por la presión del agua, que es mayor que la fuerza de la gravedad, de manera que el corcho acelera hacia la superficie, en donde flota parcialmente sumergido. La fuerza ejercida por un fluido sobre un cuerpo sumergido en él se denomina **fuerza ascensional** (o de flotación o empuje).<sup>1</sup> Es igual en módulo al peso del fluido desplazado por el cuerpo.

Todo cuerpo parcial o totalmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascensional igual al peso del fluido desplazado.

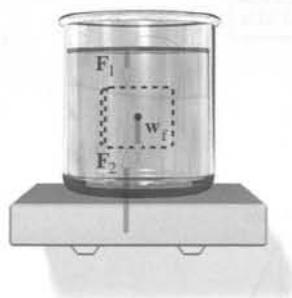
PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Este resultado se conoce con el nombre de **principio de Arquímedes**.



**Figura 13.9** (a) Forma de pesar un objeto sumergido en un fluido. (b) Diagrama de fuerzas en el que puede verse el peso,  $w$ , la fuerza ejercida por el muelle  $F_d$  y las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  ejercidas por el fluido que lo rodea. (c) La fuerza ascensional o de flotación  $B = F_2 - F_1$  es la fuerza neta ejercida por el fluido sobre el objeto.

<sup>1</sup> La definición de fuerza ascensional se refinará más adelante en esta sección.



**Figura 13.10** La misma situación que se daba en la figura 13.9, pero ahora el objeto ha sido sustituido por un volumen igual del fluido. Las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  debidas a la presión del fluido son las mismas que las fuerzas correspondientes ejercidas sobre el objeto en la figura 13.9. La fuerza ascensional o de empuje es igual al peso del fluido desplazado,  $w_f$ .

Podemos deducir el principio de Arquímedes a partir de las leyes de Newton considerando las fuerzas que actúan sobre una porción de un fluido y observando que, cuando está en equilibrio estático, la fuerza neta sobre la misma debe ser nula. La figura 13.9b muestra las fuerzas verticales que actúan sobre un objeto que se pesa mientras está sumergido, es decir, la fuerza de la gravedad  $w$  dirigida hacia abajo; la fuerza del dinamómetro  $F_d$  que actúa hacia arriba; una fuerza  $F_1$ , que actúa hacia abajo, debida a la presión del fluido sobre la superficie superior del objeto y una fuerza  $F_2$ , que actúa hacia arriba debida a la presión del fluido sobre la superficie inferior del objeto. Como la lectura del dinamómetro indica una fuerza inferior a su peso, la fuerza  $F_2$  debe ser mayor en módulo que  $F_1$ . La diferencia en módulo de estas dos fuerzas es la fuerza ascensional  $B = F_2 - F_1$  (figura 13.9c). La fuerza ascensional tiene lugar porque la presión del fluido en el fondo del cuerpo es mayor que en la parte superior.

En la figura 13.10 se prescinde del dinamómetro y el objeto sumergido se ha reemplazado por un volumen igual de fluido (indicado por líneas de puntos). La fuerza ascensional  $B = F_2 - F_1$  que actúa sobre este volumen de fluido es la misma que actuaba sobre nuestro objeto original, ya que el fluido que lo rodea es el mismo. Como este volumen de fluido está en equilibrio, la fuerza resultante que actúa sobre él debe ser cero. La fuerza ascensional es igual al peso del fluido en este volumen:

$$B = w_f \quad (13.11)$$

Obsérvese que este resultado no depende de la forma del objeto sumergido. Si consideramos una porción cualquiera de forma irregular del fluido, sobre ella deberá actuar una fuerza ascensional debida al fluido que la rodea y que resulta ser igual al peso de dicha porción. Por lo tanto, hemos deducido el principio de Arquímedes.

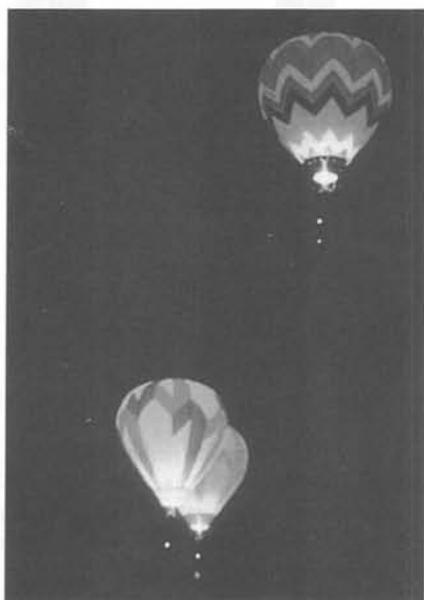
El rey Hierón II le había encomendado a Arquímedes (287-212 a.C.) la tarea de determinar si una corona fabricada para él estaba hecha toda ella de oro o si, por el contrario, contenía algún metal más barato como la plata. El problema consistía en determinar la densidad de un objeto de forma irregular, como la corona, sin destruirlo. Según cuenta la historia, Arquímedes encontró la solución mientras se bañaba e inmediatamente echó a correr desnudo por las calles de Siracusa gritando “¡Eureka!” (“¡Lo encontré!”). Este destello de comprensión precedió a las leyes de Newton, a partir de las cuales puede deducirse el principio de Arquímedes, en 1900 años aproximadamente. Arquímedes encontró lo que constituye un procedimiento simple y exacto para comparar la densidad de la corona con la densidad del oro utilizando una balanza. Puso la balanza en un cuenco y colocó la corona en un platillo y oro puro de igual masa en el otro. Entonces añadió agua al cuenco, sumergiendo la corona y el oro puro. La balanza osciló, elevando la corona —indicando que la fuerza ascensional que actuaba sobre ésta era mayor que la que actuaba sobre el oro puro, porque el volumen del agua desplazado por la corona era mayor que el desplazado por el oro puro. La corona era menos densa que el oro puro.

La densidad específica de un cuerpo es su peso dividido por el peso de un volumen igual de agua. Pero, de acuerdo con el principio de Arquímedes, el peso de un mismo volumen de agua es igual a la fuerza ascensional sobre el cuerpo cuando está sumergido en dicho líquido. Por consiguiente, es igual a la *pérdida* de peso del cuerpo cuando se pesa sumergido en agua. Así pues,

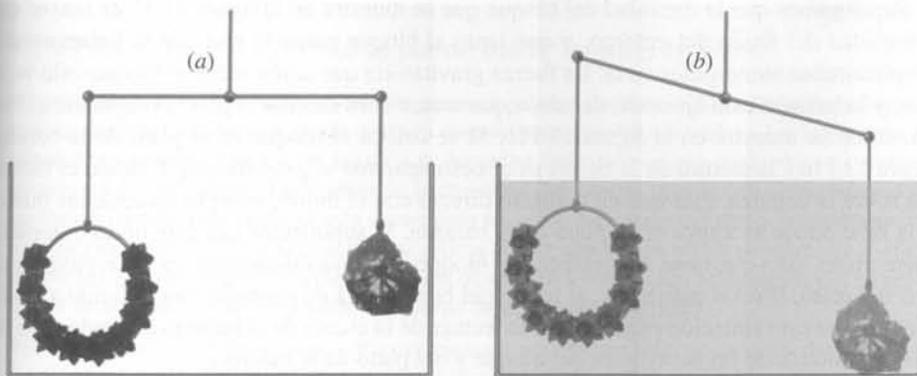
$$\begin{aligned} \text{Densidad específica} &= \frac{\text{peso}}{\text{fuerza ascensional cuando está sumergido en agua}} \\ &= \frac{w}{B_{\text{agua}}} \end{aligned} \quad (13.12)$$

El peso aparente  $w_a$  de un objeto sumergido en un fluido es la diferencia entre su peso  $w$  y la fuerza ascensional  $B$ .

$$w_{\text{ap}} = w - B \quad (13.13)$$



Globos de aire caliente elevándose en el cielo nocturno sobre Albuquerque durante un festival de globos.



(a) La corona y la pepita de oro tienen el mismo peso. (b) La corona desplaza más agua que la pepita de oro.

### EJEMPLO 13.5 | ¿Es oro?

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

Una amiga está preocupada por un anillo de oro que compró en un viaje reciente. El anillo era caro y nuestra amiga quiere saber si realmente es de oro o si es de otro material. Decidimos ayudarla usando nuestros conocimientos de física. Pesamos el anillo y encontramos que pesa 0,158 N. Usando una cuerda lo colgamos de una balanza, lo sumergimos en agua y entonces pesa 0,150 N. ¿Es de oro el anillo?

**Planteamiento del problema** Si el anillo es de oro puro, su densidad específica (su densidad relativa al agua) será de 19,3 (véase la tabla 13.1). Usando la ecuación 13.12 como referencia, determinar la densidad específica del anillo.

1. La ecuación 13.12 relaciona la densidad específica del anillo con el cociente entre su peso  $w$  y la fuerza de empuje  $B$  cuando está sumergido en agua:

$$\text{densidad específica} = \frac{w}{B_{\text{agua}}} = \frac{w}{B}$$

2. Cuando el cuerpo está sumergido,  $B$  se iguala con el peso menos el peso aparente  $w_{\text{ap}}$ :

$$B = w - w_{\text{ap}}$$

3. Se combinan los pasos 1 y 2 y se despeja la densidad específica:

$$\begin{aligned} \text{densidad específica} &= \frac{w}{B} = \frac{w}{w - w_{\text{ap}}} \\ &= \frac{0,158 \text{ N}}{0,158 \text{ N} - 0,150 \text{ N}} = 19,3 \end{aligned}$$

4. Se compara la densidad específica del anillo con la densidad específica del oro, que es 19,3:

$$19,3 \sim 19,3$$

El anillo es de oro puro

**Ejercicio** Un bloque de un material desconocido pesa 3 N y tiene un peso aparente de 1,89 N cuando se sumerge en agua. ¿De qué material se trata? (*Respuesta* La densidad específica del material es 2,70, que es la densidad específica del aluminio, por lo tanto el bloque es de aluminio.)

**Ejercicio** Un bloque de aluminio pesa 3 N cuando está rodeado de aire. ¿Cuál es el peso real del bloque? (*Respuesta*  $w_{\text{ap}} = w - B$ , donde  $B = \rho_{\text{aire}} Vg$  y  $w = \rho_{\text{alum}} Vg$ . De la tabla 13.1 se obtiene  $\rho_{\text{aire}} = 1,293 \text{ kg/m}^3$  y  $\rho_{\text{alum}} = 2,70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Por lo tanto,  $w = 3,0014 \text{ N}$ , que es sólo 0,048% mayor que el peso en aire. Evidentemente, la fuerza ascensional debida al aire actuando sobre líquidos o sólidos puede usualmente ignorarse.)

**Ejercicio** Un pedazo de plomo (densidad específica = 11,3) pesa 80 N en aire. ¿Cuánto pesa sumergido en agua? (*Respuesta* 72,9 N.)

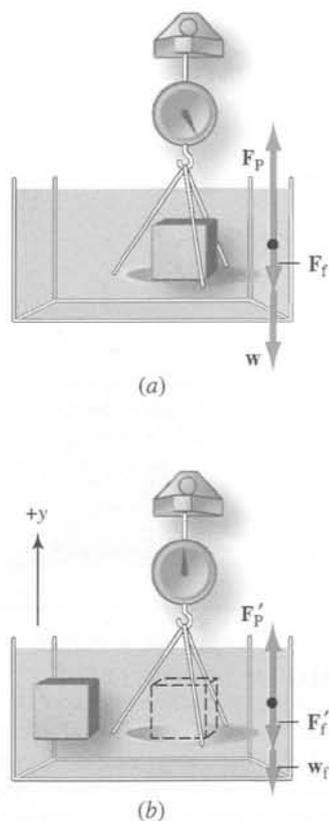


Figura 13.11

Supongamos que la densidad del bloque que se muestra en la figura 13.11 es mayor que la densidad del fluido del entorno, y que tanto el bloque como el plato de la balanza están completamente sumergidos en él. La fuerza gravitatoria que actúa sobre el bloque vale  $w$ , su peso, y la balanza está ajustada, de modo que marca cero cuando el plato no aguanta el bloque, como se muestra en la figura 13.11b. Si se coloca el bloque en el plato de la balanza (figura 13.11a), la lectura de la escala es el peso aparente  $w_{ap}$  del bloque. Cuando el bloque está sobre la balanza, éste está en contacto directo con el fluido, excepto en aquellos puntos de la base donde se apoya en el plato de la balanza. Si suponemos que éste no es completamente plano, sino que tiene rugosidades, el bloque se apoya únicamente en las regiones más altas del plato. (En las más bajas, el fondo del bloque está en contacto con el fluido.) Analicemos ahora esta situación para saber si la lectura de la escala de la balanza depende o no del área de contacto de las superficies del bloque y del plato de la balanza.

Mientras el bloque descansa sobre el plato de la balanza, la fuerza neta ejercida por el fluido sobre el bloque  $F_f$  resulta de una combinación de la fuerza hacia abajo ejercida por el fluido en la superficie más alta del bloque y de la fuerza hacia arriba ejercida por el fluido en aquellas regiones de la superficie inferior del bloque con las que está en contacto. (Hemos representado  $F_f$  hacia abajo. Sin embargo, si el fluido estuviera en contacto con una gran porción de la superficie inferior del bloque, esta fuerza podría ir dirigida hacia arriba). Las otras dos fuerzas verticales que actúan sobre el bloque son la fuerza gravitatoria  $w$  y la fuerza hacia arriba  $F_p$  ejercida por el plato en las regiones de contacto directo. En la figura 13.11b se representa el bloque fuera de la balanza, y en su lugar, la cantidad equivalente de fluido, de forma y tamaño idénticos (representado por la línea discontinua). Las mismas regiones que estaban en contacto con el bloque ahora lo están con la muestra de fluido y, en consecuencia, las fuerzas que actúan son la fuerza ejercida por el resto del fluido,  $F'_f$ , la fuerza hacia arriba ejercida por el plato,  $F'_p$ , y la fuerza gravitatoria  $w_f$ . Las fuerzas  $F_f$  y  $F'_f$  son iguales, ya que en cada punto de contacto entre el fluido y la muestra de fluido las fuerzas son exactamente las mismas que entre el fluido y el bloque.

Cuando el bloque está sobre el plato de la balanza, está en equilibrio, y por lo tanto,  $F_p = F_f + w$ , o bien

$$F_p - F_f - w = 0$$

y cuando el bloque se saca del plato de la balanza, la muestra de fluido que lo reemplaza está en equilibrio, y por lo tanto

$$F'_p - F'_f - w_f = 0$$

Si se restan las dos ecuaciones anteriores, teniendo en cuenta que  $F'_{f,y} = F_{f,y}$ , y se reagrupan los términos, nos queda

$$F_p - F'_p = w - w_f$$

en donde  $F_p - F'_p$  corresponde al cambio de la lectura cuando se saca el bloque del plato de la balanza. Por lo tanto,  $F_p - F'_p$  es el módulo del peso aparente del bloque sumergido y, en consecuencia

$$w_{ap} = w - w_f$$

Normalmente se denomina a  $w - w_{ap}$  fuerza ascensional  $B$ , con lo cual resulta

$$B = w - w_{ap} = w_f$$

Esta expresión para la fuerza ascensional coincide con la de la ecuación 13.13, que se estableció cuando el fluido estaba en contacto directo con toda la superficie del objeto sumergido.

### EJEMPLO 13.6 | ¿Cómo se puede medir la grasa corporal?

El porcentaje de grasa corporal de una persona puede estimarse midiendo la densidad de su cuerpo, teniendo en cuenta que la grasa es menos densa que los músculos y los huesos. La densidad de la grasa es  $\approx 0,9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  y la densidad del tejido magro (todo el resto excepto la grasa)  $\approx 1,1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . La medida de la densidad del cuerpo consiste en determinar el peso aparente cuando una persona está sumergida en agua, habiendo exhalado completamente el aire de sus pulmones. (En la práctica, se estima el aire que queda en los pulmones y se corrige su efecto). Supongamos que el peso aparente de una persona cuando está sumergida en agua es el 5% de su peso. ¿Qué porcentaje del cuerpo de la persona es grasa?

**Planteamiento del problema** En una persona el volumen total es la suma del volumen de grasa más el volumen de tejido magro, y la masa total es la suma de la masa de grasa más la masa de tejido magro. El volumen y la densidad están relacionados con la masa mediante la relación  $m = \rho V$ . La fracción de grasa se calcula dividiendo la masa de grasa entre la masa total e, igualmente, la fracción de tejido magro se calcula dividiendo la masa de tejido magro entre la masa total. Naturalmente, la fracción de masa más la fracción de tejido magro deben sumar 1.

1. Determinar la razón de la densidad del cuerpo de la persona y la densidad del agua usando las ecuaciones 13.2 y 13.3:

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{agua}}} = \frac{w}{w - w_{\text{ap}}} = \frac{w}{w - 0,05w} = 1,05$$

2. El volumen corporal total es igual a la suma del volumen de grasa más el volumen de tejido magro:

$$V_{\text{tot}} = V_g + V_m$$

3. Como la densidad es igual a la masa dividida por el volumen, el volumen es la masa dividida por la densidad. Se sustituye esta relación en el paso anterior:

$$\frac{m_{\text{tot}}}{\rho} = \frac{m_g}{\rho_g} + \frac{m_m}{\rho_m}$$

4. La razón  $m_g/m_{\text{tot}}$  es la fracción de masa y  $m_m/m_{\text{tot}}$  es la fracción de tejido magro. Se sustituye  $m_g$  y  $m_m$  en los resultados del paso 3:

$$\frac{m_{\text{tot}}}{\rho} = \frac{f_g m_{\text{tot}}}{\rho_g} + \frac{f_m m_{\text{tot}}}{\rho_m}$$

5. La suma de la fracción de grasa más la fracción de tejido magro es uno:

$$f_g + f_m = 1$$

6. Se dividen los dos términos del resultado del paso 4 por  $m_{\text{tot}}$  y se sustituye  $1 - f_g$  por  $f_m$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f_g}{\rho_g} + \frac{(1 - f_g)}{\rho_m}$$

7. Se despeja en el resultado del paso 6,  $f_g$ :

$$f_g = \frac{1 - (\rho_m/\rho)}{1 - (\rho_m/\rho_g)}$$

8. Se utiliza el resultado del paso 1 para sustituir la  $\rho$  del resultado del paso 7 y se despeja de nuevo  $f_g$ :

$$f_g = \frac{1 - (\rho_m/1,05\rho_{\text{agua}})}{1 - (\rho_m/\rho_g)} = \frac{1 - (1,1/1,05)}{1 - (1,1/0,9)} = 0,21$$

9. Se expresa la fracción de grasa como un porcentaje:

$$100\% \times f_g = \boxed{21\%}$$



La determinación del porcentaje de grasa del cuerpo de este hombre se realiza pesándolo cuando está sumergido bajo el agua, es decir, midiendo su densidad.

**Ejercicio** Si el peso aparente de Ed cuando se sumerge en agua es cero, ¿cuánto vale su porcentaje corporal de grasa? (Respuesta 45%)

### EJEMPLO 13.7 | Sobre una plataforma

Una plataforma flotante de área  $A$ , espesor  $h$  y masa  $M = 600 \text{ kg}$  flota en agua tranquila con una inmersión de 7 cm. Cuando una persona sube a la plataforma, la inmersión es de 8,4 cm (figura 13.12). ¿Cuál es la masa  $m$  de esta persona?

**Planteamiento del problema** Sea  $A$  el área de la plataforma. El peso del fluido desplazado por la plataforma sola es  $\rho_a A d_1 g$  y el desplazado cuando sube la persona,  $\rho_a A d_2 g$ , en donde  $\rho_a$  es la densidad del agua,  $d_1 = 7 \text{ cm}$  y  $d_2 = 8,4 \text{ cm}$ . Igualando el peso del fluido desplazado con el peso de los objetos flotantes en cada uno de los casos, podemos eliminar  $A$  y  $\rho_a$  y deducir la masa  $m$ .

1. Igualar la fuerza ascensional cuando la inmersión es  $d_1 = 7 \text{ cm}$ , con el peso de la plataforma, y cuando la inmersión es  $d_2 = 8,4 \text{ cm}$ , con el peso de la plataforma más el de la persona:

$$\begin{aligned} \rho_a A d_1 g &= Mg \\ \rho_a A d_2 g &= (M + m)g \end{aligned}$$

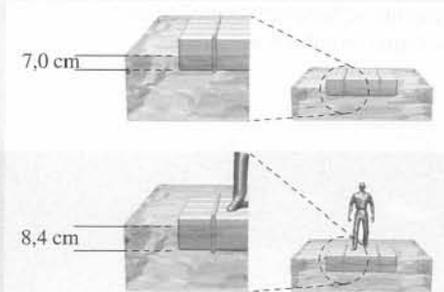


Figura 13.12

2. Dividir estas dos ecuaciones para eliminar las incógnitas  $A$  y  $\rho_a$ :

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{M+m}{M}$$

3. Despejar  $m$ :

$$m = \left(\frac{d_2}{d_1} - 1\right)M = \left(\frac{8,4 \text{ cm}}{7,0 \text{ cm}} - 1\right)(600 \text{ kg}) = \boxed{120 \text{ kg}}$$

### EJEMPLO 13.8 | El balanceo de un corcho

Un corcho posee una densidad  $\rho = 200 \text{ kg/m}^3$ . Determinar qué fracción del volumen del corcho se sumerge cuando el corcho flota en agua.

**Planteamiento del problema** Sea  $V$  el volumen del corcho y  $V_{\text{sum}}$  el volumen sumergido cuando flota en agua. El peso del corcho es  $\rho_c Vg$  y la fuerza ascensional debida al agua  $\rho_a V_{\text{sum}}g$ .

1. Como el corcho está en equilibrio, la fuerza ascensional será igual al peso:  $w = B$

2. Despejar  $V_{\text{sum}}/V$ :

$$\rho_c Vg = \rho_a V_{\text{sum}}g$$

$$\frac{V_{\text{sum}}}{V} = \frac{\rho_c}{\rho_a} = \frac{200 \text{ kg/m}^3}{1000 \text{ kg/m}^3} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

**Observación** Como hemos visto, sólo una quinta parte del corcho está sumergido. Este resultado es independiente de la forma del corcho.



Humo que sale de un cigarrillo encendido. Al comienzo, el humo asciende mediante un flujo regular, el flujo laminar, pero rápidamente este movimiento se hace turbulento, de tal forma que el humo forma remolinos irregulares.

Reemplazando en el cálculo anterior  $\rho_a$  por  $\rho_f$ , la densidad del fluido, podemos determinar la fracción sumergida de un objeto flotante en cualquier fluido. En el ejemplo anterior hemos visto que la fracción de un objeto flotante sumergido es igual al cociente de la densidad del objeto y la densidad del fluido.

$$\frac{V_{\text{sum}}}{V} = \frac{\rho}{\rho_f} \quad (13.14)$$

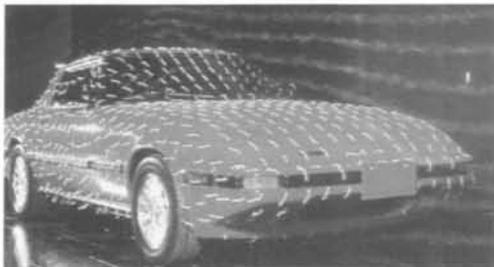
Como la densidad del hielo es  $920 \text{ kg/m}^3$  y la densidad del agua del mar es  $1025 \text{ kg/m}^3$ , la fracción de un iceberg sumergido en el océano es

$$\frac{V_{\text{sum}}}{V} = \frac{\rho}{\rho_f} = \frac{920 \text{ kg/m}^3}{1025 \text{ kg/m}^3} = 0,898$$

El gran peligro que representan los icebergs para los barcos está relacionado con el hecho de que sólo el 10 por ciento aproximadamente de un iceberg es visible por encima del agua. La porción visible del iceberg ofrece poca información sobre la posición de la porción sumergida del mismo.

## 13.4 Fluidos en movimiento

El comportamiento de un fluido en movimiento puede ser en general muy complicado. Consideremos, por ejemplo el humo que asciende de un cigarrillo encendido. Al principio el humo se eleva con una forma regular, pero pronto aparecen turbulencias y el humo empieza a ondear de forma irregular. El flujo turbulento es muy difícil de estudiar, aunque sólo sea cualitativamente. Por consiguiente, sólo consideraremos el flujo no turbulento, en estado estacionario de un fluido "ideal", no viscoso; es decir, uno que fluye sin disipación de energía mecánica. Supondremos también que el fluido es incompresible, lo cual es una buena



aproximación para la mayor parte de los líquidos. En un fluido incompresible, la densidad es constante en todo el fluido.

Puede verse en la figura 13.13 un fluido que circula por un tubo cuya sección transversal decrece. El fluido fluye de izquierda a derecha. La parte sombreada de la izquierda indica el volumen del líquido que fluye hacia el interior del tubo en el punto 1 en cierto intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Si la velocidad del fluido en este punto es  $v_1$  y el área de la sección transversal del tubo vale  $A_1$ , el volumen que entra en el tubo en el tiempo  $\Delta t$  es

$$\Delta V = A_1 v_1 \Delta t$$

Como estamos admitiendo que el fluido es incompresible, un volumen igual debe pasar por cualquier punto del tubo en el mismo intervalo de tiempo  $\Delta t$ . El volumen que sale del tubo en el punto 2 se indica con la zona sombreada a la derecha de la figura. Si la velocidad del fluido en este punto es  $v_2$  y el área correspondiente de la sección recta vale  $A_2$ , el volumen es  $\Delta V = A_2 v_2 \Delta t$ . Como estos volúmenes son iguales, se tiene

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t \quad \text{y por lo tanto} \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (13.15)$$

La magnitud  $Av$  se denomina **caudal**  $I_v$ . Las dimensiones de  $I_v$  son las de volumen dividido por tiempo. En el flujo estacionario de un fluido incompresible, el caudal es el mismo en todos los puntos de fluido:

$$I_v = Av = \text{constante} \quad (13.16)$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD PARA UN FLUIDO INCOMPRESIBLE

La ecuación 13.16 se denomina **ecuación de continuidad**.

**Ejercicio** La sangre circula por una arteria aorta de 1,0 cm de radio a 30 cm/s. ¿Cuál es el caudal? (Respuesta  $I_v = Av = 9,42 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ .) Es costumbre dar la velocidad del bombeo del corazón en litros por minuto. Utilizando  $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$  y  $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ , se tiene  $I_v = 5,65 \text{ L/min}$ .

**Ejercicio** La sangre circula desde una porción de arteria gruesa de 0,3 cm de radio, en donde su velocidad es 10 cm/s, a otra región en donde el radio se ha reducido a 0,2 cm, debido a un engrosamiento de las paredes (arteriosclerosis). ¿Cuál es la velocidad de la sangre en la zona más estrecha? (Respuesta Si las velocidades inicial y la final son  $v_1$  y  $v_2$  y las áreas correspondientes son  $A_1$  y  $A_2$ , la ecuación 13.16 da

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi(0,3 \text{ cm})^2}{\pi(0,2 \text{ cm})^2} (10 \text{ cm/s}) = 22,5 \text{ cm/s}.)$$

## Ecuación de Bernoulli

Cuando una pequeña muestra de fluido fluye por un tubo y entra en una zona más estrecha, gana velocidad porque la presión que lo empuja de detrás hacia delante es mayor que la presión que desde el frente se opone al movimiento. La ecuación de Bernoulli relaciona la presión, elevación y velocidad de un fluido *incompresible* en flujo *estacionario*. Resulta de las leyes de Newton y se deduce fácilmente aplicando el teorema trabajo-energía a una porción del fluido.

Consideremos un fluido que circula por una tubería cuya altura y sección van variando como se indica en la figura 13.14. Apliquemos el teorema trabajo-energía a la muestra de flujo que está contenida inicialmente entre los puntos 1 y 2 de la figura 13.14a. Al cabo de un cierto tiempo  $\Delta t$ , esta muestra de fluido se habrá movido a lo largo del tubo y estará contenida en la región comprendida entre los puntos 1' y 2' de la figura 13.14b. Sea también  $\Delta m = \rho \Delta V$  la masa de muestra de fluido. El efecto neto producido sobre el fluido en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  consiste en que la muestra  $\Delta m$  de fluido se eleva desde la altura  $h_1$  a la altura  $h_2$ , mientras que su velocidad varía de  $v_1$  a  $v_2$ . La variación de la energía potencial de la muestra es

$$\Delta U = (\Delta m) gh_2 - (\Delta m) gh_1 = \rho \Delta V g(h_2 - h_1)$$

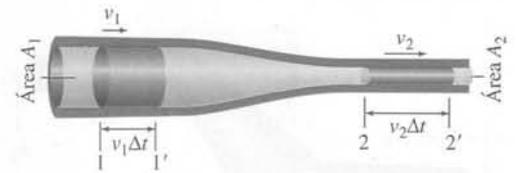


Figura 13.13

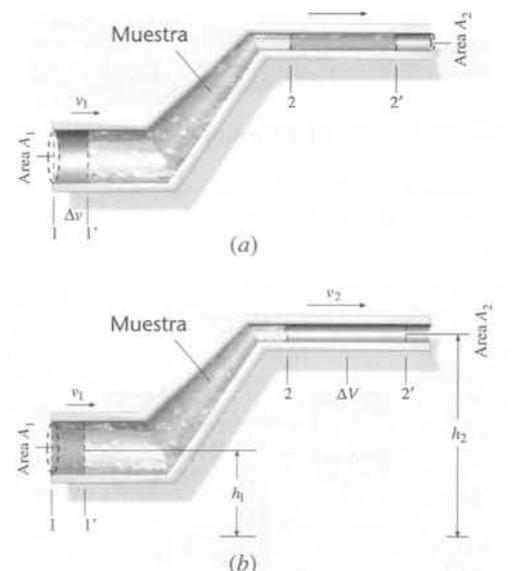
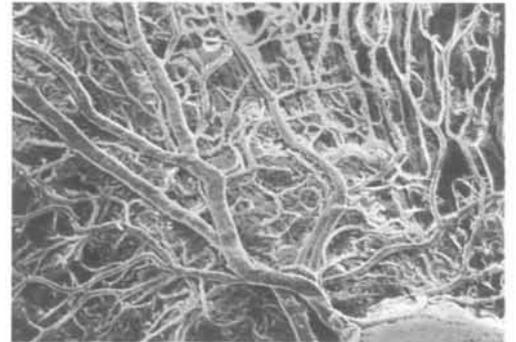
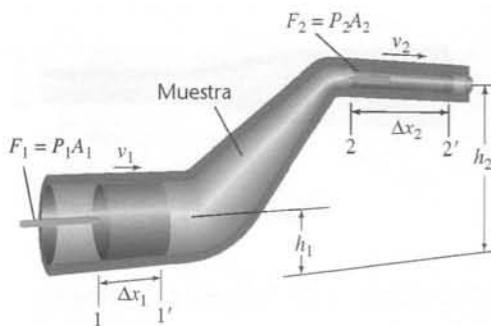


Figura 13.14



**Figura 13.15** Fluido que se mueve dentro de una tubería de altura y sección transversal variable. El trabajo total que realizan las fuerzas  $F_1 = P_1A_1$  y  $F_2 = P_2A_2$  tiene el efecto de elevar la porción sombreada de fluido desde una altura  $h_1$  a  $h_2$  y de cambiar su velocidad de  $v_1$  a  $v_2$ .

y la variación de su energía cinética vale

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(\Delta m)v_2^2 - \frac{1}{2}(\Delta m)v_1^2 = \frac{1}{2}\rho \Delta V(v_2^2 - v_1^2)$$

El fluido que marcha detrás de la muestra  $\Delta m$  de fluido en el tubo (a su izquierda en la figura 13.15) ejerce una fuerza sobre ella de valor  $F_1 = P_1A_1$ , en donde  $P_1$  es la presión en el punto 1. Esta fuerza realiza un trabajo

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V$$

Al mismo tiempo, el fluido que precede a la masa en cuestión (a su derecha) ejerce una fuerza  $F_2 = P_2A_2$  dirigida hacia la izquierda de la figura. Esta fuerza realiza un trabajo negativo porque se opone al movimiento:

$$W_2 = -F_2 \Delta x_2 = -P_2A_2 \Delta x_2 = -P_2 \Delta V$$

El trabajo total realizado por estas fuerzas es

$$W_{\text{total}} = P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = (P_1 - P_2) \Delta V$$

El teorema trabajo-energía dice que

$$W_{\text{total}} = \Delta U + \Delta E_c$$

de modo que

$$(P_1 - P_2) \Delta V = \rho \Delta V g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho \Delta V(v_2^2 - v_1^2)$$

Si dividimos ambos lados por  $\Delta V$ , se obtiene

$$P_1 - P_2 = \rho g h_2 - \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

si reunimos todas las magnitudes que tienen subíndice 1 en un lado de la igualdad y dejamos las que tienen subíndice 2 en el otro, esta ecuación se convierte en

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (13.17a)$$

Este resultado puede finalmente escribirse como

$$P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \quad (13.17b)$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI

lo que significa que esta combinación de magnitudes calculada en un punto determinado de la tubería tiene el mismo valor que en cualquier otro punto. Las ecuaciones 13.17a y 13.17b se conocen como **ecuación de Bernoulli** para el flujo constante y no viscoso de un fluido incompresible.

Una aplicación especial de la ecuación de Bernoulli es la que se tiene cuando el fluido está en reposo. Entonces  $v_1 = v_2 = 0$  y se obtiene

$$P_1 - P_2 = \rho g (h_2 - h_1) = \rho g h$$

Este resultado es el mismo que el de la ecuación 13.7.

### EJEMPLO 13.9 | Un depósito agujereado

Un depósito grande de agua, abierto por arriba, tiene un orificio pequeño a una distancia  $\Delta h$  por debajo de la superficie del agua. Hallar la velocidad del agua cuando escapa por el orificio.

**Planteamiento del problema** Apliquemos la ecuación de Bernoulli a los puntos  $a$  y  $b$  de la figura 13.16. Como el diámetro del orificio es mucho menor que el diámetro del depósito, podemos despreciar la velocidad del agua en su parte superior (punto  $a$ ).

- Según la ecuación de Bernoulli, con  $v_a = 0$ :
- La presión en los puntos  $a$  y  $b$  es la misma,  $P_{at}$ , ya que ambos están abiertos al aire:
- Despejar la velocidad  $v_b$  del agua que fluye por el orificio:

$$P_a + \rho g h_a + 0 = P_b + \rho g h_b + \frac{1}{2} \rho v_b^2$$

$$P_a = P_{at} \quad \text{y} \quad P_b = P_{at}$$

$$0$$

$$P_{at} + \rho g h_a + 0 = P_{at} + \rho g h_b + \frac{1}{2} \rho v_b^2$$

$$v_b^2 = 2g(h_a - h_b) = 2g\Delta h$$

y por lo tanto

$$v_b = \boxed{\sqrt{2g\Delta h}}$$

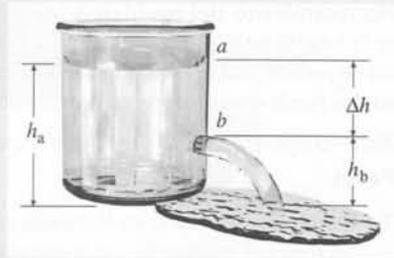


Figura 13.16

**Ejercicio** Si el agua que fluye por el orificio estuviera dirigida verticalmente hacia arriba, ¿qué altura alcanzaría? (Respuesta El agua alcanzaría una altura  $\Delta h$ , es decir, el mismo nivel que el agua tiene en el depósito.)

En el ejemplo 13.9 el agua sale del orificio con una velocidad igual a la que tendría si cayese en caída libre una distancia  $h$ . Este resultado se conoce como **ley de Torricelli**.

En la figura 13.17 se muestra agua que está circulando por una tubería horizontal que tiene una región de menor diámetro. Como ambas partes del tubo tienen la misma altura,  $h_1 = h_2$  en la ecuación 13.17a. Entonces la ecuación de Bernoulli se reduce a

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante} \quad (13.18)$$

Cuando el fluido se introduce en el estrechamiento, al ser menor el área  $A$ , la velocidad  $v$  deberá, en consecuencia, ser mayor, para que se mantenga constante el producto  $Av$ . Pero, si la velocidad aumenta, la presión debe disminuir, puesto que  $P + \frac{1}{2} \rho v^2$  debe permanecer constante. Por consiguiente, se reduce la presión en la parte estrecha.

Cuando aumenta la velocidad de un fluido, desciende la presión.

#### EFEECTO VENTURI

Este resultado suele conocerse como **efecto Venturi**. La ecuación 13.18 es un importante resultado que se aplica en muchas situaciones donde pueden ignorarse los cambios de altura.

En la figura 13.18 se representan las **líneas de corriente** del flujo de un fluido. La dirección de las líneas denota la dirección del flujo y el espaciado entre ellas representa su velocidad. Cuanto menor es el espacio entre líneas, mayor es la velocidad. En el flujo horizontal, cuando la velocidad aumenta, la presión disminuye, por lo que cuando las líneas de corriente se juntan la presión disminuye.

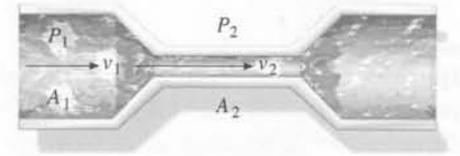


Figura 13.17 Estrechamiento en una tubería por la que circula un fluido. La presión es menor en la sección más estrecha de la tubería, en donde el fluido se mueve más rápidamente.

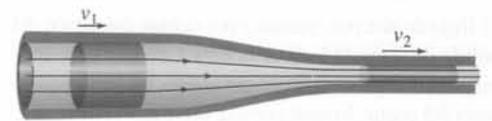


Figura 13.18

### EJEMPLO 13.10 | El venturímetro

Un **venturímetro** es un aparato para medir la velocidad de un fluido. Un fluido de densidad  $\rho_F$  pasa a través de una tubería de área transversal  $A_1$  que posee un estrechamiento de área  $A_2$  (figura 13.19). Las dos partes de la conducción están conectadas por un manómetro, un tubo en forma de U, parcialmente lleno de un líquido de densidad  $\rho_L$ . Como la velocidad de flujo es mayor en el estrechamiento, la presión en esta sección es menor que en la parte más ancha de la tubería. La diferencia de presión viene medida por la diferencia  $\Delta h$  de los niveles del líquido en el tubo en U. Expresar la velocidad  $v_1$  en función de la altura medida  $\Delta h$  y las magnitudes conocidas  $\rho_F$ ,  $\rho_L$  y  $r = A_1/A_2$ .

#### ¡INTÉNELO USTED MISMO!

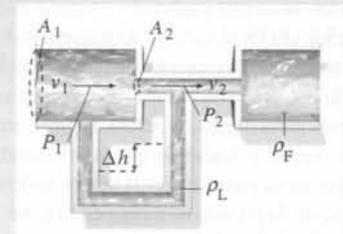


Figura 13.19 Venturímetro.

**Planteamiento del problema** Las presiones  $P_1$  y  $P_2$  en las regiones más ancha y más estrecha de la tubería están relacionadas con las velocidades  $v_1$  y  $v_2$  por la ecuación de Bernoulli. La diferencia de presión está relacionada con la altura  $\Delta h$  por  $P_1 - P_2 = \rho_L g \Delta h$ . Mediante la ecuación de continuidad puede expresarse  $v_2$  en función de  $v_1$  y las áreas  $A_1$  y  $A_2$ .

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

1. Expresar la ecuación de Bernoulli en una conducción horizontal para las regiones más ancha y más estrecha de la tubería.
2. Expresar la ecuación de continuidad para las dos regiones y despejar  $v_2$  en función de  $v_1$  y las áreas  $A_1$  y  $A_2$ .
3. Sustituir el valor de  $v_2$  en la ecuación del paso 1 y obtener una ecuación para  $P_1 - P_2$ .
4. Escribir  $P_1 - P_2$  en función de la diferencia de altura  $\Delta h$  del agua en las ramas del tubo en U. Esta diferencia de presión es igual a la caída de la presión en una columna del líquido de altura  $\Delta h$  y a la de una columna de fluido de la misma altura.
5. Igualar las dos expresiones de  $P_1 - P_2$  y despejar  $v_1$  en función de  $\Delta h$ .

#### Respuestas

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_F v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_F v_2^2$$

$$v_2 A_2 = v_1 A_1$$

de modo que

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = r v_1$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho_F (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho_F (r^2 - 1)v_1^2$$

$$P_1 - P_2 = \rho_L g \Delta h - \rho_F g \Delta h = (\rho_L - \rho_F) g \Delta h$$

$$\frac{1}{2}\rho_F (r^2 - 1)v_1^2 = (\rho_L - \rho_F) g \Delta h$$

de donde

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho_L - \rho_F) g \Delta h}{\rho_F (r^2 - 1)}}$$

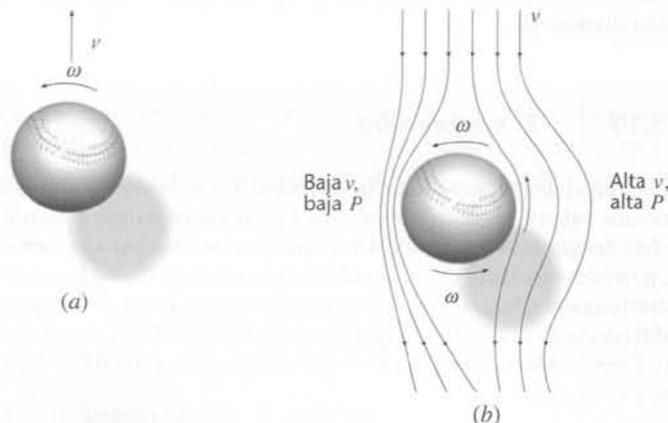
**Ejercicio** Determinar  $v_1$  si  $\Delta h = 3$  cm,  $r = 4$ , el fluido es aire ( $\rho_F = 1,29$  kg/m<sup>3</sup>) y el líquido del tubo en U del venturímetro es agua ( $\rho_L = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>). (Respuesta  $v_1 = 5,52$  m/s.)

**Observación** Este cálculo no es tan exacto como el del ejemplo 13.9 porque el aire no es un fluido incompresible. Estrictamente hablando, la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad sólo se cumplen para fluidos incompresibles.



El flujo de aire por encima y por debajo del alerón del bólido de fórmula Indy de la figura, crea una presión mayor en la parte superior del alerón, aumentando el peso del coche, lo cual permite un mejor control del mismo cuando se mueve a velocidades altas. Las alas de avión se diseñan de tal modo que la presión del aire debajo del ala sea mayor que la presión por encima del ala creando así la sustentación del aparato.

El efecto Venturi permite explicar cualitativamente tanto la sustentación de las alas de los aviones como las trayectorias curvas de las pelotas lanzadas con efecto. El ala de los aviones se diseña de modo que el aire se mueva más rápidamente sobre la parte superior del ala que bajo de la misma, con lo cual la presión del aire es menor encima que debajo del ala. La figura 13.20a muestra una visión superior del movimiento de una pelota que sigue una trayectoria curva. Cuando la pelota gira sobre sí misma tiende a arrastrar aire a su alrededor. La figura 13.20b está dibujada desde el punto de vista de la pelota estacionaria (pero girando sobre sí misma) con el aire moviéndose respecto a ella. El movimiento del aire originado por el arrastre de la bola en movimiento giratorio, se suma a la velocidad del aire que se mueve por el lado izquierdo de la pelota (parte superior en la figura), y se resta de ella por el lado derecho (o parte



**Figura 13.20** (a) Vista superior de una pelota lanzada con un efecto (velocidad angular  $\omega$ ) que la hace girar sobre sí misma en sentido contrario al de las agujas del reloj. (b) En el sistema de referencia de la pelota, ésta se encuentra estacionaria (pero girando) y el aire circula con gran velocidad al pasar junto a ella. Debido a su cubierta rugosa, la pelota, al girar, arrastra el aire de su alrededor, haciendo que la velocidad del aire sea mayor en su parte izquierda que en la derecha. Por consiguiente, la presión es menor en la parte izquierda, en donde la velocidad del aire es mayor, de forma que la pelota se desvía hacia la izquierda.

inferior en la figura). Así pues, la velocidad del aire es mayor en el lado izquierdo de la pelota que en el lado derecho y, por lo tanto, la presión en el lado izquierdo es menor que la existente en el lado derecho. Por consiguiente, la trayectoria se curva hacia la izquierda. El pulverizador de la figura 13.21 funciona también según el principio del efecto Venturi.

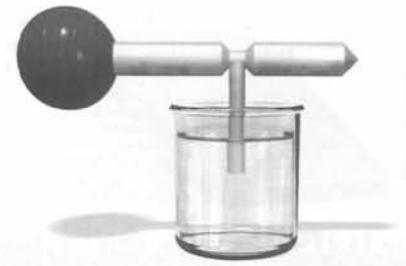
Aunque la ecuación de Bernoulli resulta muy útil para describir cualitativamente muchas de las características de un fluido en movimiento, normalmente resulta inadecuada cuando se compara cuantitativamente con los resultados experimentales. Por supuesto, los gases como el aire no son incompresibles, y los líquidos como el agua poseen viscosidad; lo que inválida la suposición hecha de que se conserva la energía mecánica. Además, normalmente resulta difícil mantener el flujo estacionario sin que se produzca turbulencia, y este fenómeno influye grandemente en los resultados.

### \*Flujo viscoso

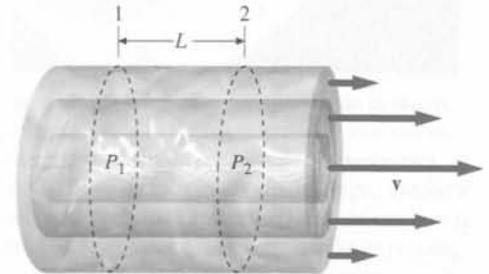
De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, si un fluido fluye estacionariamente por una tubería horizontal estrecha y de sección transversal constante, la presión será constante a lo largo de la tubería. En la práctica se observa una caída de presión según nos desplazamos en la dirección del flujo. Considerando este fenómeno de otro modo, podemos ver que se requiere una diferencia de presión para empujar y conseguir la circulación de un fluido a través de un tubo horizontal. Es necesaria esta diferencia de presión a causa de la fuerza de resistencia o de frenado que ejerce el tubo sobre la capa de fluido que está en contacto con él y de la fuerza de arrastre que ejerce cada capa de fluido sobre la adyacente que se está moviendo con distinta velocidad. Estas fuerzas de arrastre o de resistencia se denominan **fuerzas viscosas**. Como resultado de su presencia, la velocidad del fluido tampoco es constante a lo largo del diámetro de la tubería siendo mayor cerca de su centro y menor cerca de sus bordes, en donde el fluido entra en contacto con las paredes de la misma (figura 13.22). Sea  $P_1$  la presión en el punto 1 y  $P_2$  la presión en el punto 2 a la distancia  $L$  (siguiendo la dirección de la corriente) del anterior. La caída de presión  $\Delta P = P_1 - P_2$  es proporcional al caudal:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = I_V R \quad (13.19)$$

en donde  $I_V = vA$  es el caudal y la constante de proporcionalidad  $R$  es la resistencia al flujo, que depende de la longitud  $L$  del tubo, de su radio  $r$  y de la viscosidad del fluido.



**Figura 13.21** Pulverizador. Apretando el bulbo de la izquierda se obliga al aire a atravesar la parte estrecha del tubo lo que hace que la presión se reduzca respecto a la presión atmosférica. Debido a la diferencia de presiones que resulta de ello, el líquido contenido en el vaso se ve forzado a introducirse en la corriente de aire a través del tubo vertical y emerge por la boquilla. Un efecto análogo tiene lugar en el carburador de un motor de gasolina.



**Figura 13.22** Cuando un fluido viscoso fluye por una tubería, su velocidad es mayor en el centro de la misma. Próximo a las paredes de la tubería el fluido tiende a permanecer en reposo.

### EJEMPLO 13.11 | Resistencia al flujo sanguíneo

Cuando la sangre fluye procedente de la aorta a través de las arterias principales, las arteriolas, los capilares y las venas, hasta la aurícula derecha, la presión (manométrica) desciende desde 100 torr aproximadamente a cero. Si el caudal es de 0,8 L/s, hallar la resistencia total del sistema circulatorio.

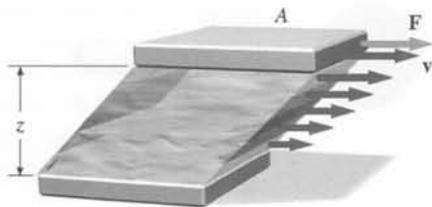
**Planteamiento del problema** La resistencia está relacionada con la caída de presión y el caudal por la ecuación 13.19. Utilizaremos la ecuación 13.9 para convertir los torr en kPa.

Expresar la resistencia en función de la caída de presión y el caudal y expresar todos los términos en unidades del SI:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Delta P}{I_V} \\ &= \frac{100 \text{ torr}}{0,8 \text{ L/s}} \times \frac{101 \text{ kPa}}{760 \text{ torr}} \times \frac{1 \text{ L}}{10^3 \text{ cm}^3} \times \frac{1 \text{ cm}^3}{10^{-6} \text{ cm}^3} \\ &= \boxed{16,6 \text{ kPa} \cdot \text{s/m}^3} \end{aligned}$$

**Observación** Recordando que  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$  podríamos expresar el resultado en la forma  $1,66 \text{ kN} \cdot \text{s/m}^5$ .

A continuación definiremos el coeficiente de viscosidad de un fluido. En la figura 13.23 se muestra un fluido confinado entre dos placas paralelas, cada una de ellas de área  $A$  y separadas por una distancia  $z$ . Manteniendo la placa inferior en reposo, se tira de la placa superior con velocidad constante  $v$  mediante una fuerza  $F$ . Es necesario ejercer esta fuerza para



**Figura 13.23** Fluido viscoso entre dos placas iguales de área  $A$ . Cuando se mueve la placa superior respecto a la placa inferior, cada capa de fluido ejerce una fuerza de arrastre sobre las capas adyacentes. La fuerza necesaria para desplazar la placa superior es proporcional a la velocidad  $v$  y al área  $A$  e inversamente proporcional a la separación entre las placas  $z$ .

tirar de la placa superior porque el fluido próximo a la placa ejerce una fuerza viscosa de resistencia que se opone al movimiento. La velocidad del fluido entre las placas es prácticamente igual a  $v$  en un lugar próximo a la placa superior y próximo a cero cerca de la placa inferior, y varía linealmente con la distancia entre las placas. La fuerza  $F$  resulta ser directamente proporcional a  $v$  y  $A$  e inversamente proporcional a la separación  $z$  entre las placas. La constante de proporcionalidad es el **coeficiente de viscosidad**  $\eta$ :

$$F = \eta \frac{vA}{z} \quad (13.20)$$

La unidad de viscosidad en el SI es el  $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = \text{Pa} \cdot \text{s}$ . Una unidad antigua del sistema cgs, pero de uso común, es la dina/cm<sup>2</sup>, llamada **poise** en honor del físico francés Poiseuille. Estas unidades están relacionadas por

$$1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ poise} \quad (13.21)$$

En la tabla 13.3 se muestran los coeficientes de viscosidad para varios fluidos a diferentes temperaturas. Generalmente la viscosidad de un líquido aumenta cuando disminuye la temperatura. Así pues, en climas fríos, el aceite a utilizar para lubricar los motores de los automóviles debe tener un grado de viscosidad más bajo en invierno que en verano.

**Ley de Poiseuille** Se puede demostrar que la resistencia  $R$  a la circulación de un fluido de la ecuación 13.19 para un flujo estacionario en un tubo circular de radio  $r$  es

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \quad (13.22)$$

Las ecuaciones 13.19 y 13.22 se pueden combinar para obtener la caída de presión en una longitud  $L$  de un tubo circular de radio  $r$ :

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} I_V \quad (13.23)$$

LEY DE POISEUILLE

La ecuación 13.23 se conoce con el nombre de **ley de Poiseuille**. Obsérvese la dependencia con la inversa de  $r^4$  de la caída de presión. Si se divide por la mitad el radio del tubo, la caída de presión para un flujo de volumen y viscosidad dados se aumenta en un factor de 16; o bien se necesita una presión 16 veces mayor para impulsar el fluido a través del tubo con el mismo flujo de volumen. Por ello, si por alguna razón se reduce el diámetro de los vasos sanguíneos o arterias, o bien el flujo de volumen de la sangre disminuye grandemente, o bien la presión sanguínea debe subir para mantener el mismo flujo de volumen. Para el agua que fluye por una manguera larga del jardín, la caída de presión es la que existe desde la fuente de agua hasta el extremo abierto de la manguera a presión atmosférica. Del mismo modo, el

**TABLA 13.3** Coeficientes de viscosidad de varios fluidos

Fluido	$t, ^\circ\text{C}$	$\eta, \text{mPa}\cdot\text{s}$
Agua	0	1,8
	20	1,00
	60	0,65
Sangre	37	4,0
	30	200
Aceite para motores (SAE 10W)	30	1410
Glicerina	0	10 000
	20	1410
	60	81
Aire	20	0,018

flujo es proporcional a la cuarta potencia del radio. Si el radio se divide por la mitad, el flujo disminuye en un factor de 16.

La ley de Poiseuille se aplica sólo al flujo laminar (no turbulento) de un fluido de viscosidad constante que es independiente de la velocidad del fluido. La sangre es un fluido complejo formado por partículas sólidas de diferentes formas suspendidas en un líquido. Los glóbulos rojos de la sangre, por ejemplo, son corpúsculos en forma de disco que están orientados al azar a velocidades bajas pero que, a velocidades altas, tienden a orientarse para facilitar el flujo. Así pues, la viscosidad de la sangre disminuye cuando aumenta la velocidad de flujo, de forma que no es estrictamente válida la ley de Poiseuille. Sin embargo, dicha ley es una buena aproximación que es muy útil cuando se quiere obtener una comprensión cualitativa del flujo sanguíneo.

En el capítulo 25 se estudiará el flujo de corriente eléctrica  $I$  por un hilo de metal. Una de las relaciones básicas de aquel capítulo es la ley de Ohm,  $\Delta V = IR$ , donde  $\Delta V$  es la diferencia de potencial y  $R$  es la resistencia eléctrica del hilo. Como veremos, la ley de Ohm es análoga a la ley de Poiseuille  $\Delta P = I_V R$ .

**Turbulencia: número de Reynolds** Cuando la velocidad de flujo de un fluido resulta suficientemente grande, se rompe el flujo laminar y se establece la turbulencia. La velocidad crítica por encima de la cual el flujo que fluye a través de un tubo resulta turbulento depende de la densidad y de la viscosidad del fluido y del radio del tubo. El flujo de un fluido puede caracterizarse mediante un número adimensional denominado **Número de Reynolds**  $N_R$ , que se define así:

$$N_R = \frac{2r\rho v}{\eta} \quad (13.24)$$

en donde  $v$  es la velocidad media del fluido. Los experimentos han demostrado que el flujo será laminar si el número de Reynolds es inferior a 2000 aproximadamente y será turbulento si sobrepasa los 3000. Entre estos valores el flujo es inestable y puede variar de un tipo de flujo a otro.

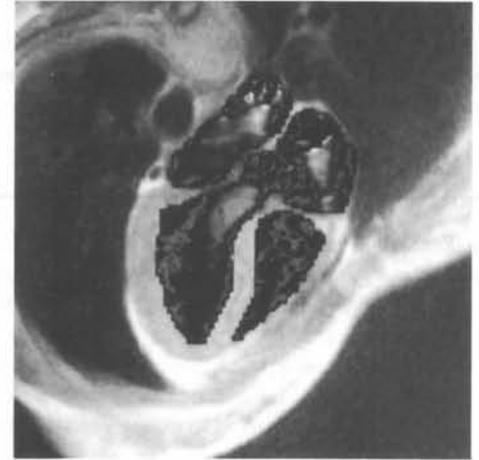


Foto en falso color de la turbulencia de la sangre que entra y sale del corazón según se muestra en una imagen obtenida por resonancia magnética (IRM). Se ve en rojo en chorro de sangre sistólico que, procedente del ventrículo izquierdo, entra en la aorta; es de color azul la sangre que en el proceso diastólico procede a llenar los ventrículos.

### EJEMPLO 13.12 | Flujo sanguíneo en la aorta

Calcular el número de Reynolds para la sangre que circula a 30 cm/s por una aorta de 1,0 cm de radio. Suponer que la sangre tiene una viscosidad de 4 mPa · s y una densidad de 1060 kg/m<sup>3</sup>.

**Planteamiento del problema** Como el número de Reynolds,  $N_R$ , es adimensional, podemos utilizar cualquier sistema de unidades con tal de que sea coherente.

Expresar la ecuación 13.24 del número de Reynolds con todas las magnitudes expresadas en unidades del SI:

$$N_R = \frac{2r\rho v}{\eta} = \frac{2(0,01 \text{ m})(1060 \text{ kg/m}^3)(0,3 \text{ m/s})}{4 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = \boxed{1590}$$

**Observación** Como el número de Reynolds es inferior a 2000, este flujo será laminar y no turbulento.

## Resumen

- 1 La densidad, la densidad específica y la presión son magnitudes definidas importantes en la estática y dinámica de fluidos.
- 2 Los principios de Pascal y de Arquímedes se deducen de las leyes de Newton.
- 3 La ecuación de Bernoulli se deduce del principio de conservación de la energía mecánica.
- \*4 El efecto Venturi es un caso especial de la ecuación de Bernoulli.
- \*5 La ley de Poiseuille da cuenta de la caída de la presión a causa de la viscosidad; el número de Reynolds se utiliza para predecir si un flujo es laminar o turbulento.

## 1. Densidad

La densidad de una sustancia es el cociente entre su masa y su volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (13.1)$$

Las densidades de la mayoría de los sólidos y líquidos son aproximadamente independientes de la temperatura y de la presión, mientras que la de los gases depende fuertemente de estas magnitudes.

## 2. Densidad específica

La densidad específica de una sustancia es el número que resulta de dividir su densidad por la del agua. Un objeto se hunde o flota en un fluido determinado según que su densidad sea mayor o menor que la del fluido.

## 3. Presión

$$P = \frac{F}{A} \quad (13.3)$$

Unidades

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 \quad (13.4)$$

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ torr} = 29,9 \text{ pulg Hg} = 101,325 \text{ kPa} = 14,7 \text{ lb/pulg}^2 \quad (13.9)$$

$$1 \text{ bar} = 10^3 \text{ milibares} = 100 \text{ kPa} \quad (13.10)$$

Presión manométrica

La presión manométrica es la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica:

$$P = P_{\text{manométrica}} + P_{\text{at}} \quad (13.8)$$

En un líquido

$$P = P_0 + \rho gh \quad (\rho \text{ constante}) \quad (13.7)$$

En un gas

En un gas como el aire, la presión disminuye exponencialmente con la altitud.

Módulo de compresibilidad

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad (13.6)$$

## 4. Principio de Pascal

Los cambios de presión aplicados a un fluido encerrado en un recipiente se transmiten sin disminución a todos los puntos del fluido y a las paredes del recipiente.

## 5. Principio de Arquímedes

Un cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido se ve sometido a una fuerza ascensional igual al peso del fluido desplazado.

## \*6. Flujo de fluidos

Caudal

$$I_V = Av$$

Ecuación de continuidad

$$I_V = Av = \text{constante} \quad (13.16)$$

Ecuación de Bernoulli

$$P + \rho gy + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante} \quad (13.17b)$$

Efecto Venturi

La presión disminuye cuando aumenta la velocidad del fluido.

Resistencia al flujo de fluidos

$$\Delta P_2 = I_V R \quad (13.19)$$

Coeficiente de viscosidad

$$F = \eta \frac{vA}{z} \quad (13.20)$$

Ley de Poiseuille para el flujo viscoso

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} I_V \quad (13.23)$$

Flujo laminar, flujo turbulento y número de Reynolds (opcional)

El flujo es laminar si el número de Reynolds  $N_R$  es menor que 2000 (aproximadamente) y turbulento si es mayor que 3000, en donde  $N_R$  viene dado por

$$N_R = \frac{2rv\rho}{\eta} \quad (13.24)$$

# Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.
- iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.
- iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

## Problemas conceptuales

- 1 ● Si la presión manométrica se duplica, la presión absoluta (a) se reduce a la mitad, (b) se duplica, (c) no se modifica, (d) se eleva al cuadrado, (e) falta información para determinar el efecto.
- 2 ● SSM ¿Se cumple el principio de Arquímedes en un satélite que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular? Razonar la respuesta.
- 3 ●● Una piedra de masa  $M$  y que tiene una densidad del triple de la del agua se cuelga de una cuerda. Con una mano sujetamos un extremo de la cuerda y la introducimos en un depósito lleno de agua hasta el borde, el cual descansa sobre una balanza. Cuando la piedra está exactamente por encima del fondo del depósito se rompe la cuerda. Desde el momento en que la cuerda se rompe hasta que la piedra descansa en el fondo del depósito, la lectura de la balanza aumenta (a)  $2Mg$ , (b)  $Mg$ , (c)  $2/3Mg$ , (d)  $1/3Mg$ , (e) cero.
- 4 ●● Una roca se lanza a una piscina llena de agua a temperatura uniforme. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- (a) La fuerza ascensional sobre la roca es nula cuando ésta se hunde.  
 (b) La fuerza ascensional sobre la roca crece cuando ésta se hunde.  
 (c) La fuerza ascensional sobre la roca disminuye cuando ésta se hunde.  
 (d) La fuerza ascensional sobre la roca es constante cuando ésta se hunde.  
 (e) La fuerza ascensional sobre la roca cuando ésta se hunde es distinta de cero al principio, pero se anula cuando se alcanza la velocidad límite.
- 5 ●● Una pecera descansa sobre una balanza. Súbitamente el pez nada hacia arriba para tomar alimento. ¿Qué ocurre con la lectura de la balanza?

- 6 ●● SSM Dos objetos están equilibrados como indica la figura 13.24. Los objetos tienen volúmenes idénticos, pero masas distintas. ¿Se perturbará el equilibrio si el sistema está completamente sumergido en agua? Razonar la respuesta.



Figura 13.24 Problema 6

- 7 ●● Un bloque de 200 g de plomo y otro de 200 g de cobre están cubiertos de agua, suspendidos de un hilo justo por encima del fondo de un acuario lleno de agua. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
- (a) La fuerza ascensional es mayor en el plomo que en el cobre.  
 (b) La fuerza ascensional es mayor en el cobre que en el plomo.  
 (c) La fuerza ascensional es la misma en ambos bloques.  
 (d) Se necesita más información para decidir entre las anteriores.

- 8 ●● Un bloque de  $20 \text{ cm}^3$  de plomo y otro de  $20 \text{ cm}^3$  de cobre están cubiertos de agua, suspendidos de un hilo justo por encima del fondo de un acuario lleno de agua. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- (a) La fuerza ascensional es mayor en el plomo que en el cobre.  
 (b) La fuerza ascensional es mayor en el cobre que en el plomo.  
 (c) La fuerza ascensional es la misma en ambos bloques.  
 (d) Se necesita más información para decidir entre las anteriores.

- 9 ● En unos almacenes se exhibe una pelota de playa que se sostiene en el aire de una corriente que procede de un tubo conectado al escape de un aspirador doméstico. ¿Cómo debe soplar el aire sobre la pelota: por encima o por debajo de ésta? Razonar la respuesta.

- 10 ● Una tubería horizontal se estrecha en una conducción pasando de un diámetro de 10 cm a otro de 5 cm. Para un fluido no viscoso que circula sin turbulencias por su interior desde el diámetro mayor al menor: (a) La velocidad y la presión se incrementan. (b) La velocidad crece y la presión disminuye. (c) La velocidad disminuye y la presión crece. (d) La velocidad y la presión decrecen. (e) La velocidad o la presión cambian, pero no ambas a la vez.

- 11 ● SSM Verdadero o falso: La fuerza ascensional sobre un objeto sumergido depende de la forma del mismo.

- 12 ● La figura 13.25 muestra un dispositivo que consiste en una botella de plástico flexible, cerrada y parcialmente llena de agua en cuyo interior hay un tubo de ensayo colocado boca abajo de modo que en su punto más alto tiene una burbuja de aire. Normalmente el tubo flota, pero cuando se aprieta con fuerza la botella, el tubo se hunde. Explicar los motivos.

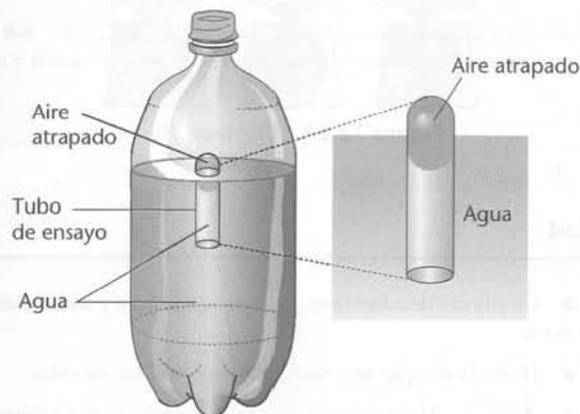


Figura 13.25 Problema 12

- 13 ● Sobre el agua de un vaso flotan unos cubitos de hielo. ¿Qué ocurre con el nivel del agua al fundirse el hielo?

- 14 ● ¿Por qué es más fácil flotar en agua salada que en agua dulce?

15 ●● Un objeto tiene una densidad ligeramente inferior a la del agua, de modo que flota casi totalmente sumergido. Sin embargo, el objeto es más compresible que el agua. ¿Qué ocurre si se da al objeto un ligero impulso para sumergirlo totalmente?

16 ●● En el ejemplo 13.10, el fluido acelera y adquiere una mayor velocidad cuando pasa a través de la parte estrecha del tubo. Identificar las fuerzas que actúan sobre el fluido para producir esta aceleración.

17 ●● Un vaso de agua acelera hacia la derecha a lo largo de una superficie horizontal. ¿Cuál es el origen de la fuerza que produce la aceleración sobre un pequeño elemento de agua que está en medio del vaso? Explicarlo mediante un esquema.

18 ●● SSM Una persona está sentada en un bote que flota en un estanque muy pequeño. Toma el ancla y la echa al agua. ¿Se modifica el nivel del agua en el estanque?

19 ●● La figura 13.26 muestra un esquema de un agujero construido por un perro de las praderas. La geometría de los dos agujeros y su posición respectiva asegura que cuando el viento sopla por el agujero número 2 tiene siempre una velocidad inferior que cuando sopla por el agujero número 1. Explicar cómo el principio de Bernoulli explica que el túnel se mantenga ventilado, e indicar en qué dirección fluirá el viento en el túnel.

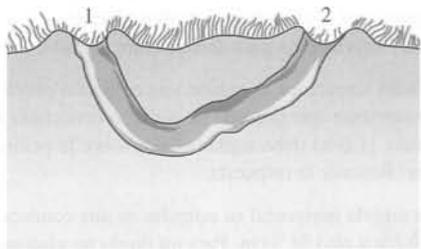


Figura 13.26 Problema 19

20 ●● SSM Tal como se muestra en la figura 13.27, tres recipientes de formas diferentes se llenan con agua hasta el mismo nivel. El área del fondo de los recipientes es la misma y la presión hidrostática del agua en los fondos también, pero la fuerza total es distinta, ya que cada botella tiene una cantidad de líquido distinta en su interior. Explicar esta paradoja aparente.

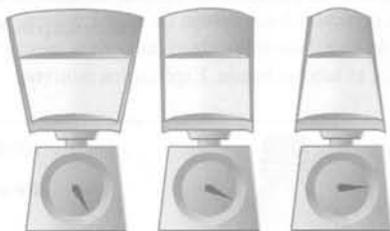


Figura 13.27 Problema 20

## Densidad

21 ●● Un cilindro de cobre tiene una longitud de 6 cm y un radio de 2 cm. Hallar su masa.

22 ●● Hallar la masa de una esfera de plomo de 2 cm de radio.

23 ●● **ISOLVE** Hallar la masa del aire contenido en una habitación de 4 m × 5 m × 4 m.

24 ●● SSM Se llena un recipiente de 60 ml con mercurio a 0 °C (figura 13.28). Cuando se eleva su temperatura 80 °C, se salen 1,47 g de mercurio del recipiente. Suponiendo que el volumen del recipiente permanece constante, calcular la densidad del mercurio a 80 °C si su densidad a 0 °C es de 13,645 kg/m<sup>3</sup>.

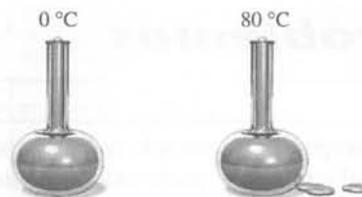


Figura 13.28 Problema 24

## Presión

25 ●● **ISOLVE** Las lecturas barométricas en los países de habla inglesa suelen venir dadas en pulgadas de mercurio (pulgHg). Hallar en pulgHg la presión de 101 kPa.

26 ●● La presión sobre la superficie de un lago es la presión atmosférica  $P_{at} = 101$  kPa. (a) ¿A qué profundidad la presión es el doble de la atmosférica? (b) Si la presión en la superficie de un recipiente profundo que contiene mercurio es  $P_{at}$ , ¿a qué profundidad la presión es igual a  $2P_{at}$ ?

27 ●● SSM **ISOLVE** Se utiliza un elevador hidráulico para levantar un automóvil de 1500 kg de masa. El radio del eje del elevador es 8 cm y el del pistón es de 1 cm. ¿Cuánta fuerza debe aplicarse al pistón para levantar el automóvil?

28 ●● Cuando una mujer con tacones altos da un paso, momentáneamente descarga todo su peso sobre el tacón de uno de sus zapatos, que tiene un área de 1 cm<sup>2</sup>. Si su masa es de 56 kg, ¿cuál es la presión que su tacón ejerce sobre el suelo?

29 ●● SSM ¿Qué presión se necesita para reducir el volumen de 1 kg de agua desde 1,00 L a 0,99 L?

30 ●● **ISOLVE** Un coche de 1500 kg está apoyado sobre cuatro ruedas, que se encuentran infladas a una presión manométrica de 200 kPa. ¿Cuál es el área de contacto de cada rueda con el suelo, suponiendo que las cuatro ruedas soportan el peso por igual?

31 ●● En el siglo XVII, Blaise Pascal realizó el experimento indicado en la figura 13.29. Se llenó con agua un barril de vino al que se le conectó luego un tubo largo y se fue añadiendo agua por el tubo hasta que reventó el barril. (a) Si el radio de la tapa del barril era de 20 cm y la altura del agua en el tubo era de 12 m, calcular la fuerza ejercida sobre la tapa. (b) Si el tubo tenía un radio interior de 3 mm, ¿qué masa de agua del tubo produjo la presión que reventó el barril?



Figura 13.29 Problema 31

32 ●● **ISOLVE** Se hace fluir plasma sanguíneo desde una bolsa a través de un tubo hasta la vena de un paciente, en un punto en que la presión de la sangre es de 12 mmHg. La densidad específica del plasma a 37 °C es 1,03. ¿Cuál es la altura mínima a la que deberá estar la bolsa para que el plasma entre en la vena?

33 ●● Mucha gente cree que si se hace flotar la parte superior de un tubo "snorkel" (tubo de respiración) fuera del agua (figura 13.30), podrían respirar con él mientras están paseando bajo el agua. Sin embargo, la presión del agua se opone a la dilatación del pecho y al inflado de los pulmones. Supóngase que apenas se puede respirar si se está tumbado en el suelo con un peso de 400 N sobre el pecho. ¿A qué profundidad por debajo de la superficie del agua podría estar el pecho para poder respirar aún, si se supone que la superficie del pecho es de  $0,09 \text{ m}^2$ ?



Figura 13.30 Problema 33

34 ●● En el ejemplo 13.3, una fuerza de 147 N se aplica a un pequeño pistón para levantar un coche que pesa 14 700 N. Demostrar que este hecho no viola la ley de conservación de la energía mecánica observando que cuando el coche se eleva una distancia  $h$ , el trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre el pistón pequeño es igual al trabajo realizado por el pistón grande sobre el coche.

35 ● **ISOLVE** Un cubo hueco de arista  $a$  está medio lleno de agua de densidad  $\rho$ . Determinar la fuerza ejercida por el agua sobre una cara del cubo. (Los bordes del cubo son tanto horizontales como verticales.)

36 ●●● **SSM** El volumen de un cono de altura  $h$  y radio de la base  $r$  es  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ . Se llena con agua un recipiente cónico de 25 cm de altura que se apoya sobre su base de radio 15 cm. (a) Hallar el volumen y el peso del agua contenida en el recipiente. (b) Hallar la fuerza ejercida por el agua sobre la base del recipiente. Explicar cómo puede ser mayor esta fuerza que el peso del agua.

**Flotación**

37 ● **SSM** **ISOLVE** Una pieza de cobre (densidad específica 9,0) de 500 g se sumerge en agua y se suspende de un dinamómetro (figura 13.31). ¿Qué fuerza indicará el índice del dinamómetro?



Figura 13.31 Problema 37

38 ● **ISOLVE** Cuando se ata una piedra de 60 N a un dinamómetro y se sumerge en el agua, el índice de la escala marca 40 N. Calcular la densidad de la piedra.

39 ● **ISOLVE** Un bloque de un material desconocido pesa 5 N en aire y 4,55 N cuando se sumerge en agua. (a) ¿Cuál es la densidad del material? (b) ¿De qué material está hecho el bloque?

40 ● Un trozo de metal pesa 90 N en aire y 56,6 N cuando se sumerge en agua. Determinar la densidad de este metal.

41 ●● **ISOLVE** ✓ Un objeto flota en el agua con el 80% de su volumen por debajo de la superficie. El mismo objeto situado en otro líquido flota con el 72% de su volumen por debajo de la superficie. Determinar la densidad del objeto y la densidad específica del líquido.

42 ●● **SSM** Se ata un bloque de 5 kg de hierro a un dinamómetro y se sumerge en un fluido de densidad desconocida. El índice del dinamómetro marca 6,16 N. ¿Cuál es la densidad del fluido?

43 ●● Un trozo de corcho pesa 0,285 N en aire. Cuando se le mantiene sumergido bajo el agua mediante un dinamómetro, como se ve en la figura 13.32, se lee en la escala del mismo 0,855 N. Hallar la densidad del corcho.



Figura 13.32 Problema 43

44 ●● En condiciones estándar, la densidad del aire es de  $1,29 \text{ kg/m}^3$  y la del helio es de  $0,178 \text{ kg/m}^3$ . Un globo lleno de helio levanta una barquilla con carga de peso total 2000 N. ¿Cuál deberá ser el volumen mínimo del globo?

45 ●● **SSM** Un objeto posee una fuerza ascensional neutra cuando su densidad iguala a la del líquido en donde se encuentra sumergido, de forma que ni flota ni se hunde. ¿Qué masa de plomo debería añadirse a un nadador de 85 kg y de densidad media 0,96 kg/L que bucea en agua dulce para que su fuerza ascensional fuese neutra?

46 ●● **ISOLVE** ✓ Un vaso de precipitados de masa 1 kg contiene 2 kg de agua y descansa sobre una balanza. Un bloque de 2 kg de aluminio (densi-



Figura 13.33 Problema 46

dad  $2,70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) suspendido de un dinamómetro se sumerge en agua (figura 13.33). Determinar las lecturas de ambas balanzas.

47 ●●● Un barco que navega por agua de mar (densidad específica 1,025) se encuentra de repente navegando por agua dulce, donde lógicamente se hunde levemente. Cuando en un puerto descarga 600 000 kg, vuelve a su posición original. Suponiendo que los laterales del barco son verticales en la línea de flotación, calcular la masa del barco antes de la descarga.

48 ●●● SSM El hidrómetro que se muestra en la figura 13.34 es un dispositivo para medir la densidad específica de los líquidos. El depósito contiene perdigones de plomo, y la densidad del líquido se puede leer directamente a partir del nivel del líquido en la escala calibrada. El volumen del depósito es de 20 ml, la longitud del vástago de la escala de 15 cm, su diámetro de 5,00 mm y la masa de vidrio de 6,0 g. (a) ¿Qué masa de perdigones de plomo debe añadirse para que el líquido de menor densidad específica que pueda medirse sea de 0,9 L? (b) ¿Cuál es la máxima densidad específica de un líquido que puede medirse?



Figura 13.34 Problemas 48 y 98

49 ● Cuando en la base de una presa se forman grietas, el agua que se introduce en las grietas ejerce una fuerza ascensional que tiende a levantar la presa. Este efecto puede causar el derribo de la misma. Estimar la fuerza ascensional ejercida por el agua que se introduce por algunas grietas de la base sobre una presa de 2 m de espesor y 5 m de longitud. El nivel del agua está a 5 m por encima de las grietas.

50 ●● Un globo sonda meteorológico lleno de helio tiene una masa de 15 kg (globo más helio más instrumentos) y una forma esférica con un radio de 2,5 m. (a) Cuando se suelta el globo desde el nivel del mar, ¿cuál es la aceleración inicial a la que está sometido? (b) Si la fuerza de resistencia sobre el globo viene dada por  $F_D = 1/2 \pi^2 \rho v^2$ , donde  $r$  es el radio del globo,  $\rho$  es la densidad del aire, y  $v$  es la velocidad a la que sube el globo, calcular la velocidad límite ascendente. (c) Calcular aproximadamente cuánto tiempo invertirá el globo en llegar hasta 10 km de altura.

### Principio de continuidad y ecuación de Bernoulli

51 ●● SSM De un grifo circular sale agua con un caudal de  $10,5 \text{ cm}^3/\text{s}$ . (a) Si el diámetro de la salida del grifo es de 1,2 cm, ¿cuál es la velocidad del agua? (b) Cuando el agua sale del grifo, el flujo de agua se estrecha. Determinar el nuevo diámetro en un punto situado 7,5 cm por debajo de la salida del grifo. Suponer que el flujo tiene una sección circular y despreciar cualquier fuerza de resistencia que actúe sobre el agua. (c) Si los flujos turbulentos se caracterizan por tener números de Reynolds aproximadamente por encima de 2300, ¿qué distancia tiene que caer el agua antes de que su flujo sea turbulento? ¿Está de acuerdo este resultado con la experiencia diaria?

52 ●● SOLVE✓ A través de una manguera de 3 cm de diámetro fluye agua a una velocidad de 0,65 m/s. El diámetro de la boquilla es de 0,30 cm. (a) ¿A qué velocidad pasa el agua a través de la boquilla? (b) Si la bomba, situada en un extremo de la manguera, y la boquilla, en el otro extremo, tienen la misma altura y si la presión en la boquilla es la presión atmosférica, ¿cuál es la presión en la bomba?

53 ●● SOLVE✓ Está fluyendo agua a 3 m/s por una tubería horizontal bajo una presión de 200 kPa. La tubería se estrecha hasta la mitad de su diámetro original. (a) ¿Cuál es la velocidad del flujo en la sección estrecha? (b) ¿Cuál es la presión en la sección estrecha de la tubería? (c) ¿Qué relación existe entre el volumen de agua que fluye por la sección estrecha cada segundo con el que circula a través de la sección más ancha? Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

54 ●● SOLVE La presión en una sección de 2 cm de diámetro de una tubería horizontal es de 142 kPa. El agua fluye a través de la tubería con un caudal de 2,80 L/s. ¿Cuál deberá ser el diámetro de una sección más estrecha de la tubería para que la presión se reduzca a 101 kPa. Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

55 ●● SSM Por una aorta de 9 mm de radio fluye sangre a 30 cm/s. (a) Calcular el caudal en litros por minuto. (b) Aunque el área de la sección recta de un capilar es mucho menor que la de la aorta, existen muchos capilares, de forma que el área total de sus secciones rectas es mucho mayor. Si toda la sangre procedente de la aorta pasa a los capilares en donde la velocidad de flujo es de 1,0 mm/s, calcular dicha área total.

56 ●● SOLVE✓ Un depósito grande de agua tiene, a una profundidad  $h$  respecto a la superficie libre del agua, un orificio prolongado por un pequeño tubo, como puede verse en la figura 13.35. Hallar la distancia  $x$  alcanzada por el flujo de agua que sale por el tubo. Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

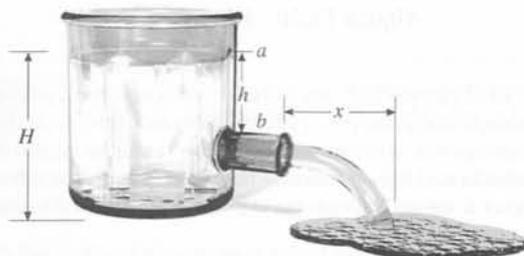


Figura 13.35 Problemas 56 y 61

57 ●● SOLVE El gran oleoducto de Alaska (800 millas de longitud y 8000 millones \$ de inversión) tiene una capacidad de 240 000 m<sup>3</sup> de crudo por día. Su radio externo es de 60 cm en la mayor parte de su recorrido. Determinar la presión  $P'$  en un punto donde la tubería tiene un radio igual a 30 cm. Tomar como presión entre el valor  $P = 180 \text{ kPa}$  y para la densidad del crudo, 800 kg/m<sup>3</sup>.

58 ●● SSM A través de un venturímetro como el del ejemplo 13.10 fluye agua a lo largo de una tubería de diámetro 9,5 cm que en el estrechamiento se reduce a 5,6 cm. El manómetro en U está parcialmente lleno de mercurio. Determinar la velocidad de flujo del agua en la tubería de 9,5 cm de diámetro si la diferencia entre los niveles de mercurio del tubo en U es de 2,40 cm.

59 ●● Un bombero sujeta una manguera con un codo como se indica en la figura 13.36. De la manguera sale el agua en un chorro de 1,5 cm de radio y con una velocidad de 30 m/s. (a) ¿Qué masa de agua sale de la manguera en 1 s? (b) ¿Cuál es el momento horizontal de este agua? (c) Antes de llegar al codo, el agua tiene un momento hacia arriba, mientras que después es horizontal. Dibujar un diagrama vectorial de los vectores momento lineal inicial y final y hallar la variación del momento lineal del agua en el codo en 1 s. A partir de este valor, hallar la fuerza ejercida sobre el agua por la manguera.



Figura 13.36 Problema 59

60 ●● **SOLVE** Una fuente diseñada para lanzar una columna de agua de 12 m de altura al aire, tiene una boquilla de 1 cm de diámetro al nivel del suelo. La bomba de agua está a 3 m por debajo del suelo. La tubería que la conecta a la boquilla tiene un diámetro de 2 cm. Hallar la presión que debe suministrar la bomba. Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

61 ●●● En la figura 13.35,  $H$  es la profundidad del líquido y  $h$  la distancia de la apertura por debajo de la superficie. (a) Hallar la distancia  $x$  a la que el agua incide sobre el suelo en función de  $h$  y  $H$ . (b) Demostrar que existen dos valores de  $h$  que son equidistantes del punto  $h = \frac{1}{2}H$  que dan la misma distancia  $x$ . (c) Demostrar que  $x$  es máxima cuando  $h = \frac{1}{2}H$ . ¿Cuál es el valor de esta distancia máxima  $x$ ? Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

62 ●● **SSM** La figura 13.37 muestra un tubo de Pitot estático, dispositivo que se usa para determinar la velocidad de un gas. El tubo interior está enfrentado al fluido cuya velocidad se quiere determinar, mientras que el cilindro agujereado, conectado con el otro extremo del tubo, es paralelo al flujo del gas. Demostrar que la velocidad del gas viene dada por  $v^2 = 2gh(\rho - \rho_g)/\rho_g$ , donde  $\rho$  es la densidad del líquido usado en el manómetro y  $\rho_g$  es la densidad del gas.

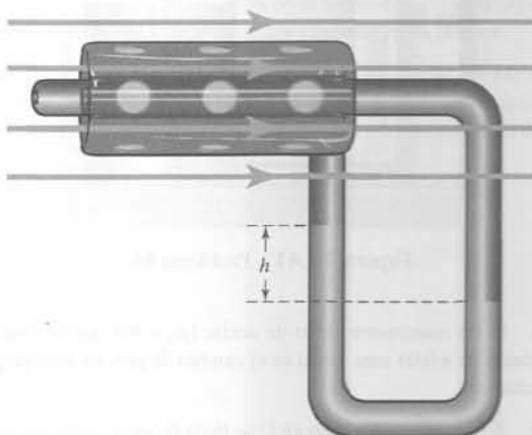


Figura 13.37 Problema 62

63 ●● Un sifón es un dispositivo usado para transferir líquido de un recipiente a otro, tal como se muestra en la figura 13.38. Para empezar a funcionar, el tubo debe llenarse con líquido, pero una vez lleno, el líquido fluirá hasta que las superficies del fluido de ambos recipientes estén al mismo nivel. (a) Usando la ecuación de Bernoulli, demostrar que la velocidad del agua en el tubo es  $v = \sqrt{2gd}$ . (b) ¿Cuál es la presión en el punto más alto del tubo? Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

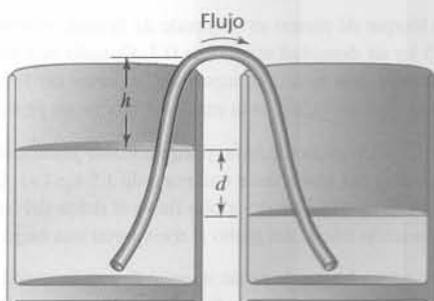


Figura 13.38 Problema 63

### \*Flujo viscoso

64 ● **SOLVE** Por un tubo horizontal con un diámetro interior de 1,2 mm y una longitud de 25 cm circula agua con un flujo de 0,30 ml/s. Hallar la diferencia de presiones que se necesita para impulsar el agua si su viscosidad es de 1,00 mPa·s. Supóngase que el flujo es laminar.

65 ● Hallar el diámetro de un tubo que daría un flujo de agua doble del indicado en el problema 64 si la diferencia de presiones ha de ser la misma.

66 ● **SSM** La sangre tarda aproximadamente 1,0 s en fluir por un capilar del sistema circulatorio humano de 1 mm de longitud. Si el diámetro del capilar es de  $7\mu\text{m}$  y la caída de presión de 2,60 kPa, calcular la viscosidad de la sangre. Supóngase que el flujo es laminar.

67 ● **SSM** Cuando se alcanza un número de Reynolds de  $3 \times 10^5$  se produce una transición de forma que la fuerza de resistencia sobre una esfera disminuye bruscamente. Estimar la velocidad a la que se produce esta transición en una pelota de béisbol y comentar si este fenómeno puede o no jugar un papel en la física del juego.

68 ●●● La ley de Stokes establece que la fuerza de resistencia sobre una esfera de radio  $a$  cuando el número de Reynolds es muy bajo viene dada por  $F_D = 6\pi\eta av$ , donde  $\eta$  es la viscosidad del fluido por el que se mueve la esfera. Usando esta expresión, determinar la velocidad límite de ascenso en gaseosa de una burbuja esférica de dióxido de carbono de 1 mm de diámetro (densidad  $1,1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ). ¿Cuánto tiempo invertirá la burbuja en ascender hasta la superficie en un vaso típico de gaseosa? ¿Es coherente con la experiencia habitual?

### Problemas generales

69 ●● **SSM** De forma muy aproximada, se puede decir que la masa de una persona aumenta según el cubo de su altura, es decir,  $M = Cph^3$ , donde  $M$  es la masa,  $h$  es la altura,  $\rho$  es la densidad del cuerpo y  $C$  es un "coeficiente de esfericidad" que depende de cada persona. Estimar  $C$  para un hombre y una mujer adultos, usando valores típicos para la altura y el peso. Suponer  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

70 ● Usando la aproximación de que el peso es proporcional a la altura elevada a la tercera potencia (problema 69), ¿cuál será la diferencia en el peso de dos hombres, uno de 1,75 m de altura y otro de 1,83 m?

71 ● El tablero de una mesita de juego mide 80 cm por 80 cm. ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre su parte superior por la atmósfera? ¿Por qué no se rompe la mesa?

72 ● **SOLVE** Una pelota de ping-pong está sujeta mediante una cuerda al fondo de una vasija. Cuando la vasija se llena con agua, de modo que la pelota está completamente sumergida, la tensión de la cuerda es  $2,8 \times 10^{-2} \text{ N}$ . Determinar el diámetro de la pelota.

73 ● **SOLVE** El agua de mar tiene un módulo de compresibilidad de  $2,3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ . Hallar la densidad del agua de mar a una profundidad en donde la presión vale 800 atm si la densidad en la superficie es  $1025 \text{ kg/m}^3$ .

74 ● Un bloque sólido cúbico de arista 0,6 m está suspendido de una balanza de muelle. Si el bloque se sumerge en agua, la balanza marca una lectura que es el 80% de la correspondiente al bloque en el aire. Determinar la densidad del bloque.

75 ● **SSM** Cuando se sumerge en agua, un bloque de cobre tiene un peso aparente de 56 N. ¿Qué fracción del bloque de cobre se sumergirá al flotar sobre el mercurio de una cubeta?

76 ● **SOLVE** Un bloque de 4,5 kg de cierto material flota sobre etanol con el 10% de su volumen por encima de la superficie del líquido. ¿Qué fracción de este bloque se sumergirá si flota sobre agua?

77 ● ¿Cuál es la fuerza ascensional que actúa sobre el cuerpo de una persona cuando flota (a) en un lago de agua dulce (densidad específica = 1,00) y (b) en el océano (densidad específica = 1,03)?

78 ● Cuando una persona flota en agua dulce, el 96% de su cuerpo está sumergido. ¿Cuál es el volumen de agua desplazado por esta persona cuando está totalmente sumergida?

79 ●● Un bloque de madera de masa 1,5 kg flota sobre el agua con el 68% de su volumen sumergido. Un bloque de plomo se sitúa sobre la madera y ésta se sumerge completamente. Determinar la masa del bloque de plomo.

**80** ●● **SSM** **ISOLVE** Un cubo de material plástico espumoso, de 25 cm de arista, se pesa mediante una balanza de brazos iguales. La balanza está equilibrada cuando una masa de latón de 20 g se sitúa en el platillo opuesto de la balanza. Determinar la masa real del cubo de plástico.

**81** ●● **ISOLVE** Una corteza esférica de cobre con un diámetro exterior de 12 cm flota sobre agua con la mitad de su volumen por encima de la superficie del agua. Determinar el diámetro interior de la corteza.

**82** ●● Un vaso de agua está equilibrado en el platillo izquierdo de una balanza. Un cubo de arista de 4 cm se ata a una cuerda y se sumerge en este vaso de agua totalmente. El cubo no toca el fondo del vaso. Se añade un peso  $m$  al platillo derecho para recuperar el equilibrio. ¿Cuánto vale  $m$ ?

**83** ●● **SSM** El petróleo crudo tiene una viscosidad aproximada de 0,8 Pa·s a la temperatura normal. Un oleoducto de 50 km ha de construirse desde un yacimiento de petróleo hasta la terminal de buques petroleros. El oleoducto ha de distribuir petróleo a la terminal a razón de 500 L/s y el flujo debe ser laminar para minimizar la presión necesaria para impulsar el fluido a través de la tubería. Suponiendo que la densidad del crudo es de 700 kg/m<sup>3</sup>, estimar el diámetro que el oleoducto debe tener.

**84** ●● **ISOLVE** A través del tubo de la figura 13.39 fluye agua que sale a la atmósfera por C. El diámetro del tubo es 2,0 cm en A, 1,0 cm en B y 0,8 cm en C. La presión manométrica del tubo en A es 1,22 atm y el caudal, 0,8 L/s. Los tubos verticales están abiertos al aire. Determinar el nivel de las interfases líquido-aire en los dos tubos verticales. Supóngase que el flujo es laminar.

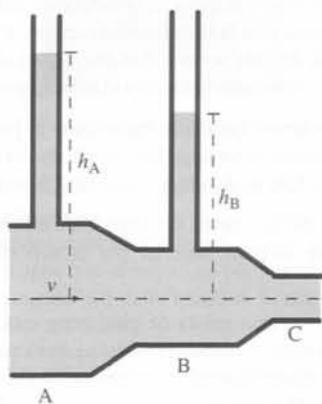


Figura 13.39 Problemas 84 y 85

**85** ●● Repetir el problema 84 con el caudal reducido a 0,6 L/s y el tamaño de la abertura en C reducido de modo que la presión del tubo en A permanezca invariable.

**86** ●● **SSM** **ISOLVE** La figura 13.40 es un esquema de un aspirador, un aparato simple que puede utilizarse para conseguir un vacío parcial en un recinto conectado al tubo vertical en B. Un aspirador conectado al extremo de una manguera de riego puede utilizarse para dosificar un fertilizante. Supon-

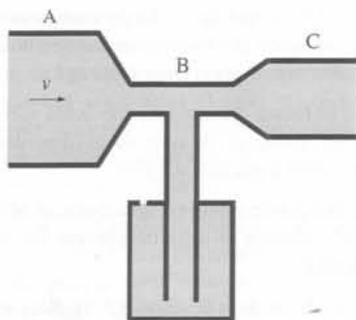


Figura 13.40 Problema 86

gamos que el diámetro en A es 2,0 cm y el diámetro en C, donde el agua se vierte a la atmósfera, es de 1,0 cm. Si el caudal es de 0,5 L/s y la presión manométrica en A es de 0,187 atm, ¿qué diámetro del estrechamiento en B es necesario para conseguir una presión de 0,1 atm en el recinto? Supóngase que el flujo es laminar.

**87** ●● Una boya cilíndrica a la entrada de un puerto tiene un diámetro de 0,9 m y una altura de 2,6 m. La masa de la boya es 600 kg. Está sujeta al fondo del mar con un cable de nailon de masa despreciable. La densidad específica del agua del mar es 1,025. (a) ¿Qué parte de la boya es visible cuando el cable está flojo? (b) Si una tsunami sumerge completamente la boya, cuál es la tensión en el cable rígido? (c) Si el cable se rompe, ¿cuál es la aceleración inicial hacia arriba de la boya?

**88** ●● **ISOLVE** Dos vasos comunicantes contienen un líquido de densidad  $\rho_0$  (figura 13.41). Las áreas de las secciones rectas de las vasijas son A y 3A. Determinar el cambio de altura del nivel del líquido si un objeto de masa  $m$  y densidad  $\rho' = 0,8\rho_0$  se introduce en una de las vasijas.

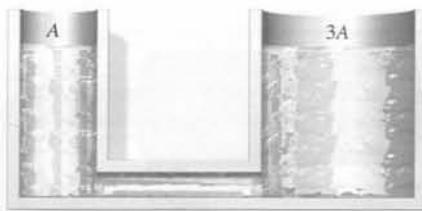


Figura 13.41 Problema 88

**89** ●● Si un manómetro lleno de aceite ( $\rho_0 = 900 \text{ kg/m}^3$ ) puede leerse con la precisión de  $\pm 0,05 \text{ mm}$ , ¿cuál es el cambio de presión más pequeño que puede detectarse?

**90** ●● **ISOLVE** Un tubo en U se llena de agua hasta que el nivel del líquido está a 28 cm por encima del fondo del tubo. En una de las ramas del tubo se vierte ahora un aceite de densidad específica 0,78 hasta que el nivel del agua en la otra rama se encuentra a 34 cm por encima del fondo del tubo. Determinar el nivel de las interfases aceite-aire y aceite-agua en la rama donde se hizo el vertido del aceite.

**91** ●● Un tubo en U contiene un líquido de densidad específica desconocida. En una de las ramas del tubo se vierte aceite de densidad  $800 \text{ kg/m}^3$  hasta que la columna de aceite alcanza 12 cm de altura. La interfase aceite-aire se encuentra entonces a 5,0 cm por encima del nivel del líquido en la otra rama del tubo en U. Determinar la densidad específica del líquido.

**92** ●● Un bloque de plomo se suspende de la cara inferior de un bloque de madera de 0,5 kg de densidad específica 0,7. Cuando este sistema se introduce en un recipiente con agua, la superficie superior de la madera está al mismo nivel que el líquido. ¿Cuál es la masa del bloque de plomo?

**93** ●● **SSM** Un globo de helio puede levantar justamente una carga de 750 N. La capa externa del globo tiene una masa de 1,5 kg. (a) ¿Cuál es el volumen del globo? (b) Si el volumen del globo fuese el doble del calculado en (a), ¿cuál sería la aceleración inicial del globo al transportar una carga de 900 N?

**94** ●● Una esfera hueca de radio interior  $R$  y radio exterior  $2R$  está formada de un material de densidad  $\rho_0$  y flota en un líquido de densidad  $2\rho_0$ . El interior se llena ahora de material de densidad  $\rho'$  de tal modo que la esfera flota justamente totalmente sumergida. Determinar  $\rho'$ .

**95** ●● **SSM** Como mencionábamos al tratar la ley atmosférica, la disminución relativa de la presión atmosférica es proporcional al cambio de altura. En términos matemáticos tenemos  $dP/P = -C/dh$ , en donde  $C$  es una constante. (a) Demostrar que  $P(h) = P_0 e^{-Ch}$  es una solución de la ecuación diferencial. (b) Demostrar que si  $\Delta h \ll h_0$ , en donde  $h_0 = 1/C$  entonces  $P(h + \Delta h) = P(h)(1 - \Delta h/h_0)$ . (c) Sabiendo que la presión a la altura  $h = 5,5 \text{ km}$  es la mitad que al nivel del mar, determinar la constante  $C$ .

**96 ●●** Un submarino tiene una masa total de  $2,4 \times 10^6$  kg, incluyendo la tripulación y el equipo. La nave consta de dos partes: el tanque de presión que tiene un volumen de  $2 \times 10^3$  m<sup>3</sup> y los tanques de inmersión que tienen un volumen de  $4 \times 10^2$  m<sup>3</sup>. Cuando el submarino navega sobre la superficie, los tanques de inmersión se llenan de aire; cuando navega sumergido, estos tanques se llenan de agua marina. (a) ¿Qué fracción del volumen del submarino está por encima de la superficie cuando los tanques están llenos de aire? (b) ¿Qué cantidad de agua debe admitirse en los tanques para que el submarino neutralice exactamente su peso con la fuerza ascensional? Despreciar la masa del aire en los tanques y utilizar el valor 1,025 para la densidad específica del agua del mar.

**97 ●●** Una tripulación de salvamentos marinos levanta del fondo del mar un cajón que mide  $1,4 \text{ m} \times 0,75 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ . La densidad media del cajón vacío es igual a la del agua del mar,  $1,025 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, y su masa cuando está vacío es 32 kg. El cajón contiene lingotes de oro que llenan el 36% de su volumen; el volumen restante está lleno de agua de mar. (a) ¿Cuál es la tensión del cable que eleva el cajón con los lingotes mientras está por debajo de la superficie del agua? (b) ¿Cuál es la tensión del cable mientras el cajón se eleva a la cubierta del barco si (1) el cajón no pierde agua en el ascenso, y (2) si el cajón se eleva tan lentamente que pierde toda el agua que contenía en su interior.

**98 ●●●** Cuando el hidrómetro del problema 48 (figura 13.34) se sitúa en un líquido cuya densidad específica es mayor que cierto valor mínimo, el instrumento flota con una parte del tubo de vidrio por encima del nivel del líquido.

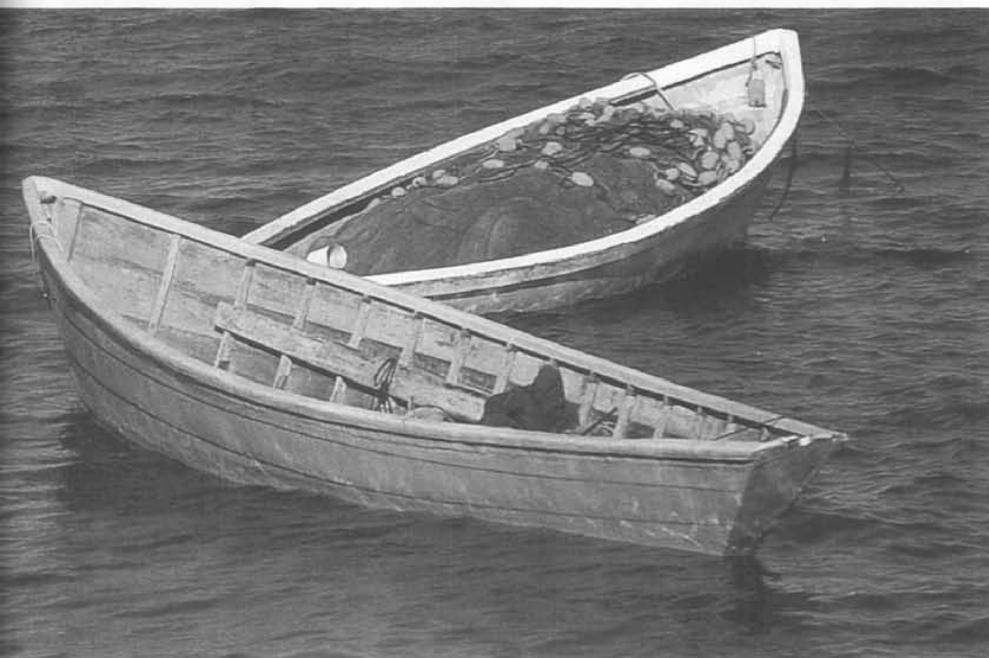
Consideremos un hidrómetro que tiene un bulbo esférico de 2,4 cm de diámetro. El tubo de vidrio unido al bulbo tiene 20 cm de longitud y un diámetro de 7,5 mm. La masa del hidrómetro antes de que se introduzcan en su interior bolitas de plomo y se suelde el vástago es de 7,28 g. (a) ¿Qué masa de plomo debe introducirse en el bulbo para que el hidrómetro justamente flote en un líquido de densidad específica 0,78? (b) Si el hidrómetro se introduce ahora en agua, ¿qué longitud del vástago aparece por encima de la superficie del agua? (c) El hidrómetro se introduce en un líquido de densidad desconocida y la longitud del tubo por encima de la superficie es de 12,2 cm. Determinar la densidad específica de este líquido.

**99 ●●●** Un barril grande de cerveza de altura  $H$  y área transversal  $A_1$  se llena con cerveza. La parte superior está abierta a la presión atmosférica. En la parte inferior existe una espita abierta de área  $A_2$ , mucho menor que  $A_1$ . (a) Demostrar que la velocidad de la cerveza que sale por la espita es aproximadamente  $\sqrt{2gh}$  cuando la altura de la cerveza es  $h$ . (b) Demostrar que en la aproximación según la cual  $A_2 \ll A_1$ , la variación de altura  $h$  por unidad de tiempo de la cerveza viene dada por

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1}(2gh)^{1/2}$$

(c) Calcular  $h$  en función del tiempo si  $h = H$  para  $t = 0$ . (d) Hallar el tiempo total necesario para vaciar el barril si  $H = 2$  m,  $A_1 = 0,8$  m<sup>2</sup>, y  $A_2 = (10^{-4}) A_1$ . Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

## OSCILACIONES Y ONDAS



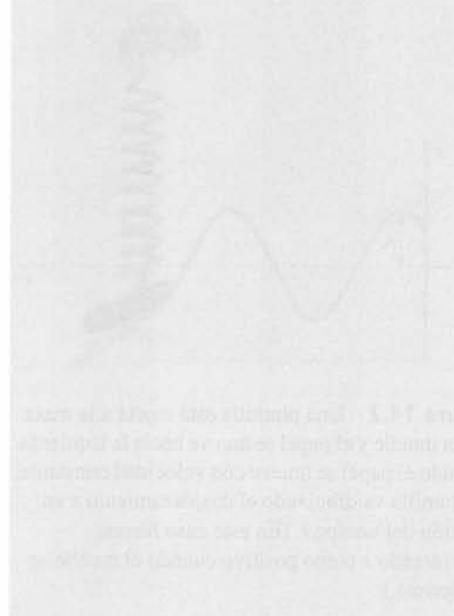
Los botes de la fotografía se mueven con el oleaje del mar, ofreciéndonos un ejemplo de movimiento oscilatorio. La oscilación vertical máxima de la posición del bote se mide fácilmente, al igual que el tiempo que invierte el bote en completar un ciclo.

¿Cómo puede expresarse la posición vertical del bote en función del tiempo? (Véase el ejemplo 14.1.)

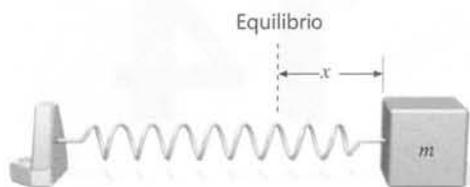
Cuando se perturba un sistema y éste pierde su posición de equilibrio estable, se producen oscilaciones. Hay muchos ejemplos familiares: los barcos se balancean arriba y abajo, los péndulos de reloj oscilan a un lado y otro, y las cuerdas y lengüetas de los instrumentos musicales vibran al producir los sonidos. Otros ejemplos menos familiares son las oscilaciones de las moléculas de aire en las ondas sonoras y las oscilaciones de las corrientes eléctricas en los aparatos de radio y televisión.

En este capítulo nos ocupamos del movimiento armónico simple, la forma más básica de movimiento oscilatorio. Mediante el uso de la cinemática y de la dinámica del movimiento armónico se puede analizar una amplia variedad de sistemas de interés. En algunas situaciones, las fuerzas disipativas amortiguan el movimiento oscilatorio, mientras que en otras, la acción de fuerzas impulsoras compensa el amortiguamiento.

- 14.1 Movimiento armónico simple
- 14.2 Energía del movimiento armónico simple
- 14.3 Algunos sistemas oscilantes
- 14.4 Oscilaciones amortiguadas
- 14.5 Oscilaciones forzadas y resonancia



## 14.1 Movimiento armónico simple



**Figura 14.1** Cuerpo unido a un muelle que descansa sobre una mesa sin rozamiento. Se mide el desplazamiento  $x$  desde la posición de equilibrio. El desplazamiento es positivo si el muelle se estira y negativo si el muelle se comprime.

Un tipo corriente y muy importante de movimiento oscilatorio es el **movimiento armónico simple**, como el de un cuerpo unido a un muelle, como puede verse en la figura 14.1. En el equilibrio, el muelle no ejerce ninguna fuerza sobre el cuerpo. Cuando éste se ve desplazado en una cantidad  $x$  de su posición de equilibrio, el muelle ejerce una fuerza  $-kx$ , que viene dada por la ley de Hooke:<sup>1</sup>

$$F_x = -kx \quad (14.1)$$

en donde  $k$  es la constante del muelle, característica de su rigidez. El signo menos indica que se trata de una fuerza restauradora; es decir, se opone al sentido del desplazamiento respecto al punto de equilibrio. Combinando la ecuación 14.1 con la segunda ley de Newton ( $F_x = ma_x$ ) se tiene

$$-kx = ma_x$$

es decir

$$a_x = -\frac{k}{m}x \quad \left( \text{o } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \right) \quad (14.2)$$

La aceleración es proporcional al desplazamiento y tiene sentido contrario. Esta es la característica que define el movimiento armónico simple y puede utilizarse para identificar sistemas que presentan esta clase de movimiento:

Siempre que la aceleración de un objeto sea proporcional a su desplazamiento pero con sentido opuesto, el objeto se moverá con movimiento armónico simple.

### CONDICIONES DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE EN FUNCIÓN DE LA ACELERACIÓN

Como la aceleración es proporcional a la fuerza neta, siempre que la fuerza neta sobre un objeto sea proporcional a su desplazamiento y con sentido opuesto, el objeto se moverá con movimiento armónico simple.

El tiempo que emplea el objeto desplazado para realizar una oscilación completa alrededor de su posición de equilibrio se denomina **periodo**  $T$ . El recíproco es la **frecuencia**  $f$ , que es el número de oscilaciones por segundo:

$$f = \frac{1}{T} \quad (14.3)$$

La unidad de frecuencia es el ciclo por segundo (ciclo/s), que recibe el nombre de **hertz** (Hz). Por ejemplo, si el tiempo necesario para una oscilación completa es 0,25 s, la frecuencia es 4 Hz.

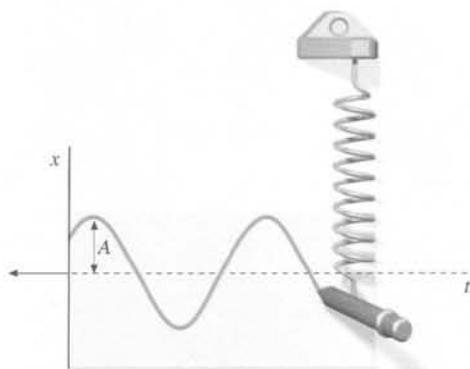
La figura 14.2 muestra cómo se puede obtener experimentalmente  $x$  en función de  $t$  para una masa sobre un muelle. La ecuación correspondiente a esta curva es

$$x = A \cos(\omega t + \delta) \quad (14.4)$$

### POSICIÓN EN UN MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

en donde  $A$ ,  $\omega$  y  $\delta$  son constantes. El desplazamiento máximo  $x_{\text{máx}}$  respecto a la posición de equilibrio se denomina **amplitud**  $A$ . El argumento de la función coseno,  $\omega t + \delta$ , se denomina **fase** de movimiento y la constante  $\delta$  se denomina **constante de fase**. Esta constante corresponde a la fase cuando  $t = 0$ . (Obsérvese que  $\cos(\omega t + \delta) = \sin(\omega t + \delta + \pi/2)$ , por lo tanto, expresar la ecuación como una función coseno o seno depende simplemente de la fase de la oscilación en el momento que elijamos como  $t = 0$ .) Si tenemos sólo un sistema oscilante siempre podemos elegir  $t = 0$  de modo que  $\delta = 0$ . Si tenemos dos sistemas oscilantes con igual amplitud y frecuencia, pero diferente fase, podemos elegir  $\delta = 0$  para uno de ellos. Las ecuaciones de los dos sistemas son entonces

$$x_1 = A \cos(\omega t)$$



**Figura 14.2** Una plumilla está sujeta a la masa de un muelle y el papel se mueve hacia la izquierda. Cuando el papel se mueve con velocidad constante, la plumilla va dibujando el desplazamiento  $x$  en función del tiempo  $t$ . (En este caso hemos considerado  $x$  como positivo cuando el muelle se comprime.)

<sup>1</sup> La ley de Hooke se ha introducido en el capítulo 4, sección 4.



El balanceo debido a la acción de vientos fuertes en el edificio Citicorp de Nueva York se reduce mediante el amortiguador de la fotografía, instalado en uno de los pisos más altos. El amortiguador consiste en un bloque de 400 toneladas que está acoplado al edificio mediante un muelle cuya constante se elige de forma que la frecuencia natural del sistema muelle-bloque sea la misma que la frecuencia natural de balanceo del edificio. Si el viento hace oscilar el edificio, el oscilador y el edificio oscilan con una diferencia de fase de  $180^\circ$ , con lo cual se reduce la oscilación.

$$x_2 = A \cos(\omega t + \delta)$$

Si la diferencia de fase  $\delta$  es 0 ó un número entero de veces  $2\pi$ , entonces  $x_2 = x_1$  y se dice que los sistemas están en fase. Si la diferencia de fase  $\delta$  es  $\pi$  o un número entero impar de veces  $\pi$ , entonces  $x_2 = -x_1$  y se dice que los sistemas están fuera de fase en  $180^\circ$ .

Podemos demostrar que la ecuación 14.4 es una solución de la ecuación 14.2 derivando  $x$  dos veces respecto al tiempo. La primera derivada de  $x$  es la velocidad  $v$ :

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta) \quad (14.5)$$

VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Derivando la velocidad respecto al tiempo se obtiene la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \quad (14.6)$$

Sustituyendo  $x$  por  $A \cos(\omega t + \delta)$  (véase la ecuación 14.4) se obtiene

$$a = -\omega^2 x \quad (14.7)$$

ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Comparando  $a = -\omega^2 x$  con  $a = -(k/m)x$  (ecuación 14.2), vemos que  $x = A \cos(\omega t + \delta)$  es una solución de la ecuación 14.2 (que puede escribirse de la forma  $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$ ) si

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14.8)$$

La amplitud  $A$  y la constante de fase  $\delta$  pueden determinarse a partir de la posición inicial  $x_0$  y la velocidad inicial  $v_0$  del sistema. Haciendo  $t = 0$  en  $x = A \cos(\omega t + \delta)$  se obtiene

$$x_0 = A \cos \delta \quad (14.9)$$

De igual modo, haciendo  $t = 0$  en  $v = dx/dt = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$  resulta

$$v_0 = -A\omega \sin \delta \quad (14.10)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para  $A$  y  $\delta$  en función de  $x_0$  y  $v_0$ .

El periodo  $T$  es el tiempo mínimo para el que se cumple la relación

$$x(t) = x(t + T)$$

para cualquier  $t$ . Teniendo en cuenta esta relación y la ecuación 14.4 se llega a

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \delta) &= A \cos[\omega(t + T) + \delta] \\ &= A \cos(\omega t + \delta + \omega T) \end{aligned}$$

Las funciones coseno (y seno) repiten su valor cuando la fase se incrementa en  $2\pi$ , de modo que

$$\omega T = 2\pi \quad \left( \text{o} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

La constante  $\omega$  se denomina **frecuencia angular**. La unidad es el radián por segundo y sus dimensiones son la inversa del tiempo, las mismas que la velocidad angular, que también se designa por  $\omega$ . Sustituyendo  $2\pi/T$  por  $\omega$  en la ecuación 14.4 se obtiene

$$x = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right)$$

Trabajando en esta relación se ve que cada vez que  $t$  aumenta en  $T$ , la fase crece  $2\pi$  y, por lo tanto, esto indica que se ha completado un ciclo completo del movimiento.

La frecuencia es la recíproca del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (14.11)$$

DEFINICIÓN —FRECUENCIA, PERIODO Y FRECUENCIA ANGULAR

Como  $\omega = \sqrt{k/m}$ , la frecuencia y el periodo de un objeto ligado a un muelle están relacionados con la constante de fuerza  $k$  y la masa  $m$  por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14.12)$$

FRECUENCIA Y PERIODO DE UN OBJETO LIGADO A UN MUELLE

La frecuencia crece cuando aumenta  $k$  (rigidez del muelle) y disminuye cuando aumenta la masa.



El astronauta Alan L. Bean midiendo la masa de su cuerpo durante el segundo viaje del Skylab. Lo hace sentándose en un asiento atado a un muelle y oscilando adelante y atrás. La masa total del astronauta más la del aparato está relacionada con su frecuencia de vibración por la ecuación 14.12.

### EJEMPLO 14.1 | Movimiento de un bote sobre las olas

Un bote se balancea arriba y abajo. El desplazamiento vertical del bote y viene dado por

$$y = (1,2 \text{ m}) \cos\left(\frac{1}{2\text{s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

(a) Determinar la amplitud, frecuencia angular, constante de fase, frecuencia y periodo del movimiento. (b) ¿Dónde se encuentra el bote cuando  $t = 1 \text{ s}$ ? (c) Determinar la velocidad y la aceleración en cualquier tiempo  $t$ . (d) Calcular los valores iniciales de la posición, la velocidad y la aceleración del bote.

**Planteamiento del problema** Para determinar las magnitudes solicitadas en (a) comparamos la ecuación del movimiento

$$y = (1,2 \text{ m}) \cos\left(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

con la ecuación estándar del movimiento armónico simple (ecuación 14.4). La velocidad y la aceleración se determinan derivando  $y(t)$ .

- (a) 1. Comparar la ecuación correspondiente al desplazamiento vertical del bote con la ecuación 14.4,  $y = A \cos(\omega t + \delta)$ , para deducir  $A$ ,  $\omega$  y  $\delta$ :

$$y = (1,2 \text{ m}) \cos\left(\frac{t}{2s} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$A = \boxed{1,2 \text{ m}}, \quad \omega = \boxed{1/2 \text{ rad/s}}, \quad \delta = \boxed{\pi/6 \text{ rad}}$$

2. La frecuencia y el periodo se deducen de  $\omega$ :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \boxed{0,0796 \text{ Hz}}, \quad T = \frac{1}{f} = \boxed{12,6 \text{ s}}$$

- (b) Hacer  $t = 1 \text{ s}$  para determinar la posición del bote:

$$y = (1,2 \text{ m}) \cos\left[\frac{1}{2s}(1 \text{ s}) + \frac{\pi}{6}\right] = \boxed{0,624 \text{ m}}$$

- (c) La velocidad y la aceleración se obtienen derivando una y dos veces la posición respecto al tiempo:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[A \cos(\omega t + \delta)]$$

$$= -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

$$= -\frac{1}{2s}(1,2 \text{ m}) \sin\left(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \boxed{-(0,6 \text{ m/s}) \sin\left(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega A \sin(\omega t + \delta)]$$

$$= -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

$$= -\left(\frac{1}{2s}\right)^2(1,2 \text{ m}) \cos\left(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \boxed{-(0,3 \text{ m/s}^2) \cos\left(\frac{1}{2s}t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

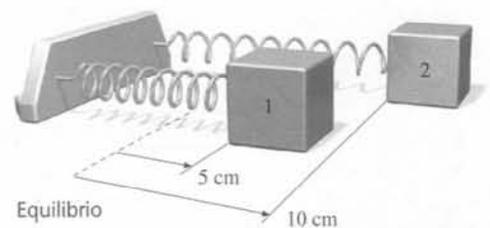
- (d) Hacer  $t = 0$  para determinar  $y_0$ ,  $v_{y0}$  y  $a_{y0}$ :

$$y_0 = (1,2 \text{ m}) \cos \frac{\pi}{6} = \boxed{1,04 \text{ m}}$$

$$v_{y0} = -(0,6 \text{ m/s}) \sin \frac{\pi}{6} = \boxed{-0,300 \text{ m/s}}$$

$$a_{y0} = -(0,3 \text{ m/s}^2) \cos \frac{\pi}{6} = \boxed{-0,260 \text{ m/s}^2}$$

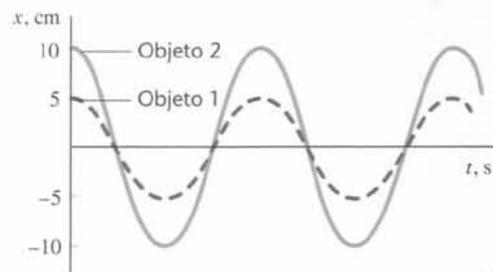
**Ejercicio** Un objeto de 0,8 kg está sujeto a un muelle de constante de fuerza  $k = 400 \text{ N/m}$ . Determinar la frecuencia y el periodo del movimiento del objeto cuando se desplaza del equilibrio. (Respuesta  $f = 3,56 \text{ Hz}$ ,  $T = 0,281 \text{ s}$ .)



**Figura 14.3** Dos sistemas masa-muelle idénticos.

La figura 14.3 muestra dos masas idénticas sujetas a muelles iguales que descansan sobre una superficie sin rozamiento. Un muelle se estira 10 cm y el otro 5 cm. Si se dejan en libertad al mismo tiempo, ¿cuál de los dos cuerpos alcanza primero la posición de equilibrio?

Según la ecuación 14.12, el periodo depende sólo de  $k$  y  $m$ , pero no de la amplitud. Como  $k$  y  $m$  son los mismos para ambos sistemas, los periodos son iguales. Por lo tanto, los objetos alcanzan la posición de equilibrio al mismo tiempo. El segundo objeto tiene que recorrer una distancia doble a la del primero para alcanzar el equilibrio, pero también posee una velocidad media doble. La figura 14.4 muestra un esquema de las funciones de posición de los dos objetos. Esto ilustra una propiedad general importante del movimiento armónico simple:



**Figura 13.4** Posición  $x$  en función de  $t$  para los sistemas de la figura 14.3. Ambos alcanzan la posición de equilibrio al mismo tiempo.

En el movimiento armónico simple, la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud.

El hecho de que la frecuencia del movimiento armónico simple sea independiente de la amplitud tiene importantes consecuencias en muchos campos. En música, por ejemplo, significa que el tono (que corresponde a la frecuencia) de una nota que se toca en un piano no depende de la fuerza con que se toca la nota (es decir, de la intensidad de la misma que corresponde a la amplitud).<sup>1</sup> Si las variaciones de amplitud tuviesen un gran efecto sobre la frecuencia, los instrumentos musicales no serían armoniosos.

### EJEMPLO 14.2 | Un objeto que oscila

Un objeto oscila con frecuencia angular  $\omega = 8,0 \text{ rad/s}$ . En  $t = 0$ , el objeto se encuentra en  $x = 4 \text{ cm}$  con una velocidad inicial  $v = -25 \text{ cm/s}$ . (a) Determinar la amplitud y la constante de fase para este movimiento. (b) Escribir  $x$  en función del tiempo.

**Planteamiento del problema** La posición y velocidad iniciales nos proporcionan dos ecuaciones a partir de las cuales se determinan la amplitud  $A$  y la constante de fase  $\delta$ .

(a) 1. La posición inicial y la velocidad están relacionadas con la amplitud y con la constante de fase. La posición viene dada por la ecuación 14.4 y la velocidad se calcula derivando con respecto del tiempo:

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

y

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

2. Cuando  $t = 0$ , la posición y la velocidad valen:

$$x_0 = A \cos \delta \quad \text{y} \quad v_0 = -\omega A \sin \delta$$

3. Dividir estas ecuaciones para eliminar  $A$ :

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{-\omega A \sin \delta}{A \cos \delta} = -\omega \operatorname{tg} \delta$$

4. Reemplazando por los valores numéricos se obtiene  $\delta$ :

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta &= \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \\ &= \operatorname{arctg}\left[-\frac{-25 \text{ cm/s}}{(8,0 \text{ rad/s})(4 \text{ cm})}\right] \\ &= \boxed{0,663 \text{ rad}} \end{aligned}$$

5. La amplitud puede determinarse utilizando la ecuación para  $x_0$  o  $v_0$ . Aquí utilizamos la de  $x_0$ :

$$A = \frac{x_0}{\cos \delta} = \frac{4 \text{ cm}}{\cos 0,663} = \boxed{5,08 \text{ cm}}$$

(b) Comparando con la ecuación 14.4 resulta  $x$ :

$$x = \boxed{(5,08 \text{ cm}) \cos[(8,0 \text{ s}^{-1})t + 0,663]}$$

Cuando la constante de fase es  $\delta = 0$ , las ecuaciones 14.4, 14.5 y 14.6 se convierten en

$$x = A \cos \omega t \quad (14.13a)$$

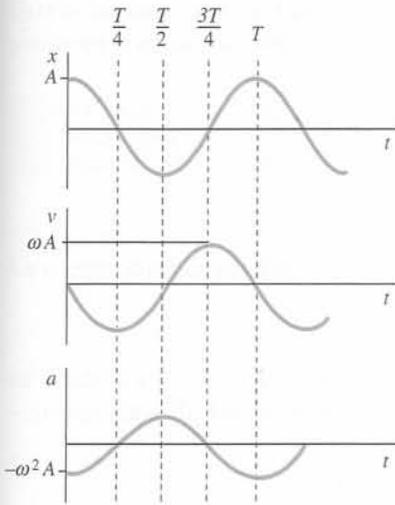
$$v = -\omega A \sin \omega t \quad (14.13b)$$

y

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t \quad (14.13c)$$

Estas funciones vienen representadas en la figura 14.5.

<sup>1</sup> En muchos instrumentos musicales existe una ligera dependencia de la frecuencia con la amplitud. El tono de la lengüeta de un oboe, por ejemplo, depende de la fuerza con que se sopla el instrumento porque la vibración no es exactamente armónica simple. Sin embargo, este efecto puede ser corregido por un músico experto.



**Figura 14.5** Gráficos de  $x$ ,  $v$  y  $a$  en función del tiempo  $t$  para  $\delta = 0$ . En  $t = 0$ , el desplazamiento es máximo, la velocidad es cero y la aceleración es negativa e igual a  $-\omega^2 A$ . La velocidad se hace negativa cuando el objeto se mueve hacia atrás buscando su posición de equilibrio. Después de un cuarto de periodo ( $t = T/4$ ), el objeto está en equilibrio,  $x = 0$ ,  $a = 0$  y la velocidad alcanza su valor máximo  $\omega A$ . En  $t = T/2$ , el desplazamiento es  $-A$ , la velocidad es de nuevo cero y la aceleración  $+\omega^2 A$ . En  $t = 3T/4$ ,  $x = 0$ ,  $a = 0$  y  $v = +\omega A$ .

### EJEMPLO 14.3 | Objeto ligado a un muelle

Un objeto de 2 kg se sujeta a un muelle como indica la figura 14.1. La constante de fuerza del muelle es  $k = 196 \text{ N/m}$ . El objeto se mantiene a una distancia de 5 cm de la posición de equilibrio y se deja en libertad en el tiempo  $t = 0$ . (a) Determinar la frecuencia angular  $\omega$ , la frecuencia  $f$  y el periodo  $T$ . (b) Expresar  $x$  en función del tiempo.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

1. Calcular  $\omega$  utilizando  $\omega = \sqrt{k/m}$ .
  2. Utilizar este resultado para determinar  $f$  y  $T$ .
  3. Determinar  $A$  y  $\delta$  a partir de las condiciones iniciales.
- (b) Expresar  $x(t)$  utilizando los resultados de  $A$ ,  $\omega$  y  $\delta$ .

#### Respuestas

$$\omega = 9,90 \text{ rad/s}$$

$$f = 1,58 \text{ Hz}, \quad T = 0,635 \text{ s}$$

$$A = 5 \text{ cm}, \quad d = 0$$

$$x = (5 \text{ cm}) \cos(9,90 \text{ s}^{-1} t)$$

¡INTÉNELO USTED MISMO!

### EJEMPLO 14.4 | Velocidad y aceleración de un objeto en un muelle

Considerar un objeto ligado a un muelle cuya posición viene dada por la ecuación  $x = (5 \text{ cm}) \cos(9,90 \text{ s}^{-1} t)$ . (a) ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto? (b) ¿En qué instante se alcanza por vez primera esta velocidad máxima? (c) ¿Cuál es la aceleración máxima del objeto? (d) ¿En qué instante se alcanza por vez primera esta aceleración máxima?

**Planteamiento del problema** Como el objeto se deja libre desde el reposo,  $\delta = 0$  y la velocidad y la aceleración vienen dadas por las ecuaciones 14.13a, b y c.

1. La posición se obtiene de la ecuación 14.13a, con  $\delta = 0$ . La velocidad se obtiene derivando con respecto del tiempo:
  2. La velocidad máxima tiene lugar cuando  $|\text{sen } \omega t| = 1$ :
- (b) 1. El  $|\text{sen } \omega t| = 1$  por vez primera se da cuando  $\omega t = \pi/2$ :
2. Despejar  $t$  cuando  $\omega t = \pi/2$ :

$$x = A \cos \omega t$$

por lo tanto

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \text{ sen } \omega t$$

$$|v| = \omega A |\text{sen } \omega t|$$

y entonces

$$|v|_{\text{máx}} = \omega A = (9,90 \text{ rad/s})(5 \text{ cm}) = 49,5 \text{ cm/s}$$

$$|\text{sen } \omega t| = 1 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(9,90 \text{ s}^{-1})} = 0,159 \text{ s}$$



- (c) 1. Determinar la aceleración derivando la velocidad, obtenida en el paso 1 del apartado (a);  
2. La aceleración máxima corresponde a  $\cos \omega t = -1$ ;

- (d) La aceleración máxima tiene lugar cuando  $|\cos \omega t| = 1$ , lo que ocurre cuando  $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (9,90 \text{ rad/s})^2 (5 \text{ cm}) \\ = 490 \text{ cm/s}^2 \approx \frac{1}{2} g$$

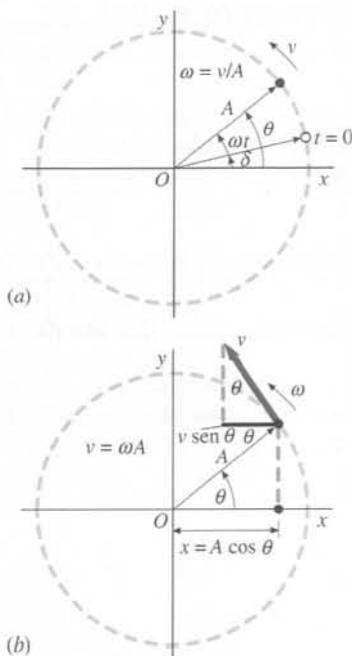
$$\omega t = \pi \\ \text{y despejando } t$$

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{9,90 \text{ s}^{-1}} = 0,317 \text{ s}$$

**Observación** La velocidad máxima ocurre por vez primera después de un cuarto de periodo,

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(2\pi/T)} = \frac{1}{4} T$$

El máximo del módulo de la aceleración se da cuando  $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots$  que corresponde a  $t = 0, \frac{1}{2} T, \frac{3}{2} T, \dots$



**Figura 14.6** Una partícula se mueve en una trayectoria circular con velocidad constante. (a) La componente  $x$  de la posición describe un movimiento armónico simple, y (b) la componente  $x$  de la velocidad describe la velocidad de un movimiento armónico simple

## Movimiento armónico simple y movimiento circular

Existe una relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular con velocidad constante. Consideremos una partícula que se mueve con una velocidad cuyo módulo  $v$  es constante sobre una circunferencia de radio  $A$  como se indica en la figura 14.6a. El desplazamiento angular de la partícula respecto al eje  $x$  viene dado por

$$\theta = \omega t + \delta \quad (14.14)$$

en donde  $\delta$  es el desplazamiento angular en el instante  $t = 0$  y  $\omega = v/A$  es la velocidad angular de la partícula. La componente  $x$  de la posición de la partícula viene dada por

$$x = A \cos \theta = A \cos (\omega t + \delta)$$

que coincide con la ecuación 14.4 del movimiento armónico simple.

La proyección sobre un diámetro de una partícula que se mueve con movimiento circular uniforme es un movimiento armónico simple (figura 14.6).

La velocidad de una partícula que se mueve sobre una circunferencia es  $r\omega$ , donde  $r$  es el radio. En el caso de la partícula de la figura 14.6b,  $r = A$ , por lo que su velocidad es  $A\omega$ . La proyección del vector velocidad sobre el eje  $x$  da  $v_x = -v \sin \theta$ . Sustituyendo los valores de  $v$  y de  $\theta$  se obtiene la ecuación

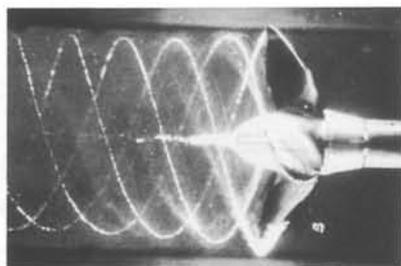
$$v_x = -\omega A \sin \theta = -\omega A \sin (\omega t + \delta)$$

que coincide con la ecuación 14.5 del movimiento armónico simple.

## 14.2 Energía del movimiento armónico simple

Cuando un objeto oscila con movimiento armónico simple, las energías cinética y potencial del sistema varían con el tiempo. Su suma, la energía total  $E = E_c + U$ , es constante. Consideremos un objeto a una distancia  $x$  del equilibrio, sobre el que actúa una fuerza de restitución  $-kx$ . La energía potencial del sistema es

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$



Las burbujas de la espuma que genera una hélice en movimiento por el agua producen un patrón sinusoidal.

Esta es la ecuación 6.21. Para un movimiento armónico simple,  $x = A \cos(\omega t + \delta)$  y sustituyendo en la ecuación anterior

$$U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \delta) \quad (14.15)$$

ENERGÍA POTENCIAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La energía cinética del sistema es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

en donde  $m$  es la masa del objeto y  $v$  su velocidad. En el movimiento armónico simple,  $v_x = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$ . Sustituyendo resulta

$$E_c = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

Teniendo en cuenta que  $\omega^2 = k/m$  resulta

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \delta) \quad (14.16)$$

ENERGÍA CINÉTICA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La energía mecánica total es la suma de las energías potencial y cinética:

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= U + E_c = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \delta) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 [\cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta)] \end{aligned}$$

Como  $\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta) = 1$

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}kA^2 \quad (14.17)$$

ENERGÍA TOTAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Esta ecuación nos enseña una importante propiedad general del movimiento armónico simple:

La energía total del movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Para un objeto en su desplazamiento máximo, la energía total es toda energía potencial. Cuando el objeto se mueve hacia su posición de equilibrio, la energía cinética del sistema crece y la energía potencial disminuye. Cuando atraviesa la posición de equilibrio, la velocidad del objeto es máxima, la energía potencial del sistema es cero y la energía total es igual a la energía cinética.

Cuando el objeto sobrepasa el punto de equilibrio, su energía cinética comienza a decrecer y la energía potencial del sistema crece hasta que el objeto de nuevo se detiene momentáneamente en su desplazamiento máximo (ahora en el sentido opuesto). En todo momento, la suma de las energías potencial y cinética es constante. La figura 14.7 muestra los gráficos de  $U$  y  $E_c$  en función del tiempo. Ambas curvas tienen la misma forma, excepto que cuando una es cero, la otra pasa por un máximo. Sus valores medios en uno o más ciclos son iguales y como  $U + E_c = E$ , estos valores medios vienen dados por

$$U_m = E_{c_m} = \frac{1}{2}E \quad (14.18)$$

En la figura 14.8 se ha representado la energía potencial  $U$  en función de  $x$ . La energía total  $E_{\text{total}}$  es constante y está representada por una línea horizontal. Esta línea corta a la curva de

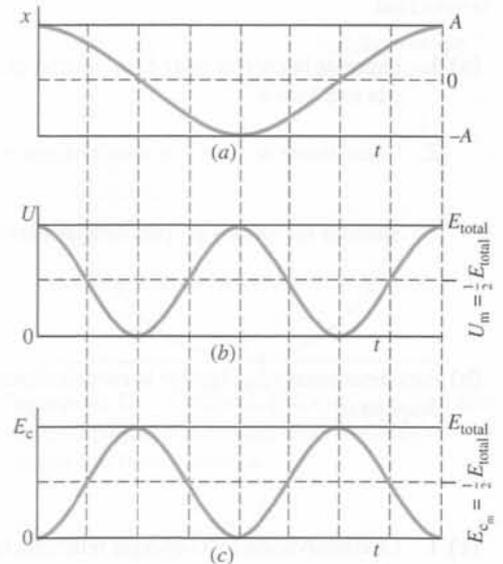


Figura 14.7 Gráficos de  $x$ ,  $U$  y  $E_c$  en función de  $t$ .

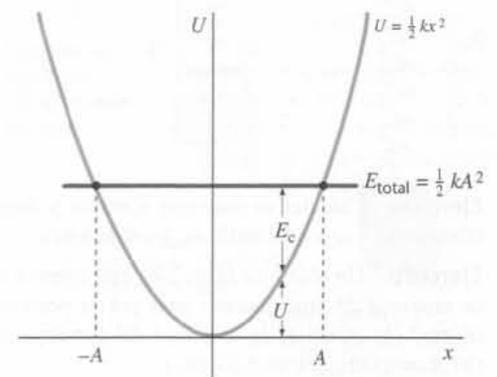


Figura 14.8 Función de la energía potencial  $U = \frac{1}{2}kx^2$  en el caso de un objeto de masa  $m$  unido a un muelle de masa despreciable de constante  $k$ . La línea horizontal representa la energía mecánica total  $E_{\text{total}}$  para una amplitud  $A$ . La energía cinética  $E_c$  está representada por la distancia vertical  $E_c = E_{\text{total}} - U$ . Como  $E_{\text{total}} \geq U$ , el movimiento está restringido a  $-A \leq x \leq +A$ .

la energía potencial en  $x = A$  y  $x = -A$ . Éstos son los puntos en que los objetos, en su oscilación, cambian el sentido de la velocidad y vuelven hacia la posición de equilibrio. Dado que  $U \leq E_{\text{total}}$ , el movimiento está restringido a  $-A \leq x \leq +A$ .

### EJEMPLO 14.5 | Velocidad y energía de un objeto que oscila

Un objeto de 3 kg ligado a un muelle oscila con una amplitud de 4 cm y un periodo de 2 s. (a) ¿Cuál es la energía total? (b) ¿Cuál es el módulo máximo de la velocidad del objeto? (c) ¿En qué posición  $x_1$  el módulo de velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

**Planteamiento del problema** (a) La energía total puede determinarse a partir de la amplitud del movimiento y de la constante de fuerza del muelle, que puede calcularse mediante la masa del objeto y el periodo. (b) La velocidad máxima tiene lugar cuando la energía cinética es igual a la energía total. (c) Mediante el principio de conservación de la energía podemos relacionar la posición con el módulo de la velocidad.

(a) 1. Expresar la energía total  $E$  en función de la constante de fuerza  $k$  y la amplitud  $A$ :

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

2. La constante de fuerza se relaciona con el periodo y la masa:

$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

3. Sustituir los valores proporcionados para determinar  $E$ :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2}(3 \text{ kg})\left(\frac{2\pi}{2 \text{ s}}\right)^2 (0,04 \text{ m})^2 = \boxed{2,37 \times 10^{-2} \text{ J}} \end{aligned}$$

(b) Para determinar  $v_{\text{máx}}$ , igualar la energía cinética con la energía total y despejar  $v$ :

$$\frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = E$$

con lo cual

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(2,37 \times 10^{-2} \text{ J})}{3 \text{ kg}}} = \boxed{0,126 \text{ m/s}}$$

(c) 1. La conservación de la energía relaciona la posición  $x$  con la velocidad  $v$ :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

2. Sustituir  $v = \frac{1}{2}v_{\text{máx}}$  y despejar  $x_1$ . Es conveniente determinar  $x$  en función de  $E$  y a partir de  $E = \frac{1}{2}kA^2$  deducir una expresión de  $x$  en función de  $A$ :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_{\text{máx}}\right)^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2\right) + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{4}E + \frac{1}{2}kx_1^2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = E - \frac{1}{4}E = \frac{3}{4}E$$

y

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{3E}{2k}} = \sqrt{\frac{3}{2k}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}A \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(4 \text{ cm}) = \boxed{3,46 \text{ cm}} \end{aligned}$$

**Ejercicio** Calcular  $\omega$  para este ejemplo y determinar  $v_{\text{máx}}$  a partir de la expresión  $v_{\text{máx}} = \omega A$ .  
(Respuesta  $\omega = 3,14 \text{ rad/s}$ ,  $v_{\text{máx}} = 0,126 \text{ m/s}$ .)

**Ejercicio** Un objeto de masa 2 kg está sujeto a un muelle de constante de fuerza 40 N/m. El objeto se mueve a 25 cm/s cuando pasa por la posición de equilibrio. (a) ¿Cuál es la energía total del objeto? (b) ¿Cuál es la amplitud del movimiento? (Respuesta (a)  $E_{\text{total}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = 0,0625 \text{ J}$ , (b)  $A = \sqrt{2E_{\text{total}}/k} = 5,59 \text{ cm}$ .)

### \*Movimiento general próximo al equilibrio

En general se da movimiento armónico simple cuando una partícula se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio estático. La figura 14.9 es un gráfico de la energía potencial  $U$  en función de  $x$  para una fuerza que tiene una posición de equilibrio estable y otra de equilibrio inestable. Como se vio en el capítulo 6, el máximo en  $x_2$  de la figura 14.9 corresponde al

equilibrio inestable, mientras que el mínimo en  $x_1$  corresponde al equilibrio estable. Cualquier curva continua que presente un mínimo como el de la figura 14.9 puede aproximarse cerca del mínimo por una parábola. La curva de trazos de la figura es una parábola que aproximadamente corresponde a la curva de energía potencial cerca del punto de equilibrio estable. La ecuación general de una parábola que tiene un mínimo en el punto  $x_1$  puede expresarse en la forma

$$U = A + B(x - x_1)^2 \quad (14.19)$$

en donde  $A$  y  $B$  son constantes. La constante  $A$  es el valor de  $U$  en la posición de equilibrio  $x = x_1$ . La fuerza está relacionada con la curva de la energía potencial por  $F_x = -dU/dx$ . Por lo tanto,

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -2B(x - x_1)$$

Si hacemos  $2B = k$ , esta ecuación se reduce a

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_1) \quad (14.20)$$

De acuerdo con la ecuación 14.20, la fuerza es proporcional al desplazamiento y está dirigida en sentido opuesto, de modo que el movimiento es armónico simple. En la figura 14.9 se representa la función energía potencial del sistema  $U(x)$ , que tiene una posición de equilibrio estable en  $x = x_1$ . La figura 14.10 muestra, en cambio, una función energía potencial que tiene una posición de equilibrio estable en  $x = 0$ . El sistema que responde a una función como la que se representa en esta figura es una partícula pequeña de masa  $m$  que oscila en el fondo de un cuenco con forma esférica.

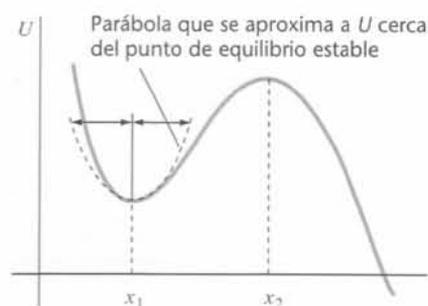


Figura 14.9 Gráfico de  $U$  en función de  $x$  para una fuerza que tiene una posición de equilibrio estable ( $x_1$ ) y otra de equilibrio inestable ( $x_2$ ).

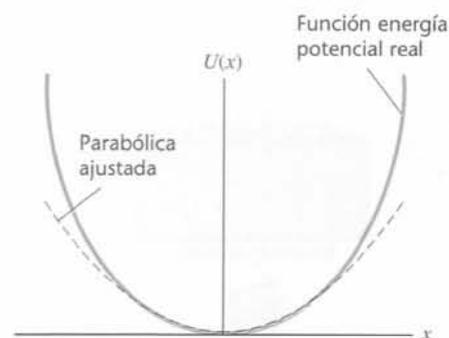


Figura 14.10 Dibujo de  $U$  respecto a  $x$  para una partícula pequeña que oscila en el fondo de un cuenco con forma esférica.

## 14.3 Algunos sistemas oscilantes

### Objeto colgado de un muelle vertical

Cuando un objeto cuelga de un muelle vertical, además de la fuerza del muelle hay una fuerza vertical adicional hacia abajo que es el peso  $mg$  (figura 14.11). Si se elige la dirección hacia abajo como el sentido positivo del eje  $y$ , la fuerza del muelle sobre el objeto es  $-ky$ , donde  $y$  es el alargamiento del muelle. La fuerza neta sobre el objeto es

$$\sum F_y = -ky + mg \quad (14.21)$$

Esta ecuación puede simplificarse definiendo una nueva variable  $y' = y - y_0$ , donde  $y_0 = mg/k$  es la longitud que se alarga el muelle cuando el objeto está en equilibrio. Sustituyendo  $y = y' + y_0$  nos lleva a

$$\sum F_y = -k(y' + y_0) + mg$$

Pero  $ky_0 = mg$ , por lo que

$$\sum F_y = -ky' \quad (14.22)$$

La segunda ley de Newton ( $\sum F_y = ma_y$ ) nos lleva a

$$-ky' = m \frac{d^2 y'}{dt^2}$$

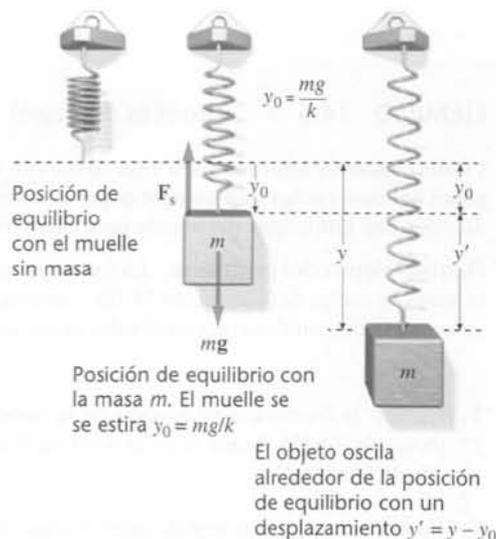


Figura 14.11 El problema de una masa colgada de un muelle vertical se simplifica si el desplazamiento ( $y'$ ) se mide desde la posición de equilibrio del muelle conectado a la masa.

Sin embargo,  $y = y' + y_0$ , donde  $y_0 = mg/k$  es constante. Así,  $d^2y/dt^2 = d^2y'/dt^2$ , por lo tanto

$$-ky' = m \frac{d^2y'}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k}{m}y'$$

que es la ecuación 14.2 con  $y'$  reemplazando a  $x$ . La solución de esta ecuación nos es familiar:

$$y' = A \cos(\omega t + \delta)$$

en donde  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Así pues, el efecto de la fuerza gravitatoria  $mg$  consiste meramente en desplazar la posición de equilibrio desde  $y = 0$  hasta  $y' = 0$ . Cuando el objeto se pasa de su posición de equilibrio una cantidad  $y'$ , la fuerza neta es  $-ky'$ . El objeto oscila respecto a la posición de equilibrio con una frecuencia angular  $\omega = \sqrt{k/m}$ , la misma frecuencia con la que se movería un objeto atado a un muelle horizontal.

Si una fuerza realiza un trabajo que es independiente del camino se dice que la fuerza es conservativa. La fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por un muelle son conservativas, y la suma de estas fuerzas (ecuaciones 14.21 y 14.22) también lo es. La energía potencial  $U$  asociada con la suma de estas fuerzas es el trabajo realizado, con signo negativo, más una constante de integración arbitraria. Es decir,

$$U = -\int -ky' dy' = \frac{1}{2} ky'^2 + U_0$$

en donde la constante de integración  $U_0$  es el valor de  $U$  en la posición de equilibrio ( $y' = 0$ ). Por lo tanto,

$$U = \frac{1}{2} ky'^2 + U_0 \quad (14.23)$$

## EJEMPLO 14.6 | Muelles de papel

**¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!**

Confeccionamos adornos para una fiesta con muelles de papel. Construimos un muelle de papel del cual cuelga una hoja de papel de color que lo alarga 8 cm. ¿Cuántas hojas de papel de color hay que colgar del muelle para que oscile con la frecuencia de 1 ciclo/s?

**Planteamiento del problema** La frecuencia depende del cociente entre la constante del muelle y la masa que cuelga de él (ecuación 14.12), y no sabemos ni una cosa ni otra. Sin embargo, a partir de la información disponible se obtiene el valor de este cociente usando la ley de Hooke (ecuación 14.1).

1. Escribir la frecuencia en función de la constante  $k$  y de la masa  $M$  (ecuación 14.12), donde  $M$  es la masa de  $N$  hojas de papel. Tenemos que determinar  $N$ :
 
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}$$
2. Cuando se cuelga una hoja de papel de masa  $m$  el muelle se alarga una distancia  $y_0 = 8$  cm:
 
$$ky_0 = mg \quad \text{y entonces} \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{y_0}$$
3. La masa de  $N$  hojas de papel se calcula multiplicando por  $N$  la masa de una hoja  $m$ :
 
$$M = Nm$$
4. Se despeja  $k/M$  usando los resultados de los pasos 2 y 3:
 
$$\frac{k}{M} = \frac{k}{Nm} = \frac{1}{N} \frac{g}{y_0}$$

5. Se sustituye el resultado del paso 4 en el resultado del paso 1 y se despeja  $N$ :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1 \text{ g}}{N y_0}}$$

por lo tanto

$$N = \frac{g}{(2\pi f)^2 y_0} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{4\pi^2 (1 \text{ Hz})^2 (0,08 \text{ m})} = 3,11$$

Hay que colgar tres hojas de papel de color

**Observación** Obsérvese que en este ejemplo no hemos usado el valor de  $m$  o de  $k$ , ya que la frecuencia depende del cociente  $k/m$  que resulta ser  $g/y_0$ . Las unidades también salen bien, ya que  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s}$ , y un ciclo es una unidad sin dimensiones.

**Ejercicio** ¿Cuánto se alarga el muelle de papel cuando un adorno hecho con tres hojas de papel colgando está en equilibrio? (Respuesta 24 cm)

### EJEMPLO 14.7 Una bolita de abalorio sobre un bloque

Un bloque descansa sobre un muelle y oscila verticalmente con una frecuencia de 4 Hz y una amplitud de 7 cm. Una bolita de abalorio se sitúa sobre el bloque oscilante justo cuando éste alcanza su punto más bajo. Suponiendo que la masa de la bolita es tan pequeña que no afecta el movimiento del bloque, ¿a qué distancia de la posición de equilibrio del bloque la bolita pierde contacto con éste?

**Planteamiento del problema** Las fuerzas que actúan sobre la bola son su peso  $mg$  hacia abajo y la fuerza normal ejercida por el bloque hacia arriba. El módulo de esta fuerza normal cambia con las variaciones de la aceleración. A medida que el bloque se mueve hacia arriba, por encima de la posición de equilibrio, su aceleración y la de la bolita van hacia abajo y aumentan en módulo. Cuando la aceleración alcanza el valor  $g$ , la fuerza normal es cero. Si la aceleración hacia abajo a la que está sometido el bloque supera hacia abajo este valor, la bolita pierde contacto con el bloque.

1. Dibujar un esquema del sistema (figura 14.12). Incluir el eje de coordenadas y con el origen situado en la posición de equilibrio y con la dirección positiva dirigida hacia abajo:
2. Buscar el valor de  $y$  para el cual la aceleración es  $g$  dirigida hacia abajo. Usar la ecuación 14.7:
3. Sustituir  $2\pi f$  por  $\omega$  y despejar  $y$ :

$$a_y = -\omega^2 y$$

$$g = -\omega^2 y$$

$$g = -(2\pi f)^2 y$$

por lo tanto

$$y = \frac{g}{(2\pi f)^2} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{[2\pi(4 \text{ Hz})]^2} = -0,0155 \text{ m} = \boxed{-1,55 \text{ cm}}$$

**Comprobar el resultado** La bola se separa del bloque cuando  $y$  es negativa, lo cual se produce cuando la bolita está por encima de la posición de equilibrio, como era de esperar.

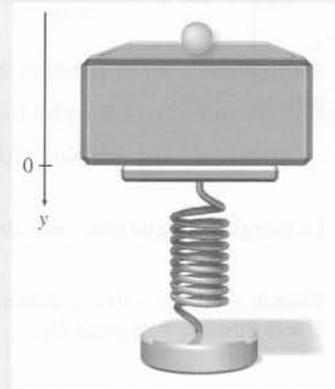


Figura 14.12

### EJEMPLO 14.8 Energía potencial del sistema Tierra-muelle

Un objeto de 3 kg alarga en 16 cm la longitud de un muelle cuando cuelga de él verticalmente y está en equilibrio. El muelle se estira 5 cm más desde su posición de equilibrio y se deja el objeto en libertad. Sea  $U$  la energía potencial total del sistema muelle-objeto-planeta. Determinar  $U$  cuando la separación de la masa respecto de su posición de equilibrio es máxima (a) si  $U = 0$  en la posición de equilibrio y (b) si  $U = 0$  cuando el muelle está sin deformar.

**Planteamiento del problema** (a) Con  $U = 0$  en la posición de equilibrio, la energía potencial total  $U$  es  $1/2ky'^2$ , donde  $y'$  es el desplazamiento de la posición de equilibrio. (b) Si  $U = 0$  cuando el muelle está sin deformar, la energía potencial total es la energía potencial del muelle más la energía potencial gravitatoria.

- (a) 1. Dibujar tres esquemas del sistema, uno con el muelle sin deformar, otro con el muelle deformado 16 cm y un tercero con el muelle alargado 21 cm (figura 14.13).
2. Si la dirección positiva de  $y'$  es la dirección hacia abajo y si  $y' = 0$  en la posición de equilibrio, la energía potencial total vale (ecuación 14.23)

$$U = \frac{1}{2}ky'^2$$

3. Para determinar  $U$  primero hay que saber cuánto vale la constante del muelle  $k$ . Cuando hay equilibrio la fuerza hacia arriba del muelle iguala la fuerza hacia abajo de la gravedad. Utilizando este hecho, calcular el valor de  $k$ :

$$ky_0 = mg$$

por lo tanto

$$k = \frac{mg}{y_0} = \frac{(3 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)}{0,16 \text{ m}} = 184 \text{ N/m}$$

4. Sustituyendo  $k$  en el resultado del paso 1 y despejando  $U$  se obtiene:

$$U = \frac{1}{2}ky'^2 = \frac{1}{2}(184 \text{ N/m})(0,05 \text{ m})^2 = \boxed{0,230 \text{ J}}$$

- (b) 1. La energía potencial total viene dada por la ecuación 14.23:

2. Cuando  $y' = y'_{\text{ref}} = -16 \text{ cm}$ , la energía potencial vale cero, es decir,  $U = 0$ . Sustituir y despejar  $U_0$ :

$$U = \frac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

$$0 = \frac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

por lo tanto

$$U_0 = -\frac{1}{2}ky'^2_{\text{ref}} = -\frac{1}{2}(184 \text{ N/m})(-0,16 \text{ m})^2 = -2,35 \text{ J}$$

3. Sustituyendo  $U_0$  en el resultado del paso 1 del apartado b se obtiene:

$$U = \frac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

$$= \frac{1}{2}(184 \text{ N/m})(0,05 \text{ m})^2 - 2,35 \text{ J} = \boxed{-2,12 \text{ J}}$$

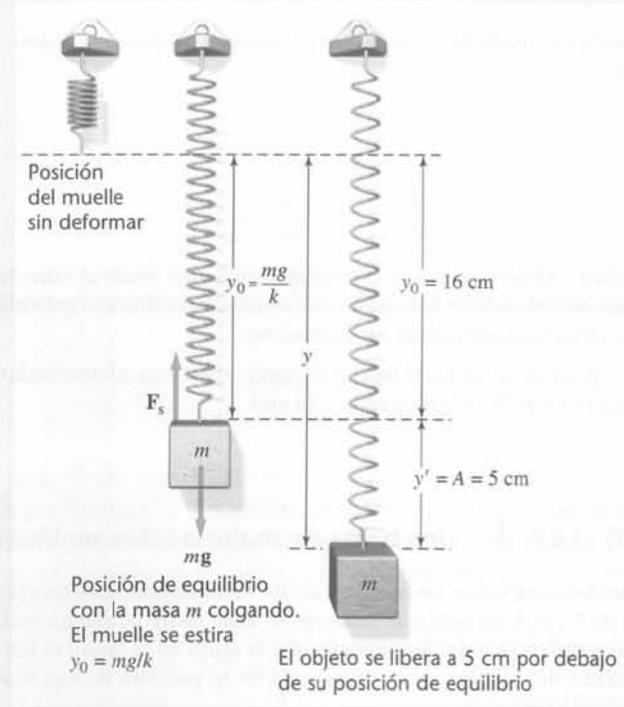


Figura 14.13

**Comprobar el resultado** La energía potencial calculada en el apartado (b) debe coincidir con la suma de la energía potencial del muelle  $U_m$  en  $y = 21 \text{ cm}$  más la energía potencial gravitatoria  $U_g$  en  $y = 21 \text{ cm}$ , ya que cada una de estas energías potenciales es cero en  $y = 0$ , donde el muelle está sin deformar, y la dirección positiva de  $y$  está dirigida hacia abajo.  $U_s = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}(184 \text{ N/m})(0,21 \text{ m})^2 = 4,06 \text{ J}$  y  $U_g = mg(-y) = (3 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})(-0,21 \text{ m}) = -6,18 \text{ J}$ . Efectivamente, la suma de estos dos términos da:  $4,06 \text{ J} - 6,18 \text{ J} = -2,12 \text{ J}$ , que coincide con el resultado obtenido en el apartado (b) del ejercicio.

## El péndulo simple

Un péndulo simple consta de una cuerda de longitud  $L$  y una lenteja de masa  $m$ . Cuando la lenteja se deja en libertad desde un ángulo inicial  $\phi_0$  con la vertical, oscila a un lado y a otro con un periodo  $T$ .

**Ejercicio de análisis dimensional** Parece lógico suponer que el periodo de un péndulo simple depende de la masa  $m$  de la lenteja, la longitud  $L$  del péndulo, la aceleración debida a la gravedad,  $g$ , y el ángulo inicial  $\phi_0$ . Determinar una combinación simple de estas magnitudes que ofrezca las dimensiones correctas del periodo. (Respuesta  $\sqrt{L/g}$ .)

**Observación** Las unidades de longitud, masa y  $g$  son m, kg y  $\text{m/s}^2$ , respectivamente. Si dividimos  $L$  por  $g$  los metros se cancelan y permanecen segundos al cuadrado, lo que sugiere la forma  $\sqrt{L/g}$ . Si la fórmula del periodo contuviera la masa, la unidad kg debería cancelarse por alguna otra magnitud. Sin embargo, ninguna combinación de  $L$  y  $g$  puede cancelar

las unidades de masa. Así pues, el periodo no puede depender de la masa de la lenteja. Como el ángulo  $\phi_0$  es adimensional, no podemos saber por análisis dimensional si es o no un factor del periodo. Más adelante veremos que para valores pequeños de  $\phi_0$ , el periodo viene expresado por  $T = 2\pi \sqrt{L/g}$ .

Las fuerzas que actúan sobre la lenteja son su peso  $mg$  y la tensión  $T$  de la cuerda (figura 14.14). Cuando la cuerda forma un ángulo  $\phi$  con la vertical, el peso tiene las componentes  $mg \cos \phi$  a lo largo de la cuerda y  $mg \sin \phi$  tangencial al arco circular en el sentido de  $\phi$  decreciente. Para la componente tangencial, la segunda ley de Newton ( $\Sigma F_t = ma_t$ ) nos da

$$-mg \sin \phi = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (14.24)$$

en donde la longitud del arco  $s$  está relacionada con el ángulo  $\phi$  mediante  $s = L\phi$ . Derivando dos veces con respecto del tiempo ambos lados de la expresión  $s = L\phi$  se obtiene

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = L \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

Sustituyendo en la ecuación 14.24  $L \frac{d^2 \phi}{dt^2}$  por  $d^2 s / dt^2$  se obtiene

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \phi \quad (14.25)$$

Obsérvese que la masa  $m$  no aparece en la ecuación 14.25, es decir, el movimiento de un péndulo no depende de su masa. Para valores pequeños de  $\phi$ ,  $\sin \phi \approx \phi$  y

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} \approx -\frac{g}{L} \phi \quad (14.26)$$

La ecuación 14.26 es de la misma forma que la ecuación 14.2 para un objeto ligado a un muelle. El movimiento de un péndulo es, por lo tanto, aproximadamente armónico simple para pequeños desplazamientos angulares.

La ecuación 14.26 también puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\omega^2 \phi, \quad \text{en donde} \quad \omega^2 = \frac{g}{L} \quad (14.27)$$

y  $\omega$  es la frecuencia angular —no la velocidad angular— del movimiento del péndulo. En consecuencia, el periodo del péndulo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (14.28)$$

PERIODO DE UN PÉNDULO SIMPLE

La solución de la ecuación 14.27 es

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

en donde  $\phi_0$  es el desplazamiento angular máximo.

De acuerdo con la ecuación 14.28, cuanto mayor es la longitud del péndulo, mayor es el periodo, lo cual está de acuerdo con lo observado experimentalmente. Obsérvese también que la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud de la oscilación (para amplitudes pequeñas), lo cual es una característica general del movimiento armónico simple.

**Ejercicio** Determinar el periodo de un péndulo simple de 1 m de longitud. (Respuesta 2,01 s.)

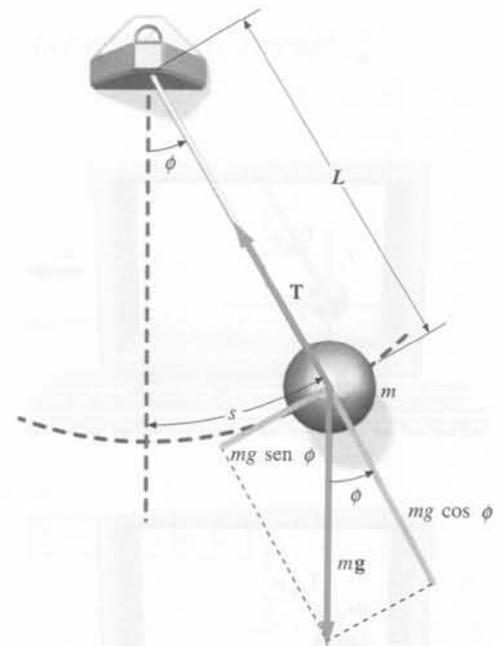
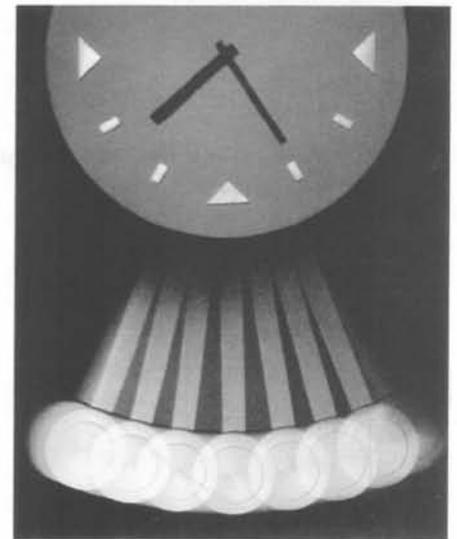
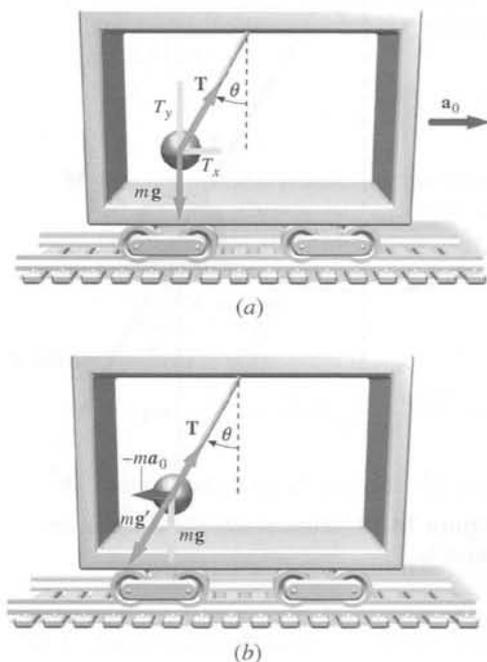


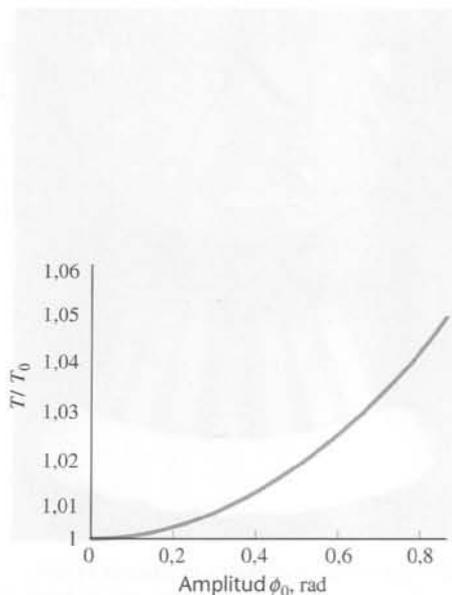
Figura 14.14 Fuerzas sobre la lenteja de un péndulo.



Todos los relojes mecánicos mantienen la hora exacta porque el periodo del elemento oscilante del mecanismo permanece constante. El periodo de cualquier péndulo cambia con las variaciones de la amplitud, pero el mecanismo que mueve un reloj de péndulo mantiene la amplitud a un valor constante.



**Figura 14.15** (a) Péndulo simple en equilibrio aparente en un furgón con movimiento acelerado. Las fuerzas que se muestran corresponden a un sistema estacionario exterior. (b) Fuerzas que actúan sobre la lenteja observadas en el sistema acelerado. Sumar la pseudofuerza  $-ma_0$  es equivalente a reemplazar  $g$  por  $g'$ .



**Figura 14.16** Obsérvese que los valores de las ordenadas van de 1 a 1,06. En un rango de  $\phi$  entre 0 y 0,8 rad ( $46^\circ$ ) el periodo cambia en 5% aproximadamente.

La aceleración debida a la gravedad puede medirse fácilmente utilizando un péndulo simple. Únicamente es necesario medir la longitud  $L$  y el periodo  $T$ . Mediante la ecuación 14.28 se calcula  $g$ . (Para determinar  $T$ , habitualmente medimos el tiempo necesario para  $n$  oscilaciones y dividimos por  $n$ , lo cual minimiza el error de la medida.)

**El péndulo en un sistema de referencia acelerado** La figura 14.15a muestra un péndulo simple suspendido del techo de un furgón de ferrocarril que se mueve con aceleración  $a_0$  relativa al suelo hacia la derecha, y  $a$  es la aceleración de la lenteja relativa al suelo. Aplicando la segunda ley de Newton a la lenteja se obtiene

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \tag{14.29}$$

Si la lenteja permanece en reposo con respecto del furgón,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$  y se cumple

$$\begin{aligned} \sum F_x &= T \sin \theta = ma_0 \\ \sum F_y &= T \cos \theta - mg = 0 \end{aligned}$$

en donde  $\theta_0$  es el ángulo de equilibrio, que según esto viene dado por  $\tan \theta_0 = a_0/g$ . Si la lenteja se mueve con respecto al furgón, entonces  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$ , donde  $\mathbf{a}'$  es la aceleración de la lenteja relativa al furgón. Sustituyendo  $\mathbf{a}$  en la ecuación 14.29 se obtiene

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_0)$$

Restando  $ma_0$  en los dos términos de la expresión anterior se llega a

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g}' = m\mathbf{a}'$$

en donde  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_0$ . Reemplazando  $\mathbf{g}$  por  $\mathbf{g}'$  y  $\mathbf{a}$  por  $\mathbf{a}'$  en la ecuación 14.29 se obtiene el movimiento de la lenteja relativa al furgón. En la figura 14.15b se muestran los vectores  $\mathbf{T}$  y  $m\mathbf{g}'$ . Si la cuerda se rompe y, por lo tanto,  $\mathbf{T} = 0$ , la ecuación anterior nos conduce a  $\mathbf{a}' = \mathbf{g}'$ , lo cual significa que  $\mathbf{g}'$  es la aceleración de caída libre en el sistema de referencia del furgón. Si se desplaza ligeramente la lenteja de su posición de equilibrio, oscilará con un periodo  $T$  dado por la ecuación 14.28, donde  $g$  ha sido reemplazada por  $g'$ .

**Ejercicio** Un péndulo simple de longitud 1 m se encuentra en un furgón que se mueve horizontalmente con una aceleración  $a_0 = 3 \text{ m/s}^2$ . Determinar  $g'$  y el periodo  $T$ . (Respuesta  $g' = 10,26 \text{ m/s}^2$ ,  $T = 1,96 \text{ s}$ .)

**Oscilaciones de gran amplitud** Cuando la amplitud de un péndulo se hace grande, su movimiento continúa siendo periódico pero deja de ser armónico simple. Para determinar el periodo debe tenerse en cuenta una ligera dependencia con la amplitud. Para una amplitud angular cualquiera  $\phi_0$ , se demuestra que el periodo viene dado por la expresión

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{1}{2} \phi_0 + \frac{1}{2^2} \left( \frac{3}{4} \right) \sin^4 \frac{1}{2} \phi_0 + \dots \right] \tag{14.30}$$

PERIODO PARA OSCILACIONES DE GRAN AMPLITUD

en donde  $T_0 = 2\pi \sqrt{L/g}$  es el periodo correspondiente a amplitudes muy pequeñas. La figura 14.16 muestra  $T/T_0$  en función de la amplitud  $\phi_0$ .

## EJEMPLO 14.9 | Un reloj de péndulo

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un reloj de péndulo simple se calibra para marchar de modo exacto con una amplitud angular de  $\phi_0 = 10^\circ$ . Cuando la amplitud ha disminuido hasta ser muy pequeña, ¿el reloj se adelantará o se atrasará? ¿Cuánto se adelantará o se atrasará en un día si la amplitud sigue siendo muy pequeña?

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

## Pasos

1. Responder a la primera cuestión determinando si el periodo aumenta o disminuye.
2. Utilizar la ecuación 14.30 para determinar la variación relativa en porcentaje,  $[(T - T_0)/T_0] \times 100\%$ , para  $\phi = 10^\circ$ . Utilizar sólo el primer término de corrección.
3. Determinar el número de minutos de un día.
4. Combinar los pasos 2 y 3 para determinar la variación del número de minutos en un día según el reloj del ejemplo.

## Respuestas

$T$  disminuye cuando  $\phi$  disminuye de modo que el reloj se adelanta.

0,190%.

Hay 1440 minutos en un día.

Se produce un adelanto de 2,73 minutos por día.

**Observación** Para evitar que el reloj se adelante, los mecanismos los relojes de péndulo se diseñan de modo que mantengan la amplitud apreciablemente constante.

## \*El péndulo físico

Un cuerpo rígido que pueda girar libremente alrededor de un eje horizontal que no pase por su centro de masas oscilará cuando se desplace de su posición de equilibrio. Este sistema recibe el nombre de **péndulo físico**. Consideremos una figura plana con un eje de rotación situado a una distancia  $D$  del centro de masas y desplazada de su posición de equilibrio un ángulo  $\phi$  (figura 14.17). El momento respecto al eje tiene como módulo  $MgD \sin \phi$  y tiende a disminuir  $|\phi|$ . La segunda ley de Newton aplicada a la rotación es

$$\tau = I\alpha$$

en donde  $\alpha$  es la aceleración angular e  $I$  el momento de inercia respecto al eje. Sustituyendo el momento neto  $\tau$  por  $-MgD \sin \phi$  y  $d^2\phi/dt^2$  por  $\alpha$  tenemos

$$-MgD \sin \phi = I \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

o sea,

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{MgD}{I} \sin \phi \quad (14.31)$$

Igual que en el péndulo simple, el movimiento es aproximadamente armónico simple si los desplazamientos angulares son pequeños, de manera que la aproximación  $\sin \phi \approx \phi$  sea válida. En este caso tenemos

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -\frac{MgD}{I} \phi = -\omega^2 \phi \quad (14.32)$$

en donde  $\omega = \sqrt{MgD/I}$  es la frecuencia angular —no la velocidad angular— del movimiento. En consecuencia, el periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgD}} \quad (14.33)$$

PERIODO DE UN PÉNDULO FÍSICO

Para grandes amplitudes, el periodo viene dado por la ecuación 14.30 con  $T_0$  expresado por la ecuación 14.33. Para un péndulo simple de longitud  $L$ , el momento de inercia es  $I = ML^2$  y  $D = L$ . La ecuación 14.33 nos da  $T = 2\pi \sqrt{ML^2/MgL} = 2\pi \sqrt{L/g}$ , igual que en la ecuación 14.28.

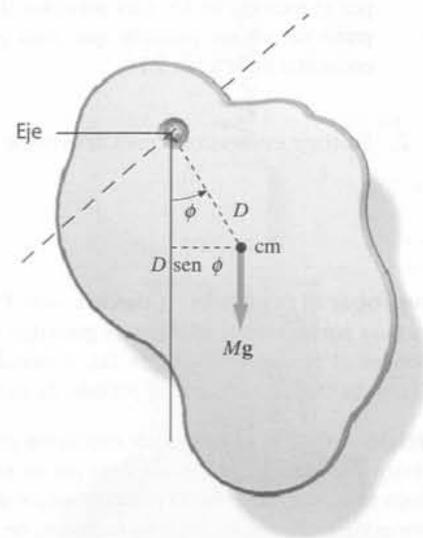


Figura 14.17 Péndulo físico.

**EJEMPLO 14.10** | La barra oscilante

Una barra uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$  puede girar libremente alrededor de un eje horizontal perpendicular a la barra y que pasa por uno de sus extremos. (a) Determinar el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos angulares. (b) Determinar el periodo de oscilación si el eje de rotación está a una distancia  $x$  del centro de masas.

**Planteamiento del problema** (a) El periodo viene dado por la ecuación 14.33. El centro de masas se encuentra en el centro de la barra, de modo que la distancia del centro de masas al eje de rotación es la mitad de la longitud de la barra (figura 14.18a). El momento de inercia de una barra uniforme puede encontrarse en la tabla 9.1. (b) Para rotaciones alrededor de un eje que pasa por un punto  $P$  (figura 14.18b) el momento de inercia se deduce a partir del teorema de los ejes paralelos  $I = I_{cm} + MD^2$  (ecuación 9.44) en donde  $I_{cm}$  puede encontrarse en la tabla 9.1.

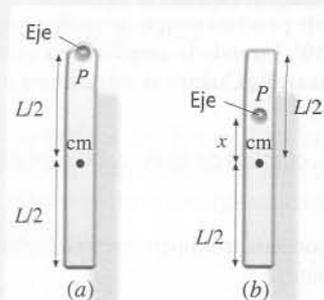


Figura 14.18

(a) 1. El periodo viene dado por la ecuación 14.33:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

2. El valor de  $I$  respecto al extremo se encuentra en la tabla 9.1 y  $D$  es la mitad de la longitud de la barra:

$$I = \frac{1}{3}ML^2; \quad D = \frac{1}{2}L$$

3. Aplicar los valores de  $I$  y  $D$  para determinar  $T$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(\frac{1}{2}L)}} = \boxed{2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}}$$

(b) 1. Alrededor del punto  $P$ ,  $D = x$  y el momento de inercia viene dado por el teorema de los ejes paralelos. El momento de inercia respecto de un eje paralelo que pasa por el centro de masas se encuentra en la tabla 9.1:

$$D = x$$

$$I = I_{cm} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2$$

2. Sustituir estos valores para determinar  $T$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgD}} = 2\pi \sqrt{\frac{(\frac{1}{12}ML^2 + Mx^2)}{Mgx}}$$

$$= \boxed{2\pi \sqrt{\frac{(\frac{1}{12}L^2 + x^2)}{gx}}}$$

**Comprobar el resultado** Cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow \infty$  como era de esperar. (Si el eje de rotación de la barra pasa por su centro de masas la gravedad no ejerce un momento restaurador.) Cuando  $x = L/2$ , se obtiene el mismo resultado de (a), y cuando  $x \gg L$  la expresión del periodo se acerca a  $T = 2\pi\sqrt{x/g}$ , la cual corresponde al periodo de un péndulo simple de longitud  $x$  (ecuación 14.28).

**Ejercicio** ¿Cuál es el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos angulares de una regla de metro alrededor de un eje que pasa por un extremo? (Respuesta  $T = 1,64$  s. Obsérvese que este periodo es menor que el de un péndulo simple de longitud  $L = 1$  m. El periodo del péndulo simple es mayor porque el cociente entre su momento de inercia y el momento restaurador es mayor.)

**Ejercicio** Demostrar que cuando  $x = L/6$ , el periodo es el mismo que cuando  $x = L/2$ .

**Observación** En la figura 14.19 se muestra el periodo  $T$  en función de la distancia  $x$  del centro de masas para una barra de longitud 1 m.

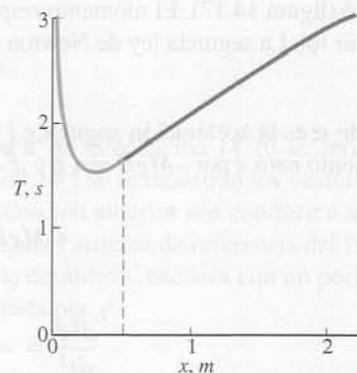


Figura 14.19 Representación gráfica del periodo en función de la distancia al centro de masas. Si  $x > 0,5$  m el pivote está fuera del extremo de la barra.

**EJEMPLO 14.11** | Revisión del ejercicio de la barra que oscila

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Determinar el valor de  $x$  en el ejemplo 14.10 para que el periodo sea mínimo.

**Planteamiento del problema** En el valor de  $x$  para el cual  $T$  es un mínimo,  $dT/dx = 0$ .

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

**Pasos**

1. El periodo viene dado por el resultado del apartado (b) del ejercicio 14.10 en el cual  $T = 2\pi\sqrt{Z/g}$ , donde  $Z = (\frac{1}{12}L^2 + x^2)/x$ . Determinar el periodo cuando  $x$  se acerca a cero y a infinito.

**Respuestas**

- Cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $Z \rightarrow \infty$ , y  $T \rightarrow \infty$ .
- Cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $Z \rightarrow \infty$ , y  $T \rightarrow \infty$ .

2. El periodo tiende a infinito cuando  $x$  se acerca a cero y a infinito. En algún punto del intervalo  $0 < x < \infty$  el periodo es un mínimo. Para determinar el mínimo, se impone  $dT/dx = 0$  y se despeja  $x$ .

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dZ} \frac{dZ}{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} Z^{-1/2} \frac{dZ}{dx}$$

$$Z > 0 \text{ en todo el intervalo } 0 < x < \infty, \text{ con lo cual } \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = 0$$

$$\frac{dZ}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{12}} = 0,289L$$

## 14.4 Oscilaciones amortiguadas

Si un muelle o un péndulo oscilan libremente, siempre acaban parándose porque las fuerzas de rozamiento disipan su energía mecánica. Un movimiento con estas características se denomina movimiento **amortiguado**. Si el amortiguamiento es muy grande, como por ejemplo en el caso de un péndulo que oscila en melaza, el oscilador ni tan solo ejecuta una oscilación completa, sino que se mueve hacia la posición de equilibrio con una velocidad que se aproxima a cero cuando el objeto se acerca a dicha posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se denomina **sobreamortiguado**. Si, en cambio, el amortiguamiento del movimiento es débil, de modo que la amplitud decrece lentamente con el tiempo, como le ocurre a un niño que se divierte en un columpio de un parque cuando su madre deja de empujarle, el movimiento resultante se denomina **subamortiguado**. Cuando se tiene el amortiguamiento mínimo para que se produzca un movimiento no oscilatorio se dice que el sistema está **amortiguado críticamente**. (Cualquier amortiguamiento inferior produce un movimiento subamortiguado.)

**Movimiento subamortiguado** La fuerza de amortiguamiento ejercida por un oscilador como el que se muestra en la figura 14.20a puede representarse mediante la expresión empírica

$$F_d = -bv$$

en donde  $b$  es una constante. Un sistema que cumple la ecuación anterior se dice que está amortiguado linealmente. El análisis siguiente corresponde a este tipo de movimiento. La fuerza de amortiguamiento se opone a la dirección del movimiento, por lo tanto, realiza un trabajo negativo y hace que la energía mecánica del sistema disminuya. Esta energía es proporcional al cuadrado de la amplitud (ecuación 14.17) y el cuadrado de la amplitud disminuye exponencialmente a medida que aumenta el tiempo. Por lo tanto,

$$A^2 = A_0^2 e^{-t/\tau} \quad (14.34)$$

DEFINICIÓN—CONSTANTE DE TIEMPO

en donde  $A$  es la amplitud,  $A_0$  es la amplitud cuando  $t = 0$ , y  $\tau$  es el **tiempo de extinción** o **constante de tiempo**. La constante de tiempo es el tiempo necesario para que la energía disminuya en un factor  $e$ .

El movimiento de un sistema amortiguado puede deducirse de la segunda ley de Newton. Para un objeto de masa  $m$  ligado a un muelle de constante de fuerza  $k$ , la fuerza neta es  $-kx - b(dx/dt)$ . Igualando la fuerza neta con el producto de la masa por la aceleración  $d^2x/dt^2$ , se obtiene

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (14.35)$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN OSCILADOR AMORTIGUADO

La solución exacta de esta ecuación puede determinarse utilizando los métodos conocidos de las ecuaciones diferenciales. La solución para el caso subamortiguado es

$$x = A_0 e^{-(b/2m)t} \cos(\omega't + \delta) \quad (14.36)$$

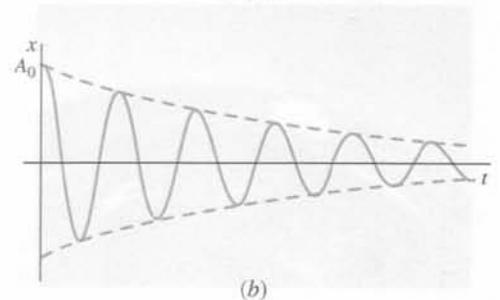


Figura 14.20 (a) Oscilador amortiguado. El movimiento se amortigua por el émbolo sumergido en el líquido. (b) Curva de oscilación amortiguada.



Para amortiguar la oscilación de esta camioneta se utilizan los amortiguadores (cilindros amarillos) que absorben los choques.



**Figura 14.21** Representación gráfica del desplazamiento en función del tiempo en el caso de un oscilador amortiguado críticamente y otro sobreamortiguado.



En las llantas de las ruedas de los coches se colocan pesos para equilibrarlas. El objetivo de equilibrar las ruedas es evitar las vibraciones que producirían las oscilaciones de la dirección del vehículo.

en donde  $A_0$  es la amplitud máxima. La frecuencia  $\omega'$  viene dada por

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} \quad (13.37)$$

en donde  $\omega_0$  es la frecuencia cuando no hay amortiguamiento ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  para una masa ligado a un muelle). Para un amortiguamiento débil,  $b/2m\omega_0 \ll 1$  y  $\omega'$  es aproximadamente igual a  $\omega_0$ . Las curvas de trazos de la figura 14.20 corresponden a  $x = A$  y  $x = -A$ , en donde  $A$  viene dado por

$$A = A_0 e^{-(b/2m)t} \quad (14.38)$$

Elevando al cuadrado los dos términos de esta ecuación y comparando el resultado con la ecuación 14.34 podemos identificar

$$\tau = \frac{m}{b} \quad (14.39)$$

Si la constante de amortiguamiento  $b$  crece gradualmente, la frecuencia angular  $\omega'$  disminuye hasta hacerse igual a cero en el valor crítico

$$b_c = 2m\omega_0 \quad (14.40)$$

Si  $b$  es igual o mayor que  $b_c$ , el sistema no oscila. Cuando  $b$  es mayor que  $b_c$  el sistema es **sobreamortiguado**. Cuanto menor sea  $b$ , más rápidamente volverá el objeto al equilibrio. Cuando  $b = b_c$ , se dice que el sistema está **amortiguado críticamente**, y vuelve a su posición de equilibrio en el tiempo más breve posible sin oscilar. La figura 14.21 muestra el desplazamiento en función del tiempo correspondiente a un oscilador amortiguado críticamente y sobreamortiguado. En muchas aplicaciones prácticas se usa un amortiguador crítico o casi crítico para evitar las oscilaciones y sin embargo conseguir que el sistema vuelva al equilibrio rápidamente. Un ejemplo es el empleo de amortiguadores (sistemas que absorben choques) para amortiguar las oscilaciones de un automóvil sobre sus muelles. Esto puede verse empujando la parte delantera o trasera de un coche. Si el coche vuelve al equilibrio sin oscilar, el sistema de absorción de choques está amortiguado críticamente o sobreamortiguado. (Normalmente en un vehículo vacío se producen una o dos oscilaciones antes de que el sistema quede en reposo, lo que indica que la constante de tiempo está justo bajo su valor crítico.)

Como la energía de un oscilador es proporcional al cuadrado de la amplitud, la energía de un oscilador subamortiguado (valor promediado en un ciclo) también disminuye exponencialmente con el tiempo:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 (A_0 e^{-(b/2m)t})^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-t/\tau} \quad (14.41)$$

en donde  $E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2$  y

$$\tau = \frac{m}{b} \quad (14.42)$$

Un oscilador amortiguado se describe normalmente por su **factor  $Q$**  (o factor de calidad).

$$Q = \omega_0 \tau \quad (14.43)$$

DEFINICIÓN —FACTOR  $Q$

El factor  $Q$  es adimensional. (Como las dimensiones de  $\omega_0$  son las recíprocas del tiempo,  $\omega_0 \tau$  no tiene dimensiones.) Podemos relacionar  $Q$  con la pérdida relativa de energía por ciclo. Diferenciando la ecuación 14.41, se obtiene

$$dE = -\frac{1}{\tau} E_0 e^{-t/\tau} dt = -\frac{1}{\tau} E dt$$

Si la amortiguación es suficientemente débil para que la pérdida de energía por ciclo sea pequeña, podemos reemplazar  $dE$  por  $\Delta E$  y  $dt$  por el periodo  $T$ . Por lo tanto  $|\Delta E|/E$  en un ciclo (un periodo) viene dado por

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q} \quad (14.44)$$

o sea,

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{\text{ciclo}}}, \quad \frac{|\Delta E|}{E} \ll 1 \quad (14.45)$$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE  $Q$  PARA UN AMORTIGUAMIENTO LEVE

Así pues,  $Q$  es inversamente proporcional a la pérdida relativa de energía por ciclo.

### EJEMPLO 14.12 | Componiendo música

Cuando se pulsa la nota do-central en el piano (frecuencia 262 Hz), la mitad de su energía se pierde en 4 segundos. (a) ¿Cuál es el tiempo de extinción  $\tau$ ? (b) ¿Cuál es el factor  $Q$  de esta cuerda de piano? (c) ¿Cuál es la pérdida de energía relativa por ciclo?

**Planteamiento del problema** (a) Utilizamos  $E = E_0 e^{-t/\tau}$  haciendo  $E = \frac{1}{2}E_0$ . (b) El valor  $Q$  puede determinarse entonces a partir del tiempo de extinción y de la frecuencia.

(a) 1. Igualamos la energía de la nota pulsada en el tiempo  $t = 4$  s con la mitad de su energía original:

$$E = E_0 e^{-t/\tau} \quad \text{de modo que} \quad \frac{1}{2}E_0 = E_0 e^{-4/\tau}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-4/\tau}$$

2. Despejar el tiempo tomando logaritmos neperianos de la expresión anterior:

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{4}{\tau}$$

despejando  $\tau$  se obtiene

$$\tau = \frac{4 \text{ s}}{\ln 2} = \boxed{5,77 \text{ s}}$$

(b) Calcular  $Q$  a partir de  $\tau$  y  $\omega_0$ :

$$Q = \omega_0 \tau = 2\pi f \tau$$

$$= 2\pi(262 \text{ Hz})(5,77 \text{ s}) = \boxed{9,50 \times 10^3}$$

(c) La pérdida de energía relativa en un periodo viene dada por la ecuación 14.44 y la frecuencia por  $f = 1/T$ :

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{f\tau} = \frac{1}{(262 \text{ Hz})(5,77 \text{ s})} = \boxed{6,61 \times 10^{-4}}$$

**Comprobar el resultado** El factor  $Q$  también puede calcularse a partir de  $Q = 2\pi/(\Delta E/E)_{\text{ciclo}} = 2\pi/(6,61 \times 10^{-4}) = 9,50 \times 10^3$ . Obsérvese que la pérdida de energía relativa después de 4 s no coincide con el producto del número de ciclos ( $4 \times 262$ ) por la pérdida de energía relativa por ciclo, ya que el decrecimiento de energía relativa no es constante, sino exponencial.

**Observación** La figura 14.22 muestra la amplitud relativa  $A/A_0$  y la energía relativa  $E/E_0$  en función del tiempo de la oscilación de una cuerda de piano después de pulsar la nota do-central. Al cabo de los 4 s, la amplitud ha disminuido a unas 0,7 veces su valor inicial y la energía, proporcional al cuadrado de la amplitud, es aproximadamente la mitad de su valor inicial.

Obsérvese que  $Q$  es bastante grande. Es fácil estimar  $\tau$  y  $Q$  de diversos sistemas oscilantes. Dése un pequeño golpe a un vaso de cristal y obsérvese el tiempo que tarda el sonido en extinguirse. Un tiempo mayor supone un mayor valor de  $\tau$  y  $Q$  y menor amortiguamiento. Los vasos de vidrio del laboratorio suelen tener un  $Q$  elevado. Probar con una taza de plástico. ¿Cómo es el amortiguamiento comparado con el vaso del laboratorio?

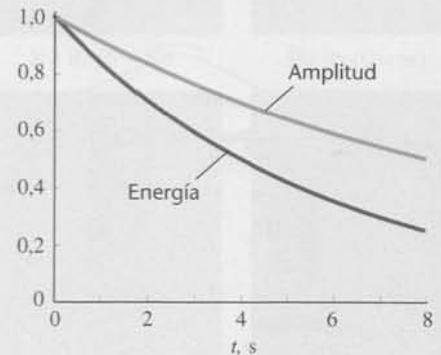


Figura 14.22 Representación de  $A/A_0$  y de  $E/E_0$  para una cuerda de piano pulsada.

En función de  $Q$ , la frecuencia exacta de un oscilador subamortiguado es

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (14.46)$$

Como  $b$  es pequeña ( $Q$  es grande) para un oscilador débilmente amortiguado (ejemplo 14.12), vemos que  $\omega'$  es casi igual a  $\omega_0$ .

Mediante consideraciones energéticas podemos entender cualitativamente el comportamiento de un oscilador amortiguado. La potencia disipada por la fuerza amortiguadora es igual a la variación instantánea de la energía mecánica total por unidad de tiempo

$$P = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} = -b\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -bv^2 \quad (14.47)$$

En un oscilador ligeramente amortiguado, la energía mecánica total disminuye poco a poco con el tiempo. La energía cinética media es igual a la mitad de la energía total

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_m = \frac{1}{2}E \quad \text{o} \quad (v^2)_m = \frac{E}{m}$$

Si sustituimos  $(v^2)_m = E/m$  por  $v^2$  en la ecuación 14.47, resulta

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 \approx -b(v^2)_m = -\frac{b}{m}E \quad (14.48)$$

Reordenando la ecuación 14.48 nos queda

$$\frac{dE}{E} = -\frac{b}{m}dt$$

ecuación que integrada tiene la solución

$$E = E_0 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

que es la ecuación 14.41.



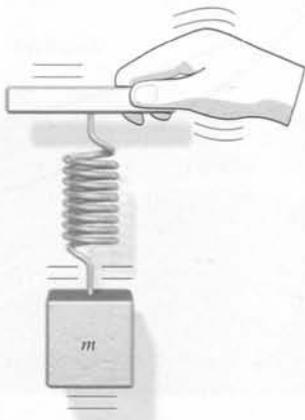
Dándose impulso en el columpio, la persona de la fotografía transfiere parte de su energía interna la energía mecánica del oscilador.

## 14.5 Oscilaciones forzadas y resonancia

Para mantener en marcha un sistema amortiguado debemos ir suministrando energía al sistema. Cuando se lleva a cabo esto, se dice que el oscilador es forzado. Por ejemplo, al sentarse en un columpio y hacerlo oscilar, el suministro de energía se realiza moviendo el cuerpo y las piernas hacia delante y hacia atrás, de forma que se convierte en un oscilador forzado. Si se introduce energía en el sistema a un ritmo mayor del que se disipa, la energía aumenta con el tiempo, lo cual se aprecia por un aumento de la amplitud del movimiento. Si la energía se introduce al mismo ritmo que se disipa, la amplitud permanece constante con el tiempo. En este caso se dice que el oscilador está en estado estacionario.

Una manera de suministrar energía a un sistema formado por un objeto que cuelga de un muelle vertical es mover el punto de soporte hacia arriba y hacia abajo, con un movimiento armónico simple de frecuencia  $\omega$  (figura 14.23). Al principio el movimiento es complicado, pero finalmente alcanza un estado estacionario en el que el sistema oscila con la misma frecuencia de la fuerza externa impulsora y con amplitud constante y, por lo tanto, con energía constante. En el estado estacionario, la energía introducida en el sistema por la fuerza impulsora durante un ciclo es igual a la disipada en el ciclo debido al amortiguamiento.

La amplitud y, por lo tanto, la energía de un sistema en estado estacionario, no sólo depende de la amplitud del sistema impulsor sino también de su frecuencia. Se define la **frecuencia natural** de un oscilador,  $\omega_0$  como la que tendría si no estuviesen presentes ni el amortiguamiento ni el sistema impulsor. (Por ejemplo, la frecuencia angular natural de un muelle es  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .) Si la frecuencia impulsora es aproximadamente igual a la frecuencia natural del sistema, éste oscilará con una amplitud relativamente grande. Por ejemplo, si el soporte de la figura 14.23 oscila con la frecuencia natural del sistema masa-muelle, la masa oscilará con una amplitud mucho mayor que si el soporte oscila con frecuencias mayores o menores. Este fenómeno se denomina **resonancia**. Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural del oscilador, la energía absorbida por éste en cada ciclo es máxima. Por ello la frecuencia natural del sistema se denomina **frecuencia de resonancia**



**Figura 14.23** Se puede ejercer una fuerza externa sobre un objeto sujeto a un muelle desplazando el punto del soporte hacia arriba y hacia abajo.

del mismo. (Matemáticamente es más conveniente utilizar la frecuencia angular  $\omega$  que la frecuencia  $f = \omega/(2\pi)$ . Como  $\omega$  y  $f$  son proporcionales, la mayoría de las afirmaciones concernientes a la frecuencia angular también son válidas para la frecuencia. En descripciones verbales normalmente se omite la palabra angular siempre que esta omisión no provoque confusión.) En la figura 14.24 se muestra un diagrama de la potencia media transmitida a un oscilador en función de la frecuencia de la fuerza impulsora para dos valores diferentes del amortiguamiento. Estas curvas reciben el nombre de **curvas de resonancia**. Cuando el amortiguamiento es pequeño (el valor de  $Q$  es alto), la anchura del pico de la curva de resonancia es correspondientemente estrecha y se dice que la resonancia es aguda. Cuando el amortiguamiento es grande, la curva de resonancia es ancha. La anchura  $\Delta\omega$  de cada curva de resonancia, indicada en la figura, es la anchura a la mitad de la altura máxima. Para un amortiguamiento relativamente pequeño, se demuestra que el cociente entre la anchura de resonancia y la frecuencia de resonancia es igual al valor inverso del factor  $Q$  (véase problema 126):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad (14.49)$$

ANCHURA DE RESONANCIA PARA UN AMORTIGUAMIENTO PEQUEÑO

Por lo tanto, el factor  $Q$  es una medida directa de la agudeza de la resonancia.

Puede hacerse un experimento simple que demuestre la resonancia. Se sostiene una regla por un extremo con dos dedos, de modo que actúe como un péndulo. (Si no se dispone de una regla, se puede usar cualquier otro objeto conveniente, como un palo de golf.) Se suelta el otro extremo desde una cierta distancia angular y se observa la frecuencia natural del movimiento. Después se mueve la mano adelante y atrás horizontalmente para darle impulso con la frecuencia natural de la regla. Aunque la amplitud del movimiento de la mano sea pequeña, la regla oscilará con una amplitud considerable. Si la mano se mueve adelante y atrás a una frecuencia el doble o triple de la frecuencia natural, se observará una disminución de la amplitud de la regla oscilante.

Existen muchos ejemplos familiares de resonancia. Cuando nos sentamos en un columpio aprendemos intuitivamente a mover el cuerpo con la misma frecuencia que la natural del columpio. Muchas máquinas vibran porque tienen piezas en rotación que no están perfectamente equilibradas. (Observar, por ejemplo, una máquina de lavar en el periodo de centrifugado.) Si se sujeta una de estas máquinas a una estructura que pueda vibrar, dicha estructura se convierte en un sistema oscilatorio forzado que puede iniciar su movimiento por la acción de la máquina. Los técnicos han hecho grandes esfuerzos para equilibrar las partes giratorias de estas máquinas u otras semejantes, amortiguando sus vibraciones y aislándolas de los edificios que las soportan.

Puede romperse un vaso con bajo amortiguamiento mediante una onda sonora intensa con una frecuencia igual o muy próxima a la frecuencia natural de vibración del mismo. Este efecto se emplea a menudo en demostraciones de física utilizando un oscilador de audio y un amplificador adecuado.

### \*Tratamiento matemático de la resonancia

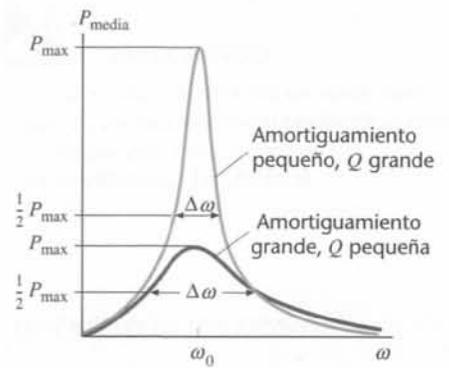
Vamos a estudiar matemáticamente el oscilador forzado suponiendo que, además de estar sometido a una fuerza restauradora y a una fuerza de amortiguamiento, está sujeto a una fuerza externa (fuerza impulsora) que varía armónicamente con el tiempo:

$$F_{\text{ext}} = F_0 \cos \omega t \quad (14.50)$$

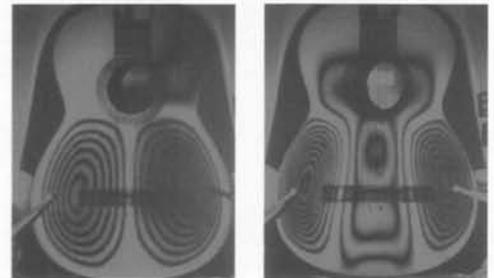
en donde  $F_0$  y  $\omega$  son el módulo y la frecuencia angular de la fuerza impulsora. Generalmente esta frecuencia no está relacionada con la frecuencia angular natural del sistema  $\omega_0$ .

La segunda ley de Newton aplicada a un objeto de masa  $m$  atado a un muelle de constante de fuerza  $k$  y sujeto a una fuerza amortiguadora  $-bv_x$  y a una fuerza externa  $F_0 \cos \omega t$ , nos da

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ -kx - bv_x + F_0 \cos \omega t &= m \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}$$

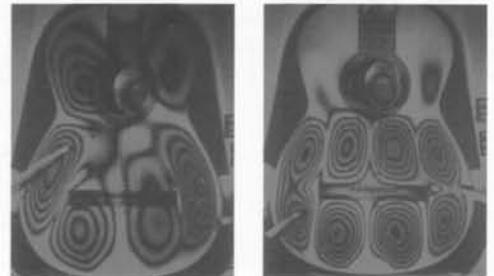


**Figura 14.24** Resonancia en un oscilador. La anchura  $\Delta\omega$  del pico de resonancia para un oscilador que tiene una  $Q$  grande es pequeña comparada con la frecuencia natural  $\omega_0$ .



268 Hz ( $Q = 52$ )

553 Hz ( $Q = 66$ )



672 Hz ( $Q = 61$ )

1010 Hz ( $Q = 80$ )

Los objetos extensos tienen más de una frecuencia de resonancia. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra, se transmite la energía al cuerpo del instrumento. Las oscilaciones del cuerpo de la guitarra, acopladas a las oscilaciones de la masa del aire que encierra, producen los diagramas de resonancia que se indican en estas figuras.

en donde se ha usado que  $a_x = d^2x/dt^2$ . Sustituyendo  $m\omega_0^2$  por  $k$  (ecuación 14.8) y ordenando los términos se obtiene

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t \quad (14.51)$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN OSCILADOR FORZADO

Abordaremos la solución general de la ecuación 14.51 cualitativamente. La solución de la ecuación consta de dos partes, la **solución transitoria** y la **solución estacionaria**. La parte transitoria de la solución es idéntica a la de un oscilador amortiguado no forzado dada en la ecuación 14.36. Las constantes de esta solución dependen de las condiciones iniciales. Transcurrido cierto tiempo, esta parte de la solución se hace despreciable porque la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo. De este modo sólo queda la solución estacionaria, que puede escribirse en la forma

$$x = A \cos (\omega t - \delta) \quad (14.52)$$

POSICIÓN DE UN OSCILADOR FORZADO

en donde la frecuencia angular  $\omega$  es la misma que la de la fuerza impulsora. La amplitud  $A$  viene dada por

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \quad (14.53)$$

AMPLITUD DE UN OSCILADOR FORZADO

y la constante de fase  $\delta$  viene dada por

$$\text{tg } \delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (14.54)$$

CONSTANTE DE FASE DE UN OSCILADOR FORZADO

Comparando las ecuaciones 14.50 y 14.52, podemos ver que el desplazamiento del sistema y la fuerza impulsora oscilan con la misma frecuencia pero difieren en fase en  $\delta$ . Cuando la frecuencia impulsora  $\omega$  es mucho menor que la frecuencia natural  $\omega_0$ ,  $\delta \approx 0$ , como puede verse a partir de la ecuación 14.54. En la resonancia,  $\delta = \pi/2$ . Cuando  $\omega$  es mucho mayor que  $\omega_0$ ,  $\delta \approx \pi$ . Al comienzo de este capítulo hemos visto que el desplazamiento de una partícula que experimenta un movimiento armónico simple viene dado por  $x = A \cos (\omega t + \delta)$  (ecuación 14.4). Esta ecuación es idéntica a la ecuación 14.52 excepto en el signo que precede a la constante  $\delta$ . La fase de un oscilador forzado siempre va retrasada con respecto a la fase de la fuerza impulsora. El signo negativo de la ecuación 14.52 asegura que  $\delta$  siempre es positivo.

En el experimento simple de la regla impulsada por el movimiento de la mano adelante y atrás, obsérvese que, en la resonancia, la oscilación de la mano no está en fase ni en desfase de  $180^\circ$  con la oscilación de la regla. Si se mueve la mano adelante y atrás con una frecuencia varias veces la frecuencia natural de la regla, el movimiento en el estado estacionario de ésta se habrá desfasado respecto a la mano casi  $180^\circ$ .

La velocidad del objeto en estado estacionario se obtiene derivando  $x$  respecto a  $t$ :

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \text{ sen } (\omega t - \delta)$$

En la resonancia,  $\delta = \pi/2$ , y la velocidad está en fase con la fuerza impulsora:

$$v = -A\omega \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = +A\omega \cos \omega t$$

Así pues, en la resonancia, el objeto siempre se está moviendo en el sentido en que actúa la fuerza impulsora, como era de esperar para que se consiguiese el máximo aporte de energía. La amplitud de velocidad  $\omega A$  es máxima para  $\omega = \omega_0$ .



### EXPLORANDO

¿Tienen solución numérica las ecuaciones para los osciladores amortiguados y forzados? Investigue esto y mucho más en [www.whfreeman.com/tipler5e](http://www.whfreeman.com/tipler5e)

## EJEMPLO 14.13 | Un objeto en un muelle

Un objeto de masa 1,5 kg situado sobre un muelle de constante de fuerza 600 N/m pierde el 3% de su energía en cada ciclo. El sistema viene impulsado por una fuerza sinusoidal con un valor máximo de  $F_0 = 0,5$  N. (a) ¿Cuál es el valor de  $Q$  para este sistema? (b) ¿Cuál es la frecuencia (angular) de resonancia? (c) Si la frecuencia impulsora varía, ¿cuál es la anchura  $\Delta\omega$  de la resonancia? (d) ¿Cuál es la amplitud en la resonancia? (e) ¿Cuál es la amplitud de la frecuencia impulsora si  $\omega = 19$  rad/s?

**Planteamiento del problema** La pérdida de energía por ciclo es del 3%, por lo que la amortiguación es débil. El factor  $Q$  puede determinarse mediante la expresión  $Q = 2\pi(\Delta E/E)_{\text{ciclo}}$  (ecuación 14.45) y después utilizar este resultado y  $\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q$  (ecuación 14.49) para determinar la anchura de la resonancia  $\Delta\omega$ . La frecuencia de resonancia es la frecuencia natural. La amplitud puede determinarse a partir de la ecuación 14.53 tanto en resonancia como fuera de resonancia, con la constante de amortiguamiento calculada mediante  $Q$  utilizando la definición de  $Q$  (ecuación 14.43)  $Q = \omega_0\tau = \omega_0 m/b$ .

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

### Pasos

- El amortiguamiento es débil. Relacionar  $Q$  con la pérdida de energía usando la ecuación 14.45 y despejar  $Q$ .
- Relacionar la frecuencia de resonancia con la frecuencia natural del sistema.
- Relacionar la anchura de la resonancia  $\Delta\omega$  con  $Q$ .
- Escribir una expresión para la amplitud  $A$  válida para cualquier frecuencia impulsora  $\omega$ .
  - Aplicar  $\omega = \omega_0$  para el cálculo de  $A$  en la resonancia.
  - Utilizar la ecuación 14.43 para relacionar la constante de amortiguamiento  $b$  con  $Q$ .
  - Utilizar los resultados de los dos pasos previos para calcular la amplitud en la resonancia.
- Calcular la amplitud para  $\omega = 19$  rad/s. (Podemos omitir las unidades para simplificar la ecuación. Como todas las magnitudes se expresan en unidades del SI,  $A$  se expresa en metros).

### Respuestas

$$Q = \frac{2\pi}{(\Delta E/E)_{\text{ciclo}}} = \frac{2\pi}{0,03} = \boxed{209}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \boxed{20 \text{ rad/s}}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \boxed{0,0957 \text{ rad/s}}$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{b\omega_0}$$

$$b = \frac{m\omega_0}{Q} = 0,144 \text{ kg/s}$$

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{b\omega_0} = \boxed{17,4 \text{ cm}}$$

$$A(19 \text{ s}^{-1}) = \frac{0,5}{\sqrt{1,5^2(20^2 - 19^2)^2 + 0,144^2(19)^2}} = \boxed{0,854 \text{ cm}}$$

**Observación** Para una separación de 1 rad/s del valor  $\omega$  de la resonancia, la amplitud disminuye en un factor 20. Esto no es sorprendente, ya que la anchura de la resonancia es sólo de 0,0957 rad/s. Obsérvese que fuera de la resonancia, el término  $b^2\omega^2$  es despreciable comparado con el otro término del denominador de la expresión de  $A$ . Cuando  $\omega - \omega_0$  es superior en varias veces la anchura  $\Delta\omega$  a mitad de altura, como en este ejemplo, podemos despreciar el término  $b^2\omega^2$  y calcular  $A$  según la expresión  $A \approx F_0/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]$ . La figura 14.25 muestra la amplitud en función de la frecuencia impulsora  $\omega$ . Obsérvese que la escala horizontal corresponde a un rango pequeño de  $\omega$ .

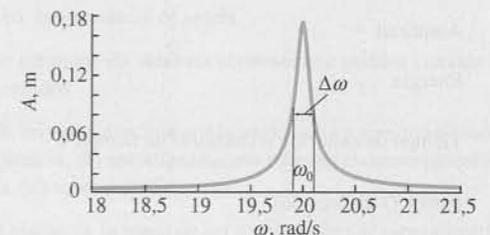


Figura 14.25

## ¡¡INTÉNTELO USTED MISMO!

# Resumen

- 1 El movimiento armónico simple tiene lugar cuando la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento contado desde el equilibrio. Tiene numerosas aplicaciones en el estudio de las oscilaciones, ondas, circuitos eléctricos y de la dinámica molecular.
- 2 La resonancia es un fenómeno importante en múltiples áreas de la física. Tiene lugar cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es similar a la frecuencia natural del sistema oscilante.

## TEMA

## OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

### 1. Movimiento armónico simple

Función desplazamiento

$$x = A \cos(\omega t + \delta) \quad (14.4)$$

Velocidad

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \quad (14.5)$$

Aceleración

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \quad (14.6)$$

$$a_x = -\omega^2 x \quad (14.7)$$

Frecuencia angular

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (14.11)$$

Energía total

$$E_{\text{total}} = E_c + U = \frac{1}{2} kA^2 \quad (14.17)$$

Energía cinética y potencial medias

$$E_{c_m} = U_m = \frac{1}{2} E_{\text{total}} \quad (14.18)$$

Movimiento circular

Cuando una partícula se mueve sobre una circunferencia con velocidad constante, la proyección de la posición de la partícula sobre un diámetro de esa circunferencia se mueve con movimiento armónico simple.

Movimiento general próximo al equilibrio

Si un objeto experimenta un pequeño desplazamiento a partir de cualquier posición de equilibrio estable, oscila alrededor de esta posición con movimiento armónico simple.

### 2. Frecuencias angulares para diversos sistemas

Masa ligada a un muelle

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14.8)$$

Péndulo simple

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (14.27)$$

\*Péndulo físico

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}} \quad (14.32)$$

en donde  $D$  es la distancia del centro de masas al eje de rotación e  $I$  es el momento de inercia respecto a dicho eje.

### 3. Oscilaciones amortiguadas

En las oscilaciones de los sistemas reales, el movimiento está amortiguado debido a fuerzas disipativas. Si el amortiguamiento es mayor que cierto valor crítico, el sistema no oscila sino que regresa simplemente a su posición de equilibrio si ha sido perturbado. El movimiento de un sistema ligeramente amortiguado es muy semejante al movimiento armónico simple pero tiene una amplitud que disminuye exponencialmente con el tiempo.

Frecuencia

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (14.46)$$

Amplitud

$$A = A_0 e^{-(b/2m)t} \quad (14.38)$$

Energía

$$E = E_0 e^{-t/\tau} \quad (14.41)$$

Tiempo de extinción o constante de tiempo

$$\tau = \frac{m}{b} \quad (14.42)$$

Factor  $Q$  (definición)

$$Q = \omega_0 \tau \quad (14.43)$$

Factor  $Q$  para amortiguamiento débil

$$Q = \frac{2\pi}{(\Delta E/E)_{\text{ciclo}}}, \quad \frac{|\Delta E|}{E} \ll 1 \quad (14.45)$$

## 4. Oscilaciones forzadas

Cuando un sistema ligeramente amortiguado ( $b < b_c$ ) se ve forzado a oscilar por la acción de una fuerza externa que varía sinusoidalmente con el tiempo,  $F_{\text{ext}} = F_0 \cos \omega t$ , el sistema oscila con una frecuencia  $\omega$  igual a la del sistema impulsor y con una amplitud  $A$  que depende de esta frecuencia.

Frecuencia de resonancia

$$\omega = \omega_0$$

Anchura de resonancia para amortiguamiento débil

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad (14.49)$$

\*Función desplazamiento

$$x = A \cos(\omega t - \delta) \quad (14.52)$$

\*Amplitud

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \quad (14.53)$$

\*Constante de fase

$$\text{tg } \delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (14.54)$$

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

 Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

 Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

### Problemas conceptuales

1 ● ¿Cuál es el módulo de la aceleración de un oscilador de amplitud  $A$  y frecuencia  $f$  cuando el módulo de su velocidad es máximo? ¿Y cuándo es máximo su desplazamiento?

2 ● ¿Pueden tener el mismo sentido el desplazamiento y la aceleración de un oscilador armónico simple? ¿Y el desplazamiento y la velocidad? ¿Y la aceleración y la velocidad? Razonar las respuestas.

3 ● Verdadero o falso:

- (a) En el movimiento armónico simple, el periodo es proporcional al cuadrado de la amplitud.
- (b) En el movimiento armónico simple, la frecuencia no depende de la amplitud.
- (c) Si la aceleración de una partícula que se mueve en una dimensión es proporcional al desplazamiento pero de sentido opuesto, el movimiento es armónico simple.

4 ● SSM Si la amplitud de un oscilador armónico simple se triplica, ¿en qué factor se modifica la energía?

5 ●● Un objeto sujeto a un muelle tiene un movimiento armónico simple de amplitud 4,0 cm. Cuando el objeto se encuentra a 2,0 cm de la posición de equilibrio, ¿qué fracción de su energía total es energía potencial? (a) Un cuarto. (b) Un tercio. (c) La mitad. (d) Dos tercios. (e) Tres cuartos.

6 ● Verdadero o falso:

- (a) El periodo de un objeto que oscila sobre un determinado muelle es el mismo independientemente de que el muelle sea vertical u horizontal.
- (b) El módulo máximo de la velocidad de un objeto que oscila con amplitud  $A$  sobre un determinado muelle es el mismo independientemente de que el muelle sea vertical u horizontal.

7 ● Verdadero o falso: El movimiento de un péndulo simple es armónico simple para cualquier desplazamiento angular inicial.

8 ● Verdadero o falso: El movimiento de un péndulo simple es periódico para cualquier desplazamiento angular inicial.

9 ●● SSM Dos carros idénticos están unidos por un muelle en una vía de aire sin rozamiento. De repente uno de ellos recibe un golpe que lo separa del otro. El movimiento resultante de los carros es muy irregular: primero se mueve uno, que se para cuando el otro inicia el movimiento, el cual a su vez se para de modo que el primer carro se pone en movimiento de nuevo y así sucesivamente. Explicar este movimiento de forma cualitativa.

10 ●● SSM Cuando sube la temperatura la cuerda de un péndulo simple se alarga como consecuencia de la dilatación. ¿Cómo afectaría esto al funcionamiento de un reloj que funcionara con un péndulo simple?

11 ● Verdadero o falso: La energía mecánica de un oscilador no forzado, amortiguado, decrece exponencialmente con el tiempo.

12 ● Verdadero o falso:

- (a) La resonancia tiene lugar cuando la frecuencia impulsora es igual a la frecuencia natural.
- (b) Si el valor de  $Q$  es alto, la resonancia es aguda.

13 ● Dar algunos ejemplos de sistemas comunes que pueden considerarse como osciladores forzados.

14 ● Una copa de cristal que estalla por la acción de un sonido intenso es un ejemplo de (a) resonancia, (b) amortiguamiento crítico, (c) decrecimiento exponencial de la energía, (d) sobreamortiguamiento.

15 ● SSM El efecto de la masa de un muelle sobre el movimiento de un objeto atado a él suele despreciarse. Describir cualitativamente su efecto cuando se tiene en cuenta.

16 ●● Una lámpara que cuelga del techo de un vagón-club de un tren oscila con periodo  $T_0$  cuando el tren está en reposo. El periodo será (emparejar las columnas derecha e izquierda)

- |                           |   |
|---------------------------|---|
| 1. mayor que $T_0$ cuando | A. el tren se mueve horizontalmente con velocidad constante.                      |
| 2. menor que $T_0$ cuando | B. el tren se mueve por una curva de radio $R$ con velocidad $v$ .                |
| 3. igual a $T_0$ cuando   | C. el tren asciende por una colina de inclinación $\theta$ a velocidad constante. |
|                           | D. el tren pasa por una colina de radio de curvatura $R$ con velocidad constante. |

17 ●● Dos sistemas masa-muelle oscilan con frecuencias  $f_A$  y  $f_B$ . Si  $f_A = 2f_B$  y las constantes de los dos muelles son iguales, las masas de ambos sistemas cumplen la relación (a)  $M_A = 4M_B$ , (b)  $M_A = M_B/\sqrt{2}$ , (c)  $M_A = M_B/2$ , (d)  $M_A = M_B/4$ .

18 ●● Dos sistemas masa-muelle A y B oscilan de modo que sus energías son iguales. Si  $M_A = 2M_B$ , ¿cuál de las siguientes fórmulas relaciona las amplitudes de oscilación? (a)  $A_A = A_B/4$ , (b)  $A_A = A_B/\sqrt{2}$ , (c)  $A_A = A_B$ , (d) No hay suficiente información para determinar la relación de las amplitudes.

19 ●● Dos sistemas masa-muelle A y B oscilan de modo que sus energías son iguales. Si  $k_A = 2k_B$ , ¿cuál de las siguientes fórmulas relaciona las amplitudes de oscilación? (a)  $A_A = A_B/4$ , (b)  $A_A = A_B/\sqrt{2}$ , (c)  $A_A = A_B$ , (d) No hay suficiente información para determinar la relación de las amplitudes.

20 ●● El péndulo A tiene una lenteja de masa  $M_A$  y longitud  $L_A$ ; el péndulo B tiene una lenteja de masa  $M_B$  y longitud  $L_B$ . Si el periodo de A es doble al de B, será (a)  $L_A = 2L_B$  y  $M_A = 2M_B$ , (b)  $L_A = 4L_B$  y  $M_A = M_B$ , (c)  $L_A = 4L_B$  cualquiera que sea la relación  $M_A/M_B$ , (d)  $L_A = \sqrt{2} L_B$  cualquiera que sea la relación  $M_A/M_B$ .

## Aproximaciones y estimaciones

21 ●● Un niño se está columpiando en un columpio. Si no se le suministra energía mecánica, la amplitud de su oscilación disminuye un factor  $1/e$  cada ocho periodos. Estimar el factor  $Q$  para este sistema.

22 ●● SSM (a) Estimar el periodo natural de oscilación del batir de brazos de una persona cuando camina, suponiendo que no lleva ningún peso. (b) Estimar el periodo natural de oscilación si la persona mueve una cartera muy pesada. Obsérvese cómo camina la gente y estímesese si estos dos cálculos se ajustan a lo que se percibe en el mundo real.

## Movimiento armónico simple

23 ●● **ISOLVE** La posición de una partícula viene dada por  $x = (7 \text{ cm}) \cos 6\pi t$ , en donde  $t$  viene dado en segundos. Determinar (a) la frecuencia, (b) el periodo y (c) la amplitud del movimiento de la partícula. (d) ¿Cuál es el primer instante después de  $t = 0$  en que la partícula está en su posición de equilibrio? ¿En qué sentido se está moviendo en ese instante?

24 ●● ¿Cuál es la constante de fase  $\delta$  de la ecuación 14.4 si la posición de la partícula oscilante en el instante  $t = 0$  es (a) 0, (b)  $-A$ , (c)  $A$ , (d)  $A/2$ ?

25 ●● SSM Una partícula de masa  $m$  empieza estando en reposo en  $x = +25 \text{ cm}$  y oscila alrededor de su posición de equilibrio en  $x = 0$  con un periodo de 1,5 s. Escribir las ecuaciones para (a) la posición  $x$  en función del tiempo  $t$ , (b) la velocidad  $v$  en función de  $t$  y (c) la aceleración  $a$  en función de  $t$ .

26 ●● Hallar el módulo máximo de (a) la velocidad y (b) la aceleración de la partícula del problema 23. (c) ¿Cuál es la primera vez que la partícula está en  $x = 0$  y moviéndose hacia la derecha?

27 ●● Resolver el problema 25 para el caso en que la partícula está inicialmente en  $x = 25 \text{ cm}$  y se está moviendo con velocidad  $v_0 = +50 \text{ cm/s}$ .

28 ●● El periodo de una partícula oscilante es 8 s y su amplitud 12 cm. En el tiempo  $t = 0$  se encuentra en la posición de equilibrio. Determinar la distancia recorrida durante el intervalo (a)  $t = 0$  a  $t = 2 \text{ s}$ , (b)  $t = 2 \text{ s}$  a  $t = 4 \text{ s}$ , (c)  $t = 0$  a  $t = 1 \text{ s}$  y (d)  $t = 1 \text{ s}$  a  $t = 2 \text{ s}$ .

29 ●● El periodo de una partícula oscilante es 8 s. En  $t = 0$ , la partícula está en reposo en  $x = A = 10 \text{ cm}$ . (a) Hacer un gráfico de  $x$  en función de  $t$ . (b) Hallar la distancia recorrida en el primer, segundo, tercer y cuarto segundo después de  $t = 0$ .

30 ●● SSM **ISOLVE** En las especificaciones militares es frecuente que exijan que los dispositivos electrónicos sean capaces de resistir aceleraciones de  $10g = 98,1 \text{ m/s}^2$ . Para asegurarse de que sus productos cumplen con esta especificación, los fabricantes los someten a ensayos en una mesa vibrante que puede hacer vibrar un equipo a diversas frecuencias y amplitudes especificadas. Si un determinado dispositivo se somete a una vibración de 1,5 cm de amplitud, ¿cuál deberá ser su frecuencia para que cumpla con la especificación militar de los 10g?

31 ●● **ISOLVE** ✓ La posición de una partícula viene dada por  $x = 2,5 \cos \pi t$ , en donde  $x$  se expresa en metros y  $t$  en segundos. (a) Determinar la velocidad máxima y la aceleración máxima de la partícula. (b) Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula cuando  $x = 1,5 \text{ m}$ .

32 ●● SSM (a) Demostrar que  $A_0 \cos(\omega t + \delta)$  puede escribirse también como  $A_s \sin(\omega t) + A_c \cos(\omega t)$ , y determinar  $A_s$  y  $A_c$  en función de  $A_0$  y  $\delta$ . (b) Relacionar  $A_s$  y  $A_c$  con la posición y la velocidad iniciales de una partícula que experimenta un movimiento armónico simple.

## Movimiento armónico simple y movimiento circular

33 ●● **ISOLVE** Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 40 cm con una velocidad constante de 80 cm/s. Hallar (a) la frecuencia y (b) el periodo del movimiento. (c) Escribir una ecuación para la componente  $x$  de la posición de la partícula en función del tiempo  $t$ , suponiendo que la partícula está sobre el eje  $x$  en el instante  $t = 0$ .

34 ●● SSM Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 15 cm, dando 1 revolución cada 3 s. (a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de la partícula? (b) ¿Cuál es su velocidad angular  $\omega$ ? (c) Escribir una ecuación para la componente  $x$  de la posición de la misma en función de  $t$ , suponiendo que está sobre el eje  $x$  positivo en el instante  $t = 0$ .

## La energía en el movimiento armónico simple

35 ●● Un objeto de 2,4 kg está sujeto a un muelle horizontal de constante de fuerza  $k = 4,5 \text{ kN/m}$ . El muelle se estira 10 cm desde el equilibrio y se deja en libertad. Determinar su energía total.

36 ●● Determinar la energía total de un objeto de 3 kg que oscila sobre un muelle horizontal con una amplitud de 10 cm y una frecuencia de 2,4 Hz.

37 ●● Un objeto de 1,5 kg oscila con movimiento armónico simple unido a un muelle de constante de fuerza  $k = 500 \text{ N/m}$ . Su velocidad máxima es 70 cm/s. (a) ¿Cuál es la energía total? (b) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?

38 ●● Un objeto de 3 kg que oscila unido a un muelle de constante 2 kN/m tiene una energía total de 0,9 J. (a) ¿Cuál es la amplitud del movimiento? (b) ¿Cuál es su velocidad máxima?

39 ●● Un objeto oscila unido a un muelle con una amplitud de 4,5 cm. Su energía total es 1,4 J. ¿Cuál es la constante de fuerza del muelle?

40 ●● SSM **ISOLVE** ✓ Un objeto de 3 kg oscila sobre un muelle con una amplitud de 8 cm. Su aceleración máxima es  $3,50 \text{ m/s}^2$ . Determinar la energía total.

## Muelles

**41** ● Un objeto de 2,4 kg está sujeto a un muelle horizontal de constante de fuerza  $k = 4,5$  kN/m. El muelle se estira 10 cm desde el equilibrio y se deja en libertad. Determinar (a) la frecuencia del movimiento, (b) el periodo, (c) la amplitud, (d) la velocidad máxima y (e) la aceleración máxima. (f) ¿Cuándo alcanza el objeto por vez primera su posición de equilibrio? ¿Cuál es su aceleración en ese instante?

**42** ● Responder a las cuestiones del problema 41 para un objeto de 5 kg sujeto a un muelle de constante de fuerza  $k = 700$  N/m, teniendo en cuenta que el muelle está inicialmente separado 8 cm de la posición de equilibrio.

**43** ● Un objeto de 3 kg sujeto a un muelle horizontal oscila con una amplitud  $A = 10$  cm y una frecuencia  $f = 2,4$  Hz. (a) ¿Cuál es la constante de fuerza del muelle? (b) ¿Cuál es el periodo del movimiento? (c) ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto? (d) ¿Cuál es la aceleración máxima del objeto?

**44** ● SSM **!** SOLVE Una persona de 85 kg sube a un coche de masa 2400 kg, con lo cual sus ballestas descienden 2,35 cm. Suponiendo que no hay amortiguamiento, ¿con qué frecuencia vibrará el coche y el pasajero sobre las ballestas?

**45** ● Un objeto de 4,5 kg oscila sobre un muelle horizontal con una amplitud de 3,8 cm. Su aceleración máxima es de  $26$  m/s<sup>2</sup>. Determinar (a) la constante de fuerza  $k$ , (b) la frecuencia y (c) el periodo del movimiento.

**46** ● Un objeto oscila con una amplitud de 5,8 cm sobre un muelle horizontal de constante de fuerza 1,8 kN/m. Su velocidad máxima es 2,20 m/s. Determinar (a) la masa del objeto, (b) la frecuencia del movimiento y (c) el periodo del movimiento.

**47** ●● **!** SOLVE Un bloque de 0,4 kg que está sujeto a un muelle de constante de fuerza 12 N/m oscila con una amplitud de 8 cm. Determinar (a) la velocidad máxima del bloque, (b) la velocidad y aceleración del bloque cuando se encuentra a  $x = 4$  cm de la posición de equilibrio y (c) el tiempo que tarda el bloque en desplazarse de  $x = 0$  a  $x = 4$  cm.

**48** ●● SSM Un objeto de masa  $m$  está colgado de un muelle vertical de constante 1800 N/m. Cuando se estira de él hacia abajo separándole 2,5 cm del equilibrio y se le deja en libertad desde el reposo, el objeto oscila con una frecuencia de 5,5 Hz. (a) Hallar  $m$ . (b) Hallar cuánto se estira el muelle a partir de su longitud natural cuando el objeto está en equilibrio. (c) Escribir expresiones para el desplazamiento  $x$ , la velocidad  $v$  y la aceleración  $a$  en función de  $t$ .

**49** ●● **!** SOLVE Un muelle sin deformación cuelga verticalmente y en su extremo se cuelga un cuerpo de masa desconocida que se suelta desde el reposo. Cae 3,42 cm antes de que quede en reposo por primera vez. Hallar el periodo del movimiento.

**50** ●● Un muelle de constante  $k = 250$  N/m se cuelga de un soporte rígido y se une a su extremo inferior un objeto de 1 kg de masa, que se deja en libertad partiendo del reposo cuando el muelle está sin deformar. (a) ¿A qué distancia por debajo del punto de partida está la posición de equilibrio del objeto? (b) ¿Cuánto desciende el objeto antes de empezar a ascender de nuevo? (c) ¿Cuál es el periodo de la oscilación? (d) ¿Cuál es la velocidad del objeto cuando alcanza por primera vez su posición de equilibrio? (e) ¿Cuándo sucede esto?

**51** ●● **!** SOLVE El Arco de St. Luis tiene una altura de 192 m. Suponemos que una atleta de 60 kg salta de la parte más alta del arco con una banda elástica atada a sus pies y alcanza justo el suelo con velocidad cero. Determinar su energía cinética  $E_c$  a los 2,00 segundos del salto. (Suponer que la banda elástica obedece la ley de Hooke y despreciar su longitud natural.)

**52** ●● SSM Una maleta de 20 kg de masa cuelga de dos cuerdas tal como se muestra en la figura 14.26. Cada cuerda se alarga 5 cm cuando la

maleta está en equilibrio. Si se estira la maleta un poco hacia abajo y se suelta, ¿cuál será la frecuencia de la oscilación?



Figura 14.26 Problema 52

**53** ●● Un bloque de 0,12 kg está suspendido de un muelle. Cuando una pequeña piedra de masa 30 g se sitúa sobre el bloque, el muelle se alarga 5 cm más. Con la piedra sobre el bloque, el muelle oscila con una amplitud de 12 cm. (a) ¿Cuál es la frecuencia del movimiento? (b) ¿Cuánto tiempo tardará el bloque en recorrer la distancia entre el punto más bajo y el punto más alto? (c) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la piedra cuando se encuentra en un punto de máximo desplazamiento hacia arriba?

**54** ●● Determinar en el problema 53 la máxima amplitud de oscilación con la condición de que la piedra permanezca sobre el bloque.

**55** ●● Un objeto de masa 2,0 kg está sujeto en la parte superior de un muelle vertical que está anclado en el suelo. La longitud natural del muelle es de 8,0 cm y la longitud del muelle cuando el objeto está en equilibrio es de 5,0 cm. Cuando el objeto está en reposo en su posición de equilibrio, se le da un impulso hacia abajo con un martillo, de tal manera que la velocidad inicial es de 0,3 m/s. (a) ¿A qué máxima altura, respecto al nivel del suelo, se elevará el objeto? (b) ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en alcanzar la máxima altura la primera vez? (c) ¿Volverá el muelle a estar sin compresión? ¿Qué velocidad inicial mínima debe darse al objeto para que el muelle no tenga compresión en un instante dado?

**56** ●● SSM En un torno, un bloque de 950 kg de masa cuelga del extremo de un cable de  $150$  GN/m<sup>2</sup> de módulo de Young,  $1,5$  cm<sup>2</sup> de área transversal y 2,5 m de longitud. (a) ¿Cuánto se alargará el cable? (b) Suponiendo que el cable se comporta como un muelle simple, ¿cuál es la frecuencia de oscilación del bloque en el extremo del cable?

### Energía de un objeto sobre un muelle vertical

**57** ●● Un cuerpo de 2,5 kg cuelga de un muelle vertical de constante 600 N/m. Oscila con una amplitud de 3 cm. Cuando el cuerpo posee su máximo desplazamiento hacia abajo, encontrar (a) la energía total del sistema, (b) la energía potencial gravitatoria, y (c) la energía potencial del muelle. (d) ¿Cuál es la energía cinética máxima del cuerpo? (Escoger  $U = 0$  cuando el cuerpo está en equilibrio.)

**58** ●● **!** SOLVE Un cuerpo de 1,5 kg, que alarga un muelle en 2,8 cm respecto a su longitud natural cuando cuelga de él en reposo, oscila con una amplitud de 2,2 cm. Hallar (a) la energía total del sistema, (b) la energía potencial gravitatoria en el máximo desplazamiento hacia abajo, (c) la energía potencial del muelle en su máximo desplazamiento hacia abajo y (d) ¿Cuál es la energía cinética máxima del cuerpo?

**59** ●● SSM Un objeto de 1,2 kg que cuelga de un muelle de constante de fuerza 300 N/m oscila con una velocidad máxima de 30 cm/s. (a) ¿Cuál es su desplazamiento máximo? Cuando el objeto está en su desplazamiento máximo, hallar (b) la energía total del sistema, (c) la energía potencial gravitatoria, y (d) la energía potencial del muelle.

## Péndulos simples

60 ● Hallar la longitud de un péndulo simple si el periodo del péndulo es 5 s en un punto en donde  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

61 ● ¿Cuál sería el periodo del péndulo del problema 60 en la Luna, en donde la aceleración de la gravedad es un sexto de la correspondiente a la Tierra?

62 ● **¡SOLVE!** Si el periodo de un péndulo de 70 cm de longitud es 1,68 s, ¿cuál es el valor de  $g$  en el sitio donde está situado el péndulo?

63 ● **SSM** **¡DIVE!** Un péndulo colgado en el hueco de una escalera de un edificio de 10 pisos se compone de una masa grande suspendida de un alambre de 34,0 m de longitud. ¿Cuál es su periodo de oscilación si  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ?

64 ●● Demostrar que la energía total de un péndulo simple que se mueve con oscilaciones de pequeña amplitud  $\phi_0$  es aproximadamente  $E = 1/2 mgL\phi_0^2$  (Sugerencia: Utilizar la aproximación  $\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$  para valores pequeños de  $\phi$ .)

65 ●● Un péndulo simple de longitud  $L$  está sujeto a un carro que desliza sin rozamiento hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal, como muestra la figura 14.27. Determinar el periodo de oscilación del péndulo que está sobre el carro deslizando.

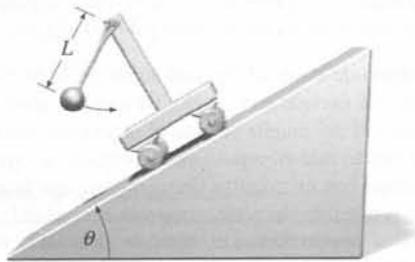


Figura 14.27 Problema 65

66 ●● Un péndulo simple de longitud  $L$  se libera partiendo del reposo desde un ángulo  $\phi_0$ . (a) Suponiendo que el péndulo realiza un movimiento armónico simple, determinar su velocidad cuando pasa por la posición  $\phi = 0$ . (b) Considerando la conservación de la energía, determinar exactamente esta velocidad. (c) Demostrar que los resultados de (a) y (b) coinciden cuando  $\phi_0$  es pequeño. (d) Determinar la diferencia entre estos resultados para  $\phi_0 = 0,20 \text{ rad}$  y  $L = 1 \text{ m}$ .

## \*Péndulos físicos

67 ● **¡SOLVE!** Un disco delgado de 5 kg de masa y con un radio de 20 cm se suspende mediante un eje horizontal perpendicular al disco y que pasa por su borde. El disco se desplaza ligeramente del equilibrio y se suelta. Hallar el periodo del movimiento armónico simple que se produce.

68 ● Un aro circular de 50 cm de radio se cuelga de una varilla horizontal delgada, permitiéndose que oscile en el plano del aro. ¿Cuál es el periodo de su oscilación, suponiendo que la amplitud es pequeña?

69 ● Se suspende una figura plana de 3 kg de un punto situado a 10 cm de su centro de masas. Cuando está oscilando con amplitud pequeña, el periodo de oscilación es 2,6 s. Hallar el momento de inercia  $I$  respecto a un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por el punto de oscilación.

70 ●● El péndulo de un enorme reloj de un ayuntamiento tiene una longitud de 4 m. (a) Considerando que su funcionamiento puede asimilarse al de un péndulo simple que realiza pequeñas oscilaciones, calcular su periodo de oscilación. (b) Para regular su periodo se ha colocado una caja en la mitad de la barra del péndulo con unas cuantas piezas de tamaño y peso parecido al de una

moneda, de modo que para cambiar el periodo del péndulo basta añadir o quitar una pieza de la caja. Explicar por qué este método funciona. Si se añaden piezas, ¿el periodo del péndulo aumenta o disminuye?

71 ●● La figura 14.28 muestra una pesa con dos masas iguales (consideradas como masas puntuales) sujetas a los extremos de una barra muy delgada (masa despreciable) de longitud  $L$ . (a) Demostrar que el periodo de este péndulo es un mínimo cuando el punto de pivotamiento  $P$  se encuentra sobre una de las masas. (b) Determinar el periodo de este péndulo físico si la distancia entre  $P$  y la masa superior es  $L/4$ .

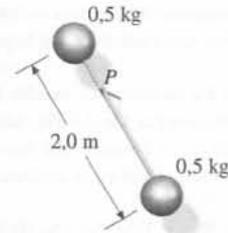


Figura 14.28 Problema 71

72 ●● Supongamos que la barra del problema 71 tiene una masa de  $2m$  (figura 14.29). Determinar la distancia entre la masa superior y el punto de pivotamiento  $P$ , de tal modo que el periodo de este péndulo físico sea un mínimo.

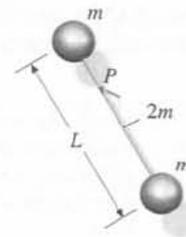


Figura 14.29 Problema 72

73 ●● **SSM** Tenemos una regla y se nos pide que taladremos un agujero de tal modo que cuando pivoteamos la regla sobre él, el periodo del péndulo sea un mínimo. ¿Dónde taladraremos el agujero?

74 ●● **¡SOLVE!** La figura 14.30 muestra un disco uniforme de radio  $R = 0,8 \text{ m}$  y masa 6 kg con un pequeño agujero a la distancia  $d$  del centro del disco que puede servir de punto de pivote. (a) ¿Cuál debe ser la distancia  $d$  para que el periodo de este péndulo físico sea 2,5 s? (b) ¿Cuál debe ser la distancia  $d$  para que este péndulo físico tenga el periodo menor posible? ¿Cuál es este periodo?

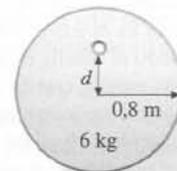


Figura 14.30 Problema 74

75 ●●● Un objeto plano tiene un momento de inercia  $I$  respecto a su centro de masas. Cuando se hace girar el objeto alrededor del punto  $P_1$ , como se indica en la figura 14.31, oscila alrededor del pivote con un periodo  $T$ . Existe otro punto  $P_2$  en el lado opuesto del centro de masas respecto al cual el objeto oscila con el mismo periodo  $T$ . Demostrar que  $h_1 + h_2 = gT^2/(4\pi^2)$ .

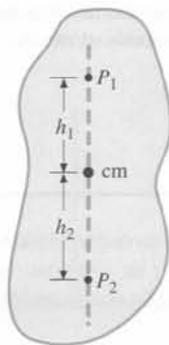


Figura 14.31 Problema 75

**76** ●●● Se construye un péndulo físico a partir de una lenteja esférica de radio  $r$  y masa  $m$  colgada de una cuerda (figura 14.32). La distancia desde el centro de la esfera al punto de suspensión es  $L$ . Cuando  $r$  es mucho menor que  $L$ , este péndulo suele considerarse como un péndulo simple de longitud  $L$ . (a) Demostrar que para pequeñas oscilaciones el periodo viene dado por

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{2r^2}{5L^2}}$$

en donde  $T_0 = 2\pi \sqrt{L/g}$  es el periodo del péndulo simple de longitud  $L$ . (b) Demostrar que cuando  $r$  es mucho menor que  $L$ , el periodo vale aproximadamente  $T \approx T_0(1 + r^2/5L^2)$ . (c) Si  $L = 1$  m y  $r = 2$  cm, hallar el error cuando se utiliza la aproximación  $T = T_0$  para este péndulo. ¿Qué tamaño deberá tener el radio de la lenteja para que el error sea del 1 por ciento?

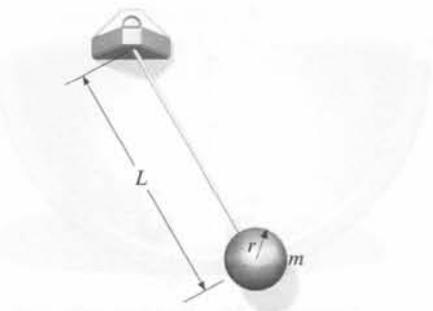


Figura 14.32 Problema 76

**77** ●●● La figura 14.33 muestra el péndulo de un reloj. La barra uniforme de longitud  $L = 2,0$  m tiene una masa  $m = 0,8$  kg. Sujeto a la barra hay un disco de masa  $M = 1,2$  kg y radio  $0,15$  m. El reloj se ha construido de modo que marque un tiempo perfecto si el periodo del péndulo es exactamente  $3,50$  s. (a) ¿Cuál debe ser la distancia  $d$  para que el periodo del péndulo sea  $2,5$  s? (b) Supongamos que el reloj de péndulo atrasase a  $5,0$  min por día. ¿A qué distan-

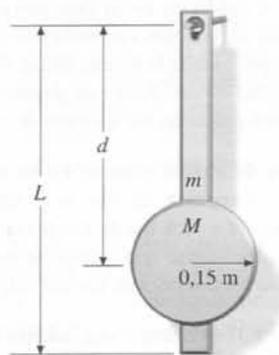


Figura 14.33 Problema 77

cia y en qué sentido debe desplazarse el disco para asegurar que el reloj marque correctamente el tiempo?

**78** ●● SSM Un reloj de péndulo pierde 48 s por día cuando la amplitud del péndulo es  $8,4^\circ$ . ¿Cuál debería ser la amplitud del péndulo para que el reloj marcara el tiempo exacto?

**79** ●● SOLVE Un reloj de péndulo que oscila con una amplitud muy pequeña se adelanta 5 min cada día. ¿Qué amplitud angular deberá tener el péndulo para mantener el tiempo correcto?

### Oscilaciones amortiguadas

**80** ● Demostrar que la constante de amortiguamiento,  $b$ , tiene unidades de kg/s.

**81** ● Un oscilador tiene un factor  $Q$  igual a 200. ¿En qué porcentaje disminuye su energía durante un periodo?

**82** ● SOLVE Un objeto de 2 kg ligado a un muelle de constante  $k = 400$  N/m oscila con una amplitud inicial de 3 cm. Hallar (a) el periodo y (b) la energía inicial total. (c) Si la energía disminuye en un 1 por ciento por periodo, hallar la constante de amortiguamiento  $b$  y el factor  $Q$ .

**83** ●● Demostrar que el cociente de las amplitudes de dos oscilaciones sucesivas en un oscilador forzado es constante.

**84** ●● Un oscilador tiene un periodo de 3 s. Su amplitud disminuye en un 5 por ciento durante cada ciclo. (a) ¿En cuánto disminuye su energía durante cada ciclo? (b) ¿Cuál es la constante de tiempo  $\tau$ ? (c) ¿Cuál es el factor  $Q$ ?

**85** ●● Un oscilador posee un factor  $Q$  igual a 20. (a) ¿En qué fracción disminuye la energía en cada ciclo? (b) Utilizar la ecuación 14.37 para determinar la diferencia en porcentaje entre  $\omega'$  y  $\omega_0$ . (Sugerencia: Utilizar la aproximación  $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$  para valores pequeños de  $x$ .)

**86** ●● SOLVE Un sistema masa-muelle amortiguado oscila con una frecuencia de 200 Hz. La constante de tiempo del sistema es 2,0 s. En el tiempo  $t = 0$ , la amplitud de oscilación es 6,0 cm y la energía del sistema oscilante es 60 J. (a) ¿Cuáles son las amplitudes de oscilación para  $t = 2,0$  s y  $t = 4,0$  s? (b) ¿Cuánta energía se disipa en el primer intervalo de 2 s y en el segundo intervalo de 2 s?

**87** ●● SSM SOLVE Se ha establecido que cuando la Tierra vibra tiene un periodo de resonancia de 54 min y un factor  $Q$  de aproximadamente 400, y que después de un gran terremoto, la Tierra "tiembla" (se produce una vibración continua) durante dos meses. (a) Determinar el porcentaje de energía de vibración perdida debido a las fuerzas de amortiguamiento en cada ciclo. (b) Demostrar que después de  $n$  periodos, la energía es  $E_n = (0,984)^n E_0$ , siendo  $E_0$  la energía inicial. (c) Si la energía inicial de vibración de un terremoto es  $E_0$ , ¿cuál es la energía al cabo de 2 días?

**88** ●● Un péndulo compacto que se usa en un experimento de física tiene una masa de 15 g y una longitud de 75 cm. Para que el péndulo comience a oscilar un estudiante de física instala un ventilador, que produce un flujo horizontal de aire de velocidad 7 m/s hacia la lenteja. Con el ventilador en marcha, la lenteja está en equilibrio cuando el péndulo está inclinado  $5^\circ$  respecto a la dirección vertical. Cuando se para el ventilador, se deja que el péndulo oscile. (a) Si suponemos que la fuerza de resistencia a causa del aire viene dada por  $-bv$ , ¿cuál es la constante de tiempo o tiempo de extinción  $\tau$  de las oscilaciones del péndulo? (b) ¿Cuánto tiempo pasará hasta que la amplitud de la oscilación sea de  $1^\circ$ ?

### Oscilaciones forzadas y resonancia

**89** ● Determinar la frecuencia de resonancia de cada uno de los tres sistemas indicados en la figura 14.34.

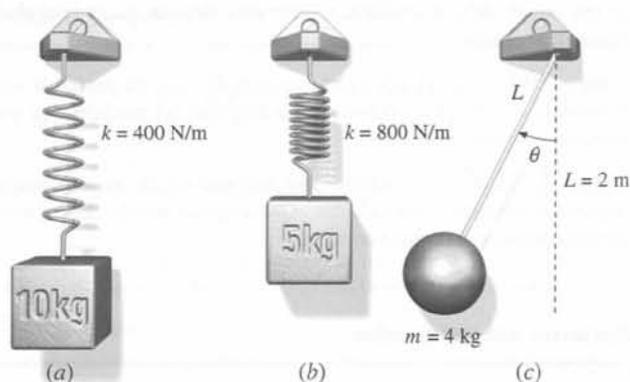


Figura 14.34 Problema 89

90 ● Un oscilador amortiguado pierde el 2 por ciento de su energía en cada ciclo. (a) ¿Cuál es su factor  $Q$ ? (b) Si su frecuencia de resonancia es 300 Hz, ¿cuál es la anchura de la curva de resonancia  $\Delta\omega$  cuando el oscilador está forzado?

91 ●● Un objeto de 2 kg oscila sobre un muelle de constante de fuerza  $k = 400$  N/m. La constante de amortiguamiento es  $b = 2,00$  kg/s. Está forzado por una fuerza sinusoidal de valor máximo 10 N y frecuencia angular  $\omega = 10$  rad/s. (a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones? (b) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia? (c) Hallar la amplitud de las vibraciones en la resonancia. (d) ¿Cuál es la anchura  $\Delta\omega$  de la curva de resonancia?

92 ●● Un oscilador amortiguado pierde el 3,5 por ciento de su energía durante cada ciclo. (a) ¿Cuántos ciclos han de transcurrir antes de que se disipe la mitad de su energía? (b) ¿Cuál es el factor  $Q$ ? (c) Si la frecuencia natural es 100 Hz, ¿cuál es la anchura de la curva de resonancia cuando el oscilador se ve forzado exteriormente?

## Colisiones

93 ●●● La figura 14.35 muestra un sistema vibrante masa-muelle colocado en una superficie sin rozamiento y una segunda masa igual que se mueve hacia la masa vibrante con velocidad  $v$ . El movimiento de la masa vibrante viene dado por  $x(t) = (0,1 \text{ m}) \cos(40 \text{ s}^{-1}t)$ , en donde  $x$  es el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio. Las dos masas chocan elásticamente justo cuando la masa vibrante pasa por su posición de equilibrio y se mueve hacia la derecha. (a) ¿Cuál debe ser la velocidad  $v$  de la segunda masa para que el sistema masa-muelle quede en reposo después de la colisión elástica? (b) ¿Cuál es la velocidad de la segunda masa después de la colisión elástica?



Figura 14.35 Problema 93

94 ●●● Después de la colisión elástica del problema 93, la energía cinética de la masa en retroceso es 8,0 J. Determinar el valor de las masas  $m$  y la constante del muelle  $k$ .

95 ●●● Un objeto de 2 kg de masa apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento se une a un muelle de constante 600 N/m. Otro objeto de 1 kg de masa desliza sobre la superficie acercándose al primero a 6 m/s. (a) Hallar la amplitud de oscilación si el segundo objeto choca de forma perfectamente inelástica quedando unido también al muelle. ¿Cuál es el periodo de oscilación? (b) Hallar la amplitud y el periodo de oscilación si el choque es elástico.

(c) Para cada tipo de colisión, escribir una expresión para la posición  $x$  en función del tiempo  $t$  para el objeto unido al muelle, suponiendo que el choque se produce en el instante  $t = 0$ .

## Problemas generales

96 ● Una partícula posee un desplazamiento dado por  $x = 0,4 \cos(3t + \pi/4)$ , en donde  $x$  viene en metros y  $t$  en segundos. (a) Hallar la frecuencia  $f$  y el periodo  $T$  del movimiento. (b) ¿En dónde está la partícula en  $t = 0$ ? (c) ¿Y en  $t = 0,5$  s?

97 ● (a) Hallar una expresión para la velocidad de la partícula cuya posición viene dada en el problema 96. (b) ¿Cuál es la velocidad en el instante  $t = 0$ ? (c) ¿Cuál es la velocidad máxima? (d) ¿En qué momento después de  $t = 0$  se da esta velocidad máxima por primera vez?

98 ● Un cuerpo unido a un muelle horizontal oscila con un periodo de 4,5 s. Si el cuerpo se suspende verticalmente del muelle, ¿en cuánto se alarga el muelle respecto a su longitud natural cuando el cuerpo está en equilibrio?

99 ●● SSM Una partícula pequeña de masa  $m$  se desliza sin rozamiento en un cuenco esférico de radio  $r$ . (a) Demostrar que el movimiento de la masa es el mismo que si estuviese sujeta a un muelle de longitud  $r$ . (b) Se desplaza una partícula de masa  $m_1$  una pequeña distancia  $s_1$  de la parte inferior del cuenco (figura 14.36), siendo  $s_1$  mucho menor que  $r$ . Otra segunda masa  $m_2$  se desplaza en sentido opuesto a una distancia  $s_2 = 3s_1$  ( $s_2$  es también mucho menor que  $r$ ). Si las masas se dejan libres en el mismo instante, ¿en dónde se encontrarán? Explicarlo.

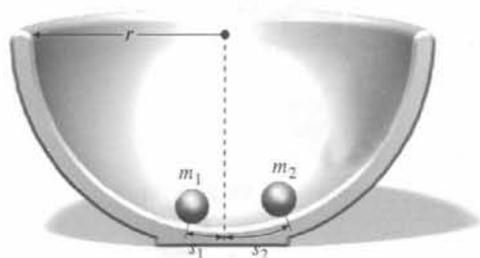


Figura 14.36 Problemas 99, 100

100 ●● Supongamos ahora que una pequeña bola de masa  $m$  y radio  $R$  rueda sin deslizar por el fondo del cuenco de la figura 14.36. (a) Escribir una expresión para la energía total de la bola en función de su velocidad y de la distancia (supuesta pequeña) al centro del cuenco. (b) Comparando esta expresión con la de la energía total de una bola de masa  $m$  que resbala sin rozamiento por la superficie del cuenco, determinar la frecuencia de oscilación de la bola respecto al centro del cuenco.

101 ●● **SOLVE** Cuando un avión disminuye su velocidad a fin de aterrizar, un viajero mide su aceleración suspendiendo un yo-yo como un péndulo simple y observando que cuando la lenteja (masa 40 g) está en reposo respecto a él, la cuerda (longitud 70 cm) forma un ángulo de  $22^\circ$  con la vertical. Determinar el periodo  $T$  para pequeñas oscilaciones de este péndulo.

102 ●● Una balanza de torsión consiste en un objeto de momento de inercia  $I$  que se cuelga del extremo de un hilo. Si se retuerce el hilo, éste produce un momento restaurador  $\tau = -\kappa\theta$ , donde  $\kappa$  es la constante de torsión y  $\theta$  es el ángulo de deformación. Demostrar que cuando se tuerce el hilo un ángulo pequeño la frecuencia de las oscilaciones de torsión vale  $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ .

103 ●● En la figura 14.37 se muestra una balanza de torsión sencilla que se utiliza en una rica variedad de experimentos de física (véase el problema 102). Supongamos que tenemos una barra de 5,0 cm de longitud y de masa despreciable que tiene dos partículas idénticas de 50 g de masa en sus extremos y

que está atada al extremo del hilo de la balanza. Si el periodo de oscilación es de 80 s, ¿cuál es la constante de torsión de la balanza?

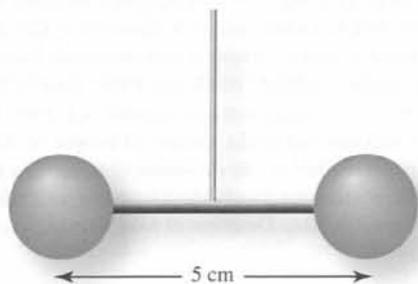


Figura 14.37 Problema 103

**104** ●● **SSM** **¡SOLVE!** Un cubo de madera de arista  $a$  y masa  $m$  flota en agua con una de sus caras paralela a la superficie del agua. La densidad del agua es  $\rho$ . Determinar el periodo de oscilación en la dirección vertical cuando se empuja el cubo ligeramente hacia abajo.

**105** ●● Un reloj de péndulo funciona correctamente en la superficie de la Tierra. ¿En qué situación el error será mayor: si el reloj se baja a una mina de profundidad  $h$  o si se eleva a una altura  $h$ ? Suponer que  $h \ll R_T$ .

**106** ●● **¡SOLVE!** La figura 14.38 muestra un péndulo de longitud  $L$  con una lenteja de masa  $M$ . La lenteja está unida a un muelle de constante  $k$  como se indica. Cuando la lenteja está directamente por debajo del soporte del péndulo, el muelle tiene su longitud natural de equilibrio. (a) Deducir una expresión para el periodo de este sistema oscilante para vibraciones de pequeña amplitud. (b) Suponer que  $M = 1$  kg y  $L$  es tal que en ausencia del muelle el periodo es 2,0 s. ¿Cuál es la constante del muelle  $k$  si el periodo del sistema oscilante es 1,0 s?

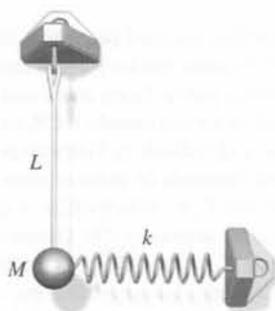


Figura 14.38 Problema 106

**107** ●● Una masa  $m_1$  que se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento está sujeta a un muelle de constante de fuerza  $k$  y oscila con amplitud  $A$ . Cuando el muelle está con su mayor deformación y la masa está instantáneamente en reposo, se coloca en la parte superior de  $m_1$  otra masa  $m_2$ . (a) ¿Cuál es el menor valor del coeficiente de rozamiento estático  $\mu_e$  que permite que  $m_2$  no deslice sobre  $m_1$ ? (b) Explicar cómo se modifican la energía total  $E$ , la amplitud  $A$ , la frecuencia angular  $\omega$  y el periodo  $T$  al situar  $m_2$  sobre  $m_1$  suponiendo que el rozamiento es suficientemente grande para que no haya deslizamiento.

**108** ●● Una caja de 100 kg de masa cuelga del techo de una habitación sujeta a un muelle de constante 500 N/m. El muelle tiene una longitud natural de 0,5 m. (a) Determinar la posición de equilibrio de la caja. (b) Un muelle idéntico se cuelga del techo y de la misma caja, al lado del anterior. Determinar qué frecuencia tendrán las oscilaciones cuando se libere la caja. (c) ¿Cuál será la nueva posición de equilibrio de la caja, cuando acabe parándose?

**109** ●● La aceleración debida a la gravedad  $g$  varía con la situación geográfica debido a la rotación de la Tierra y a que la Tierra no es exactamente esférica. Este hecho fue descubierto por primera vez durante el siglo XVII, cuando se observó que un reloj de péndulo cuidadosamente ajustado para marcar el tiempo correcto en París, se atrasaba alrededor de 90 s/día cerca del ecuador. (a) Demostrar que una pequeña variación en la aceleración de la gravedad  $\Delta g$  produce un pequeño cambio  $\Delta T$  en el periodo de un péndulo dado por  $\Delta T/T \approx \frac{1}{2} \Delta g/g$ . (Utilizar el cálculo diferencial para aproximar los valores de  $\Delta T$  y  $\Delta g$ .) (b) ¿Qué variación de  $g$  se necesita para justificar un cambio de periodo de 90 s/día?

**110** ●● La figura 14.39 muestra dos masas iguales de 0,6 kg unidas con pegamento entre sí y conectadas a un muelle de constante  $k = 240$  N/m. Las masas, que descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento, se desplazan 0,6 m de su posición de equilibrio y se dejan en libertad. Antes de liberarse se depositan unas gotas de disolvente sobre el pegamento que las une. (a) Determinar la frecuencia de vibración y la energía total del sistema vibrante antes de que el pegamento se haya disuelto. (b) Determinar la frecuencia de vibración, amplitud y energía del sistema vibrante si el pegamento se disuelve (1) en la compresión máxima y (2) en la extensión máxima.

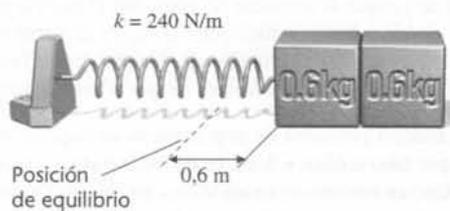


Figura 14.39 Problema 110

**111** ●● Demostrar que en los dos casos de la figura 14.40a y b, el objeto oscila con una frecuencia  $f = [1/(2\pi)]\sqrt{k_{ef}/m}$ , en donde  $k_{ef}$  viene dado por (a)  $k_{ef} = k_1 + k_2$  y (b)  $1/k_{ef} = 1/k_1 + 1/k_2$ . (Indicación: Hallar la fuerza neta  $F$  sobre el objeto para un pequeño desplazamiento  $x$  y escribir  $F = -k_{ef}x$ . Obsérvese que en (b) los muelles se deforman en cantidades diferentes cuya suma es  $x$ .)

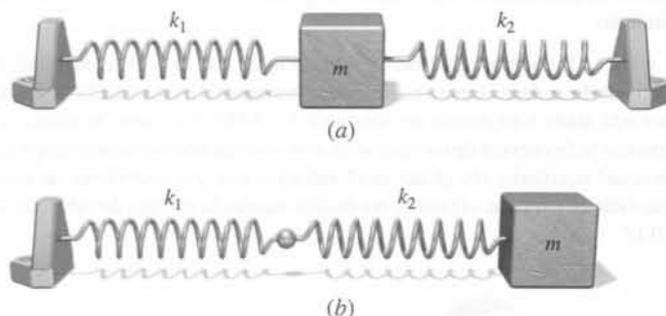


Figura 14.40 Problema 111

**112** ●● **SSM** Un bloque pequeño de masa  $m_1$  descansa sobre un pistón que está vibrando verticalmente con movimiento armónico simple dado por  $y = A \sin \omega t$ . (a) Demostrar que el bloque se separará del pistón si  $\omega^2 A > g$ . (b) Si  $\omega^2 A = 3g$  y  $A = 15$  cm, ¿en qué instante el bloque se separará del pistón?

**113** ●● **¡SOLVE!** El émbolo de una máquina de lanzamiento de bolas tiene una masa  $m_e$  y está conectado a un muelle de constante de fuerza  $k$  (figura 14.41). El muelle se comprime una distancia  $x_0$  a partir de su posición de equilibrio,  $x = 0$ , y se deja en libertad. Una bola de masa  $m_b$  está junto al émbolo. (a) ¿En qué punto la bola se separa del émbolo? (b) ¿Cuál es la velocidad  $v_b$  de la bola cuando ésta se separa? (c) ¿A qué distancia  $x_f$  el émbolo se detiene momentáneamente? (Suponer que la superficie es horizontal y sin rozamiento de modo que la bola se desliza sin rodar.)

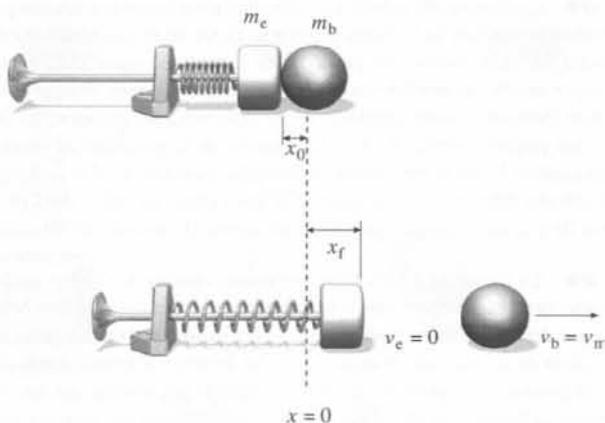


Figura 14.41 Problema 113

**114** ●● Una plataforma nivelada vibra horizontalmente con movimiento armónico simple con un periodo de 0,8 s. (a) Una caja sobre la plataforma comienza a deslizarse cuando la amplitud de vibración alcanza los 40 cm; ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre la caja y la plataforma? (b) Si el coeficiente de rozamiento estático entre la caja y la plataforma fuera 0,40, ¿cuál sería la amplitud máxima de vibración antes de que la caja deslizase?

**115** ●●● La energía potencial de una masa  $m$  en función de la posición viene expresada por  $U(x) = U_0(\alpha + 1/\alpha)$ , en donde  $\alpha = x/a$  y  $a$  es una constante. (a) Representar  $U(x)$  en función de  $x$  para  $0,1a < x < 3a$ . (b) Determinar el valor de  $x = x_0$  en el equilibrio estable. (c) Expresar la energía potencial  $U(x)$  para  $x = x_0 + \epsilon$ , siendo  $\epsilon$  un pequeño desplazamiento de la posición de equilibrio  $x_0$ . (d) Aproximar el término  $1/x$  utilizando el desarrollo binómico

$$(1+r)^n = 1 + nr + \frac{n(n-1)}{(2)(1)}r^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}r^3 + \dots$$

con  $r = \epsilon/x_0 \ll 1$  y despreciar los términos de potencia superior a  $r^2$ . (e) Comparar el resultado obtenido con el potencial de un oscilador armónico simple. Demostrar que la masa experimentará un movimiento armónico simple para pequeños desplazamientos del equilibrio y determinar la frecuencia de este movimiento.

**116** ●●● Un tambor cilíndrico sólido de masa 6,0 kg y diámetro 0,06 m rueda sin deslizamiento sobre una superficie horizontal (figura 14.42). El eje del tambor está atado a un muelle de constante  $k = 4000$  N/m como se indica. (a) Determinar la frecuencia de oscilación de este sistema para pequeños desplazamientos del equilibrio. (b) ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para que el tambor no deslice cuando la energía de vibración es de 5,0 J?



Figura 14.42 Problema 116

**117** ●●● SSM Si atamos dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  a los dos extremos de un muelle de constante  $k$  y los hacemos oscilar, demostrar que la frecuencia de oscilación es  $\omega = (k/\mu)^{1/2}$ , donde  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  es la masa reducida del sistema.

**118** ●● Uno de los modos vibracionales de la molécula de HCl tiene una frecuencia de  $8,969 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ . Usando la relación deducida en el problema 117, determinar la constante  $k$  de la molécula de HCl.

**119** ●● En el problema 118, si se reemplaza el átomo de hidrógeno de la molécula de HCl por un átomo de deuterio, ¿cuál será la nueva frecuencia de vibración de la molécula? (El átomo de deuterio está formado por un protón y un neutrón.)

**120** ●●● Un bloque de masa  $m$  situado sobre una mesa horizontal está unido a un muelle de constante  $k$  como se muestra en la figura 14.43. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la masa es  $\mu_c$ . Se estira el muelle una longitud  $A$  y luego se le deja libre. (a) Aplicar la segunda ley de Newton al bloque para obtener una ecuación para su aceleración  $d^2x/dt^2$  durante el primer medio ciclo, durante el cual el bloque se está moviendo hacia la izquierda. Demostrar que la ecuación resultante puede escribirse como  $d^2x'/dt^2 = -\omega^2 x'$ , en donde  $\omega = \sqrt{k/m}$  y  $x' = x - x_0$  con  $x_0 = \mu_c mg/k = \mu_c g/\omega^2$ . (b) Repetir el apartado (a) para el segundo semiciclo, cuando el bloque se mueve hacia la derecha y demostrar que  $d^2x''/dt^2 = -\omega^2 x''$ , siendo  $x'' = x + x_0$  y teniendo  $x_0$  el mismo valor. (c) Utilizar una hoja de cálculo para hacer un gráfico de los primeros 5 semiciclos para  $A = 10x_0$ . Describir el movimiento, si lo hay, después del quinto semiciclo.



Figura 14.43 Problema 120

**121** ●●● La figura 14.44 muestra un semicilindro de masa  $M$  y radio  $R$  que descansa sobre una superficie horizontal. Si un lado del semicilindro se empuja ligeramente y luego se libera, el objeto oscilará alrededor de su posición de equilibrio. Determinar el periodo de esta oscilación.

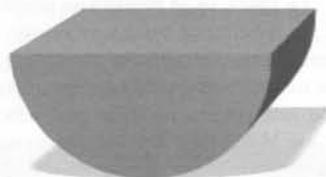


Figura 14.44 Problema 121

**122** ●●● SSM Se perfora un túnel pequeño a través de la Tierra como se indica en la figura 14.45. Suponer que las paredes carecen de rozamiento. (a) La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre una partícula de masa  $m$  a una distancia  $r$  del centro de la misma cuando  $r < R_T$  es  $F_r = -(GmM_T/R_T^3)r$ , en donde  $M_T$  y  $R_T$  son la masa y el radio de la Tierra respectivamente. Demostrar que la fuerza neta sobre una partícula de masa  $m$  situada a una distancia  $x$  del centro del túnel viene dada por  $F_x = -(GmM_T/R_T^3)x$ , y que el movimiento de la partícula es, por consiguiente, armónico. (b) Demostrar que el periodo del movimiento viene dado por  $T = 2\pi \sqrt{R_T/g}$  y hallar su valor en minutos. (Resulta ser el mismo periodo que el de un satélite que orbite la Tierra cerca de su superficie y es independiente de la longitud del túnel.)

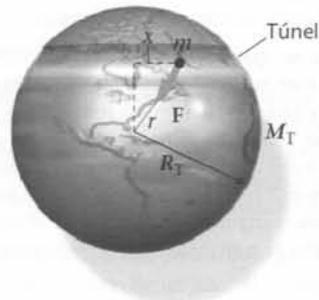


Figura 14.45 Problema 122

**123** ●●● Un oscilador amortiguado tiene una frecuencia  $\omega'$  que es un 10 por ciento menor que su frecuencia sin amortiguamiento. (a) ¿En qué factor disminuye su amplitud en cada oscilación? (b) ¿En qué factor se reduce su energía durante cada oscilación?

**124 ●●●** Demostrar mediante sustitución directa que la ecuación 14.52 es una solución de la ecuación 14.51.

**125 ●●● SSM** En este problema hay que obtener la expresión correspondiente a la potencia media cedida por una fuerza impulsora a un oscilador forzado (figura 14.24).

(a) Demostrar que la potencia instantánea cedida por la fuerza impulsora es

$$P = Fv = -A\omega F_0 \cos \omega t \sin(\omega t - \delta)$$

(b) Utilizar la identidad trigonométrica  $\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$  para demostrar que esta última expresión puede escribirse

$$P = A\omega F_0 \sin \delta \cos^2 \omega t - A\omega F_0 \cos \delta \cos \omega t \sin \omega t$$

(c) Demostrar que el valor medio del segundo término del resultado del apartado (b) calculado en uno o más periodos es cero y que, por lo tanto,

$$P_m = \frac{1}{2} A \omega F_0 \sin \delta$$

(d) A partir de la ecuación 14.54 para  $\tan \delta$ , construir un triángulo rectángulo en el que el cateto opuesto al ángulo  $\delta$  sea  $b\omega$  y el adyacente sea  $m(\omega_0^2 - \omega^2)$  y utilizar este triángulo para demostrar que

$$\sin \delta = \frac{b\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{b\omega A}{F_0}$$

(e) Utilizar este resultado de (d) para eliminar  $\omega A$  de forma que la potencia media cedida pueda escribirse

$$P_m = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{b} \sin^2 \delta = \frac{1}{2} \left[ \frac{b\omega^2 F_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} \right] \quad (14.55)$$

**126 ●●●** En este problema debe de utilizarse el resultado del problema 125 para deducir la ecuación 14.49, que relaciona la anchura de la curva de resonancia con el valor de  $Q$  cuando la resonancia es aguda. En la resonancia el denominador de la fracción entre corchetes de la ecuación 14.55 es  $b^2\omega_0^2$  y  $P_m$  tiene un valor máximo. (La ecuación 14.55 se encontrará en el problema 125.) En el caso de una resonancia aguda, la variación de  $\omega$  del numerador de la ecuación 14.55 puede despreciarse. Entonces la potencia cedida será la mitad de su valor máximo en los valores de  $\omega$  para los cuales el denominador sea  $2b^2\omega_0^2$ .

(a) Demostrar entonces que  $\omega$  satisface  $m^2(\omega - \omega_0)^2(\omega + \omega_0)^2 \approx b^2\omega_0^2$ .

(b) Utilizando la aproximación  $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ , demostrar que  $\omega - \omega_0 \approx \pm b/2m$ .

(c) Expresar  $b$  en función de  $Q$ .

(d) Combinar los resultados de (b) y (c) para demostrar que existen dos valores de  $\omega$  para los que la potencia cedida es la mitad de la correspondiente en la resonancia y que vienen dados por

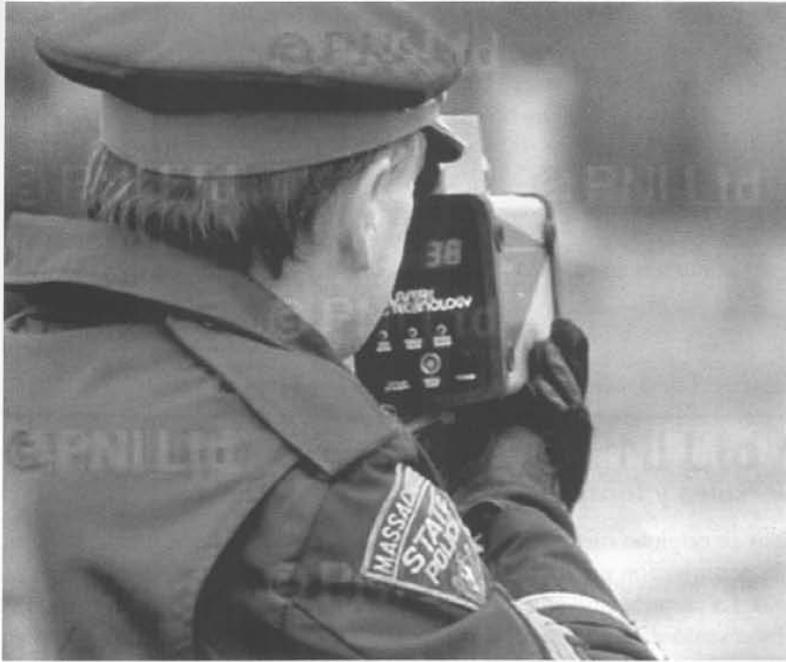
$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}$$

Por consiguiente,  $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \omega_0/Q$ , que es equivalente a la ecuación 14.49.

**127 ●●●** El potencial de Morse, que frecuentemente se usa para representar las fuerzas interatómicas, puede escribirse de la forma  $U(r) = D(1 - e^{-\beta(r-r_0)})^2$ , donde  $r$  es la distancia entre los dos núcleos atómicos. (a) Usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, representar gráficamente el potencial de Morse usando  $D = 5 \text{ eV}$ ,  $\beta = 0,2 \text{ nm}^{-1}$  y  $r_0 = 0,75 \text{ nm}$ . (b) Determinar a partir del potencial de Morse la separación de equilibrio y la constante  $k$  para pequeños desplazamientos del equilibrio. (c) Determinar una fórmula para la frecuencia de oscilación de una molécula diatómica homonuclear (es decir, con los dos átomos iguales) si los átomos tienen una masa  $m$ .

# MOVIMIENTO ONDULATORIO

## Capítulo 15



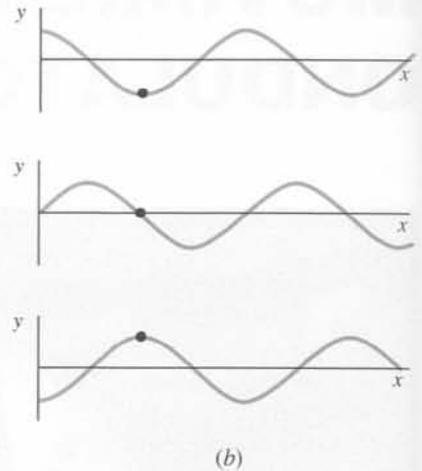
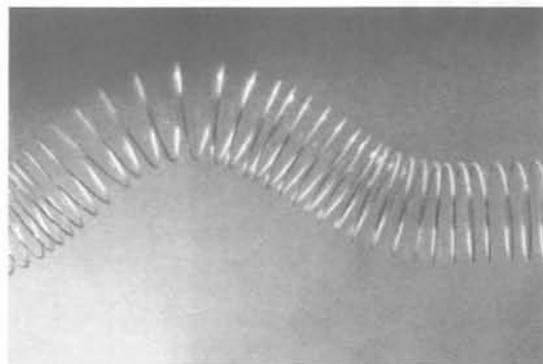
- 15.1 Movimiento ondulatorio simple
- 15.2 Ondas periódicas
- 15.3 Ondas en tres dimensiones
- 15.4 Ondas y barreras
- 15.5 Efecto Doppler

Este radar de la policía lanza ondas electromagnéticas, que se mueven a la velocidad de la luz, y que se reflejan en un coche en movimiento.

¿Cómo mide el policía la velocidad del vehículo? (Véase el ejemplo 15.12.)

Las ondas transportan energía y momento lineal a través del espacio sin transportar materia. Cuando una onda se mueve por la superficie del agua de un estanque, las moléculas de agua oscilan hacia arriba y hacia abajo pero no cruzan el estanque con la onda. La onda transporta energía y momento pero, en cambio, no transporta masa. Un bote de remos también se mueve hacia arriba y hacia abajo impulsado por las ondas u olas, pero tampoco cruzará el estanque impulsado por ellas. Las ondas de agua, las ondas generadas cuando pulsamos una cuerda de guitarra y las ondas sonoras, todas ellas comportan una oscilación.

En este capítulo seguimos analizando el movimiento oscilatorio que comenzamos en el capítulo 14, estudiando las ondas periódicas, en especial las ondas armónicas. Veremos que las ondas mecánicas se generan cuando hay una perturbación en un medio, como el aire o el agua, mientras que las ondas electromagnéticas pueden existir sin que necesariamente haya un medio material por el cual la onda se propague.

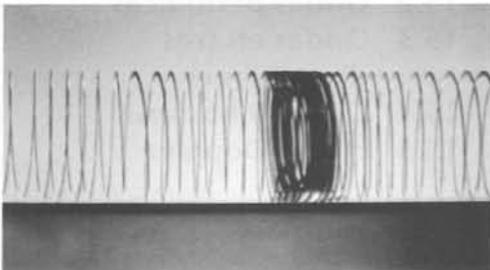


**Figura 15.1** (a) Pulso de una onda transversal en un muelle. La perturbación es perpendicular a la dirección del movimiento de la onda. (b) Tres dibujos sucesivos de una onda transversal que viaja hacia la derecha sobre un muelle. Un elemento de la cuerda se mueve hacia arriba y abajo.

## 15.1 Movimiento ondulatorio simple

### Ondas transversales y longitudinales

Las ondas mecánicas se originan mediante una perturbación de un medio. Cuando se pulsa una cuerda tensa, la perturbación provocada se propaga a lo largo de la misma en forma de un pulso ondulatorio. La perturbación en este caso consiste en la variación de la forma de la cuerda a partir de su estado de equilibrio. Su propagación surge de la interacción de cada segmento de cuerda con los segmentos adyacentes. Los segmentos de la cuerda (el medio) se mueven en dirección perpendicular a la cuerda y por lo tanto perpendiculares a la dirección del movimiento del pulso. Una onda como esta en la que la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación se denomina **onda transversal** (figura 15.1). Una onda en la que la perturbación es paralela a la dirección de propagación se denomina **onda longitudinal** (figura 15.2). Las ondas sonoras son ejemplos de ondas longitudinales. Las moléculas de un gas, líquido o sólido a través del cual viaja el sonido, oscilan según la línea de propagación (moviéndose adelante y atrás), comprimiendo y enrareciendo alternativamente el medio.



**Figura 15.2** Pulso de una onda longitudinal en un muelle. La perturbación se desplaza en la dirección de movimiento de la onda.

### Pulsos de onda

En la figura 15.3a se muestra un pulso en una cuerda en el instante  $t = 0$ . La forma de la cuerda en este instante puede representarse por una función  $y = f(x)$ . Un cierto tiempo después (figura 15.3b), el pulso se ha desplazado por la cuerda, de modo que en un nuevo sistema de coordenadas con origen  $O'$  que se mueve con la velocidad del pulso, éste es estacionario. La cuerda se describe en este nuevo sistema por  $f(x')$  en todo instante. Las coordenadas de los dos sistemas de referencia están relacionadas por

$$x = x' + vt$$

y por lo tanto  $f(x') = f(x - vt)$ .

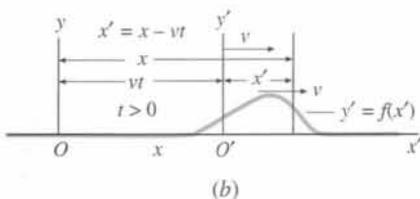
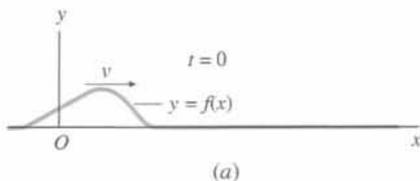
Así pues, el desplazamiento de la cuerda en el sistema original  $O$  puede escribirse

$$y = f(x - vt), \quad \text{onda moviéndose en el sentido positivo de } x \quad (15.1)$$

Esta misma línea de razonamiento aplicada al caso de un pulso que se mueve hacia la izquierda conduce a

$$y = f(x + vt), \quad \text{onda moviéndose en el sentido negativo de } x \quad (15.2)$$

En cada una de estas expresiones,  $v$  es el módulo de la velocidad de propagación de la onda. La función  $y = f(x - vt)$  se denomina **función de onda**. En el caso de ondas en una



**Figura 15.3**

cuerda, la función de onda representa el desplazamiento transversal de la cuerda. Para las ondas sonoras en el aire, la función de onda puede ser el desplazamiento longitudinal de las moléculas gaseosas o la presión del aire. Estas funciones de onda son soluciones de una ecuación diferencial llamada ecuación de onda, que puede deducirse de las leyes de Newton.

## Velocidad de las ondas

Una propiedad general de las ondas es que su velocidad depende de las propiedades del medio y que es independiente del movimiento de la fuente de las ondas. Por ejemplo, la velocidad del sonido de la bocina de un coche depende sólo de las propiedades del aire y no del movimiento del coche.

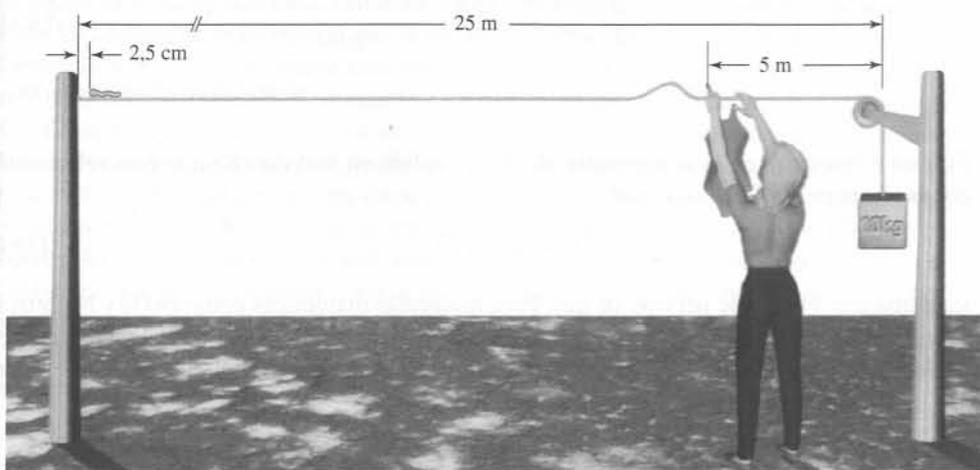
En el caso de los pulsos de onda en una cuerda, es fácil demostrar que cuanto mayor es la tensión, más rápidamente se propagan las ondas. Además, las ondas se propagan más rápidamente en una cuerda ligera que en una cuerda pesada bajo la misma tensión. Veremos posteriormente que si  $F_T$  (usamos  $F_T$  para designar la tensión porque reservamos  $T$  para el periodo) es la tensión y  $\mu$  la densidad de masa lineal (masa por unidad de longitud), la velocidad de la onda es

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad (15.3)$$

VELOCIDAD DE LAS ONDAS EN UNA CUERDA

### EJEMPLO 15.1 | El gusano que corre para salvar la vida

Un gusano está a 2,5 cm del extremo de la cuerda de un tendedero cuando la chica que está tendiendo su traje de baño en el otro extremo de la cuerda lo ve. La chica da un golpe a la cuerda de modo que por ésta se propaga un pulso de 3 cm de altura que se dirige hacia el animal. Si el gusano se mueve a 2,54 cm/s, ¿llegará al extremo de la cuerda antes que le alcance el movimiento generado por la chica? La cuerda tiene 25 m de longitud y una masa de 0,25 kg y se mantiene tensa gracias a un peso de 10 kg que cuelga de ella, tal como se muestra en la figura 15.4. La chica está tendiendo su traje de baño a una distancia de 5 m del extremo de la cuerda opuesto a la posición del gusano.



### ¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!



Figura 15.4

Figura 15.5 Un pulso de onda viajando por una cuerda a la izquierda. El pulso tiene una altura de 3 cm y una longitud de onda de 25 cm. La cuerda tiene una masa de 0,25 kg y una longitud de 25 m. La velocidad de la onda es 2,54 cm/s.

**Planteamiento del problema** Hay que saber a qué velocidad se mueve la onda. Para ello usamos la fórmula  $v = \sqrt{F_T/\mu}$ .

1. La velocidad está relacionada con la tensión  $F_T$  y la densidad de masa lineal  $\mu$ : 
$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$
2. Calcular la densidad de masa lineal y la tensión a partir de la información recibida: 
$$\mu = \frac{m_c}{L} \quad \text{y} \quad F_T = mg$$

3. Aplicar estos valores a la expresión de  $v$  para calcular la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mgL}{m_c}} = \sqrt{\frac{(10 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(25 \text{ m})}{0,25 \text{ kg}}} \\ = 99,0 \text{ m/s}$$

4. Usar esta velocidad para determinar el tiempo que tarda en recorrer los 20 m que le separan del otro extremo de la cuerda.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{20 \text{ m}}{99,0 \text{ m/s}} = 0,202 \text{ s}$$

5. Determinar el tiempo que invierte el gusano en moverse los 2,5 cm que le separan del extremo de la cuerda y, por lo tanto, de la salvación.

$$\Delta t = \frac{\Delta x'}{v'} = \frac{2,5 \text{ cm}}{2,54 \text{ cm/s}} = 0,984 \text{ s}$$

El gusano no se escapa del pulso

**Ejercicio** Si se sustituye la masa de 10 kg por otra de 20 kg, ¿cuál será la velocidad de las ondas en la cuerda? (Respuesta 54,2 m/s.)

**Ejercicio** Demostrar que las unidades de  $\sqrt{F_T/\mu}$  son m/s cuando  $F$  se expresa en Newtons y  $\mu$  en kg/m.

En el caso de las ondas sonoras en un fluido como el aire o el agua, la velocidad  $v$  viene expresada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (15.4)$$

en donde  $\rho$  es la densidad del medio (en equilibrio) y  $B$  el módulo de compresibilidad<sup>1</sup> (ecuación 13.6). Comparando las ecuaciones 15.3 y 15.4 puede verse que, en general, la velocidad de las ondas depende de una propiedad elástica del medio (la tensión en el caso de las ondas de las cuerdas y el módulo de compresibilidad de las ondas sonoras) y de una propiedad inercial del mismo (la densidad de masa lineal o la densidad de masa volúmica).

Para las ondas sonoras en un gas, tal como el aire, el módulo de compresibilidad<sup>2</sup> es proporcional a la presión, la cual a su vez es proporcional a la densidad  $\rho$  y a la temperatura absoluta  $T$  del gas. La relación  $B/\rho$  es por lo tanto, independiente de la densidad y simplemente proporcional a la temperatura absoluta  $T$ . En el capítulo 17 demostraremos que en este caso, la ecuación 15.4 es equivalente a

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (15.5)$$

VELOCIDAD DEL SONIDO EN UN GAS

En esta ecuación  $T$  es la temperatura absoluta medida en kelvins (K) que está relacionada con la temperatura Celsius,  $t_C$  por

$$T = t_C + 273 \quad (15.6)$$

La constante  $\gamma$  depende del tipo de gas. Para moléculas diatómicas como el  $O_2$  y  $N_2$ ,  $\gamma$  tiene el valor 1,4, y como el  $O_2$  y  $N_2$  constituyen el 98% de la atmósfera, éste es el valor que corresponde también al aire. (Para moléculas monoatómicas como el He,  $\gamma$  posee el valor 1,67.) La constante  $R$  es la constante universal de los gases,

$$R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \quad (15.7)$$

<sup>1</sup> El módulo de compresibilidad es el cociente, con signo negativo, entre el cambio en la presión y el correspondiente cambio del volumen por unidad de volumen (capítulo 13):

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

<sup>2</sup> El **módulo de compresibilidad isoterma**, que describe cambios en el volumen que ocurren a temperatura constante, difiere del **módulo de compresibilidad adiabático**, que describe variaciones del volumen que se dan cuando no se produce transferencia de calor. En las ondas sonoras a las frecuencias audibles los cambios de la presión se producen tan rápidamente que no hay tiempo para que se den flujos de calor y, por lo tanto, se describen mediante el módulo de compresibilidad adiabático.

y  $M$  la masa molar del gas (es decir, la masa de 1 mol del gas), que para el aire es

$$M = 29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

### EJEMPLO 15.2 | Velocidad del sonido en el aire

Calcular la velocidad del sonido en el aire (a) a  $0^\circ\text{C}$  y (b) a  $20^\circ\text{C}$ .

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

- (a) 1. Escribir la ecuación 15.5.
2. Introducir los valores dados en la ecuación y despejar la velocidad. (Asegurarse de que la temperatura se convierte a kelvins.)
- (b) 1. Utilizar el hecho de que  $v$  es proporcional a  $\sqrt{T}$  (ecuación 15.5) para relacionar las velocidades a 293 K y 273 K.
2. Calcular  $v$  a 293 K.

#### Respuestas

$$v_a = \sqrt{\frac{\gamma R T_a}{M}}$$

$$v_a = \boxed{331 \text{ m/s}}$$

$$\frac{v_b}{v_a} = \sqrt{\frac{T_b}{T_a}}$$

$$v_b = \boxed{343 \text{ m/s}}$$



**Observación** En este ejemplo vemos que la velocidad del sonido en el aire es aproximadamente 340 m/s a temperaturas ordinarias.

**Ejercicio** Para el helio,  $M = 4 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$  y  $\gamma = 1,67$ . ¿Cuál es la velocidad de las ondas sonoras en helio a  $20^\circ\text{C}$ ? (Respuesta 1,01 km/s.)

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

**Deducción de  $v$  para ondas en una cuerda** La ecuación 15.3 puede deducirse a partir de las leyes de Newton. Consideremos un pulso que se propaga a lo largo de una cuerda con velocidad  $v$  hacia la derecha (figura 15.5a). Si la amplitud del pulso es pequeña comparada con la longitud de la cuerda, la tensión  $F_T$  es aproximadamente constante a lo largo de la cuerda. En un sistema de referencia que se mueve con velocidad  $v$  hacia la derecha, el pulso es estacionario y la cuerda se mueve con velocidad  $v$  hacia la izquierda. En la figura 15.5b se muestra un pequeño segmento de cuerda de longitud  $\Delta s$  que se encuentra en el pico de un pulso. El segmento forma parte de un arco circular de radio  $R$ . Instantáneamente el segmento se mueve con velocidad  $v$  en una trayectoria circular, de modo que posee una aceleración centrípeta  $v^2/R$ . Las fuerzas que actúan sobre el segmento son las tensiones  $F_T$  en ambos extremos. Las componentes horizontales de estas fuerzas son iguales y opuestas y, por lo tanto, se cancelan. Si consideramos  $\Delta s$  lo suficientemente pequeño, las componentes verticales de estas fuerzas apuntan radialmente hacia el centro del arco circular. Estas fuerzas radiales proporcionan la aceleración centrípeta.

Sea  $\theta$  el ángulo subtendido por la cuerda. La componente centrípeta de la fuerza neta que actúa sobre el segmento es

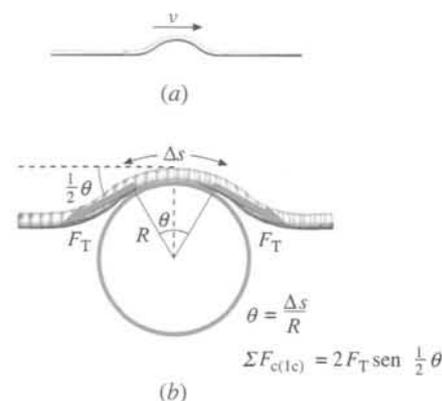
$$\sum F_c = 2F_T \sin \frac{1}{2}\theta \approx 2F_T \left(\frac{1}{2}\theta\right) = F_T \theta$$

en donde hemos utilizado la aproximación  $\sin \frac{1}{2}\theta \approx \frac{1}{2}\theta$  para valores pequeños de  $\theta$ . Si  $\mu$  es la masa por unidad de longitud de la cuerda, la masa de un segmento de longitud  $\Delta s$  es  $m = \mu\Delta s$ . El ángulo  $\theta$  viene relacionado con  $\Delta s$  por

$$\theta = \frac{\Delta s}{R}$$

La masa del elemento es, por lo tanto,

$$m = \mu\Delta s = \mu R\theta$$



**Figura 15.5** (a) Pulso de onda moviéndose con velocidad  $v$  a lo largo de una cuerda. (b) En un sistema de referencia en el que el pulso de onda de (a) está en reposo, la cuerda se está moviendo con velocidad  $v$  hacia la izquierda. Un segmento pequeño de la cuerda de longitud  $\Delta s$  se mueve sobre un arco circular de radio  $R$ . La aceleración centrípeta del segmento la originan los componentes radiales de la tensión.

La segunda ley de Newton ( $\Sigma F_c = ma_c$ ) nos lleva a

$$F_T \theta = \mu R \theta \frac{v^2}{R}$$

Despejando  $v$ , obtenemos  $v = \sqrt{F_T/\mu}$ .

En el sistema de referencia original, la cuerda está fija y el pulso se mueve con velocidad  $v = \sqrt{F_T/\mu}$ , que es la ecuación 15.3. Como  $v$  es independiente de  $R$  y  $\theta$ , este resultado es válido para el pico de cualquier pulso. A continuación demostraremos que este resultado no sólo es cierto para el pico, sino también para el resto de las partes del pulso.

### \*La ecuación de onda

Podemos aplicar las leyes de Newton a un segmento de cuerda para deducir una ecuación diferencial llamada ecuación de onda que relaciona las derivadas espaciales de la función  $y(x, t)$  con sus derivadas temporales. La figura 15.6 muestra un segmento de una cuerda. Consideraremos sólo ángulos pequeños  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . En este caso, la longitud del segmento es aproximadamente  $\Delta x$  y su masa  $m = \mu \Delta x$ , en donde  $\mu$  es la masa de la cuerda por unidad de longitud. Primero demostraremos que, para desplazamientos verticales pequeños, la fuerza resultante horizontal sobre un segmento es cero y que la tensión es uniforme y constante. Es decir,

$$\Sigma F_x = F_{T2} \cos \theta_2 - F_{T1} \cos \theta_1 = 0$$

en donde  $\theta_2$  y  $\theta_1$  son los ángulos indicados y  $F_T$  es la tensión en la cuerda. Como se supone que los ángulos son pequeños, podemos aproximar  $\cos \theta$  por 1. Por lo tanto, la fuerza neta horizontal que actúa sobre el segmento de cuerda puede expresarse en la forma

$$\Sigma F_x = F_{T2} - F_{T1} = 0$$

Con lo cual,

$$F_{T2} = F_{T1} = F_T$$

El segmento de cuerda se mueve verticalmente y la fuerza neta en esta dirección es

$$\Sigma F_y = F_T \sin \theta_2 - F_T \sin \theta_1$$

Se supone que los ángulos son pequeños, por lo tanto se puede aproximar  $\sin \theta$  por  $\text{tg } \theta$  para cada uno de ellos. En estas condiciones la fuerza vertical neta sobre el segmento de cuerda se escribe como

$$\Sigma F_y = F_T (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \approx F_T (\text{tg } \theta_2 - \text{tg } \theta_1)$$

La tangente del ángulo formado por la cuerda con la horizontal es la pendiente de la curva formada por la cuerda. La pendiente  $S$  es la primera derivada de  $y(x, t)$  respecto a  $x$  para  $t$  constante. Una derivada de una función de dos variables respecto a una de ellas, manteniendo constante la otra, se denomina una **derivada parcial**. La derivada parcial de  $y$  respecto a  $t$  se escribe  $\partial y/\partial x$ . Así tenemos

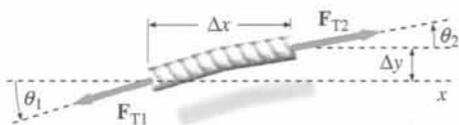
$$S = \text{tg } \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Por lo tanto,

$$\Sigma F_y = F_T (S_2 - S_1) = F_T \Delta S$$

en donde  $S_1$  y  $S_2$  son las pendientes de ambos extremos del segmento de cuerda y  $\Delta S$  la variación de la pendiente. Haciendo que esta fuerza neta sea igual a la masa  $\mu \Delta x$  multiplicada por la aceleración  $\partial^2 y/\partial t^2$ , se tiene

$$F_T \Delta S = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



**Figura 15.6** Segmento de una cuerda tensa utilizado para la deducción de la ecuación de onda. La fuerza vertical neta sobre el segmento es  $F_{T2} \sin \theta_2 - F_{T1} \sin \theta_1$ , siendo  $F_T$  la tensión en la cuerda. Se obtiene la ecuación de onda aplicando la segunda ley de Newton al segmento.

o bien

$$F_T \frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (15.8)$$

En el límite  $\Delta x \rightarrow 0$ , tenemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Así pues, la ecuación 15.8 se reduce a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (15.9a)$$

La ecuación 15.9a es la **ecuación de onda** para una cuerda tensa.

Ahora demostraremos que la ecuación de onda es satisfecha por cualquier función de  $x - vt$ . Hagamos  $\alpha = x - vt$  y consideremos cualquier función de onda

$$y = y(x - vt) = y(\alpha)$$

La derivada de  $y$  respecto a  $\alpha$  la denominaremos  $y'$ . Entonces, por la regla de derivación en cadena, tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = y' \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = y' \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

Dado que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = -v$$

se obtiene

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -vy'$$

Tomando segundas derivadas, tenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y''$$

y

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \frac{\partial y'}{\partial t} = -v \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = +v^2 y''$$

Así pues,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (15.9b)$$

#### ECUACIÓN DE ONDA

El mismo resultado se obtiene para cualquier función de  $x + vt$ . Comparando las ecuaciones 15.9a y 15.9b vemos que la velocidad de propagación de la onda es  $v = \sqrt{F_T/\mu}$ , que es la ecuación 15.3.

**EJEMPLO 15.3** | Función de onda armónica

En el apartado siguiente se definen las ondas armónicas mediante la función de ondas  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ , en donde  $v = \omega/k$ . Demostrar, calculando explícitamente las derivadas, que la función  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  satisface la ecuación 15.9b.

1. Calcular la primera y segunda derivada de  $y$  respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [A \sin(kx - \omega t)] = A \cos(kx - \omega t) \frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x} \\ &= kA \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} kA \cos(kx - \omega t) \\ &= -kA \sin(kx - \omega t) \frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x} \\ &= -k^2 A \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

2. De igual modo, las dos derivadas parciales respecto al tiempo,  $t$ , son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [A \sin(kx - \omega t)] = A \cos(kx - \omega t) \frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial t} \\ &= -\omega A \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \omega A \sin(kx - \omega t) \frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial t} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

3. Sustituyendo estos resultados en la ecuación 15.9b se obtiene:

$$-k^2 A \sin(kx - \omega t) = \frac{1}{v^2} [-\omega^2 A \sin(kx - \omega t)]$$

o bien

$$A \sin(kx - \omega t) = \frac{\omega^2/k^2}{v^2} A \sin(kx - \omega t)$$

4. Sustituyendo  $k$  utilizando  $k = \omega/v$  se obtiene:

$$A \sin(kx - \omega t) = \frac{v^2}{v^2} A \sin(kx - \omega t) = \boxed{A \sin(kx - \omega t)}$$

**Observación** Hemos demostrado que la función  $y = A \sin(kx - \omega t)$  es una solución a la ecuación de onda si  $v = \omega/k$ .

**Ejercicio** Demostrar que cualquier función  $y(x + vt)$  satisface la ecuación 15.9b.

Utilizando las leyes de Newton puede deducirse también una ecuación de onda para las ondas sonoras. En una dimensión esta ecuación es

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

donde  $s$  es el desplazamiento del medio en la dirección  $x$  y  $v_s$  es la velocidad del sonido.

## 15.2 Ondas periódicas

Si el extremo de una cuerda tensa se mueve de forma periódica hacia arriba y hacia abajo, se genera una **onda periódica**. Si una onda periódica se mueve a lo largo de una cuerda tensa o en cualquier otro medio, cada punto del medio oscila con el mismo periodo.

### Ondas armónicas

Las ondas armónicas constituyen la clase más básica de las ondas periódicas. Todas las ondas, tanto si son periódicas como si no lo son, pueden describirse como la suma de ondas armónicas. Por lo tanto, el conocimiento del movimiento de las ondas armónicas es fundamental para poder generalizar y obtener la descripción de cualquier clase de movimiento ondulatorio. Si una **onda armónica** se mueve por un medio, cada punto del medio oscila siguiendo un movimiento armónico simple.

Si un extremo de una cuerda se sujeta a un diapasón que está vibrando con movimiento armónico simple, se produce un tren de ondas sinusoidales que se propaga a lo largo de la cuerda. Este tren de ondas es una onda armónica. La forma de la cuerda es la de una función sinusoidal, como muestra la figura 15.7. La distancia mínima recorrida en el espacio hasta que la función de onda se repite (la distancia entre crestas, por ejemplo) se llama **longitud de onda**  $\lambda$ .

Cuando la onda se propaga por la cuerda, cada punto de la misma se mueve hacia arriba y hacia abajo (perpendicularmente a la dirección de propagación) realizando un movimiento armónico simple cuya frecuencia  $f$  es la del diapasón. Durante un periodo  $T = 1/f$ , la onda se mueve una distancia de una longitud de onda, de modo que la velocidad viene dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda \quad (15.10)$$

Como esta relación surge de las definiciones de longitud de onda y frecuencia, es válida para todas las ondas armónicas.

La función sinusoidal que describe los desplazamientos en la figura 15.7 es

$$y(x) = A \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \delta\right)$$

en donde  $A$  es la **amplitud**,  $\lambda$  la longitud de onda y  $\delta$  una constante de fase que depende de la elección del origen  $x = 0$ . Esta ecuación se expresa de forma más sencilla como

$$y(x) = A \sin(kx + \delta) \quad (15.11)$$

en donde  $k$ , el **número de onda**, viene dado por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (15.12)$$

Obsérvese que las dimensiones de  $k$  son  $\text{m}^{-1}$ . (Como el ángulo debe expresarse en radianes, a veces se escriben las unidades de  $k$  en la forma  $\text{rad/m}$ .) Cuando se trata con una única onda armónica se suele elegir el origen de modo que  $\delta = 0$ .

Para describir una onda que se mueve en el sentido creciente de  $x$  con velocidad  $v$ , sustituamos  $x$  en la ecuación 15.11 por  $x - vt$  (como hicimos con los "pulsos de onda" de la sección 15.1). Eligiendo  $\delta$  igual a cero se obtiene

$$y(x, t) = A \sin k(x - vt) = A \sin(kx - kv t)$$

o

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (15.13)$$

FUNCIÓN DE ONDA ARMÓNICA

en donde

$$\omega = kv \quad (15.14)$$

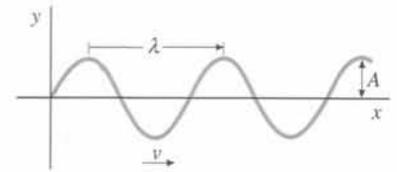
es la frecuencia angular y el argumento de la función seno,  $(kx - \omega t)$ , se denomina **fase**. La frecuencia angular está relacionada con la frecuencia  $f$  y el periodo  $T$  mediante

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (15.15)$$

Sustituyendo  $\omega = 2\pi f$  en la ecuación 15.14 y utilizando  $k = 2\pi/\lambda$ , se obtiene

$$2\pi f = kv = \frac{2\pi}{\lambda} v$$

o  $v = f\lambda$ , que es la ecuación 15.10.



**Figura 15.7** Onda armónica en un cierto instante de tiempo.  $A$  es la amplitud y  $\lambda$  es la longitud de onda. En el caso de ondas en una cuerda puede obtenerse esta figura tomando una fotografía instantánea de la misma.

Si una onda armónica que se mueve por una cuerda está descrita por  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ , en un punto fijo  $x$  la velocidad viene dada por

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [A \sin(kx - \omega t)] = \omega A \cos(kx - \omega t) \quad (15.16)$$

VELOCIDAD TRANSVERSAL

La aceleración en este punto viene dada por  $\partial^2 y / \partial t^2$ .

### EJEMPLO 15.4 | Una onda armónica en una cuerda

La función de onda de una onda armónica que se mueve en una cuerda es  $y(x, t) = (0,03 \text{ m}) \times \sin [(2,2 \text{ m}^{-1})x - (3,5 \text{ s}^{-1})t]$ . (a) ¿En qué sentido se propaga esta onda y cuál es su velocidad? (b) Determinar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de esta onda. (c) ¿Cuál es el desplazamiento máximo de cualquier segmento de cuerda? (d) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier segmento de cuerda?

**Planteamiento del problema** (a) Para determinar el sentido de la onda, expresar  $y(x, t)$  como una función de  $(x - vt)$  o como una función  $(x + vt)$  y utilizar las ecuaciones 15.1 y 15.2. Para determinar la velocidad utilizar  $\omega = kv$  (ecuación 15.14). (b) La longitud de onda, frecuencia y periodo pueden determinarse a partir del número de onda  $k$  y la frecuencia angular  $\omega$ . (c) El desplazamiento máximo de un segmento de cuerda es la amplitud  $A$ . (d) La velocidad de cualquier segmento corto de cuerda es  $\partial y / \partial t$ .

- (a) 1. La función de onda es de la forma  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ . Teniendo en cuenta que  $\omega = kv$  (ecuación 15.14), escribir la función de onda en función de  $x - vt$ . Usar las ecuaciones 15.1 y 15.2 para determinar el sentido del movimiento:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \text{ y } \omega = kv$$

es decir,

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) = A \sin[k(x - vt)]$$

la onda viaja en el sentido  $+x$

2. Como la forma de la función de onda es  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  sabemos cuánto vale  $A$ ,  $\omega$  y  $k$ . Usarlos para calcular la velocidad:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{3,5 \text{ s}^{-1}}{2,2 \text{ m}^{-1}} = \boxed{1,59 \text{ m/s}}$$

- (b) La longitud de onda  $\lambda$  está relacionada con el número de onda  $k$ ; y la frecuencia y el periodo están relacionados con  $\omega$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2,2 \text{ m}^{-1}} = \boxed{2,86 \text{ m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3,5 \text{ s}^{-1}} = \boxed{1,80 \text{ s}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,80 \text{ s}} = \boxed{0,557 \text{ Hz}}$$

- (c) El desplazamiento máximo del segmento de cuerda es la amplitud  $A$ :

$$A = \boxed{0,03 \text{ m}}$$

- (d) 1. Calcular  $\partial y / \partial t$  para determinar la velocidad de un punto de la cuerda:

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = (0,03 \text{ m}) \frac{\partial [\sin(2,2 \text{ m}^{-1}x - 3,5 \text{ s}^{-1}t)]}{\partial t} \\ &= (0,03 \text{ m})(-3,5 \text{ s}^{-1}) \cos(2,2 \text{ m}^{-1}x - 3,5 \text{ s}^{-1}t) \\ &= -(0,105 \text{ m/s}) \cos(2,2 \text{ m}^{-1}x - 3,5 \text{ s}^{-1}t) \end{aligned}$$

2. La velocidad transversal máxima tiene lugar cuando la función coseno tiene el valor de  $\pm 1$ :

$$v_{y, \text{máx}} = \boxed{0,105 \text{ m/s}}$$

**Observación** Hemos incluido las unidades para destacar cómo se utilizan. Con frecuencia prescindimos de ellas por simplicidad.

**Transferencia de energía a una cuerda mediante ondas** Consideremos una cuerda sujeta a un diapasón. Cuando éste vibra, transfiere energía al segmento de cuerda unido a él. Por ejemplo, cuando el diapasón se desplaza de su posición de equilibrio, estira el segmento aumentando su energía potencial y transfiere una velocidad transversal al segmento, incrementando su energía cinética. Cuando una onda se mueve a lo largo de la cuerda, la energía se transmite por ésta a los restantes segmentos.

La potencia es la tasa de transferencia de energía. La potencia se calcula determinando la tasa con que realiza trabajo la fuerza que un segmento de cuerda ejerce sobre un segmento vecino. La figura 15.8 muestra una onda armónica moviéndose hacia la derecha a través de un segmento de cuerda. La tensión  $F_T$  que actúa sobre el extremo izquierdo del segmento es tangente a la cuerda. Para calcular la potencia transferida por esta fuerza usamos la fórmula  $P = \mathbf{F}_T \cdot \mathbf{v}_t$  (ecuación 6.16), donde  $F_T$  es la tensión y  $v_t$  la velocidad transversal, es la velocidad del extremo del segmento. Para obtener una expresión para la potencia primero expresamos los vectores en función de sus componentes, es decir,  $\mathbf{F}_T = F_{Tx}\mathbf{i} + F_{Ty}\mathbf{j}$  y  $\mathbf{v}_t = v_y\mathbf{j}$ , con lo cual  $P = F_{Ty}v_y$ . A partir de la ecuación 15.16 obtenemos  $v_y$  y a partir de la figura vemos que  $F_{Ty} = -F_T \sin \theta \approx -F_T \tan \theta$ , en donde se ha usado la aproximación según la cual, para ángulos pequeños  $\sin \theta \approx \tan \theta$ . Como  $\tan \theta$  es la pendiente de la cuerda, tenemos  $\tan \theta = \partial y / \partial x$ , y por lo tanto

$$P = F_{Ty}v_y \approx -F_T \tan \theta v_y = -F_T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \\ = -F_T [kA \cos(kx - \omega t)] [-A\omega \cos(kx - \omega t)]$$

Usando las ecuaciones 15.3 y 15.14, sustituimos  $F_T$  y  $k$ , obteniendo

$$P = \mu v \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) \quad (15.17)$$

en donde  $v$  es la velocidad de la onda. La potencia media es

$$P_m = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \quad (15.18)$$

ya que el valor medio de  $\cos^2(kx - \omega t)$ , si se calcula el promedio sobre un periodo entero del movimiento manteniendo  $x$  constante, es  $\frac{1}{2}$ .

La energía recorre la cuerda a la velocidad de la onda  $v$ , por lo que la energía media  $(\Delta E)_m$  que fluye por un punto  $P_1$  durante el tiempo  $\Delta t$  (figuras 15.9a y 15.9b) es

$$(\Delta E)_m = P_m \Delta t = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \Delta t$$

Esta energía se distribuye a lo largo de una distancia  $\Delta x = v \Delta t$ , de modo que la energía media en  $\Delta x$  es

$$(\Delta E)_m = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x \quad (15.19)$$

Obsérvese que tanto la potencia media como la energía media transmitidas son proporcionales al cuadrado de la amplitud de la onda.

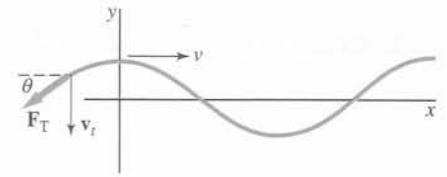


Figura 15.8

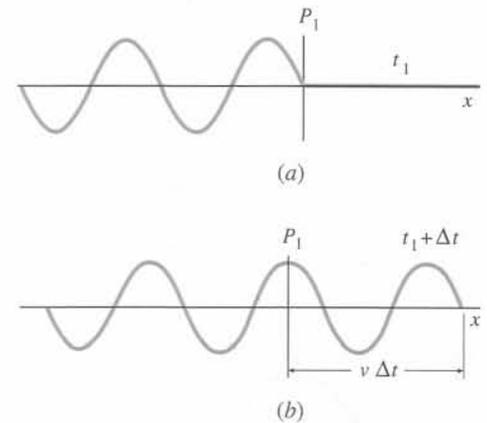


Figura 15.9

### EJEMPLO 15.5 | Energía total media de una onda en una cuerda

Una onda armónica de longitud de onda 25 cm y amplitud 1,2 cm se mueve a lo largo de un segmento de 15 m de una cuerda de 60 m de longitud y 320 g de masa que está sometida a una tensión de 12 N. (a) Determinar la velocidad y la frecuencia angular de la onda. (b) ¿Cuál es la energía total media de la onda?

**Planteamiento del problema** La velocidad de las ondas es  $v = \sqrt{F_T / \mu}$ , en donde  $F_T$  es conocida y  $\mu = m/L$ . Determinamos  $\omega$  a partir de  $\omega = 2\pi f$ , en donde  $f = v/\lambda$ . La energía se obtiene de la ecuación 15.19.

- (a) 1. La velocidad está relacionada con la tensión y la densidad de masa lineal:  $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$

2. Calcular la densidad de masa lineal:

$$\mu = \frac{m}{L}$$

por lo tanto

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{F_T L}{m}} = \sqrt{\frac{(12 \text{ N})(60 \text{ m})}{(0,32 \text{ kg})}} = \boxed{47,4 \text{ m/s}}$$

3. La frecuencia angular se determina a partir de la frecuencia y ésta de la velocidad y la longitud de onda:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 2\pi \frac{47,4 \text{ m/s}}{0,25 \text{ m}} = \boxed{1190 \text{ rad/s}}$$

(b) La energía total media de las ondas en la cuerda viene dada por la ecuación 15.19 con  $\mu \Delta x = \Delta m = 80 \text{ g}$

$$\begin{aligned} (\Delta E)_m &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x = \frac{1}{2} \frac{m}{L} \omega^2 A^2 \Delta x \\ &= \frac{10,32 \text{ kg}}{2 \cdot 60 \text{ m}} (1190 \text{ s}^{-1})^2 (0,012 \text{ m})^2 (15 \text{ m}) \\ &= \boxed{8,19 \text{ J}} \end{aligned}$$

**Ejercicio** Calcular la energía total media transmitida por unidad de tiempo a lo largo de la cuerda.

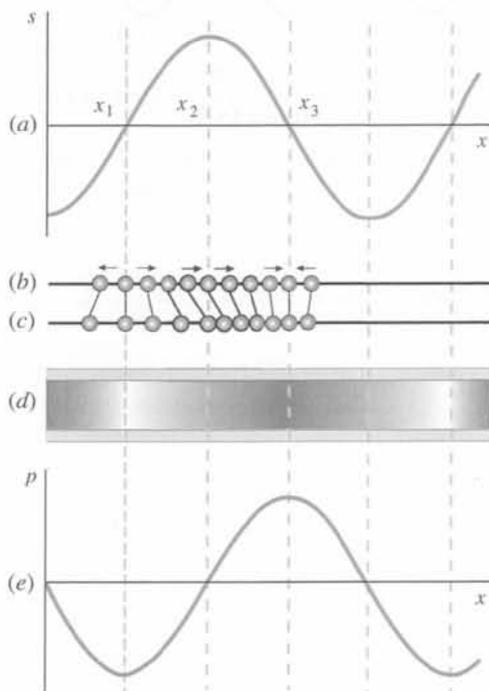
(Respuesta 25,9 W.)

## Ondas sonoras armónicas

Las ondas sonoras armónicas pueden generarse mediante un diapasón o un altavoz que vibre con movimiento armónico simple. La fuente vibrante hace que las moléculas de aire próximas oscilen con movimiento armónico simple alrededor de sus posiciones de equilibrio. Estas moléculas chocan con otras moléculas próximas haciéndolas oscilar y, por lo tanto, propagan la onda sonora. La ecuación 15.13 describe una onda sonora armónica si la función de onda  $y(x,t)$  se reemplaza por  $s(x,t)$ , el desplazamiento de las moléculas respecto a su posición de equilibrio.

$$s(x,t) = s_0 \sin(kx - \omega t) \quad (15.20)$$

Estos desplazamientos se verifican a lo largo de la dirección del movimiento de la onda y dan lugar a variaciones de densidad y presión del aire. La figura 15.10 muestra el desplazamiento de las moléculas de aire y los cambios de densidad originados por una onda sonora en un momento determinado. Como la presión del gas es proporcional a su densidad, el cambio de presión es máximo cuando la variación de densidad es máxima. Los gráficos de la figura nos muestran que la onda de presión (o de densidad) está desfasada  $90^\circ$  respecto al



**Figura 15.10** (a) Desplazamiento respecto al equilibrio de las moléculas de aire en una onda sonora armónica en función de la posición en un cierto instante. Los puntos  $x_1$  y  $x_3$  son puntos de desplazamiento nulo. (b) Algunas moléculas representativas igualmente espaciadas en sus posiciones de equilibrio  $1/4$  de ciclo antes. Las flechas indican el sentido de sus velocidades en ese momento. (c) Moléculas próximas a los puntos  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  después de la llegada de la onda. Justo a la izquierda de  $x_1$ , el desplazamiento es negativo, indicando que las moléculas del gas se desplazan hacia la izquierda, alejándose del punto  $x_1$  en este momento. Justo a la derecha de  $x_1$ , el desplazamiento es positivo, indicando que las moléculas se desplazan hacia la derecha, o sea, de nuevo alejándose del punto  $x_1$ . Así, en el punto  $x_1$  la densidad es un mínimo, ya que las moléculas de gas en ambos lados se desplazan alejándose de dicho punto. En el punto  $x_3$ , la densidad es un máximo porque las moléculas a ambos lados de este punto se desplazan hacia  $x_3$ . En el punto  $x_2$  la densidad no se modifica, pues las moléculas a ambos lados de este punto tienen desplazamientos iguales en la misma dirección. (d) Densidad del aire en ese momento. La densidad es máxima en  $x_3$  y mínima en  $x_1$ , puntos ambos en los que el desplazamiento es nulo. Es cero en el punto  $x_2$ , que es un máximo en el desplazamiento. (e) Cambio de presión, que es proporcional al cambio de densidad, en función de la posición. Los cambios de presión y desplazamiento (cambios de posición) están desfasados en  $90^\circ$ .

desplazamiento de la onda. (En los argumentos de las funciones seno o coseno siempre expresamos los ángulos de fase en radianes. Sin embargo, en las descripciones verbales decimos normalmente que “dos ondas están desfasadas 90°”, en lugar de “dos ondas están desfasadas  $\pi/2$  radianes”.) Cuando el desplazamiento es cero, los cambios de presión y densidad son máximos o mínimos. Cuando el desplazamiento es máximo o mínimo, los cambios de presión y densidad son nulos. Una onda de desplazamiento dada por la ecuación 15.20 implica una onda de presión dada por

$$p = p_0 \sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (15.21)$$

donde  $p$  representa el cambio de presión respecto a la presión de equilibrio y  $p_0$  es el valor máximo de este cambio. Se puede demostrar que la máxima amplitud de presión  $p_0$  está relacionada con la máxima amplitud de desplazamiento  $s_0$  por

$$p_0 = \rho \omega v s_0 \quad (15.22)$$

en donde  $v$  es la velocidad de propagación y  $\rho$  la densidad de equilibrio del gas. Así, cuando una onda sonora se propaga con el tiempo, el desplazamiento de las moléculas del aire, la presión y la densidad varían todas ellas sinusoidalmente con la frecuencia de la fuente vibrante.

**Ejercicio** El hombre puede percibir sonidos de frecuencias comprendidas entre 20 Hz y 20 000 Hz (aunque mucha gente tiene limitada la audición por encima de 15 000 Hz). Si la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuáles son las longitudes de onda que corresponden a estas frecuencias extremas? (*Respuesta*  $\lambda = 17$  m a 20 Hz, 1,7 cm a 20 000 Hz.)

**Energía de las ondas sonoras** La energía media de una onda sonora armónica en un elemento de volumen  $\Delta V$  viene dado por la ecuación 15.19, en donde  $A$  se reemplaza por  $s_0$  y el elemento de masa  $\Delta m = \mu \Delta x$  se sustituye por  $\rho \Delta V$ , siendo  $\rho$  la densidad media del medio en que se propaga el sonido.

$$(\Delta E)_m = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2 \Delta V \quad (15.23)$$

La energía por unidad de volumen es la **densidad de energía** media  $\eta_m$ :

$$\eta_m = \frac{\Delta E_m}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2 \quad (15.24)$$

## Ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas incluyen la luz, ondas de radio, rayos X, rayos gamma, microondas, etc. Los diversos tipos de ondas electromagnéticas difieren sólo en su longitud de onda y frecuencia. A diferencia de las ondas mecánicas, las ondas electromagnéticas no requieren un medio para su propagación. Viajan a través del vacío con la velocidad  $c$  que es una constante universal,  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s. La función de onda de las ondas electromagnéticas es un campo eléctrico asociado con la onda,  $\mathbf{E}(x,t)$ . (Los campos eléctricos se tratan en el capítulo 21. Se deducirá una ecuación de onda, similar a la de las ondas en una cuerda o las ondas sonoras, a partir de las leyes de la electricidad y el magnetismo en el capítulo 30.) El campo eléctrico es perpendicular a la dirección de propagación, de modo que las ondas electromagnéticas son ondas transversales.

Las ondas electromagnéticas se producen cuando las cargas eléctricas libres aceleran o cuando los electrones ligados a los átomos y moléculas realizan transiciones a estados energéticos inferiores. Las ondas de radio, con frecuencias de aproximadamente 1 MHz para AM y 100 MHz para FM, se producen por corrientes eléctricas macroscópicas que oscilan en antenas de radio. La frecuencia de las ondas emitidas es igual a la frecuencia de oscilación de las cargas. Las ondas luminosas, con frecuencias del orden de  $10^{14}$  Hz, se producen generalmente por transiciones de electrones ligados. El espectro de ondas electromagnéticas se trata en el capítulo 31.

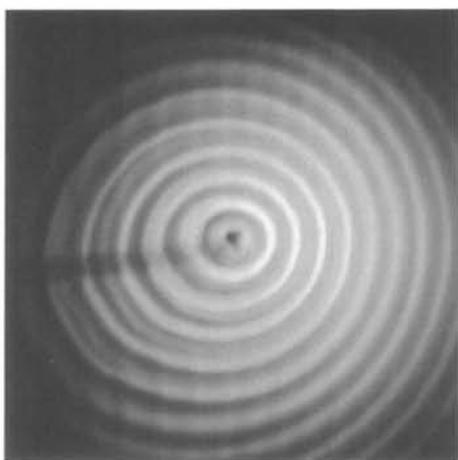
## 15.3 Ondas en tres dimensiones



En la figura 15.11 se ven ondas circulares bidimensionales sobre la superficie del agua de una cubeta de ondas. Estas ondas se generan mediante una fuente puntual que se mueve hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple. En este caso, la longitud de onda es la distancia entre crestas de ondas sucesivas, que son circunferencias concéntricas, denominadas **frentes de onda**. En el caso de un foco o fuente puntual de sonido, las ondas se emiten en tres dimensiones. Se mueven alejándose del foco en todas direcciones y los frentes de onda son ahora superficies esféricas concéntricas.

El movimiento de un conjunto cualquiera de frentes de onda puede indicarse mediante rayos, que son líneas dirigidas perpendicularmente a los frentes de onda (figura 15.12). Para ondas circulares o esféricas, los **rayos** son líneas radiales.

En un medio homogéneo, como el aire a densidad constante, una onda se mueve en línea recta en la dirección de los rayos, como si se tratara de un haz de partículas. A una distancia grande de un foco puntual, una parte pequeña del frente de onda puede sustituirse aproximadamente por un plano, y los rayos son aproximadamente líneas paralelas; este tipo de onda se llama **onda plana** (figura 15.13). El análogo bidimensional de una onda plana es una onda lineal, que puede considerarse como una pequeña parte de un frente de ondas circular a una gran distancia de su foco. Estas ondas pueden producirse también en una cubeta de ondas mediante una fuente lineal, como la indicada en la figura 15.14.



**Figura 15.11** Frentes de onda circulares que divergen a partir de un foco puntual en una cubeta de ondas.

### Intensidad de una onda

Si un foco puntual emite ondas uniformemente en todas direcciones, la energía a una distancia  $r$  del mismo estará distribuida uniformemente sobre una corteza esférica de radio  $r$  y superficie  $4\pi r^2$ . Si la potencia emitida por el foco es  $P$ , la potencia por unidad de área a una distancia  $r$  del foco será  $P/(4\pi r^2)$ . La potencia media por unidad de área que está incidiendo perpendicularmente a la dirección de propagación se denomina **intensidad**:

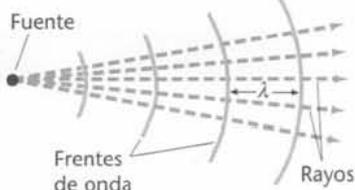
$$I = \frac{P_m}{A} \quad (15.25)$$

DEFINICIÓN DE INTENSIDAD

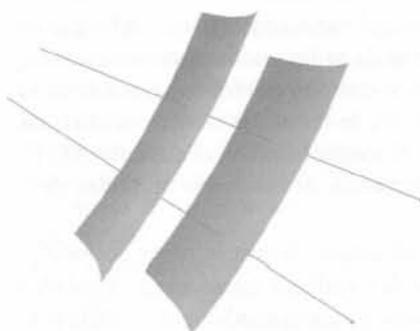
Las unidades de la intensidad son vatios por metro cuadrado. A una distancia  $r$  de un foco puntual, la intensidad vale

$$I = \frac{P_m}{4\pi r^2} \quad (15.26)$$

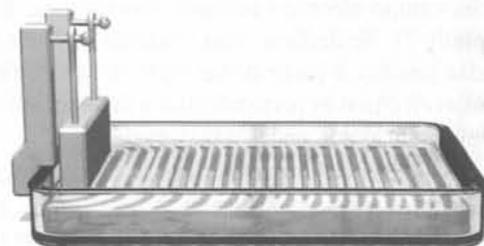
INTENSIDAD DEBIDA A UN FOCO PUNTUAL



**Figura 15.12** El movimiento de los frentes de onda puede representarse mediante rayos que se dibujan perpendiculares a los frentes de onda. En el caso de una fuente puntual, los rayos son rectas radiales que divergen de la misma.



**Figura 15.13** Ondas planas. A distancias grandes de un foco puntual, los frentes de onda son aproximadamente planos paralelos y los rayos son aproximadamente rectas paralelas perpendiculares a los frentes de onda.



**Figura 15.14** Analogía bidimensional de una onda plana que puede generarse en una cubeta de ondas mediante un listón plano que oscila arriba y abajo dentro del agua para producir frentes de onda que son líneas rectas.

La intensidad de una onda tridimensional varía inversamente con el cuadrado de la distancia al foco puntual.

Existe una relación sencilla entre la intensidad de una onda y la energía por unidad de volumen del medio por el que se propaga la onda. Consideremos la onda esférica que acaba de alcanzar el radio  $r_1$  de la figura 15.15. El volumen interior al radio  $r_1$  contiene energía debido a que las partículas en esta región están oscilando con movimiento armónico simple. La región exterior a  $r_1$  no contiene energía porque las ondas todavía no han alcanzado dicha región. Después de un intervalo corto de tiempo  $\Delta t$ , la onda, en su movimiento, sobrepasa  $r_1$  en una distancia corta  $\Delta r = v \Delta t$ . La energía total en el medio se ve incrementada en la energía contenida en la corteza esférica de superficie  $A$ , espesor  $v \Delta t$  y volumen  $\Delta V = A \Delta r = Av \Delta t$ . La energía media de la corteza esférica es

$$(\Delta E)_m = \eta_m \Delta V = \eta_m Av \Delta t$$

El incremento de energía por unidad de tiempo es la potencia que entra en la corteza. Así pues, la potencia media incidente es

$$P_m = \frac{(\Delta E)_m}{\Delta t} = \eta_m Av$$

y la intensidad de la onda es

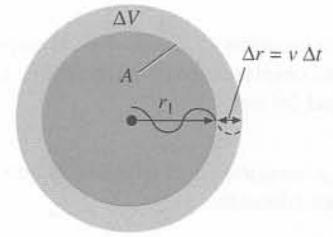
$$I = \frac{P_m}{A} = \eta_m v \quad (15.27)$$

Por lo tanto, la intensidad es igual al producto de la velocidad de la onda  $v$  por la densidad de energía media  $\eta_m$ . Sustituyendo  $\eta_m = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2$  de la ecuación 15.24 (densidad de energía media de una onda sonora) en la expresión anterior resulta

$$I = \eta_m v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2 v = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho v} \quad (15.28)$$

en donde se ha tenido en cuenta que  $s_0 = p_0/(\rho \omega v)$  según la ecuación 15.22. Este resultado —que la intensidad de una onda sonora es proporcional al cuadrado de la amplitud— es una propiedad general de las ondas armónicas.

El oído humano puede acomodarse a un largo intervalo de intensidad de ondas sonoras, desde  $10^{-12}$  W/m<sup>2</sup> aproximadamente (que normalmente se toma como el umbral de audición) hasta 1 W/m<sup>2</sup> aproximadamente (que produce una sensación dolorosa en la mayoría de las personas). Las variaciones de presión que corresponden a estas intensidades extremas varían aproximadamente desde  $3 \times 10^{-5}$  Pa para el umbral de audición hasta 30 Pa para el umbral de dolor. (Recuérdese que el pascal es un newton por metro cuadrado.) Estas pequeñas variaciones de presión se superponen (sumando o restando) a la presión atmosférica normal cuyo valor es aproximadamente 101 kPa.



Volumen de la corteza =  $\Delta V = A \Delta r = Av \Delta t$

Figura 15.15



Ondas sonoras procedentes de un receptor telefónico propagándose en el aire. Las ondas se han hecho visibles barriendo el espacio delante del receptor con una lámpara que tiene un brillo controlado mediante un micrófono.

### EJEMPLO 15.6 | Un altavoz

El diafragma de un altavoz de 30 cm de diámetro vibra con una frecuencia de 1 kHz y una amplitud de 0,020 mm. Suponiendo que las moléculas de aire próximas al diafragma tienen esta misma amplitud de vibración, determinar (a) la amplitud de la presión justo enfrente del diafragma, (b) la intensidad sonora en esta posición y (c) la potencia acústica irradiada. (d) Si el sonido se irradia uniformemente en la semiesfera anterior, determinar la intensidad a 5 m del altavoz.

**Planteamiento del problema** (a) y (b) La amplitud de la presión se calcula directamente de  $p_0 = \rho \omega v s_0$  (ecuación 15.22) y la intensidad sonora de  $I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2 v$  (ecuación 15.28). (c) La potencia irradiada es igual al producto de la intensidad por el área del diafragma. (d) El área de una semiesfera de radio  $r$  es  $2\pi r^2$ . Podemos utilizar la ecuación 15.26 haciendo  $A = 2\pi r^2$ .

(a) La ecuación 15.22 relaciona la amplitud de la presión con la amplitud del desplazamiento, la frecuencia, la velocidad de la onda y la densidad del aire:

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho \omega v s_0 \\ &= (1,29 \text{ kg/m}^3) 2\pi(10^3 \text{ Hz})(340 \text{ m/s})(2 \times 10^{-5} \text{ m}) \\ &= \boxed{55,1 \text{ N/m}^2} \end{aligned}$$

(b) La ecuación 15.28 relaciona la intensidad con estas mismas magnitudes conocidas:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2 v \\ &= \frac{1}{2} (1,29 \text{ kg/m}^3) [2\pi(10^3 \text{ Hz})]^2 (2 \times 10^{-5} \text{ m})^2 (340 \text{ m/s}) \\ &= \boxed{3,46 \text{ W/m}^2} \end{aligned}$$

(c) La potencia es el producto de la intensidad por el área del diafragma:

$$P = IA = (3,46 \text{ W/m}^2) \pi (0,15 \text{ m})^2 = \boxed{0,245 \text{ W}}$$

(d) Calcular la intensidad a la distancia  $r = 5 \text{ m}$  suponiendo una radiación uniforme en la semiesfera anterior:

$$I = \frac{P_m}{2\pi r^2} = \frac{0,245 \text{ W}}{2\pi(5 \text{ m})^2} = \boxed{1,56 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2}$$

**Observación** La hipótesis de radiación uniforme en la semiesfera anterior no es muy buena porque la longitud de onda en este caso [ $\lambda = v/f = (340 \text{ m/s})/(1000 \text{ s}^{-1}) = 34 \text{ cm}$ ] no es grande comparada con el diámetro del altavoz. Existe también cierta radiación en la dirección posterior, como puede observarse situándose detrás de un altavoz.

Los altavoces de un concierto de "rock" pueden emitir con una potencia 100 veces mayor que el altavoz del ejemplo.

**\*Nivel de intensidad y sensación sonora** Nuestra percepción de la sonoridad no es proporcional a la intensidad sino que varía logarítmicamente. Usaremos, por lo tanto, una escala logarítmica para describir el **nivel de intensidad** de una onda sonora  $\beta$ , el cual se mide en **decibelios** (dB) y se define por

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (15.29)$$

DEFINICIÓN — NIVEL DE INTENSIDAD EN DB

en donde  $I$  es la intensidad física del sonido e  $I_0$  es un nivel de referencia, que tomaremos como umbral de audición:

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \quad (15.30)$$

En esta escala, el umbral de audición es  $\beta = 10 \log (I_0/I_0) = 0 \text{ dB}$  y el umbral del dolor ( $I = 1 \text{ W/m}^2$ ) es  $\beta = 10 \log (1/10^{-12}) = 10 \log 10^{12} = 120 \text{ dB}$ . Así pues, el intervalo de intensidades físicas de  $10^{-12} \text{ W/m}^2$  a  $1 \text{ W/m}^2$  corresponden a un intervalo de niveles de sensación sonora de 0 dB a 120 dB. La tabla 15.1 relaciona los niveles de intensidad de algunos sonidos comunes.

## EJEMPLO 15.7 | Pruebas de sonido

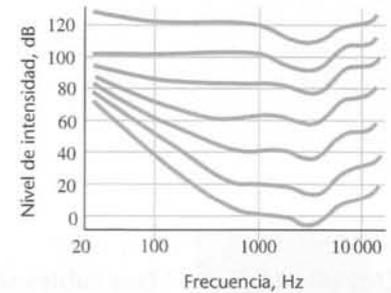
Un material absorbente del sonido atenúa el nivel de sonoridad en 30 dB. ¿En qué factor disminuye la intensidad?

En la tabla 15.1 vemos que por cada 10 dB de disminución del nivel de sensación sonora, la intensidad física disminuye en un factor de 10. Así, si la sonoridad disminuye en 30 dB, la intensidad física

disminuye en un factor  $10^3 = \boxed{1000}$ .

TABLA 15.1 Intensidad física y nivel de intensidad sonora de algunos sonidos comunes ( $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ )

Fuente	$I/I_0$	dB	Descripción
	$10^0$	0	Umbral de audición
Respiración normal	$10^1$	10	Escasamente audible
Rumor de hojas	$10^2$	20	
Conversación en voz muy baja (a 5 m)	$10^3$	30	Apenas ruidoso
Biblioteca	$10^4$	40	Poco ruidoso
Oficina tranquila	$10^5$	50	
Conversación normal (a 1 m)	$10^6$	60	
Tráfico denso	$10^7$	70	La exposición constante daña al oído
Oficina ruidosa con máquinas; fábrica de tipo medio	$10^8$	80	
Camión pesado (a 15 m); Cataratas del Niágara	$10^9$	90	
Tren de metro antiguo	$10^{10}$	100	Umbral de dolor
Ruido de construcción (a 3 m)	$10^{11}$	110	
Concierto de rock con amplificadores (a 2 m); despegue de un reactor (a 60 m)	$10^{12}$	120	
Remachadora neumática; ametralladora	$10^{13}$	130	
Despegue de un reactor (cercano)	$10^{15}$	150	
Motor de cohete grande (cercano)	$10^{18}$	180	



**Figura 15.16** Nivel de intensidad en función de la frecuencia para sonidos de igual sensación sonora. La curva inferior está por debajo del umbral de audición del 99 por ciento aproximadamente de la población. La segunda curva inferior constituye aproximadamente el umbral de audición para un cincuenta por ciento de la población.

En realidad, la sonoridad depende de la frecuencia así como del nivel de intensidad en decibelios. La figura 15.16 es un gráfico de este nivel de intensidad en dB en función de la frecuencia para sonidos de igual sonoridad en el oído humano. (En esta figura, la frecuencia se representa en escala logarítmica para abarcar el amplio intervalo de frecuencias de 20 Hz a 10 kHz.) Obsérvese en esta figura que el oído es más sensible a  $\sim 4$  kHz para todos los niveles de intensidad sonora en dB.

### EJEMPLO 15.8 | Ladridos de perros

El ladrido de un perro supone alrededor de 1 mW de potencia. (a) Si esta potencia se distribuye uniformemente en todas direcciones, ¿cuál es el nivel de intensidad sonora a una distancia de 5 m? (b) ¿Cuál sería el nivel de intensidad de dos perros ladrando al mismo tiempo si cada uno de ellos desarrolla una potencia de 1 mW?

**Planteamiento del problema** El nivel de intensidad sonora se deduce de la intensidad física y ésta de la expresión  $I = P/(4\pi r^2)$ . Para dos perros, las intensidades físicas se suman.

(a) 1. El nivel de intensidad sonora está relacionado con la intensidad física:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

2. Calcular la intensidad a  $r = 5$  m:

$$I = \frac{P_1}{4\pi r^2} = \frac{10^{-3} \text{ W}}{4\pi (5 \text{ m})^2} = 3,18 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

3. Utilizar el resultado anterior para determinar el nivel de intensidad sonora a 5 m:

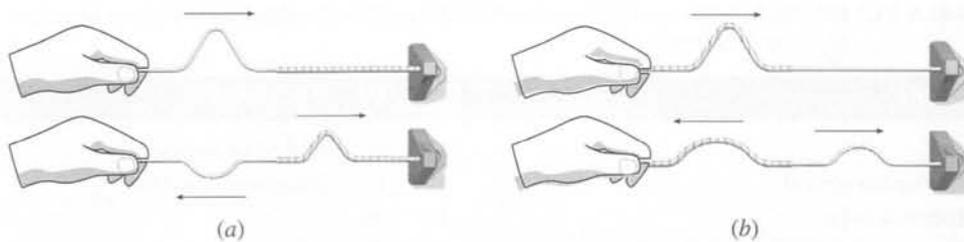
$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{3,18 \times 10^{-6}}{10^{-12}} = \boxed{65,0 \text{ dB}}$$

(b) Si  $I_1$  es la intensidad de un perro, la intensidad de dos perros es  $I_2 = 2I_1$ :

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 10 \log 2 + 10 \log \frac{I_1}{I_0} \\ &= 10 \log 2 + \beta_1 = 3,01 + 65,0 = \boxed{68,0 \text{ dB}} \end{aligned}$$

**Observación** Vemos en este ejemplo que siempre que la intensidad física se duplica, la intensidad sonora se incrementa en 3 dB.

**Figura 15.17** (a) Un pulso de onda se propaga sobre una cuerda ligera unida a otra más pesada en la cual es menor la velocidad de la onda. El pulso reflejado se invierte, mientras que el transmitido no. (b) Un pulso de onda se propaga sobre una cuerda pesada unida a otra más ligera, en la cual es mayor la velocidad. En este caso el pulso reflejado no se invierte.



## 15.4 Ondas y barreras

### Reflexión y refracción

Cuando una onda incide sobre una superficie límite o de separación de dos regiones en las que la velocidad de la onda es diferente, parte de la onda se refleja y parte se transmite. La figura 15.17a muestra un pulso sobre una cuerda ligera unida a una cuerda más pesada. En este caso, el pulso reflejado en la superficie límite se invierte. Si la segunda cuerda es más ligera que la primera (figura 15.17b), el pulso reflejado no se invierte. En cualquier de estos dos casos, el pulso transmitido no se invierte. Si la cuerda está atada a un punto fijo, el pulso se refleja y se invierte. Si está atada a una cuerda de masa despreciable, el pulso se refleja, pero no se invierte.

### EJEMPLO 15.9 | Dos cables soldados

Dos cables de densidades de masa lineal distintas se sueldan uno a continuación del otro y después se estiran bajo una tensión  $F_T$  (la tensión es la misma en los dos alambres). La velocidad de una onda en el primer alambre es doble que en el segundo. Cuando una onda armónica que se transmite por el primer alambre llega a la unión de los alambres, la onda reflejada tiene la mitad de amplitud que la onda transmitida. (a) Si la amplitud de la onda incidente es  $A_m$ , ¿cuáles son las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida? (b) ¿Qué fracción de la potencia incidente se refleja en la unión y qué fracción se transmite?

**Planteamiento del problema** Por el principio de conservación de la energía, la potencia incidente en la unión es igual a la potencia reflejada más la potencia transmitida. Cada una de las potencias se expresan en la ecuación 15.18 como una función de la densidad  $\mu$ , amplitud  $A$ , frecuencia  $\omega$  y velocidad de la onda  $v$  (figura 15.18). Las frecuencias angulares de todas las ondas son iguales. Como las ondas reflejada e incidente están en el mismo medio, ambas poseen la misma velocidad  $v_1$ . Sabemos que la velocidad en el segundo alambre es  $v_2 = \frac{1}{2}v_1$ .

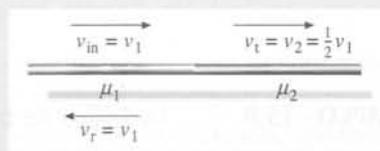


Figura 15.18

(a) 1. Por conservación de la energía, la potencia incidente es igual a la potencia transmitida más la potencia reflejada:

$$P_{in} = P_t + P_r$$

2. Escribir la ecuación 15.18:

$$P_m = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

3. Sustituir en el resultado del paso 1 y simplificar: La frecuencia angular es la misma para las tres ondas.

$$\frac{1}{2}\mu_1\omega^2 A_m^2 v_1 = \frac{1}{2}\mu_2\omega^2 A_t^2 v_2 + \frac{1}{2}\mu_1\omega^2 A_r^2 v_1$$

$$\mu_1 A_m^2 v_1 = \mu_2 A_t^2 v_2 + \mu_1 A_r^2 v_1$$

4. Usando la relación  $v = \sqrt{F_T/\mu}$  (ecuación 15.3), sustituir  $\mu_1$  y  $\mu_2$  por su valor y simplificar.  $F_T$  es el mismo a cada lado de la unión entre los cables:

$$\frac{F_T}{v_1^2} A_m^2 v_1 = \frac{F_T}{v_2^2} A_t^2 v_2 + \frac{F_T}{v_1^2} A_r^2 v_1$$

$$\frac{A_m^2}{v_1} = \frac{A_t^2}{v_2} + \frac{A_r^2}{v_1}$$

5. Sustituir las relaciones  $v_2 = \frac{1}{2}v_1$  y  $A_r = \frac{1}{2}A_t$ , despejar las amplitudes:

$$\frac{A_m^2}{v_1} = \frac{A_t^2}{\frac{1}{2}v_1} + \frac{(\frac{1}{2}A_t)^2}{v_1} = \frac{9A_t^2}{4v_1}$$

por lo tanto,

$$A_t = \boxed{\frac{2}{3}A_m} \quad \text{y} \quad A_r = \boxed{\frac{1}{3}A_m}$$

(b) 1. En los pasos 1-4 del apartado (a) se ha demostrado que la potencia es proporcional a  $A^2/v$ . Expresar cada una de las tres potencias, usando  $b$  como constante de proporcionalidad:

$$P_{in} = b \frac{A_{in}^2}{v_1} \quad P_t = b \frac{A_t^2}{v_2} \quad P_r = b \frac{A_r^2}{v_1}$$

2. Usando el resultado del paso 5 del apartado (a), eliminar  $v_2$ ,  $A_t$  y  $A_r$  de las expresiones de  $P_t$  y  $P_r$ :

$$P_t = b \frac{\left(\frac{2}{3}A_{in}\right)^2}{\frac{1}{2}v_1} = \frac{8}{9}b \frac{A_{in}^2}{v_1} = \frac{8}{9}P_{in}$$

$$P_r = b \frac{\left(\frac{2}{3}A_{in}\right)^2}{v_1} = \frac{1}{9}b \frac{A_{in}^2}{v_1} = \frac{1}{9}P_{in}$$

**Observación** La onda reflejada está invertida respecto a la onda incidente, de modo que está desfasada  $180^\circ$  respecto a ella. Mientras que el desplazamiento del trozo de alambre justo a la izquierda de la unión por causa de la onda incidente es  $y_1$ , por causa de la onda reflejada es  $-(y_1/3)$ . Estos desplazamientos se suman (de acuerdo con el principio de superposición que se estudiará en el siguiente capítulo) con un resultado  $2y_1/3$  que es igual al desplazamiento que tiene lugar a la derecha de la unión por causa de la onda transmitida. Puede demostrarse que, conocida la relación entre las velocidades de la onda, las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada pueden determinarse teniendo en cuenta que el desplazamiento y la pendiente del alambre deben ser continuos en la unión.

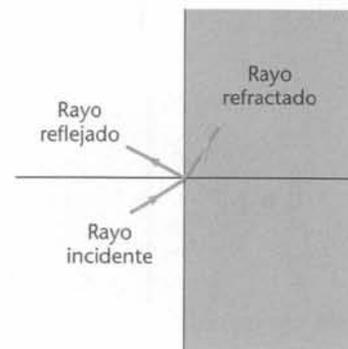
En tres dimensiones, una frontera entre dos regiones de diferente velocidad de onda es una superficie. La figura 15.19 muestra un rayo incidente sobre una de estas superficies límites. Este ejemplo podría ser una onda sonora en el aire que choca sobre una superficie sólida o líquida. El rayo reflejado forma un ángulo con la normal a la superficie igual al que forma el rayo incidente.

El rayo transmitido se desvía acercándose o alejándose de la normal; lo cual depende de si la velocidad de la onda en el segundo medio es menor o mayor que la que posee en el medio inicial. Esta desviación del rayo transmitido se denomina **refracción**. Cuando la velocidad de la onda en el segundo medio es mayor que en el medio incidente (como ocurre cuando una onda luminosa que se propaga en vidrio o agua se refracta en el aire), el rayo que describe la dirección de propagación se desvía alejándose de la normal, como indica la figura 15.20. Al incrementarse el ángulo de incidencia, crece también el ángulo de refracción, hasta que se alcanza un ángulo crítico de incidencia, para el cual el ángulo de refracción es de  $90^\circ$ . Para ángulos de incidencia superiores al valor crítico, desaparece el rayo refractado, fenómeno que se llama **reflexión interna total**.

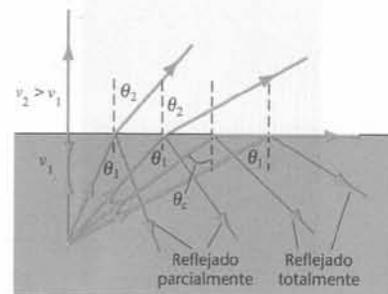
La cantidad de energía reflejada por una superficie depende de la clase de superficie. Las paredes, suelos y techos planos son buenos reflectores de las ondas sonoras; mientras que otros materiales porosos y menos rígidos, como la ropa de los paños y tapizados absorben gran cantidad de la energía incidente. La reflexión de las ondas sonoras juega un papel importante en el proyecto de una sala de conferencias, de una biblioteca o un auditorio de música. En una sala de conferencias con muchas superficies planas reflectoras es difícil de entender lo que se dice debido a la multitud de ecos que llegan en instantes diferentes a los oídos del oyente. Para reducir estas reflexiones es corriente colocar sobre las paredes y el techo materiales absorbentes. En una sala de conciertos, se sitúa una placa reflectora detrás de la orquesta y también se cuelgan paneles reflectores del techo para reflejar y dirigir el sonido hacia los oyentes.

## Difracción

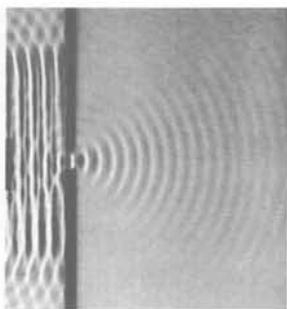
Cuando una onda encuentra un obstáculo tiende a rodearlo. Este comportamiento del frente de onda se denomina **difracción**. Casi toda la difracción de una onda se produce en aquella parte del frente de onda que está a una distancia de pocas longitudes de onda de los límites del obstáculo. En aquellas zonas de la onda que están más alejadas, el efecto del obstáculo, es decir la difracción, es imperceptible y la onda se propaga en línea recta en la dirección de los rayos incidentes. Cuando una onda se encuentra con una barrera con una pequeña abertura (un agujero) de unas pocas longitudes de onda de diámetro la parte de la onda que la



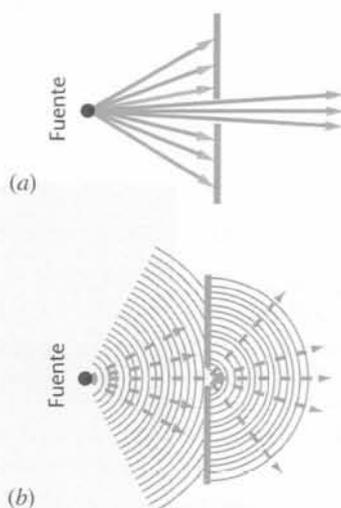
**Figura 15.19** Onda incidiendo sobre una superficie límite entre dos medios en los cuales la velocidad de onda difiere. Parte de la onda se refleja y parte se transmite. Se denomina refracción al cambio de dirección del rayo transmitido.



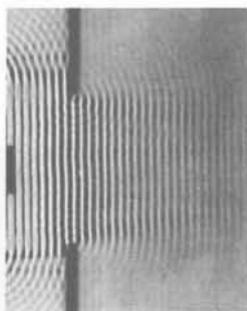
**Figura 15.20** La luz procedente de una fuente en el agua se refracta alejándose de la normal cuando entra en el aire. Para ángulos de incidencia por encima de un valor crítico, no hay rayo transmitido, condición conocida como reflexión interna total.



**Figura 15.21** Ondas planas en una cubeta de ondas que se encuentran con una barrera que posee una pequeña abertura de unas pocas longitudes de onda de ancho. Más allá de la barrera son las ondas circulares concéntricas respecto a la abertura, como si hubiese un foco puntual en la misma.



**Figura 15.22** Comparación entre las transmisiones que sufren en una abertura estrecha situada en una barrera (a) un haz de partículas y (b) una onda. En (a) las partículas transmitidas se encuentran confinadas en un ángulo estrecho. En (b) la abertura actúa como un foco puntual de ondas que se propagan en un ángulo mucho más amplio que el correspondiente a las partículas en (a).



**Figura 15.23** Ondas planas en una cubeta de ondas que se encuentran con una barrera que posee una abertura mucho mayor que  $\lambda$ . La onda continúa propagándose hacia adelante; sólo se observa una pequeña desviación en las regiones a ambos lados de la abertura.



atraviesa pasa toda ella a una distancia de pocas longitudes de onda de los bordes. Así, los frentes de onda planos se curvan y se propagan adoptando la forma circular o esférica (figura 15.21). En contraste, si un haz de partículas incide sobre un obstáculo con una abertura, las *partículas* que lo atraviesan no cambian su dirección (figura 15.22). La difracción es una de las características fundamentales que distingue las ondas de las partículas. Demostraremos cómo surge la difracción al estudiar la interferencia y difracción de la luz en el capítulo 35.

Aunque las ondas que encuentran un obstáculo o abertura siempre se curvan, o difractan, la magnitud de este fenómeno depende de la relación que existe entre su longitud de onda y el tamaño del obstáculo o abertura. Si la longitud de onda es grande en relación con la abertura, como en la figura 15.21, los efectos de difracción son grandes y las ondas se dispersan al atravesar la abertura como si procediesen de una fuente puntual localizada en la misma abertura. En cambio, si la longitud de onda es pequeña en relación con la abertura, el efecto de difracción es pequeño como indica la figura 15.23. Cerca de los bordes de la abertura los frentes de onda se distorsionan y las ondas se curvan ligeramente. Sin embargo, los frentes de ondas no se ven afectados en su mayor parte y las ondas se propagan en líneas rectas, como si se tratara de un haz de partículas. Esta aproximación de propagación de las ondas en líneas rectas en la dirección de los rayos y sin difracción se conoce con el nombre de **aproximación de rayos**. Los frentes de onda se distorsionan *cerca* (entendemos por *cerca*, una distancia de pocas longitudes de onda del borde del obstáculo) de los bordes del obstáculo que bloquea parte del frente de onda.

Como las longitudes de onda del sonido audible están dentro de un margen que va desde algunos centímetros hasta varios metros y son con frecuencia grandes en comparación con las aberturas o los obstáculos (puertas o ventanas, por ejemplo), la difracción de las ondas sonoras resulta ser un fenómeno común. Por otra parte, las longitudes de onda de la luz visible están dentro del intervalo de  $4 \times 10^{-7}$  a  $7 \times 10^{-7}$  m aproximadamente. Como estas ondas son pequeñas en comparación con el tamaño de los objetos y aberturas ordinarios, la difracción de la luz no es observable fácilmente, de forma que la luz parece viajar en línea recta. Sin embargo, la difracción de la luz es un fenómeno importante que estudiaremos con detalle en el capítulo 35.

Los efectos de la difracción imponen una limitación a la capacidad para situar o localizar objetos pequeños o para identificar sus detalles más finos mediante la reflexión de ondas sobre ellos. No se produce ninguna reflexión apreciable de las ondas a no ser que el objeto sea de un tamaño por lo menos del orden de la longitud de onda. Así pues, no puede observarse ningún detalle a una escala menor que la longitud de onda utilizada. Si se utilizan ondas de longitud de onda  $\lambda$  para localizar un objeto, su posición podrá conocerse sólo con un margen de  $\pm\lambda$ .

Las ondas sonoras de frecuencias mayores a 20 000 Hz se llaman **ondas ultrasónicas**. Debido a sus longitudes de onda muy cortas pueden emitirse y reflejarse en objetos pequeños. Los murciélagos emiten y detectan frecuencias de hasta 120 000 Hz, correspondientes a una longitud de onda de 2,8 mm, que utilizan para localizar pequeñas presas como mariposas nocturnas. Los sistemas de localización por eco, llamados sonars (iniciales de “*sound navigation and ranging*”; cuyo significado es, navegación y localización por el sonido), se utilizan para detectar perfiles de objetos sumergidos con ondas sonoras. Las frecuencias utilizadas por los detectores de peces disponibles en el mercado están en un rango de 25 a 200 kHz. Las marsopas hacen chasquidos de localización de este mismo rango de frecuencias. Se hacen pasar ultrasonidos a través del cuerpo humano y la información sobre la frecuencia e intensidad de las ondas transmitidas y reflejadas se procesa para construir una imagen tridimensional llamado sonograma o ecografía.



## 15.5 Efecto Doppler

Cuando un foco productor de ondas y un receptor se están moviendo uno respecto al otro, la frecuencia emitida por el receptor no es la misma que la emitida por el foco. Cuando se están acercando entre sí, la frecuencia observada es mayor que la del foco, mientras que resulta menor si se están alejando. Esto se denomina **efecto Doppler**. Un ejemplo familiar es el cambio de tono de la bocina de un coche cuando éste se acerca o se aleja de nosotros.

En el análisis que sigue, todos los movimientos se consideran relativos al medio. Consideremos que el foco se mueve con una velocidad  $u_f$ , tal como se muestra en las figuras 15.24a y b, y un receptor estacionario. El foco tiene una frecuencia  $f_f$  (y un periodo  $T_f = 1/f_f$ ). La frecuencia del receptor  $f_r$ , el número de ondas que pasan por el receptor por unidad de tiempo, es

$$f_r = \frac{v}{\lambda} \quad (\text{receptor estacionario}) \quad (15.31)$$

en donde  $v$  es la velocidad de la onda y  $\lambda$  su longitud de onda (la distancia entre dos crestas sucesivas). Para conocer  $f_r$  hay que determinar, en primer lugar,  $\lambda$ . Tal como se muestra en la figura 15.24c, el foco, situado en el punto 5, emite una onda y en un instante  $T_f$  inmediatamente posterior emite una segunda onda. Mientras la primera onda recorre una distancia  $vT_f$  el foco se mueve desde el punto 5 al punto 6 una distancia  $u_f T_f$ . Por lo tanto, en el momento en que se emite la segunda onda, la longitud de onda  $\lambda$  es la distancia entre el foco y el frente de onda, es decir,  $\lambda = \lambda_{\text{detrás}} = (v + u_f)T_f$  por detrás de la fuente y  $\lambda = \lambda_{\text{delante}} = (v - u_f)T_f$  por



**Figura 15.24** (a) Ondas en una cubeta de ondas producidas por un foco puntual que se mueve hacia la derecha. Los frentes de onda se encuentran más próximos delante del foco y más separados detrás de él. (b) Frentes de onda sucesivos emitidos por un foco puntual que se mueve hacia la derecha con velocidad  $u_f$ . Cada uno de los frentes numerados fue emitido cuando el foco estaba en la posición a la que corresponde el mismo número. (c) Durante el tiempo  $T_f$  la fuente se mueve una distancia  $u_f T_f$  y el 5º frente se mueve una distancia  $v T_f$ . Delante de la fuente la longitud de onda es  $\lambda_{\text{delante}} = (v - u_f) T_f$  y detrás de ésta,  $\lambda_{\text{detrás}} = (v + u_f) T_f$ .

delante de ésta, suponiendo que  $u_f < v$ . (Si  $u_f \geq v$ , no hay ningún frente de onda por delante del foco). Estas dos relaciones pueden expresarse como

$$\lambda = (v \pm u_f)T_f = \frac{v \pm u_f}{f_f} \quad (15.32)$$

en donde se ha sustituido  $1/f_f$  por  $T_f$ . Delante del foco, la longitud de onda es más pequeña, por lo que se aplica en 15.32 el signo menos. Detrás del foco se aplica el signo más. Sustituyendo  $\lambda$  en la ecuación 15.31 obtenemos

$$f_r = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v \pm u_f} f_f \quad (\text{receptor parado}) \quad (15.33)$$

Cuando el receptor se mueve relativo al medio, la frecuencia que detecta difiere de la frecuencia emitida porque el movimiento del receptor afecta al número de ondas que detecta en un determinado intervalo de tiempo. Sea un receptor que se mueve con velocidad  $u_r$  y sea  $T_r$  el tiempo que transcurre entre que llegan dos crestas consecutivas. Durante el tiempo entre la llegada de las dos crestas, el receptor se mueve  $u_r T_r$  mientras que las crestas se habrán desplazado  $v T_r$ . Si el receptor se mueve en la dirección opuesta a la de la onda (figura 15.25), durante el tiempo  $T_r$  la longitud de onda  $\lambda$  es la distancia que se mueve cada cresta más la que se mueve el receptor, es decir  $\lambda = v T_r + u_r T_r$ , o bien,  $T_r = \lambda / (v + u_r)$ . [Si el receptor se mueve en la misma dirección que la onda,  $v T_r - \lambda = u_r T_r$ , o bien  $T_r = \lambda / (v - u_r)$ ]. Dado que  $f_r = 1/T_r$ , tenemos

$$f_r = \frac{1}{T_r} = \frac{v \pm u_r}{\lambda} \quad (15.34)$$

en donde si el receptor se mueve en el mismo sentido que la onda, la frecuencia recibida es menor y aplicamos el signo negativo. Si, en cambio, el receptor se mueve en sentido opuesto al de la onda, la frecuencia es mayor y elegimos el signo positivo. Sustituyendo  $\lambda$  de la ecuación 15.32 se obtiene

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f \quad (15.35a)$$

La elección correcta del signo se determina recordando que la frecuencia tiende a aumentar cuando el foco se mueve hacia el receptor o cuando éste se mueve hacia el foco. Por ejemplo, si el receptor se mueve hacia el foco en el numerador se selecciona el signo positivo, lo cual tiende a incrementar la frecuencia recibida, y si el foco se aleja del receptor se aplica al denominador el signo positivo, lo cual induce que la frecuencia recibida sea menor. La ecuación 15.35a adquiere un aspecto más simétrico si se expresa de la forma

$$\frac{f_r}{v \pm u_r} = \frac{f_f}{v \pm u_f} \quad (15.35b)$$

Se puede demostrar (véase el problema 89) que si tanto  $u_f$  como  $u_r$  son mucho menores que la velocidad de propagación de la onda  $v$ , el desplazamiento de la frecuencia  $\Delta f = f_r - f_f$  viene dado aproximadamente por

$$\frac{\Delta f}{f_f} \approx \pm \frac{u}{v} \quad (u \ll v) \quad (15.36)$$

en donde  $u = u_f \pm u_r$  es la velocidad del foco relativa al receptor.

Las ecuaciones 15.31 – 15.36 sólo son válidas en el sistema de referencia del medio. En un sistema de referencia donde el medio se mueve (por ejemplo, un sistema de referencia fijo con la superficie terrestre donde el medio sea el aire y éste se mueva, es decir, sople el viento) la velocidad de propagación de la onda  $v$  se sustituye por  $v' = v \pm u_v$  donde  $u_v$  es la velocidad del viento relativo a la superficie terrestre.

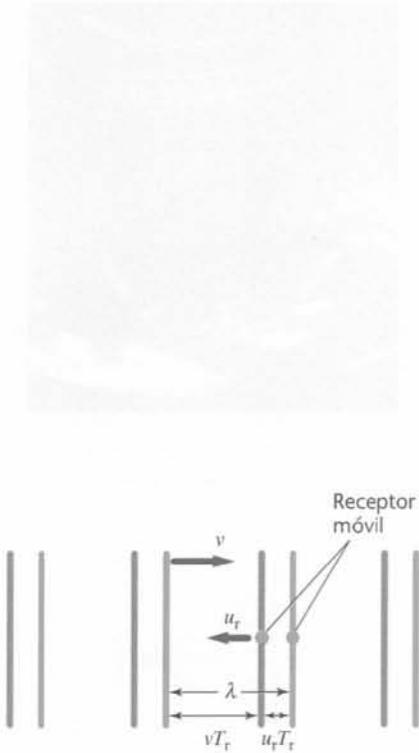


Figura 15.25

**EJEMPLO 15.10** | Tocando la bocina

La frecuencia de la bocina de un coche parado es 400 Hz. Determinar (a) la longitud de onda del sonido y (b) la frecuencia observada si el coche se mueve con una velocidad  $u_f = 34$  m/s (aproximadamente 122 km/h) a través del aire en reposo hacia un receptor estacionario. Tomar como velocidad del sonido en el aire el valor 340 m/s. (c) Determinar la frecuencia observada si el coche está parado y un receptor se mueve con velocidad  $u_r = 34$  m/s hacia el coche.

**Planteamiento del problema** (a) Las ondas de delante de la fuente se comprimen y por lo tanto, se utiliza el signo menos en la ecuación 15.32. (b) Se calcula la frecuencia a partir la ecuación 15.35a. (c) Para un receptor móvil, se usan las mismas ecuaciones que en los apartados (a) y (b).

(a) Usando la ecuación 15.32, calcular la longitud de onda delante del coche. Delante del foco, la longitud de onda es más pequeña, por lo tanto elegimos el signo en consonancia:

$$\lambda = \frac{v - u_f}{f_f} = \frac{340 \text{ m/s} - 34 \text{ m/s}}{400 \text{ Hz}} = \boxed{0,765 \text{ m}}$$

(b) Usando la ecuación 15.35a, despejar la frecuencia recibida:

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v + 0}{v - u_f} f_f$$

$$= \left( \frac{340}{340 - 34} \right) (400 \text{ Hz}) = \boxed{444 \text{ Hz}}$$

(c) 1. Usando la ecuación 15.32, calcular la longitud de onda en la proximidad del receptor:

$$\lambda = \frac{v \pm u_f}{f_f} = \frac{340 \text{ m/s} \pm 0}{400 \text{ Hz}} = \boxed{0,850 \text{ m}}$$

2. La frecuencia recibida viene dada por la ecuación 15.35a. El foco se aproxima al receptor, por lo tanto la frecuencia es mayor. Elegir el signo en concordancia con este hecho:

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{u + u_r}{v \pm 0} f_f = \left( 1 + \frac{u_r}{v} \right) f_f$$

$$= \left( 1 + \frac{34}{340} \right) (400 \text{ Hz}) = \boxed{440 \text{ Hz}}$$

**Observación** La frecuencia  $f_r$  también puede obtenerse a partir de la ecuación 15.34.

**Ejercicio** Cuando un tren que se mueve a 90 km/h se aproxima a un observador estacionario, hace sonar su bocina con una frecuencia de 630 Hz. No hay viento. (a) ¿Cuál es la longitud de onda del sonido delante del tren? (b) ¿Cuál es la frecuencia percibida por el observador? (Usar 340 m/s para la velocidad del sonido.) (Respuestas (a)  $\lambda = 0,5$  m, (b)  $f_r = 680$  Hz.)

**EJEMPLO 15.11** | Otra bocina de coche*¡INTÉNTELO USTED MISMO!*

La relación entre la frecuencia de una nota y la frecuencia del semitono por encima de ella en la escala diatónica es aproximadamente 15:16. ¿Qué velocidad tiene un coche si su bocina disminuye en un semitono al pasar frente a un observador parado? No hay viento. (Usar 340 m/s para la velocidad del sonido.)

**Planteamiento del problema** Sea  $u_f$  la velocidad del coche y  $f_f$  la frecuencia original. La frecuencia percibida  $f_r$  cuando el coche se acerca al observador es mayor que  $f_f$  y la frecuencia observada cuando el coche se aleja,  $f'_r$  es menor que  $f_f$ . Considerando que  $f'_r/f_f = 15/16$  despejar  $u$ .

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

**Pasos**

1. Expresar la frecuencia observada cuando el coche se aproxima en función de  $f_f$ .

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v}{v - u_f} f_f$$

2. Expresar la frecuencia observada cuando el coche se aleja en función de  $f_f$ .

$$f'_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v}{v + u_f} f_f$$

3. Establecer que el cociente  $f'_r/f_f$  es igual a 15/16.

$$\frac{f'_r}{f_r} = \frac{v - u_f}{v + u_f} = \frac{15}{16}$$

4. Despejar  $u_f$ .

$$u_f = 0,0323v = \boxed{39,5 \text{ km/h}}$$

**Observación** La longitud de onda del sonido detrás del coche es mayor que la longitud de onda delante del coche. Asimismo 1m/s = 3,6 km/h.

Otro ejemplo familiar de efecto Doppler es el radar usado por la policía para medir la velocidad de un vehículo. Las ondas electromagnéticas emitidas por el transmisor del radar chocan con el vehículo en movimiento. Cuando las ondas se reflejan en el coche, éste actúa a la vez como receptor y como foco emisor en movimiento. Como las ondas electromagnéticas se mueven a la velocidad de la luz,  $v = 3 \times 10^8$  m/s, la condición  $u \ll v$  se cumple y para calcular el desplazamiento Doppler se usa la ecuación 15.36.

### EJEMPLO 15.12 | El radar de la policía

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

La unidad de radar de un coche policía estacionario emite ondas electromagnéticas de frecuencia  $f_t$  que se propagan a la velocidad de la luz,  $c$ . Las ondas se reflejan en un coche que se mueve a la velocidad  $u$  alejándose del coche policía. Determinar  $u$  en función de  $f_t$  y  $\Delta f$ , donde  $\Delta f$  es la diferencia de frecuencias entre  $f_t$  y  $f_r'$ , la frecuencia recibida en el coche de policía.

**Planteamiento del problema** La onda del radar choca contra el coche con frecuencia  $f_t$ . Esta frecuencia es menor que  $f_r$  porque el coche se mueve alejándose del foco. El desplazamiento de la frecuencia viene dado por la ecuación 15.36. El coche actúa entonces como un foco móvil que emite ondas de frecuencia  $f_r$ . El coche policía detecta ondas de frecuencia  $f_r' < f_r$  porque el foco (el coche circulando) se aleja del coche de policía. La diferencia de frecuencia es  $f_r - f_r'$ .

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

#### Pasos

1. La unidad de radar ha de determinar la velocidad únicamente a partir de lo que emite y de lo que recibe.
2. El desplazamiento de la frecuencia  $\Delta f$  es igual a la suma del desplazamiento de la frecuencia cuando la onda va hacia el vehículo  $\Delta f_1 = f_r - f_t$  y el desplazamiento de la frecuencia cuando la onda vuelve  $\Delta f_2 = f_r' - f_r$ .
3. Usando la ecuación 15.36, sustituir la diferencia de frecuencias del paso 2.
4. De nuevo utilizando 15.36, despejar  $f_r$  en función de  $f_t$ .
5. Sustituir el resultado del paso 4 en el del paso 3 y simplificar.
6.  $u/c$  es despreciable frente a 2. Simplificar el resultado del paso 5 utilizando este hecho y despejar  $u$ , obteniendo una expresión en función de  $f_t$  y de  $\Delta f$ .

#### Respuestas

La unidad de radar debe determinar  $u$  en función de  $f_t$  y  $f_r'$ . Tal como está escrita la ecuación 15.36, despejamos  $u$  en función de  $f_t$  y de  $\Delta f = f_r' - f_t$ .

$$\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2$$

$$\Delta f = -\frac{u}{c}f_t - \frac{u}{c}f_r = -\frac{u}{c}(f_t + f_r)$$

$$\frac{\Delta f_1}{f_t} = -\frac{u}{c} \quad \text{por lo tanto} \quad f_r = \left(1 - \frac{u}{c}\right)f_t$$

$$\Delta f = -\frac{u}{c}\left(2 - \frac{u}{c}\right)f_t$$

$$\Delta f = -2f_t\frac{u}{c} \quad \text{por lo tanto} \quad u = -\frac{\Delta f}{2f_t}c = \boxed{\frac{|\Delta f|}{2f_t}c}$$

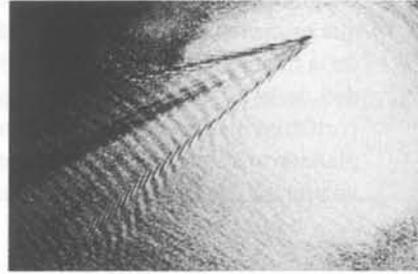
**Observación** La diferencia de frecuencias entre las dos ondas de frecuencia tan parecida es fácil de medir porque las dos ondas interfieren produciendo otra onda cuya amplitud oscila con la frecuencia  $|\Delta f|$ , que se denomina frecuencia de pulsación. La interferencia y la pulsación se analizan en el capítulo 16.

**Ejercicio** Calcular  $\Delta f$  si  $f_t = 1,5 \times 10^9$  Hz,  $c = 3 \times 10^8$  m/s y  $u = 50$  m/s. (Respuesta  $\Delta f = 500$  Hz.)

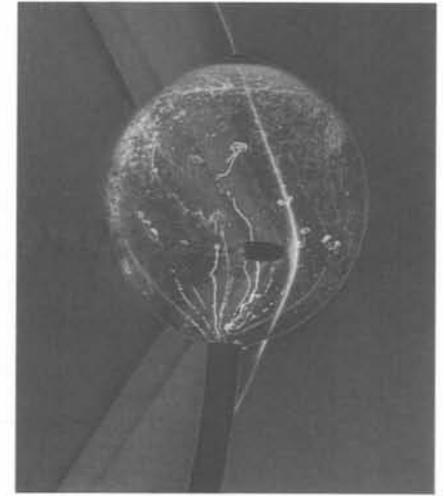
**El desplazamiento Doppler y la relatividad** En el ejemplo 15.10 (y en las ecuaciones 15.33, 15.34 y 15.35) hemos visto que la magnitud del desplazamiento Doppler de la frecuencia depende de si es la fuente o el receptor lo que se mueve respecto al medio. En el caso del sonido, estas situaciones son físicamente diferentes. Por ejemplo, si una persona se mueve respecto al aire en reposo, parece notar que el aire se desplaza en sentido contrario. En su propio sistema de referencia existe un viento. En el caso de las ondas sonoras en el aire, podemos decir que la fuente o el receptor se mueven especificando si existe un viento en el sistema de referencia de uno o del otro. Sin embargo, la luz y otras ondas electromagnéticas se propagan a través del espacio vacío, en el cual no hay medio alguno. Es decir, no existe “un viento” que nos diga si es la fuente o el receptor el que se mueve. De acuerdo con



(a)



(b)



(c)

(a) Ondas de choque producidas por un avión supersónico. (b) Ondas de proa producidas por un bote. (c) Ondas de choque producidas por una bala que atraviesa un globo de helio.

la teoría de la relatividad de Einstein, el movimiento absoluto no puede detectarse y todos los observadores miden la misma velocidad  $c$  para la luz independientemente de su movimiento respecto al foco. Así, la ecuación 15.35 no es válida para el desplazamiento Doppler aplicado a la luz. Al calcular el efecto Doppler relativista debemos introducir dos modificaciones. En primer lugar, la velocidad de las ondas que se cruzan con un receptor es siempre  $c$ , independientemente del estado de movimiento del receptor. En segundo lugar, el intervalo de tiempo entre la emisión de dos ondas sucesivas, que es  $T_f = 1/f_f$  en el sistema de referencia de la fuente, es distinto en el sistema de referencia del receptor cuando éstos se encuentran en movimiento relativo debido a la dilatación relativista del tiempo y la contracción relativista de la longitud (ecuaciones R.9 y R.3). (En el capítulo 39 abordaremos el efecto Doppler relativista). El resultado es que la frecuencia percibida depende sólo de la velocidad relativa de aproximación o alejamiento  $u$  y está relacionada con la frecuencia emitida por

$$f_r = \sqrt{\frac{c \pm u}{c \mp u}} f_f \quad (15.37)$$

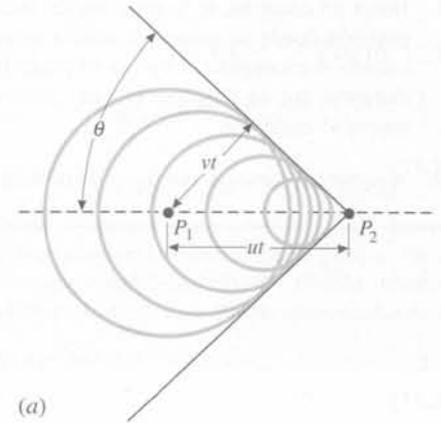
Los signos se eligen de modo que dan un desplazamiento hacia una frecuencia mayor cuando el foco y el receptor se aproximan y viceversa. (Los signos superiores se usan en el caso de que el foco y el receptor se aproximen, y los signos inferiores se usan si se alejan.) Análogamente, cuando  $u \ll c$ ,  $f/f_0 \approx 1 \pm u/c$ , tal como se da en la ecuación 15.36.

## Ondas de choque

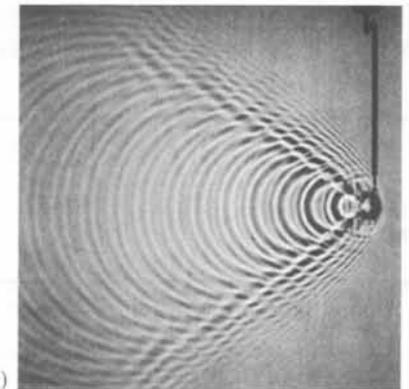
En nuestra deducción de las expresiones para el desplazamiento Doppler, hemos supuesto que la velocidad  $u$  del foco o del receptor es menor que la velocidad de la onda  $v$ . Si un foco se mueve con una velocidad mayor que la velocidad de propagación de la onda, frente al foco no habrá ondas. En realidad, las ondas se concentran detrás del foco y forman lo que se denomina una onda de choque. En el caso de las ondas sonoras, por ejemplo, cuando la onda de choque llega al receptor se percibe como un estampido.

La figura 15.26 muestra un foco situado originalmente en el punto  $P_1$ , que se mueve hacia la derecha con velocidad  $u$ . Después de un tiempo  $t$ , la onda emitida desde el punto  $P_1$  habrá recorrido una distancia  $vt$ . El foco habrá recorrido a su vez una distancia  $ut$  y estará en el punto  $P_2$ . La recta tangente desde esta nueva posición del foco al frente de onda emitido cuando estaba en  $P_1$  forma un ángulo  $\theta$  con el trayecto del foco, dado por

$$\text{sen } \theta = \frac{vt}{ut} = \frac{v}{u} \quad (15.38)$$



(a)



(b)

**Figura 15.26** (a) Fuente que con una velocidad  $u$  que es mayor que la velocidad de onda  $v$ . La envolvente de los frentes de onda forma un cono con el foco en su vértice. (b) Ondas en una cubeta experimental producidas por un foco que se mueve con una velocidad  $u > v$ .

Así, la onda de choque está confinada en un cono que se estrecha cuando  $u$  crece. El cociente entre la velocidad del foco  $u$  y la velocidad de la onda  $v$  se denomina número de Mach:

$$\text{Número de Mach} = \frac{u}{v} \quad (15.39)$$

La ecuación 15.38 se aplica también a la radiación electromagnética llamada radiación Cerenkov, emitida cuando una partícula cargada se mueve en un medio con una velocidad  $u$  que es mayor que la velocidad  $v$  de la luz en dicho medio. (De acuerdo con la teoría especial de la relatividad es imposible que una partícula se mueva con mayor rapidez que  $c$ , la velocidad de la luz en el vacío. Sin embargo, en un medio como el vidrio, los electrones y otras partículas pueden moverse con una velocidad mayor que la de la luz en dicho medio.) El resplandor azul que rodea los elementos combustibles utilizados en los reactores nucleares es un ejemplo de radiación Cerenkov.

### EJEMPLO 15.13 | El estampido sónico

Un avión supersónico se encuentra sobre un punto  $P$  volando hacia el este a una altura de 15 km. El estampido sónico se oye en el punto  $P$  cuando el avión está a 22 km al este de dicho punto. ¿Cuál es la velocidad del avión supersónico?

**Planteamiento del problema** La velocidad del avión está relacionada con el seno del ángulo de Mach (ecuación 15.38). Dibujar un esquema que ayude a determinar el seno del ángulo de Mach.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

- Hacer un esquema de la posición del avión (figura 15.27) tanto en la posición donde se generó el sonido como en la posición que ocupa cuando el estampido se oye en el punto  $P$ . Señalar, en el esquema, la distancia que se desplaza la onda sonora  $v\Delta t$  y la distancia que se mueve el avión  $u\Delta t$ .
- A partir del esquema anterior y de la ecuación 15.38, calcular  $u$ .

### ¡INTÉNTELO USTED MISMO!

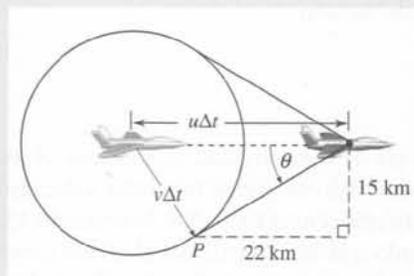


Figura 15.27

#### Respuestas

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{15 \text{ km}}{22 \text{ km}} \quad \text{es decir,} \quad \theta = 34,3^\circ$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{v\Delta t}{u\Delta t} = \frac{v}{u} \quad \text{y despejando } u,$$

$$u = \frac{v}{\operatorname{sen} \theta} = \boxed{604 \text{ m/s}}$$

## Resumen

- En el movimiento ondulatorio, la energía y el momento lineal se transportan de un punto a otro del espacio sin transportar materia.
- La relación  $v = f\lambda$  es válida para todas las ondas armónicas.

#### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### TEMA

#### 1. Ondas transversales y longitudinales

En las ondas transversales, como las ondas en una cuerda, la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación. En las ondas longitudinales, como las sonoras, la perturbación tiene la dirección de la propagación.

#### 2. Velocidad de las ondas

La velocidad de una onda  $v$  depende de la densidad y de las propiedades elásticas del medio. Es independiente del movimiento de la fuente de las ondas.

Ondas sobre una cuerda

$$v = \sqrt{F_T/\mu} \quad (15.3)$$

Ondas sonoras

$$v = \sqrt{B/\rho} \quad (15.4)$$

Ondas sonoras en un gas

$$v = \sqrt{\gamma RT/M} \quad (15.5)$$

donde  $T$  es la temperatura absoluta,

$$T = t_c + 273 \quad (15.6)$$

 $R$  es la constante universal de los gases,

$$R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (15.7)$$

$M$  es la masa molar del gas, que para el aire es  $29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ , y  $\gamma$  es una constante que depende del tipo de gas. Para un gas diatómico como el aire,  $\gamma = 1,4$ . Para un gas monoatómico como el helio,  $\gamma = 1,67$ .

Ondas electromagnéticas

La velocidad de las ondas electromagnéticas el vacío es una constante universal.

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

**\*3. Ecuación de ondas**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (15.9b)$$

**4. Ondas armónicas**

Función de onda

$$y(x, t) = A \text{ sen}(kx \pm \omega t) \quad (15.13)$$

en donde  $A$  es la amplitud,  $k$  el número de onda y  $\omega$  la frecuencia angular. Se usa el signo  $-$  cuando la onda se mueve en la dirección positiva de  $x$ , y el signo  $+$  cuando la onda se mueve en la dirección negativa de  $x$ .

Número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (15.12)$$

Frecuencia angular

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (15.15)$$

Velocidad

$$v = f\lambda = \frac{\omega}{k} \quad (15.10, 15.14)$$

Energía

La energía de una onda armónica es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Potencia de las ondas sobre una cuerda

$$P_m = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \quad (15.18)$$

**5. Ondas armónicas sonoras**

Las ondas sonoras pueden considerarse, o bien ondas de desplazamiento, o bien ondas de presión. En una onda sonora armónica, la amplitud de presión y el desplazamiento están desfasados  $90^\circ$ . El oído humano es sensible a ondas sonoras de frecuencia comprendidas en el intervalo de 20 Hz a 20 kHz aproximadamente.

Amplitudes

La amplitud de presión está relacionada con la amplitud de desplazamiento por

$$p_0 = \rho \omega v s_0 \quad (15.22)$$

en donde  $\rho$  es la densidad del medio.

Densidad de energía

$$\eta_m = \frac{(\Delta E)_m}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2 \quad (15.24)$$

**6. Intensidad**

La intensidad de una onda es la potencia media por unidad de área

$$I = \frac{P_m}{A} \quad (15.25)$$

Densidad de energía media  $\eta_m$  de una onda sonora

$$I = \eta_m v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2 v = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho v} \quad (15.28)$$

\*Nivel de intensidad (sonoridad),  $\beta$  en dB.

Los niveles de intensidad de los sonidos se miden en una escala logarítmica.

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (15.29)$$

en donde  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  es aproximadamente el umbral de audición.**7. Reflexión y refracción**

Cuando una onda incide sobre una superficie límite que separa dos regiones de diferente velocidad de onda, una parte de la onda se refleja y otra parte se transmite.

## 8. Difracción

Si un frente de ondas se ve parcialmente obstruido por un obstáculo, en la región posterior del obstáculo la parte no obstruida del frente se difracta (se curva).

Aproximación de rayo

Si un frente de ondas se ve parcialmente obstruido por un obstáculo, casi toda la difracción se da en aquella zona del frente de ondas que pasa a una distancia de pocas longitudes de onda del borde. En aquellas zonas del frente que pasan más lejos del borde, la difracción es despreciable y la onda se propaga en líneas rectas en la dirección de los rayos incidentes.

## 9. Efecto Doppler

Cuando un foco y un receptor del sonido están en movimiento relativo, la frecuencia recibida  $f_r$  es mayor que la frecuencia del foco  $f_t$  si su separación disminuye y menor si su separación aumenta.

Foco móvil

$$\lambda = \frac{v \pm u_t}{f_t} \quad (15.32)^1$$

Receptor móvil

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{\lambda} \quad (15.34)^1$$

Foco y/o receptor móvil

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_t} f_t \quad \text{o} \quad \frac{f_r}{f_t} = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_t} \quad (15.35)^1$$

Elegir los signos que conducen a un aumento del desplazamiento de la frecuencia si se aproxima el foco o el receptor, y viceversa.

Pequeñas velocidades de foco o receptor

$$\frac{\Delta f}{f_t} \approx \pm \frac{u}{v} \quad (u \ll v) \quad (15.36)^1$$

Desplazamiento Doppler relativista

$$f_r = \sqrt{\frac{c \pm u}{c \mp u}} f_t \quad (15.37)$$

Elegir los signos que conducen a un aumento del desplazamiento de la frecuencia si se aproxima el foco o el receptor, y viceversa.

## 10. Ondas de choque

Cuando la velocidad del foco es mayor que la velocidad de la onda, las ondas de detrás del foco están confinadas en un cono de ángulo  $\theta$  dado por

Ángulo de Mach

$$\text{sen } \theta = \frac{v}{u} \quad (15.38)$$

Número de Mach

$$\text{Número de Mach} = \frac{u}{v} \quad (15.39)$$

<sup>1</sup> Las ecuaciones comprendidas entre la 15.32 y la 15.36 sólo son válidas en el sistema de referencia del medio. Si el medio se mueve, la velocidad de propagación de la onda  $v$  tiene que reemplazarse por  $v' = v \pm u_m$ , donde  $u_m$  es la velocidad del medio.

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

## Problemas conceptuales

1 ● SSM Una cuerda cuelga verticalmente del techo. Cuando las ondas se mueven de abajo hacia arriba por la cuerda, ¿lo hacen más rápidamente, más lentamente o a la misma velocidad que las ondas que se mueven de arriba hacia abajo? Razonar la respuesta.

2 ● Un tren de ondas atraviesa un punto de observación. En este punto, el tiempo entre crestas sucesivas es 0,2 s. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? (a) La longitud de onda es 5 m. (b) La frecuencia es 5 Hz. (c) La velocidad de propagación es 5 m/s. (d) La longitud de onda es 0,2 m. (e) No hay suficiente información para justificar las afirmaciones anteriores.

3 ● Verdadero o falso: La energía de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

4 ● Una cuerda cuelga verticalmente. Se sacude el extremo libre de atrás hacia adelante, generando un tren de ondas sinusoidales. La longitud de onda en la parte superior, ¿es igual, menor o mayor que en el extremo inferior?

5 ● SSM El chasquido del látigo lo produce la velocidad de la punta que rompe la barrera del sonido. Explicar cómo la forma del látigo hace posible que la punta del mismo se mueva mucho más rápido que la mano que lo mueve.

6 ● Verdadero o falso: Un sonido de 60 dB tiene una intensidad doble a la de un sonido de 30 dB.

7 ● Si la fuente y el receptor están en reposo relativo uno respecto al otro pero el medio donde se propaga la onda se mueve respecto a ambos, ¿existirá desplazamiento Doppler en la frecuencia?

8 ● La frecuencia de la bocina de un coche es  $f_0$ . ¿Qué frecuencia se observa si tanto el coche como el observador están en reposo, pero un viento sopla hacia el observador? (a)  $f_0$ . (b) Mayor que  $f_0$ . (c) Menor que  $f_0$ . (d) Puede ser mayor o menor que  $f_0$ . (e) Puede ser  $f_0$  o mayor que  $f_0$  según los valores relativos de la velocidad del viento y la velocidad del sonido.

9 ● SSM Frecuentemente las estrellas se observan en pares que giran alrededor de su centro de masas común. Si una de las estrellas es un agujero negro, es invisible. Explicar cómo la existencia de este agujero negro puede deducirse de la luz observada de la otra estrella visible.

10 ● Cuando se pulsa una cuerda de guitarra, ¿es la longitud de onda de la onda que se produce en el aire la misma que la que se produce en la cuerda?

11 ● Verdadero o falso:

(a) Los pulsos de onda de una cuerda son ondas transversales.

(b) Las ondas sonoras en el aire son ondas transversales de compresión y rarefacción.

(c) La velocidad del sonido a 20° C es doble que a 5° C.

12 ● El sonido se propaga a 340 m/s en el aire y a 1500 m/s en el agua. Un sonido de frecuencia 256 Hz se produce bajo el agua. En el aire la frecuencia será (a) la misma, pero la longitud de onda será más corta, (b) más elevada, pero la longitud de onda será la misma, (c) más baja, pero la longitud de onda será más larga, (d) más baja, y la longitud de onda será más corta, (e) la misma, y la longitud de onda también será la misma.

13 ● SSM Durante una patrulla, el acorazado *Rodger Young* choca con una mina, empieza a arder y acaba explotando. El marinero Abel salta al agua por la borda y comienza a nadar intentando escapar del barco mientras que el marinero Baker consigue subir a una balsa salvavidas. Cuando pasado el episodio, Abel y Baker comparan sus experiencias, Abel dice "Yo nadaba bajo el agua y oí una gran explosión procedente del navío. Cuando salí a la superficie oí una segunda explosión. ¿Qué crees que pudo ser?". Baker responde, "Yo creo que fue tu imaginación, ya que yo oí únicamente una explosión". Explicar por qué Baker oyó sólo una explosión mientras que Abel oyó dos.

14 ● El pulso de onda en la cuerda, para un tiempo  $t = 0$ , indicado en la figura 15.28 se mueve hacia la derecha. En este instante particular, ¿qué seg-

mentos de la cuerda se están moviendo hacia arriba? ¿Cuáles se están moviendo hacia abajo? ¿Existe algún segmento de la cuerda que está en el pulso que esté instantáneamente en reposo? Responder a estas cuestiones haciendo un esquema del pulso en un instante ligeramente posterior y ligeramente anterior para ver cómo se mueven los segmentos de la cuerda.

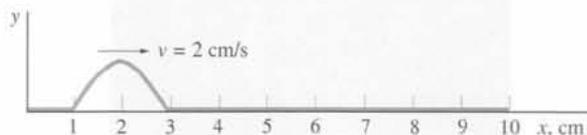


Figura 15.28 Problemas 14 y 15

15 ● Hacer un esquema de la velocidad de cada segmento de cuerda en función de la posición en el caso del pulso indicado en la figura 15.28.

16 ● En un experimento clásico de física, se coloca una campana en un recinto sellado y se la hace sonar mientras que, poco a poco, se va extrayendo el aire. Pasado un tiempo, la campana es inaudible. Se suele interpretar el experimento como la prueba de que las ondas sonoras no pueden propagarse en el vacío, pero de hecho, el sonido es inaudible mucho antes de que el recinto se quede sin aire. ¿Puede argumentar por qué no puede oírse el sonido de la campana?

17 ● SSM Un helicóptero que vuela tal como se muestra en la figura 15.29 registra la explosión de una carga de profundidad bajo la superficie del agua. ¿Cuál de los tres caminos A, B, o C será el camino por el cual el sonido llegará en menos tiempo?

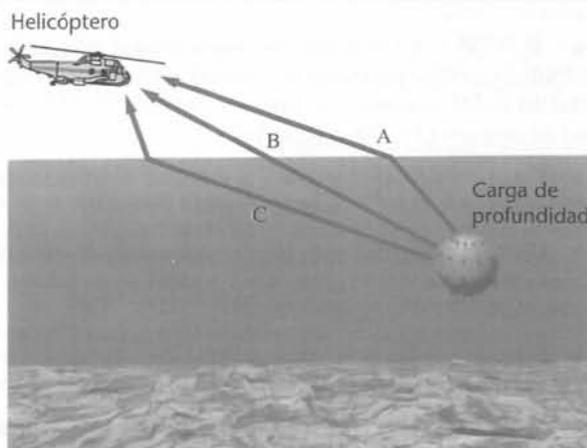


Figura 15.29 Problema 17

## Estimaciones y aproximaciones

18 ● La sonoridad de una conversación normal entre personas a 1 m de distancia es de 65 dB. Estimar la potencia con la que hablamos los seres humanos.

19 ● Una persona deja caer una piedra desde un puente elevado y oye cuando choca directamente debajo de él exactamente 4 s después. (a) Estimar la distancia al agua suponiendo que el tiempo que emplea el sonido en alcanzar la persona es despreciable. (b) Mejorar el valor estimado utilizando el resultado del apartado (a) correspondiente a esta distancia para estimar el tiempo que tarda el sonido en recorrerla. Entonces calcular la distancia de caída de la piedra en 4 s menos este tiempo. (c) Calcular la distancia exacta y compararla con los valores estimados previamente.

20 ● SSM Estimar la velocidad de la bala cuando pasa por el globo de helio de la figura 15.30 a partir del ángulo del cono de la onda de choque.

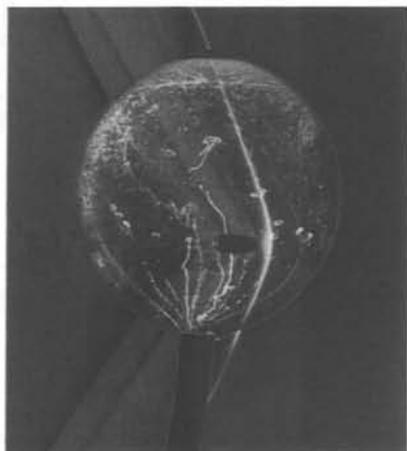


Figura 15.30 Problema 20

**21** ●● Los edificios de una residencia de estudiantes están distribuidos en forma semicircular. Para calcular la velocidad del sonido un avezado estudiante de física se sitúa en el centro del semicírculo, a 30 pasos dobles de los edificios y aplaude rítmicamente de modo que la frecuencia, de 2,5 aplausos por segundo, es tal que el eco de un aplauso llega a la vez que el estudiante produce el siguiente. Suponiendo que la distancia de un paso doble es la misma que su altura (180 cm), estimar la velocidad del sonido en el aire. ¿Cuánto difiere del valor habitual?

## Velocidad de ondas

**22** ● **ISOLVE** (a) El módulo de compresibilidad del agua es  $2,0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ . Utilizar este valor para hallar la velocidad del sonido en el agua. (b) La velocidad del sonido en mercurio es 1410 m/s. ¿Cuál es el módulo de compresibilidad del mercurio ( $\rho = 13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ )?

**23** ● **SSM** **ISOLVE** Calcular la velocidad de las ondas sonoras en el gas hidrógeno a  $T = 300 \text{ K}$ . (Tomar  $M = 2 \text{ g/mol}$  y  $\gamma = 1,4$ .)

**24** ● Un hilo de acero de 7 m de largo tiene una masa de 100 g. Si está sometido a una tensión de 900 N, ¿cuál es la velocidad de un pulso de onda transversal en este hilo?

**25** ● Sobre un alambre de 80 cm de longitud que está bajo una tensión de 550 N viajan ondas transversales a 150 m/s. ¿Cuál es la masa del alambre?

**26** ● **SSM** Un pulso de onda se propaga a lo largo de un alambre en el sentido positivo del eje de las  $x$  a 20 m/s. ¿Cuál será la velocidad de pulso (a) si duplicamos la longitud del alambre pero mantenemos constante la tensión y la masa por unidad de longitud?, (b) si duplicamos la tensión mientras se mantienen constantes la longitud y la masa por unidad de longitud?, (c) si duplicamos la masa por unidad de longitud mientras se mantienen constantes las demás variables?

**27** ● **ISOLVE** Una cuerda de piano de acero tiene 0,7 m de longitud y una masa de 5 g. Se tensa mediante una fuerza de 500 N. (a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en la cuerda? (b) Para reducir la velocidad de la onda en un factor 2 sin modificar la tensión, ¿qué masa de alambre de cobre habrá que enrollar alrededor del hilo de acero?

**28** ●● Una regla práctica común para calcular la distancia a la que cae un rayo es empezar a contar el tiempo cuando se observa el relámpago y detener el cronómetro cuando se oye el estampido del trueno. El número de segundos contados se divide entonces por 3 para obtener la distancia en kilómetros. (a) ¿Cuál es la velocidad del sonido en kilómetros por segundo? (b) ¿Cuánta exactitud tiene este procedimiento? (c) ¿Tiene importancia la corrección que tiene en cuenta el tiempo empleado por la luz en llegar a nosotros? (La velocidad de la luz es aproximadamente  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ .)

**29** ●● **SSM** (a) Calcular la derivada de la velocidad de una onda en una cuerda con respecto a la tensión  $dv/dF$  y demostrar que las diferenciales  $dv$  y  $dF$  obedecen a la expresión  $dv/v = \frac{1}{2} dF/F$ . (b) Una onda se mueve con una velocidad de 300 m/s en un alambre que está sometido a una tensión de 500 N. Utilizando  $dF$  para aproximar la variación de tensión, hallar en qué cantidad debe variarse la tensión para aumentar la velocidad a 312 m/s.

**30** ●● (a) Calcular la derivada de la velocidad del sonido respecto a la temperatura absoluta y demostrar que las diferenciales  $dv$  y  $dT$  obedecen a la expresión  $dv/v = \frac{1}{2} dT/T$ . (b) Utilizar esta expresión para calcular la variación porcentual de la velocidad del sonido cuando la temperatura se modifica de  $0$  a  $27^\circ \text{ C}$ . (c) Si la velocidad del sonido es 331 m/s a  $0^\circ \text{ C}$ , ¿cuál es (aproximadamente) a  $27^\circ \text{ C}$ ? ¿Cómo es el resultado obtenido mediante esta aproximación comparado con el que se obtiene mediante un cálculo exacto?

**31** ●●● En este problema se ha de obtener una fórmula práctica para determinar la velocidad del sonido en el aire a una temperatura  $t$  en grados Celsius. Se empieza escribiendo la temperatura como  $T = T_0 + \Delta T$ , en donde  $T_0 = 273 \text{ K}$  corresponde a los  $0^\circ \text{ C}$  y  $\Delta T = t$ , a la temperatura Celsius. La velocidad del sonido es una función de  $T$ ,  $v(T)$ . Con una aproximación de primer orden podemos escribir  $v(T) \approx v(T_0) + (dv/dT)_{T_0} \Delta T$ , donde  $(dv/dT)_{T_0}$  es la derivada calculada para  $T = T_0$ . Calcular esta derivada y demostrar que su resultado lleva a  $v = (331 \text{ m/s}) \left( 1 + \frac{t}{2T_0} \right) = (331 + 0,606t) \text{ m/s}$

**32** ●● Varias historias sobre fenómenos psíquicos se pueden explicar considerando fenómenos físicos. Por ejemplo, se cuenta la historia de un hombre que se despertó sin motivo aparente de un sueño profundo, salió de la cama y se acercó a la ventana justo a tiempo para escuchar el sonido de una explosión de una planta de municiones al otro lado de la ciudad. La historia se cita a menudo para dar credibilidad a la idea de clarividencia, pero se puede explicar considerando que el hombre se despertó con el temblor de la onda sonora que se propagó a través de la Tierra y luego anduvo hasta la ventana con el tiempo suficiente para oír la onda sonora que se propagó a través del aire. Si tardó 3 s en desplazarse de la cama a la ventana y la velocidad media del sonido a través de la roca sólida es de 3000 m/s, ¿a qué distancia estaba su casa de la planta de municiones?

**33** ●●● Una estudiante está en su habitación estudiando física y, a la vez, escuchando por radio la retransmisión de un partido de béisbol que se celebra en un estadio situado a 1,6 km de distancia. Por la radio la estudiante oye el chasquido producido por el pulso electromagnético de un rayo y dos segundos más tarde oye, por la radio también, el trueno, que ha sido registrado por un micrófono del campo. Cuatro segundos después de haber oído el pulso electromagnético por la radio, los cristales de su habitación vibran por el efecto del trueno. ¿A qué distancia del estadio de béisbol se ha producido el rayo?

**34** ●●● **SSM** La estación meteorológica Beta está a 1,2 km de la estación meteorológica Alfa. Los observadores de las dos estaciones ven un rayo que se produce hacia el norte. Los observadores de la estación Alfa oyen el trueno 3,4 s después del rayo, mientras que los de la estación Beta lo oyen 2,5 s después. Calcular las coordenadas del rayo relativas a la estación Alfa.

**35** ●●● Un muelle en espiral del tipo Slinky se deforma alargándose hasta una longitud  $L$ . Tiene una constante de fuerza  $k$  y una masa  $m$ . (a) Demostrar que la velocidad de las ondas de compresión longitudinales a lo largo del muelle viene dada por  $v = L\sqrt{k/m}$ . (b) Demostrar que este valor es también el de la velocidad de las ondas transversales a lo largo del muelle si la longitud natural del muelle es mucho menor que  $L$ .

## La ecuación de onda

**36** ● Demostrar explícitamente que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de onda: (a)  $y(x, t) = (x + vt)^3$ ; (b)  $y(x, t) = Ae^{ik(x-vt)}$ , en donde  $A$  y  $k$  son constantes e  $i = \sqrt{-1}$ ; (c)  $y(x, t) = \ln k(x + vt)$ .

**37** ● **SSM** Demostrar que la función  $y = A \sin kx \cos \omega t$  satisface la ecuación de onda.

## Ondas armónicas en una cuerda

**38** ● **ISOLVE** Uno de los extremos de una cuerda de 6 m de largo se mueve hacia arriba y abajo con un movimiento armónico simple de frecuencia 60 Hz. Las ondas alcanzan el otro extremo de la cuerda en 0,5 s. Hallar la longitud de onda de las ondas en la cuerda.

**39** ● La ecuación 15.13 expresa el desplazamiento de una onda armónica como una función de  $x$  y  $t$  y de los parámetros de onda  $k$  y  $\omega$ . Escribir expresiones equivalentes que en lugar de  $k$  y  $\omega$  contengan los siguientes pares de parámetros: (a)  $k$  y  $v$ , (b)  $\lambda$  y  $f$ , (c)  $\lambda$  y  $T$ , (d)  $\lambda$  y  $v$  y (e)  $f$  y  $v$ .

**40** ● **SSM** La ecuación 15.10 se aplica a todos los tipos de ondas periódicas, incluidas las electromagnéticas, como la luz y las microondas, que tienen una velocidad de  $3 \times 10^8$  m/s en el vacío. (a) El intervalo de longitudes de onda de la luz para las que el ojo es sensible abarca desde  $4 \times 10^{-7}$  a  $7 \times 10^{-7}$  m aproximadamente. ¿Cuáles son las frecuencias que corresponden a estas longitudes de onda? (b) Hallar la frecuencia de una microonda que tiene una longitud de onda de 3 cm.

**41** ● **ISOLVE** Una onda armónica en una cuerda con una masa de 0,05 kg/m y una tensión de 80 N tiene una amplitud de 5 cm. Cada sección de la cuerda se mueve con movimiento armónico simple a una frecuencia de 10 Hz. Hallar la potencia propagada a lo largo de la cuerda.

**42** ● **ISOLVE** Una cuerda de 2 m de largo tiene una masa de 0,1 kg. La tensión es 60 N. Una fuente de potencia en uno de sus extremos envía una onda armónica con una amplitud de 1 cm por la cuerda. La onda se extrae por el otro extremo sin ninguna reflexión. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente de potencia si la potencia transmitida es 100 W?

**43** ●● La función de onda para una onda armónica en una cuerda es  $y(x, t) = (0,001 \text{ m}) \sin(62,8 \text{ m}^{-1}x + 314 \text{ s}^{-1}t)$ . (a) ¿En qué sentido se desplaza esta onda y cuál es su velocidad? (b) Hallar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de la misma. (c) ¿Cuál es la velocidad máxima de un segmento cualquiera de la cuerda?

**44** ●● Una onda armónica con una frecuencia de 80 Hz y una amplitud de 0,025 m se propaga hacia la derecha a lo largo de una cuerda con una velocidad de 12 m/s. (a) Escribir una expresión que sea adecuada para la función de onda de la misma. (b) Determinar la velocidad máxima de un punto de la cuerda. (c) Determinar la aceleración máxima de un punto de la cuerda.

**45** ●● **ISOLVE** A lo largo de una cuerda que tiene 20 m de largo, una masa de 0,06 kg y una tensión de 50 N se mueven ondas de frecuencia 200 Hz y amplitud 1,2 cm. (a) ¿Cuál es la energía total media de las ondas en la cuerda? (b) Hallar la potencia transmitida que pasa por un punto determinado de la cuerda.

**46** ●● **SSM** En una cuerda real, una onda pierde cierta energía cuando se propaga a lo largo de ésta. Tal situación puede describirse por una función de onda cuya amplitud  $A(x)$  depende de  $x$ :  $y = A(x) \sin(kx - \omega t) = (A_0 e^{-bx}) \sin(kx - \omega t)$  (a) ¿Cuál es la potencia original transportada por la onda en el origen? (b) ¿Cuál es la potencia transportada por la onda en el punto  $x$ , donde  $x > 0$ ?

**47** ●● Se ha transmitido una determinada potencia a lo largo de un alambre tenso mediante ondas armónicas transversales. La velocidad de la onda es de 10 m/s y la densidad de masa lineal del alambre es 0,01 kg/m. La fuente de potencia oscila con una amplitud de 0,50 mm. (a) ¿Qué potencia media se transmite a lo largo del alambre si la frecuencia es de 400 Hz? (b) La potencia transmitida puede aumentarse aumentando la tensión en el alambre, la frecuencia de la fuente o la amplitud de las ondas. Si sólo se varía una de estas magnitudes, ¿cómo habría de modificarse cada una de ellas con objeto de producir un aumento de potencia en un factor de 100? (c) ¿Cuál de las variaciones indicadas se podría realizar probablemente con mayor facilidad?

**48** ●●● **SSM** Dos cuerdas largas están unidas en el punto  $x = 0$ . En la región  $x < 0$ , la velocidad de propagación de la onda es  $v_1$ , mientras que en la región

$x > 0$ , la velocidad es  $v_2$ . Desde la izquierda ( $x < 0$ ) incide una onda sinusoidal de tal forma que parte de la onda se refleja y parte se transmite. Si  $x < 0$ , el desplazamiento de la onda se describe mediante  $y(x, t) = A \sin(k_1x - \omega t) + B \sin(k_1x + \omega t)$ , y si  $x > 0$ ,  $y(x, t) = C \sin(k_2x - \omega t)$ , en donde  $\omega/k_1 = v_1$  y  $\omega/k_2 = v_2$ . (a) Si suponemos que tanto la función de onda  $y$  como su primera derivada espacial  $\partial y/\partial x$  han de ser continuas en  $x = 0$ , demostrar que  $C/A = 2/(1 + v_1/v_2)$ , y que  $B/A = (1 - v_1/v_2)/(1 + v_1/v_2)$ . (b) Probar que  $B^2 + (v_1/v_2)C^2 = A^2$ .

## Ondas sonoras armónicas

**49** ● **SSM** Una onda sonora en aire produce una variación de presión dada por

$$p(x, t) = 0,75 \cos \frac{\pi}{2}(x - 340t)$$

en donde  $p$  se expresa en pascuales,  $x$  en metros y  $t$  en segundos. ¿Cuál es (a) la amplitud de la presión, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia y (d) la velocidad de la onda sonora?

**50** ● **ISOLVE** (a) La nota Do central de la escala musical tiene una frecuencia de 262 Hz. ¿Cuál es la longitud de onda de esta nota en el aire? (b) La frecuencia de la nota Do una octava por encima del Do central es el doble que la de este último. ¿Cuál es la longitud de onda de esta nota en el aire?

**51** ● (a) ¿Cuál es la amplitud del desplazamiento correspondiente a una onda sonora de frecuencia 100 Hz y amplitud de presión  $10^{-4}$  atm? (b) La amplitud del desplazamiento correspondiente a una onda sonora de frecuencia 300 Hz es  $10^{-7}$  m. ¿Cuál es la amplitud de presión de esta onda?

**52** ● **ISOLVE** (a) Hallar la amplitud de desplazamiento correspondiente a una onda sonora de frecuencia 500 Hz cuando la amplitud de presión corresponde al umbral de dolor de 29 Pa. (b) Hallar la amplitud de desplazamiento para una onda sonora con la misma amplitud de presión pero con una frecuencia de 1 kHz.

**53** ● Una onda de un sonido intenso típico con una frecuencia de 1 kHz tiene una amplitud de presión de  $10^{-4}$  atm aproximadamente. (a) Cuando  $t = 0$ , la presión es máxima en un cierto punto  $x_1$ . ¿Cuál es el desplazamiento en dicho punto en  $t = 0$ ? (b) ¿Cuál es el valor máximo del desplazamiento en un instante y posición cualquiera? (Considerar que la densidad del aire es  $1,29 \text{ kg/m}^3$ .)

**54** ● **SSM** Una octava representa un cambio en la frecuencia en un factor dos. ¿Cuántas octavas puede oír una persona normal?

## Ondas en tres dimensiones: Intensidad

**55** ● Un pistón situado en un extremo de un tubo largo lleno de aire a la temperatura ambiente y a la presión normal, oscila con una frecuencia de 500 Hz y una amplitud de 0,1 mm. El área del pistón es  $100 \text{ cm}^2$ . (a) ¿Cuál es la amplitud de la presión de las ondas sonoras generadas en el tubo? (b) ¿Cuál es la intensidad de las ondas? (c) ¿Qué potencia media se necesita para mantener oscilando el pistón (despreciando el rozamiento)?

**56** ● Un foco esférico radia el sonido uniformemente en todas direcciones. A una distancia de 10 m, el nivel de intensidad del sonido es de  $10^{-4} \text{ W/m}^2$ . (a) ¿A qué distancia del foco el nivel de intensidad es de  $10^{-6} \text{ W/m}^2$ ? (b) ¿Qué potencia está radiando dicho foco?

**57** ● **SSM** **ISOLVE** Un altavoz de un concierto de rock genera  $10^{-2} \text{ W/m}^2$  a 20 m a una frecuencia de 1 kHz. Suponiendo que el altavoz extiende su energía uniformemente en tres dimensiones, (a) ¿cuál es la potencia total acústica emitida por el altavoz? (b) ¿A qué distancia la intensidad del sonido se encontrará en el umbral del dolor de  $1 \text{ W/m}^2$ ? (c) ¿Cuál es la intensidad a 30 m?

**58** ●● Cuando se lanza un alfiler de 0,1 g de masa desde una altura de 1 m, el 0,05 por ciento de su energía se convierte en un pulso sonoro de duración 0,1 s.

(a) Estimar el intervalo en el que puede oírse la caída del alfiler si la intensidad mínima que puede llegar a oírse es de  $10^{-11} \text{ W/m}^2$ . (b) En la práctica, el resultado obtenido en (a) es mucho mayor debido al ruido de fondo. Si en lugar de la suposición anterior se considera que para llegar a oírse el ruido el nivel de intensidad debe ser de al menos  $10^{-8} \text{ W/m}^2$ , estimar el intervalo en el que puede llegar a oírse la caída del alfiler. (Suponer en ambos casos que la intensidad es  $P/4\pi r^2$ .)

### \*Nivel de intensidad (o sonoridad)

59 ● ¿Cuál es el nivel de intensidad en decibelios correspondiente a una onda sonora de intensidad (a)  $10^{-10} \text{ W/m}^2$  y (b)  $10^{-2} \text{ W/m}^2$ ?

60 ● **RESOLVER** Hallar la intensidad de una onda sonora si (a)  $\beta = 10 \text{ dB}$  y (b)  $\beta = 3 \text{ dB}$ . (c) Hallar las amplitudes de la presión correspondientes a ondas sonoras en el aire en condiciones normales para cada una de estas intensidades.

61 ● **SSM** El nivel acústico del ladrido de un perro es 50 dB. La intensidad de un concierto de rock es 10 000 veces superior a la del ladrido de un perro. ¿Cuál es el nivel acústico del concierto de rock?

62 ● **RESOLVER** Dos sonidos difieren en 30 dB. La intensidad del sonido más fuerte es  $I_F$  y la del más débil  $I_D$ . El valor de la relación  $I_F/I_D$  es (a) 1000, (b) 30, (c) 9, (d) 100, (e) 300.

63 ● Demostrar que si se duplica la intensidad, el nivel de intensidad aumenta en 3,0 dB.

64 ● **SSM** ¿Qué fracción de la potencia acústica de un ruido deberá eliminarse para disminuir su nivel de intensidad sonora de 90 a 70 dB?

65 ●● **RESOLVER** Una fuente esférica irradia sonido uniformemente en todas las direcciones. A una distancia de 10 m el nivel acústico es de 80 dB. (a) ¿A qué distancia de la fuente el nivel acústico es de 60 dB? (b) ¿Cuál es la potencia irradiada por la fuente?

66 ●● Una fuente esférica de intensidad  $I_0$  irradia sonido uniformemente en todas las direcciones. Su nivel acústico es  $\beta_1$  a una distancia  $r_1$  y  $\beta_2$  a una distancia  $r_2$ . Determinar  $\beta_2/\beta_1$ .

67 ●● **RESOLVER** Un altavoz genera en un concierto de rock  $10^{-2} \text{ W/m}^2$  a 20 m a una frecuencia de 1 kHz. Suponiendo que la energía del cantante se extiende uniformemente en todas las direcciones, (a) ¿cuál es el nivel de intensidad a 20 m? (b) ¿Cuál es la potencia acústica total generada por el cantante? (c) ¿A qué distancia alcanzará la intensidad el umbral de dolor de 120 dB? (d) ¿Cuál es el nivel de intensidad a 30 m?

68 ●● Un artículo sobre contaminación acústica señala que el nivel de intensidad sonora en grandes ciudades ha estado aumentando en 1 dB anualmente. (a) ¿A qué aumento porcentual de intensidad corresponde esto? ¿Parece razonable este incremento? (b) ¿Aproximadamente en cuántos años se duplicará la intensidad de sonido si se incrementa en 1 dB anualmente?

69 ●● Tres fuentes sonoras producen unos niveles de intensidad de 70, 73 y 80 dB cuando actúan separadamente. Cuando actúan juntas las intensidades de las fuentes se suman. (a) Hallar el nivel de intensidad sonora en decibelios cuando las tres fuentes actúan simultáneamente. (b) Estudiar la utilidad de eliminar las dos fuentes menos intensas con objeto de reducir el nivel de intensidad del ruido.

70 ●● **SSM** Si se dobla la distancia entre un foco y un receptor, la intensidad en el receptor disminuye, aproximadamente, (a) 2 dB, (b) 3 dB, (c) 6 dB, (d) a partir de la información que se tiene no se puede dar una cifra.

71 ●●● **RESOLVER** Todas las personas que han acudido a un cocktail se encuentran hablando igual de ruidosamente. Si sólo estuviese hablando una persona, el nivel de sonido sería de 72 dB. Calcular el nivel de sonido cuando las 38 personas hablan a la vez.

72 ●●● **SSM** Cuando un violinista mueve su arco sobre una cuerda, la fuerza que ejerce es pequeña, del orden de 0,6 N. Supongamos que el arco se mueve a través de la cuerda "la", que vibra con una frecuencia de 440 Hz a 0,5 m/s. Un oyente a 35 m del músico oye un sonido de intensidad 60 dB. ¿Cuál es el rendimiento de la transformación de la energía mecánica de la pulsación en energía sonora? (Suponer que el sonido se irradia uniformemente en todas las direcciones.)

73 ●●● El nivel de ruido en un aula vacía donde se va a realizar un examen es de 40 dB. Cuando 100 alumnos se encuentran escribiendo su examen, los sonidos de las respiraciones y de las plumas escribiendo sobre el papel elevan el nivel de ruido a 60 dB. (No tener en cuenta los carraspeos ocasionales.) Suponiendo que la contribución de cada alumno a la potencia de ruido es la misma, calcular el nivel de ruido cuando sólo quedan 50 alumnos en el aula.

### Efecto Doppler

En los problemas 74 a 79 la fuente emite un sonido de 200 Hz que se mueve por el aire en reposo con una velocidad de 340 m/s

74 ● La fuente se mueve con una velocidad de 80 m/s respecto al aire en reposo hacia un observador estacionario. (a) Hallar la longitud de onda del sonido en la zona entre la fuente y el observador. (b) Hallar la frecuencia oída por este último.

75 ● Considerar el caso del problema 74 a partir del sistema de referencia en que la fuente está en reposo. En este sistema el observador se mueve hacia la fuente con una velocidad de 80 m/s y existe un viento de velocidad 80 m/s que sopla del observador hacia la fuente. (a) ¿Cuál es la velocidad del sonido desde la fuente al observador en este sistema? (b) Hallar la longitud de onda del sonido en la zona entre la fuente y el observador. (c) Hallar la frecuencia percibida por el observador.

76 ● La fuente se mueve con una velocidad de 80 m/s alejándose del observador estacionario. (a) Hallar la longitud de onda de las ondas sonoras en la zona entre la fuente y el observador. (b) Hallar la frecuencia oída por este último.

77 ● **RESOLVER** El observador se mueve con velocidad de 80 m/s respecto al aire en reposo hacia la fuente estacionaria. (a) ¿Cuál es la longitud de onda del sonido entre la fuente y el observador? (b) ¿Cuál es la frecuencia oída por el observador?

78 ● Consideremos en caso del problema 77 en el sistema de referencia en el que el observador está en reposo. (a) ¿Cuál es la velocidad del viento en este sistema? (b) ¿Cuál es la velocidad del sonido de la fuente al observador en este sistema, es decir, relativa a este último? (c) Hallar la longitud de onda del sonido en la zona entre la fuente y el observador en este sistema. (d) Hallar la frecuencia oída por el observador.

79 ● El observador se mueve con una velocidad de 80 m/s respecto al aire en reposo alejándose de la fuente estacionaria. Hallar la frecuencia oída por dicho observador.

80 ● Un reactor se mueve a un Mach de 2,5 a una altitud de 5000 m. (a) ¿Cuál es el ángulo que la onda de choque forma con la trayectoria del reactor? (Suponer que la velocidad del sonido a esta altura sigue siendo 340 m/s.) (b) En dónde se encontrará el reactor cuando una persona en el suelo oiga la onda de choque?

81 ● Una persona corre a toda velocidad hacia un foco sonoro de frecuencia 1000 Hz. Estimar la frecuencia del sonido que percibe esta persona. Suponer que esta persona es capaz de reconocer un cambio en la frecuencia del 3%. ¿Puede utilizarse esta valoración de la frecuencia para estimar su propia velocidad?

82 ●● **RESOLVER** Un dispositivo de radar emite microondas con una frecuencia de 2,00 GHz. Cuando las ondas se reflejan en un coche que se aleja frontalmente del emisor, se detecta una diferencia de frecuencia de 293 Hz. Determinar la velocidad del coche.

**83** ●● **SSM** De forma rutinaria se utiliza el efecto Doppler para medir la velocidad del viento en una tormenta. Una estación meteorológica utiliza un radar de 625 MHz de frecuencia. Las ondas producidas por el instrumento se reflejan en las gotas de lluvia de una tormenta situada a 50 km de la estación y cuando llegan de nuevo a la estación meteorológica su frecuencia es 325 Hz mayor. Suponiendo que el viento está directamente encarado hacia la antena del radar y que el instrumento únicamente mide el componente radial de la velocidad, ¿a qué velocidad sopla el viento?

**84** ●● **ISOLVE** Un destructor que se encuentra en reposo está equipado con un sonar que envía pulsos sonoros de 40 MHz. Los pulsos que se reciben han sido reflejados por un submarino que se encuentra directamente debajo con un retraso de tiempo de 80 ms y una frecuencia de 39,958 MHz. Si la velocidad del sonido en el agua del mar es de 1,54 km/s, calcular (a) la profundidad del submarino y (b) su velocidad vertical.

**85** ●● Una unidad de radar de la policía transmite microondas de frecuencia  $3 \times 10^{10}$  Hz. La velocidad de estas ondas en el aire es  $3,0 \times 10^8$  m/s. Supóngase que un coche se aleja de esta unidad de radar a una velocidad de 140 km/h. ¿Cuál es la diferencia de frecuencia entre la señal transmitida y la señal recibida del coche?

**86** ●● Supóngase que el coche policía del problema 85 se mueve en la misma dirección que el otro vehículo a la velocidad de 60 km/h. ¿Cuál es entonces la diferencia de frecuencia entre las señales emitida y reflejada?

**87** ●● **ISOLVE** En el tiempo  $t = 0$ , un avión supersónico está directamente sobre un punto  $P$  volando hacia el oeste a una altura de 12 km y a una velocidad Mach 1,6. ¿Dónde está el avión cuando se escucha el estampido sónico?

**88** ●● Un pequeño aparato de radio de masa 0,10 kg está unido a una pista de aire por un extremo mediante un muelle. La radio emite un sonido de 800 Hz. Un observador en el otro extremo de la pista de aire escucha un sonido cuya frecuencia varía entre 797 y 803 Hz. (a) Determinar la energía del sistema vibrante masa-muelle. (b) Si la constante del muelle es de 200 N/m, ¿cuál es la amplitud de vibración de la masa y cuál es el periodo del sistema oscilante?

**89** ●● Un foco sonoro de frecuencia  $f_0$  se mueve con velocidad  $u_f$  respecto al aire en reposo hacia un receptor que se mueve con velocidad  $u_r$  respecto al aire en reposo alejándose del foco. (a) Escribir una expresión para la frecuencia recibida  $f'$ . (b) Utilizar la expresión aproximada  $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$  para demostrar que si tanto  $u_f$  como  $u_r$  son pequeñas en comparación con  $v$ , la frecuencia recibida es aproximadamente

$$f' \approx \left(1 + \frac{u_f - u_r}{v}\right) f_0 = \left(1 + \frac{u_{\text{rel}}}{v}\right) f_0$$

en donde  $u_{\text{rel}} = u_f - u_r$  es la velocidad relativa entre la fuente y el receptor.

**90** ●● Dos alumnos con diapasones vibrantes de 440 Hz, pasean alejándose uno del otro con la misma velocidad. ¿Con qué rapidez deberán andar para que cada uno de ellos escuche una frecuencia de 438 Hz del otro diapason?

**91** ●● Un alumno de física anda a lo largo de un vestíbulo grande portando un diapason que vibra a 512 Hz. El extremo del vestíbulo está cerrado, de forma que el sonido se refleja en él. El estudiante oye un sonido de 516 Hz procedente de la pared. ¿Con qué rapidez está andando?

**92** ●● **SSM** Un pequeño altavoz que emite un sonido de 1000 Hz está unido a uno de los extremos de una barra de 0,8 m que puede girar libremente por el otro extremo. La barra gira en el plano horizontal con una velocidad angular de 4,0 rad/s. Deducir una expresión para la frecuencia percibida por un observador estacionario alejado del altavoz rotatorio.

**93** ●● Un globo arrastrado por un viento de 36 km/h emite un sonido de 800 Hz cuando se aproxima a un gran edificio. (a) ¿Cuál es la frecuencia del sonido percibido por un observador asomado en una ventana de este edificio? (b) ¿Cuál es la frecuencia del sonido reflejado que escucha un viajero del globo?

**94** ●● **ISOLVE** Un coche se aproxima a una pared reflectora. Un observador inmóvil situado detrás del coche escucha un sonido de frecuencia 745 Hz procedente de la bocina del coche y un sonido de frecuencia 863 Hz procedente de la pared. (a) ¿Cuál es la velocidad del coche? (b) ¿Cuál es la frecuencia de la bocina? (c) ¿Cuál es la frecuencia escuchada por el conductor del coche, procedente de la reflexión del sonido en la pared?

**95** ●● La conductora de un coche que viaja a 100 km/h hacia un acantilado vertical hace sonar brevemente la bocina. Exactamente un segundo después, ella escucha el eco y observa que su frecuencia es de 840 Hz. ¿A qué distancia del acantilado se encontraba el coche cuando la conductora hizo sonar la bocina y cuál es la frecuencia del sonido emitido?

**96** ●● Una persona en un vuelo transatlántico viaja hacia el oeste a 800 km/h. Un Concorde que vuela con velocidad Mach 1,6 se encuentra a 3 km al norte del primer avión y su rumbo es también este-oeste. ¿Cuál es la distancia entre los dos aviones cuando desde el vuelo transatlántico se oye el estampido sónico producido por el Concorde?

**97** ●● **SSM** Se ha usado el telescopio espacial Hubble para determinar la existencia de planetas de estrellas lejanas. Cuando un planeta está en órbita alrededor de una estrella, ésta experimenta un movimiento con el mismo periodo de la órbita que el planeta. Por esta causa, la luz procedente de la estrella presenta un desplazamiento Doppler también periódico. Estimar la longitud de onda máxima y mínima que tiene la luz de 500 nm de frecuencia nominal emitida por el Sol como consecuencia del desplazamiento Doppler producido por el movimiento del Sol debido a Júpiter.

**98** ●● **ISOLVE** Un estudiante de física deja caer por el hueco del ascensor de un rascacielos un diapason que está vibrando a 440 Hz. Cuando el estudiante oye una frecuencia de 400 Hz, ¿qué longitud ha recorrido en su caída el diapason?

**99** ●● El detector de neutrinos japonés Superkamiokande es un tanque de agua del tamaño de un edificio de 14 pisos. Se detecta un neutrino, la "partícula fantasma" de la física, mediante la onda de choque producida cuando un neutrino choca con un electrón y éste se mueve por el tanque prácticamente a la velocidad de la luz. Si el ángulo máximo del cono de la onda de choque de Cerenkov es de  $48,75^\circ$ , ¿cuánto vale la velocidad de la luz en el agua?

## Problemas generales

**100** ● En el instante  $t = 0$ , la forma de un pulso de onda en una cuerda viene dada por la función

$$y(x, 0) = \frac{0,12 \text{ m}^3}{(2,00 \text{ m})^2 + x^2}$$

en donde  $x$  está en metros. (a) Dibujar  $y(x, 0)$  en función de  $x$ . Expresar la función de onda  $y(x, t)$  en un instante  $t$  cualquiera si (b) el pulso se está moviendo en el sentido positivo de las  $x$  con una velocidad de 10 m/s y (c) si se está moviendo en el sentido negativo de las  $x$  con una velocidad del mismo valor.

**101** ● **ISOLVE** Una onda de frecuencia 1200 Hz se propaga a lo largo de un alambre que está bajo una tensión de 800 N. La longitud de onda de la onda es de 24 cm. ¿Cuál será la longitud de onda si la tensión decrece a 600 N y la frecuencia se mantiene constante?

**102** ● **ISOLVE** En clase, una demostración común de pulsos de onda consiste en atar un tubo de goma por uno de sus extremos a un poste fijo, pasarlo por una polea y colgar un peso por su otro extremo. Supóngase que la distancia desde el soporte fijo a la polea es de 10 m, la masa de esta longitud de tubo es de 0,7 kg y el peso suspendido es de 110 N. Si se le da al tubo una sacudida transversal en un extremo, ¿cuánto tiempo empleará el pulso resultante en alcanzar el otro extremo?

**103** ● Un bote que se mueve a 10 m/s sobre un lago tranquilo forma una onda de proa con un ángulo de  $20^\circ$  con su dirección de movimiento. ¿Cuál es la velocidad de la onda de proa?

**104** ● Si una longitud de onda es mucho mayor que el diámetro de un altavoz, éste irradia en todas direcciones como si fuera un foco puntual. En cambio, si la longitud de onda es mucho menor que el diámetro, el sonido se propaga aproximadamente en línea recta por delante del altavoz. Determinar la frecuencia de una onda sonora que tiene una longitud de onda (a) 10 veces mayor que el diámetro de un altavoz de 30 cm y (b) un décimo del diámetro de un altavoz de 30 cm. (c) Repetir el problema para un altavoz de 6 cm.

**105** ● Un silbato de 500 Hz de frecuencia se mueve en una circunferencia de 1 m de radio a 3 rev/s. ¿Cuáles son las frecuencias máxima y mínima oídas por un observador estacionario situado en el plano del círculo y 5 m alejado de su centro?

**106** ● Las olas del mar se mueven hacia la playa con una velocidad de 8,9 m/s y con una separación entre crestas de 15,0 m. Nos encontramos en un pequeño bote anclado junto a la costa. (a) ¿Cuál es la frecuencia de las olas del mar? (b) Se levanta el ancla y nos movemos hacia el mar con una velocidad de 15 m/s. ¿Qué frecuencia de olas se observará entonces?

**107** ●● Un alambre de 12,0 m y masa 85 g se estira bajo una tensión de 180 N. En el extremo izquierdo del alambre se genera un pulso y 25 milisegundos más tarde se genera un segundo pulso en el extremo derecho del alambre. ¿Dónde se encontrarán los dos pulsos?

**108** ●● SSM **RESOLVER** Determinar la velocidad de un coche cuya bocina, al pasar al lado de un receptor parado, disminuye la frecuencia un 10 por ciento.

**109** ●● Un altavoz con un diafragma de 20 cm de diámetro vibra con una frecuencia de 800 Hz y una amplitud de 0,025 mm. Suponiendo que las moléculas de aire de las proximidades poseen la misma amplitud de vibración, calcular (a) la amplitud de la presión justo enfrente del diafragma del altavoz, (b) la intensidad del sonido y (c) la potencia acústica que se está radiando.

**110** ●● **RESOLVER** Una onda acústica, plana y armónica que oscila en el aire con una amplitud de  $1 \mu\text{m}$  tiene una intensidad de  $10 \text{ mW/m}^2$ . ¿Cuál es la frecuencia de la onda?

**111** ●● Por un tubo de radio 5 cm fluye agua a la velocidad de 7 m/s. Una placa de área igual a la sección transversal del tubo se inserta súbitamente en éste para detener el flujo. Determinar la fuerza ejercida sobre la placa. Tomar el valor de 1,4 km/s para la velocidad del sonido en el agua. (Sugerencia: Cuando se inserta la placa, una onda de presión se propaga a través del agua a la velocidad del sonido,  $v_s$ . La masa de agua detenida en el tiempo  $\Delta t$  es la contenida en una longitud del tubo igual a  $v_s \Delta t$ .)

**112** ●● En la figura 15.31 se representa el esquema de la realización de una fotografía de alta velocidad que mediante un flash y una máquina captura la

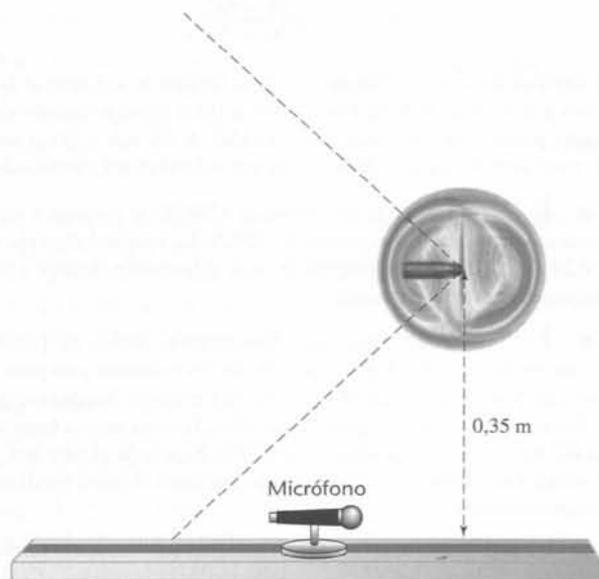


Figura 15.31 Problema 112

imagen de una bala rompiendo una burbuja de jabón. La onda de choque producida por la bala se detecta mediante un micrófono, colocado en una guía paralela a la trayectoria de la bala. El micrófono dispara el flash y la máquina. Si la bala se mueve a 1,25 veces la velocidad del sonido y la distancia vertical entre la guía y la bala es de 0,35 m, ¿a qué distancia por detrás de la pompa de jabón hay que colocar el micrófono para que accione el disparador de la máquina? (Supóngase que el flash y la máquina se accionan inmediatamente después de que el micrófono detecte la onda de choque)

**113** ●● Una tropa bien entrenada mantiene el paso escuchando la banda de música que está situada a la cabeza de la columna. La música se lleva a un ritmo que corresponde a 100 pasos por minuto. Una cámara de televisión muestra que sólo la tropa que está en la cabeza de la columna y la que está en su parte posterior lleva realmente el paso. Los soldados de la sección intermedia se encuentran adelantando el pie izquierdo cuando los que componen los otros dos grupos mencionados están adelantando el pie derecho. La tropa está tan bien entrenada que, a pesar de esto, están seguros de que llevan el paso de acuerdo con la música. Explicar el origen del problema y calcular la longitud de la columna.

**114** ●● Un murciélago que vuela hacia un obstáculo a 12 m/s emite pulsos sonoros breves y de alta frecuencia con una frecuencia de repetición de 80 Hz. ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre los pulsos de eco oídos por el murciélago?

**115** ●● SSM De forma rutinaria se envían rayos de luz láser hacia la Luna para determinar la distancia Tierra-Luna. Sin embargo, para determinar la distancia con la máxima exactitud, debe tenerse en cuenta que la velocidad de la luz en la atmósfera terrestre es el 99,997 por ciento de la velocidad de la luz en el vacío. Suponiendo que la atmósfera de la Tierra tiene un espesor de 8 km., estimar qué cambio en la distancia supone la corrección.

**116** ●● Un diapasón unido a un alambre tenso genera ondas transversales. La vibración del diapasón es perpendicular al alambre. Su frecuencia es de 400 Hz y su amplitud de oscilación es de 0,50 mm. El alambre tiene una densidad de masa lineal de 0,01 kg/m y está sometido a una tensión de 1 kN. Se supone que no hay ondas reflejadas. (a) Hallar el periodo y frecuencia de las ondas en el alambre. (b) ¿Cuál es la velocidad de las ondas? (c) ¿Cuál es la longitud de onda y el número de ondas? (d) Escribir una función de onda adecuada para las ondas sobre el alambre. (e) Calcular la velocidad y aceleración máximas de un punto del alambre. (f) ¿A qué potencia media debe suministrarse energía al diapasón para mantenerlo oscilando con amplitud constante?

**117** ●● Si una cadena cerrada se hace girar sobre su eje a velocidad alta, rodará como un aro sin caerse. Consideremos una cadena de densidad de masa lineal  $\mu$  que está rodando sin deslizarse con una velocidad elevada  $v_0$ . (a) Demostrar que la tensión en la cadena es  $F = \mu v_0^2$ . (b) Si la cadena rueda sobre una pequeña protuberancia, se generará en ella un pulso de onda transversal. ¿A qué velocidad se moverá a lo largo de la cadena? (c) ¿Hasta dónde se moverá una onda transversal a lo largo del aro (en grados) en el tiempo en que la rueda gire una revolución completa?

**118** ●● Una cuerda larga con una masa por unidad de longitud de 0,1 kg/m está bajo una tensión constante de 10 N. Un motor en el punto  $x = 0$  impone a este extremo de la cuerda un movimiento armónico a 5 oscilaciones por segundo y una amplitud de 4 cm. (a) ¿Cuál es la velocidad de la onda? (b) ¿Cuál es la longitud de onda? (c) ¿Cuál es el momento lineal transversal máximo de un segmento de 1 mm de la cuerda? (d) ¿Cuál es la fuerza máxima neta ejercida sobre un segmento de 1 mm de la cuerda?

**119** ●● SSM Una cuerda pesada de 3 m de largo cuelga del techo libremente. (a) Demostrar que la velocidad de las ondas transversales en la cuerda es independiente de su masa y longitud, pero que depende de la distancia y desde el extremo inferior de acuerdo con la fórmula  $v = \sqrt{gy}$ . (b) Si se le da al extremo inferior de la cuerda un desplazamiento lateral repentino, ¿cuánto tardará el pulso de onda resultante en subir al techo, reflejarse y regresar al punto inferior de la cuerda?

**120** ●● En este problema hay que deducir una expresión para la energía potencial de un segmento de una cuerda por el que se propaga un tren de ondas (figura 15.32). La energía potencial de un segmento es igual al trabajo

realizado por la tensión al estirar la cuerda, de valor  $\Delta U = F(\Delta\ell - \Delta x)$ , en donde  $F$  es la tensión,  $\Delta\ell$  la longitud del segmento estirado e  $\Delta x$  su longitud original. En la figura puede verse que

$$\Delta\ell \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \{1 + (\Delta y/\Delta x)^2\}^{1/2}$$

(a) Utilizar el desarrollo del binomio para demostrar que  $\Delta\ell - \Delta x \approx \frac{1}{2} (\Delta y/\Delta x)^2 \Delta x$  y por lo tanto,  $\Delta U \approx \frac{1}{2} F (\Delta y/\Delta x)^2 \Delta x$ . (b) Calcular  $dy/dx$  a partir de la función de onda expresada por la ecuación 15.13 y demostrar que  $\Delta U \approx \frac{1}{2} Fk^2 \cos^2(kx - \omega t) \Delta x$ .

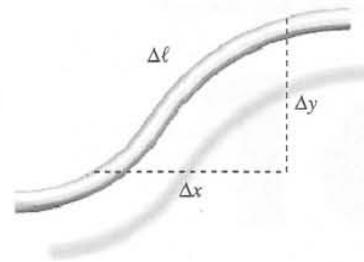
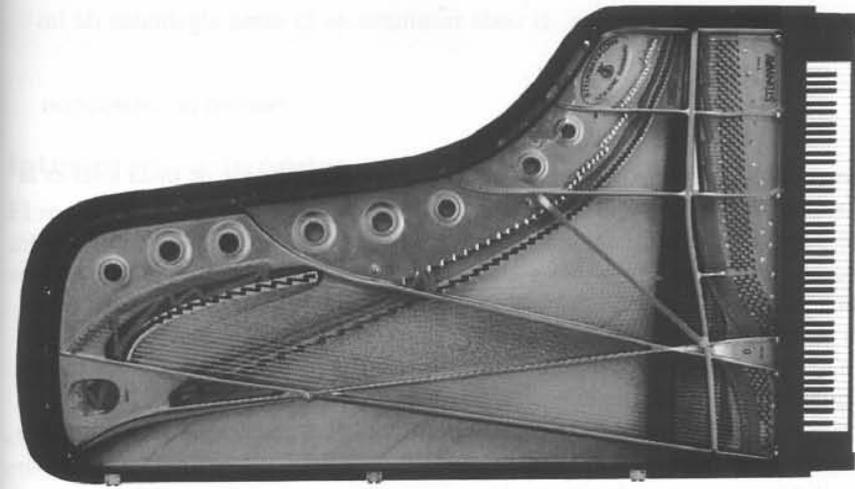


Figura 15.32 Problema 120

# SUPERPOSICIÓN Y ONDAS ESTACIONARIAS

## Capítulo 16



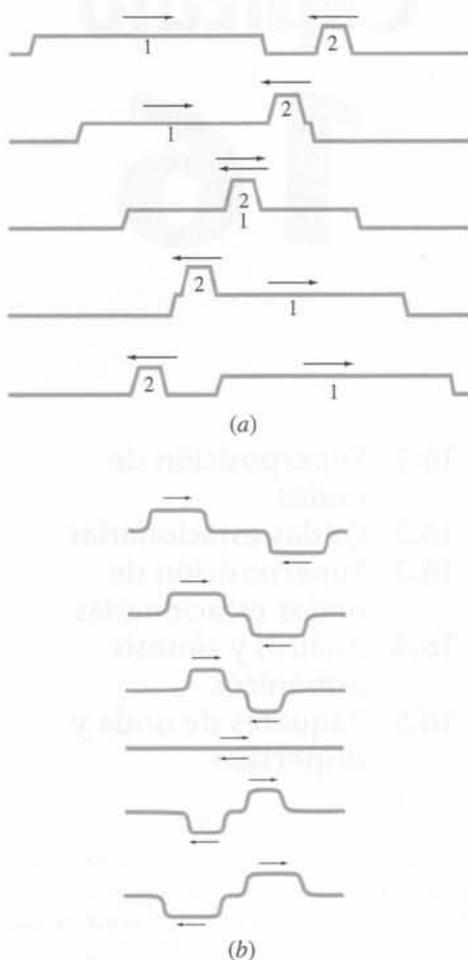
El pianista toca las teclas y acciona los martillos que golpean las cuerdas de este magnífico piano de cola. Las cuerdas más largas vibran a frecuencias más bajas que las más cortas.

¿Qué otros factores influyen en la afinación de un piano? (Véase el ejemplo 16.6.)

- 16.1 Superposición de ondas
- 16.2 Ondas estacionarias
- 16.3 Superposición de ondas estacionarias
- 16.4 Análisis y síntesis armónicos
- 16.5 Paquetes de onda y dispersión

Cuando dos o más ondas se encuentran en el espacio, sus perturbaciones individuales (representadas matemáticamente por sus funciones de onda) se superponen y se suman algebraicamente creando una nueva onda. Este principio se llama principio de superposición. En ciertas circunstancias la superposición de ondas armónicas de la misma frecuencia produce patrones en el espacio. Este fenómeno se llama interferencia. La interferencia y la difracción es lo que distingue el movimiento ondulatorio del movimiento de partículas. El descubrimiento de la interferencia de la luz por Thomas Young en 1801 llevó a los científicos al convencimiento de que la luz se propagaba con un movimiento ondulatorio y no en forma de corpúsculos, como había propuesto Newton. En 1927 la observación de fenómenos de interferencia en ondas electrónicas por parte de C. J. Davisson y L. H. Germer ayudó a entender la naturaleza ondulatoria de los electrones y otros objetos materiales. Estas ideas son esenciales para entender la física cuántica, que presentaremos en el capítulo 34.

En este capítulo comenzaremos por estudiar la superposición de pulsos de onda en una cuerda y después consideraremos la superposición e interferencia de ondas armónicas. Examinaremos el fenómeno de las pulsaciones, que resultan de la interferencia de dos ondas de frecuencias ligeramente distintas y estudiaremos las ondas estacionarias, que resultan cuando las ondas armónicas están confinadas en el espacio. También consideraremos el análisis de tonos musicales complejos en función de sus ondas armónicas componentes, así como el problema inverso de la síntesis de ondas armónicas para producir tonos complejos. Finalizaremos con una exposición cualitativa de la extensión del análisis armónico a ondas no periódicas, tales como los pulsos de onda.



**Figura 16.1** Pulsos de onda que se mueven en direcciones opuestas sobre una cuerda. La forma de la cuerda cuando se encuentran los pulsos se obtiene sumando los desplazamientos de cada pulso por separado. (a) Superposición de pulsos con desplazamientos en el mismo sentido. (b) Superposición de pulsos con desplazamientos iguales pero con signos opuestos. En este caso la suma algebraica de los desplazamientos equivale a la sustracción de las magnitudes.

## 16.1 Superposición de ondas

La figura 16.1a muestra pequeños pulsos de onda que se mueven en direcciones opuestas en una cuerda. La forma resultante del encuentro de estos pulsos puede determinarse sumando los desplazamientos producidos por cada pulso separadamente. El **principio de superposición** es una propiedad del movimiento ondulatorio que expresa lo siguiente:

Cuando dos o más ondas se combinan, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Matemáticamente, cuando tenemos dos pulsos sobre la cuerda, la función de onda total es la suma algebraica de las funciones de onda de las ondas individuales.

En el caso especial de dos pulsos que son idénticos, excepto que uno está invertido respecto al otro, como en la figura 16.1b, hay un instante en que los pulsos se solapan exactamente y su suma es igual a cero. En este momento la cuerda está horizontal, pero no en reposo. Justo a la derecha de la región de solapamiento, la cuerda está moviéndose hacia arriba, mientras que a la izquierda se mueve hacia abajo. En un instante posterior, los pulsos emergen, continuando cada uno en su dirección original.

La superposición es una propiedad característica y única del movimiento ondulatorio. No existe una situación análoga en el movimiento newtoniano de partículas; es decir, dos partículas nunca se solapan o se suman de este modo.

### \*La superposición y la ecuación de onda

El principio de superposición resulta de la linealidad de la ecuación de onda (ecuación 15.9) para pequeños desplazamientos transversales. Es decir, la función  $y(x, t)$  y sus derivadas se presentan sólo en primera potencia. La propiedad que define las ecuaciones lineales es que si  $y_1$  y  $y_2$  son dos soluciones de la ecuación de onda, la combinación lineal

$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (16.1)$$

en donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes cualesquiera, es también una solución. Esto se demuestra fácilmente sustituyendo directamente  $y_3$  en la ecuación de onda. El resultado es la expresión matemática del principio de superposición. Si dos ondas cualesquiera satisfacen la ecuación de onda, su suma también satisface la misma ecuación de onda.

### EJEMPLO 16.1 | La superposición y la ecuación de onda

**Demostrar que si las funciones  $y_1$  y  $y_2$  satisfacen la ecuación de onda**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{ecuación 15.9b})$$

**la función  $y_3$  de la ecuación 16.1 también la satisfice.**

**Planteamiento del problema** Se sustituye  $y_3$  en la ecuación de onda, teniendo en cuenta que  $y_1$  y  $y_2$  también son funciones de onda, es decir, que satisfacen la ecuación de onda. Finalmente, se demuestra que la combinación lineal  $C_1 y_1 + C_2 y_2$  es una función de onda.

1. Sustituir la expresión de  $y_3$  de la ecuación 16.1 en el miembro de la izquierda de la ecuación de onda y separar los términos en función de  $y_1$  e  $y_2$ :

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

2. Escribir la ecuación de onda para  $y_1$  e  $y_2$ :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

3. Sustituir el resultado del paso 2 en el paso 1 y sacar factor común:

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = C_1 \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \left( C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \right)$$

4. Introducir las constantes dentro de las derivadas y expresar la suma de las derivadas como la derivada de la suma:

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial^2 C_1 y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 C_2 y_2}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_1 y_1 + C_2 y_2)$$

5. El argumento de la derivada del paso 4 es  $y_3$ :

$$\therefore \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2}$$

## Interferencia de ondas armónicas

El resultado de la superposición de ondas armónicas de la misma frecuencia depende de la diferencia de fase  $\delta$  entre las ondas. Sea  $y_1(x,t)$  la función de onda de una onda armónica que se propaga hacia la derecha con amplitud  $A$ , frecuencia angular  $\omega$  y número de onda  $k$ :

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad (16.2)$$

Para esta función de onda, hemos escogido cuando la fase sea cero.<sup>1</sup> Si tenemos también en movimiento una segunda onda armónica hacia la derecha con la misma amplitud, frecuencia y número de ondas, la ecuación general para esta función de onda puede escribirse

$$y_2 = A \sin(kx - \omega t + \delta) \quad (16.3)$$

en donde  $\delta$  es la constante de fase. Las dos ondas descritas por las ecuaciones 16.2 y 16.3 difieren en fase en  $\delta$ . La figura 16.2 muestra una representación de las dos funciones de onda para un tiempo fijo en función de la posición. La onda resultante es la suma

$$y_1 + y_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \delta) \quad (16.4)$$

La ecuación 16.4 puede simplificarse utilizando la identidad trigonométrica

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 2 \cos \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) \sin \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \quad (16.5)$$

En este caso  $\theta_1 = kx - \omega t$  y  $\theta_2 = kx - \omega t + \delta$ , de modo que

$$\frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) = -\frac{1}{2} \delta$$

y

$$\frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) = kx - \omega t + \frac{1}{2} \delta$$

Así, la ecuación 16.4 toma la forma

$$y_1 + y_2 = [2A \cos \frac{1}{2} \delta] \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2} \delta) \quad (16.6)$$

SUPERPOSICIÓN DE DOS ONDAS DE IGUAL AMPLITUD Y FRECUENCIA

en donde hemos utilizado  $\cos(-\frac{1}{2}\delta) = \cos \frac{1}{2}\delta$ . Vemos que el resultado de la superposición de dos ondas armónicas de igual frecuencia y número de ondas es otra onda armónica que tiene la misma frecuencia y el mismo número de onda. La onda resultante tiene una amplitud igual a  $2A \cos \frac{1}{2}\delta$  y una fase igual a la mitad de la diferencia entre las fases de las ondas originales. La superposición de dos o más ondas de frecuencia igual o muy parecida que da

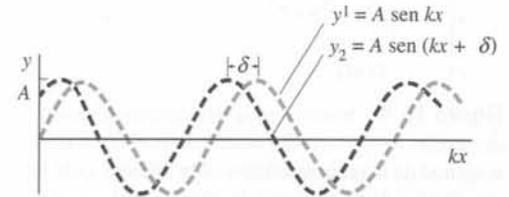
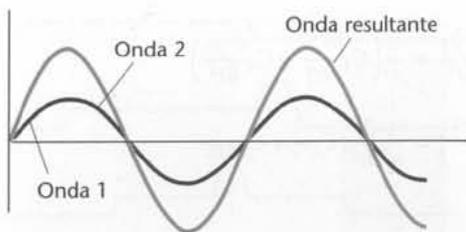
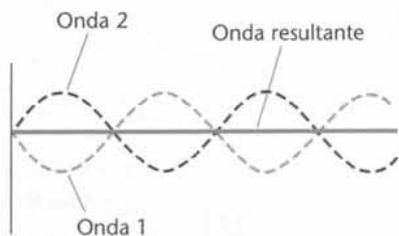


Figura 16.2 Desplazamiento en función de la posición para dos ondas armónicas que tienen la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda pero que difieren en fase en  $\delta$ .

<sup>1</sup> Esta selección es conveniente, pero no es obligatoria. Si, por ejemplo, escogemos  $t = 0$  cuando el desplazamiento sea máximo en  $x = 0$ , deberíamos escribir  $y_1 = A \cos(kx - \omega t) = \sin(kx - \omega t - \pi/2)$ .



**Figura 16.3** Interferencia constructiva. Cuando dos ondas están en fase, la amplitud de la onda resultante es la suma de las amplitudes de las ondas individuales.



**Figura 16.4** Interferencia destructiva. Cuando dos ondas tienen una diferencia de fase de  $\pi$ , la amplitud de la onda resultante es la diferencia de las amplitudes de las ondas individuales. Si las ondas originales tienen amplitudes iguales, se anulan completamente.

un patrón de intensidad observable se denomina **interferencia**. En este caso, la intensidad, que es proporcional al cuadrado de la amplitud, es uniforme. Si las dos ondas están en fase, la diferencia de fase es  $\delta = 0$ ,  $\cos 0 = 1$  y la amplitud de la onda resultante es  $2A$ . La interferencia de dos ondas en fase se llama **interferencia constructiva** (figura 16.3). Si están desfasadas  $180^\circ$ ,  $\delta = \pi$  rad,  $\cos(\pi/2) = 0$  y la amplitud de la onda resultante es nula. La interferencia de dos ondas desfasadas  $180^\circ$  se llama **interferencia destructiva** (figura 16.4).

**Ejercicio** Dos ondas con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud se están moviendo en la misma dirección. (a) Si difieren en fase en  $\pi/2$  y cada una de ellas tiene una amplitud de 4,0 cm, ¿cuál es la amplitud de la onda resultante? (b) ¿Para qué diferencia de fase  $\delta$  la amplitud resultante sería igual a 4 cm? (Respuestas (a) 5,66 cm, (b)  $120^\circ$  o  $240^\circ$ .)

**Pulsaciones (o batidos)** La interferencia de dos ondas sonoras de frecuencias ligeramente distintas produce el interesante fenómeno de las **pulsaciones** o **batidos**. Consideremos dos ondas sonoras con frecuencias angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  que poseen la misma amplitud de la presión  $p_0$ . ¿Qué es lo que oímos? En un punto fijo, la dependencia espacial de la onda contribuye simplemente en la constante de fase, de modo que podemos despreocuparla. La presión en el oído debida a una de las ondas, será una función armónica simple de la forma

$$p_1 = p_0 \text{ sen } \omega_1 t$$

o bien

$$p_2 = p_0 \text{ sen } \omega_2 t$$

en donde hemos escogido funciones seno por conveniencia y hemos supuesto que las dos ondas están en fase en el instante  $t = 0$ . Usando la siguiente identidad trigonométrica para la suma de dos funciones seno,

$$\text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta_2 = 2 \cos \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \text{ sen } \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

se obtienen la onda resultante

$$p = p_0 \text{ sen } \omega_1 t + p_0 \text{ sen } \omega_2 t = 2p_0 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \text{ sen } \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$$

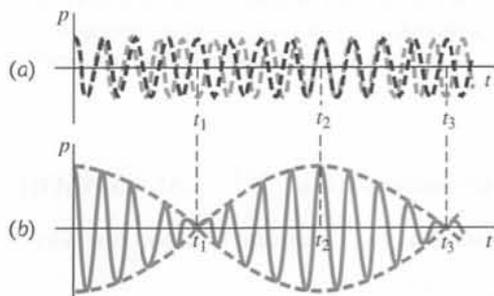
Si ponemos  $\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  que es la frecuencia angular media y  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  que corresponde a la diferencia de las frecuencias angulares, la función de onda resultante toma la forma

$$p = 2p_0 \cos \left( \frac{1}{2} \Delta\omega t \right) \text{ sen } \omega_m t = 2p_0 \cos \left( 2\pi \frac{1}{2} \Delta f t \right) \text{ sen } 2\pi f_m t \quad (16.7)$$

en donde  $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi)$  y  $f_m = \omega_m/(2\pi)$ .

La figura 16.5 muestra una representación gráfica de la variación de presión en función del tiempo. Las ondas están inicialmente en fase y se suman constructivamente en el instante  $t = 0$ . Como sus frecuencias no son iguales, las ondas van desfasándose gradualmente y en el instante  $t_1$  ya tienen un desfase de  $180^\circ$  e interfieren destructivamente<sup>1</sup>. Al cabo de un intervalo de tiempo igual (tiempo  $t_2$  en la figura), las dos ondas estarán de nuevo en fase e interferirán constructivamente. Cuanto mayor sea la diferencia entre las frecuencias de ambas ondas, más pronto quedarán desfasadas y volverán a ponerse en fase de nuevo.

El tono que percibe el oído tiene la frecuencia media  $f_m = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$  con una amplitud de  $2p_0 \cos(2\pi \frac{1}{2} \Delta f t)$ . (Para algunos valores de  $t$  la amplitud es negativa. Como  $-\cos \theta = \cos(\theta + \pi)$ , un cambio de signo de la amplitud equivale a un cambio de fase de  $180^\circ$ .) La amplitud oscila con frecuencia  $\frac{1}{2}\Delta f$ . Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, el sonido será fuerte siempre que la amplitud sea máxima o mínima. Por consi-



**Figura 16.5** Batidos o pulsaciones. (a) Dos ondas de frecuencias diferentes pero próximas que están en fase en  $t_0 = 0$  están desfasadas en  $180^\circ$  un cierto instante después  $t_1$ . En otro instante aún más tarde  $t_2$ , vuelven a estar en fase. (b) Resultante de las ondas indicadas en (a). La frecuencia de la onda resultante es casi la misma que la de las dos ondas originales, pero la amplitud se encuentra modulada como indica la curva a trazos. La amplitud es máxima en los instantes  $t_0$  y  $t_2$  y nula en los instantes  $t_1$  y  $t_3$ .

<sup>1</sup> La anulación completa sólo se produce cuando son iguales las amplitudes de presión de ambas ondas.

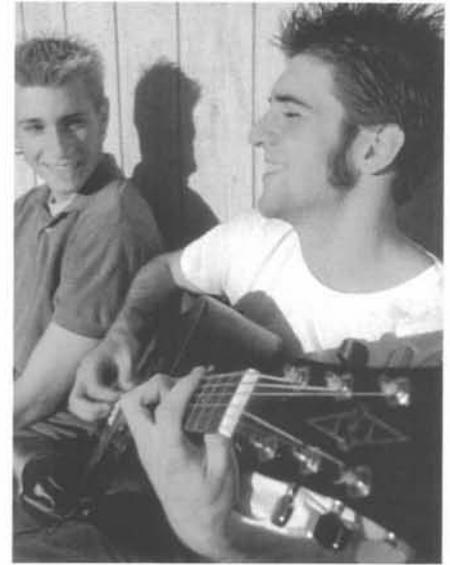
guiente, la frecuencia de esta variación de intensidad, llamada **frecuencia de batido** es igual al doble de  $\frac{1}{2}\Delta f$ .

$$f_{\text{batido}} = \Delta f \quad (16.8)$$

FRECUENCIA DE BATIDO

La frecuencia de batido es igual a la diferencia de las frecuencias individuales de las dos ondas. Por ejemplo, si golpeamos simultáneamente dos diapasones que tienen frecuencias de 241 Hz y 243 Hz, se oirá un tono pulsante con la frecuencia media de 242 Hz que tendrá una intensidad máxima dos veces por segundo; es decir, la frecuencia de batido será 2 Hz. El oído puede detectar hasta 15 ó 20 batidos por segundo. Por encima de estas frecuencias, las fluctuaciones de la intensidad son demasiado rápidas para ser oídas.

El fenómeno descrito se utiliza a menudo para comparar una frecuencia no conocida con otra conocida, como cuando se utiliza un diapason para afinar la cuerda de un piano. Los pianos se afinan haciendo sonar al mismo tiempo el diapason y la nota del piano y actuando sobre la cuerda del instrumento hasta que las pulsaciones desaparecen (o son mínimas), lo que indica que la diferencia en frecuencia de los dos generadores de sonido es muy pequeña.



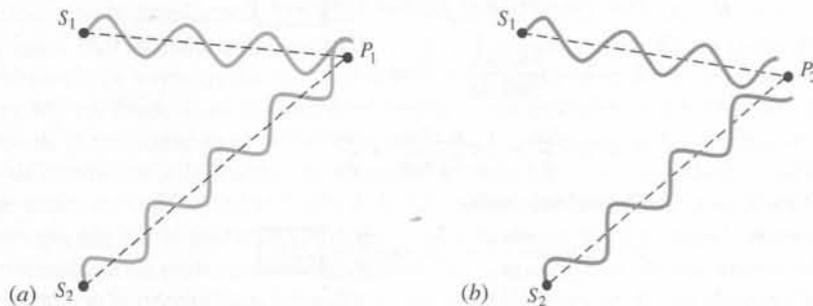
### EJEMPLO 16.2 | Afinando una guitarra

Cuando se golpea un diapason de 440 Hz (nota La) al mismo tiempo que se pulsa la cuerda ligeramente desafinada de una guitarra que debe dar la nota La se escuchan 3 pulsaciones por segundo. Después que la cuerda de la guitarra se tensa un poco más para aumentar su frecuencia, las pulsaciones aumentan a 6 por segundo. ¿Cuál era la frecuencia de la cuerda de guitarra antes de tensar la cuerda?

**Planteamiento del problema** Inicialmente se oyen 3 pulsaciones por segundo, por lo tanto la frecuencia original de la cuerda de la guitarra es o bien 443 Hz o bien 437 Hz. Supongamos que la frecuencia inicial sea 437 Hz. Aumentando lentamente la tensión de la cuerda y, por lo tanto, la frecuencia, se disminuye la frecuencia de pulsación.

La frecuencia de la pulsación aumenta si aumenta la tensión de la cuerda de  $f = f_{\text{La}} + f_{\text{batido}} = 440 \text{ Hz} + 3 \text{ Hz} = \boxed{443 \text{ Hz}}$  3 a 6 pulsaciones por segundo, lo cual indica que la frecuencia es 443 Hz.

**Diferencia de fase debida a la diferencia de trayectos** Una causa corriente que origina una diferencia de fase entre dos ondas es la diferencia de longitudes de los trayectos que deben recorrer las ondas desde su fuente o foco hasta el punto donde se produce la interferencia. Supóngase que tenemos dos focos que están emitiendo ondas armónicas de la misma frecuencia y longitud de onda y que están oscilando en fase; es decir, cuando sale de un foco una cresta positiva, sale también al mismo tiempo una cresta positiva del otro foco. Si la diferencia entre los trayectos hasta un punto determinado es una longitud de onda, como es el caso de la figura 16.6a, o es un número entero de longitudes de onda, la interferencia es constructiva. Si la diferencia de trayectos es una semilongitud de onda o un número impar de semilongitudes de onda, como en la figura 16.6b, el máximo de una onda coincidirá con el mínimo de la otra y la interferencia es destructiva.



**Figura 16.6** Las ondas en fase procedentes de dos focos  $S_1$  y  $S_2$ , que están en fase se encuentran en un punto  $P_1$ . (a) Cuando la diferencia de trayectos es de una longitud de onda  $\lambda$ , las ondas están en fase en  $P_1$  e interfieren constructivamente. (b) Cuando la diferencia de trayectos es  $\frac{1}{2}\lambda$ , las ondas en  $P_2$  están desfasadas  $180^\circ$  y por lo tanto interfieren destructivamente. Si las ondas son de la misma amplitud en  $P_2$ , ambas se anularán totalmente en este punto.



Las funciones de onda para las ondas de dos fuentes que oscilan en fase pueden escribirse en la forma

$$p_1 = p_0 \text{sen}(kx_1 - \omega t)$$

y

$$p_2 = p_0 \text{sen}(kx_2 - \omega t)$$

La diferencia de fase para estas dos funciones de onda es

$$\delta = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k(x_2 - x_1) = k\Delta x$$

Utilizando  $k = 2\pi/\lambda$ , se tiene

$$\delta = k \Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (16.9)$$

DIFERENCIA DE FASE DEBIDA A LA DIFERENCIA DE TRAYECTOS

### EJEMPLO 16.3 | Una onda sonora resultante

Dos focos sonoros oscilan en fase. En un punto a 5,00 m de un foco y a 5,17 m del otro, la amplitud del sonido procedente de cada foco por separado es  $p_0$ . Hallar la amplitud de la onda resultante si la frecuencia de las ondas sonoras es (a) 1000 Hz, (b) 2000 Hz y (c) 500 Hz. (Utilizar 340 m/s como velocidad del sonido.)

**Planteamiento del problema** La amplitud de la onda resultante debida a la superposición de dos ondas cuya diferencia de fase es  $\delta$  viene dada por  $A = 2p_0 \cos \frac{1}{2}\delta$  (ecuación 16.6), en donde  $p_0$  es la amplitud de una cualquiera de las ondas y  $\delta = 2\pi \Delta x/\lambda$  es la diferencia de fase. Como ya conocemos la diferencia de trayectos  $\Delta x = 5,17 \text{ m} - 5 \text{ m} = 0,17 \text{ m}$ , sólo necesitamos determinar la longitud de onda  $\lambda$ .

(a) 1. La longitud de onda es igual a la velocidad dividida por la frecuencia. Calcular  $\lambda$  para  $f = 1000 \text{ Hz}$ :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{1000 \text{ Hz}} = 0,34 \text{ m}$$

2. Para  $\lambda = 0,34 \text{ m}$  la diferencia de trayectos ( $\Delta x = 0,17 \text{ m}$ ) es  $\frac{1}{2}\lambda$ , de modo que se producirá interferencia destructiva. Usar este valor de  $\lambda$  para calcular la diferencia de fase  $\delta$  y utilizar  $\delta$  para determinar la amplitud  $A$ :

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{0,17 \text{ m}}{0,34 \text{ m}} = \pi$$

por lo tanto

$$A = 2p_0 \cos \frac{1}{2}\delta = 2p_0 \cos \frac{\pi}{2} = \boxed{0}$$

(b) 1. Calcular  $\lambda$  para  $f = 2000 \text{ Hz}$ :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{2000 \text{ Hz}} = 0,17 \text{ m}$$

2. Para  $\lambda = 0,17 \text{ m}$ , la diferencia de trayectos es igual a  $\lambda$  y la interferencia es constructiva. Calcular la diferencia de fase y la amplitud:

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{0,17 \text{ m}}{0,17 \text{ m}} = 2\pi$$

y substituyendo en la expresión de la amplitud

$$A = 2p_0 \cos \frac{1}{2}\delta = 2p_0 \cos \pi = \boxed{-2p_0}$$

(c) 1. Calcular  $\lambda$  para  $f = 500 \text{ Hz}$ :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{500 \text{ Hz}} = 0,68 \text{ m}$$

2. Calcular la diferencia de fase y amplitud:

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{0,17 \text{ m}}{0,68 \text{ m}} = \frac{\pi}{2}$$

La amplitud resulta

$$A = 2p_0 \cos \frac{1}{2}\delta = 2p_0 \cos \frac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{2}p_0}$$

### EJEMPLO 16.4 | Intensidad sonora de dos altavoces

Dos altavoces enfrentados entre sí a una distancia de 180 cm están accionados por un oscilador común de audio a 680 Hz. Localizar los puntos entre los altavoces a lo largo de la línea que los une, para los cuales la intensidad del sonido es (a) máxima y (b) mínima. (Despreciar la variación de intensidad de cada altavoz con la distancia y usar 340 m/s para la velocidad del sonido.)

**Planteamiento del problema** Elegimos como origen el punto medio entre los altavoces (figura 16.7). Como este punto equidista de los altavoces será un punto de intensidad máxima. Si nos movemos una distancia  $x$  hacia uno de los altavoces la diferencia de trayectos es  $2x$ . La intensidad será máxima cuando  $2x = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$  y mínimo cuando  $2x = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \dots$

(a) 1. La intensidad será máxima cuando  $2x$  sea igual a un número entero de longitudes de onda:  $2x = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \pm 3\lambda, \dots$

2. Calcular la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{680 \text{ Hz}} = 0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

3. Despejar  $x$  utilizando la longitud de onda calculada

$$x = \pm \frac{1}{2}\lambda, \pm \lambda, \pm \frac{3}{2}\lambda, \dots$$

$$= \boxed{0, \pm 25 \text{ cm}, \pm 50 \text{ cm}, \pm 75 \text{ cm}}$$

(b) 1. La intensidad será mínima cuando  $2x$  sea igual a un número impar de semilongitudes de onda:

$$2x = \pm \frac{1}{2}\lambda, \pm \frac{3}{2}\lambda, \pm \frac{5}{2}\lambda, \dots$$

2. Despejar  $x$  utilizando la longitud de onda calculada:

$$x = \pm \frac{1}{4}\lambda, \pm \frac{3}{4}\lambda, \pm \frac{5}{4}\lambda, \dots$$

$$= \boxed{\pm 12,5 \text{ cm}, \pm 37,5 \text{ cm}, \pm 62,5 \text{ cm}, 87,5 \text{ cm}}$$

**Observaciones** Los máximos y mínimos serán máximos y mínimos relativos, ya que la amplitud del altavoz más próximo será ligeramente mayor que la correspondiente al altavoz más alejado. Solo se han utilizado siete valores de  $x$  para la intensidad máxima y ocho valores para la intensidad mínima ya que valores adicionales estarán fuera del alcance de un altavoz.

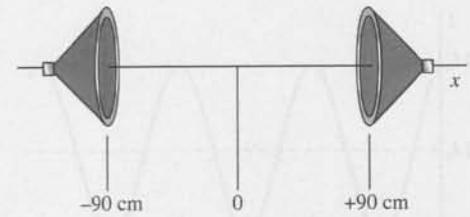
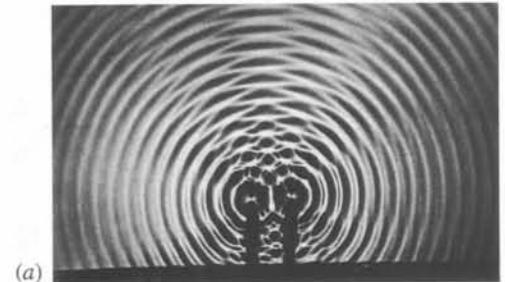


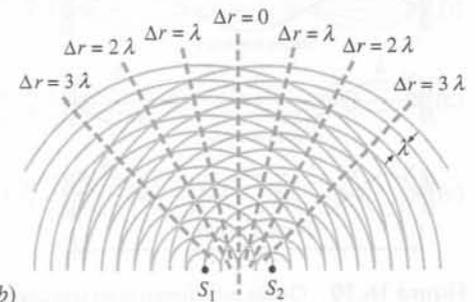
Figura 16.7

La figura 16.8a muestra el conjunto de las ondas producidas por dos focos puntuales en una cubeta experimental que están oscilando en fase, produciendo cada uno de ellos ondas circulares. Los frentes de onda que se observan tienen todos la misma fase y están separados por una longitud de onda. Podemos construir un esquema semejante con un compás dibujando arcos circulares que representen las crestas de las ondas de cada foco en un instante de tiempo determinado (figura 16.8b). En los puntos en donde se cortan o solapan las crestas procedentes de cada foco, las ondas interfieren constructivamente. En estos puntos, los trayectos correspondientes a las ondas procedentes de ambos focos son iguales o difieren en un número entero de longitudes de onda. Las líneas de trazos indican los puntos que son equidistantes de los focos o cuyas diferencias de trayectos son una, dos o tres longitudes de onda. En cada punto de cualquiera de estas líneas la interferencia es constructiva, de modo que éstas son líneas de interferencia máxima. Entre las líneas de interferencia máxima hay líneas de interferencia mínima. En una línea de interferencia mínima, la longitud desde cualquier punto que esté en ella hasta cada uno de los dos focos difiere en un número impar de semilongitudes de onda. En la región donde las dos ondas se superponen, la amplitud de la onda resultante viene dada por  $A = 2p_0 \cos \frac{1}{2} \delta$ , siendo  $p_0$  la amplitud de cada onda por separado y estando  $\delta$  relacionada con la diferencia de trayectos  $\Delta r$  mediante  $\delta = 2\pi \Delta r / \lambda$  (ecuación 16.9).

La figura 16.9 muestra la intensidad de la onda resultante a partir de dos focos, en función de la diferencia de trayectos  $\Delta x$ . En los puntos en que la interferencia es constructiva, la intensidad es  $4I_0$ , en donde  $I_0$  es la intensidad debida a una cualquiera de las fuentes, ya que la amplitud de la resultante es el doble de la amplitud de una de las ondas cualesquiera. En los puntos de interferencia destructiva, la intensidad es cero. La intensidad media, indicada por la línea de trazos de la figura, es el doble de la intensidad correspondiente a la de un solo foco, resultado exigido por la conservación de la energía. Podemos ver que, como consecuencia de la interferencia de las ondas procedentes de dos focos, la energía se redistribuye en el espacio. Puede mostrarse la interferencia entre dos ondas sonoras alimentando dos altavoces separados

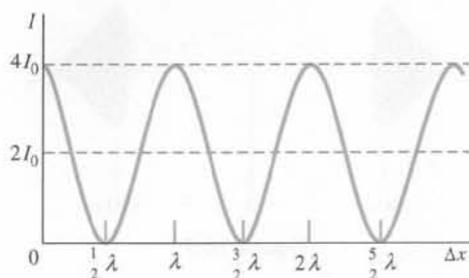


(a)



(b)

**Figura 16.8** (a) Ondas de agua producidas por dos focos puntuales que oscilan en fase en una cubeta de ondas. (b) Construcción geométrica del patrón de interferencia de (a). Las líneas de trazos indican los puntos para los cuales las longitudes de los trayectos difieren en un número entero de longitudes de onda.



**Figura 16.9** Intensidad en función de la diferencia de trayectos para dos fuentes que están en fase.  $I_0$  es la intensidad de cada fuente individualmente.

con el mismo amplificador (de modo que estén siempre en fase) que recibe una señal de audio-frecuencia. Moviéndose por la habitación es posible detectar por el oído las posiciones de interferencia constructiva y destructiva.<sup>1</sup> Esta experiencia ha de realizarse en cámaras insonorizadas, donde se minimizan las reflexiones (los ecos) de las paredes del recinto.

**Coherencia** No es necesario que dos focos estén en fase para que produzcan un patrón de interferencia. Considérense dos focos que están desfasados en  $180^\circ$ . (Dos focos sonoros que están en fase pueden convertirse en dos focos desfasados en  $180^\circ$ , intercambiando simplemente las conexiones de uno de los altavoces.) El patrón de intensidades es el mismo que el de la figura 16.9 excepto que los máximos y mínimos están intercambiados. En los puntos en que la diferencia de trayectos es un número impar de semilongitudes de onda, las ondas están ahora en fase porque la diferencia de fase de  $180^\circ$  se ve contrarrestada por la diferencia de fase de  $180^\circ$  originada por la diferencia entre los trayectos.

Se producirán patrones de interferencia semejantes, mediante dos focos cuya diferencia de fase sea constante a lo largo del tiempo. Dos focos que están en fase o tienen una diferencia de fase constante se dice que son focos o **fuentes coherentes**. Es fácil conseguir fuentes coherentes de ondas en el agua de una cubeta de ondas si se accionan ambas fuentes con el mismo motor. Se obtienen focos sonoros coherentes accionando dos altavoces con la misma fuente de señal y el mismo amplificador.

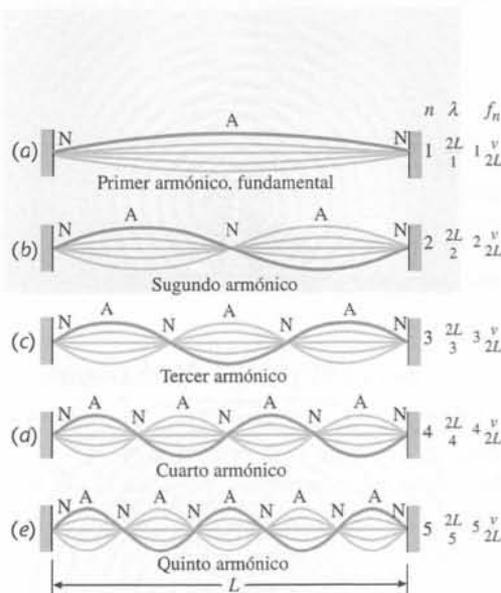
Las fuentes de ondas cuya diferencia de fase no es constante a lo largo del tiempo, sino que varía aleatoriamente, se denominan **fuentes incoherentes**. Existen muchos ejemplos de fuentes incoherentes, como dos altavoces alimentados por amplificadores diferentes o dos violines tocados por dos violinistas diferentes. En el caso de fuentes incoherentes, la interferencia en un punto concreto varía rápidamente pasando de constructiva a destructiva, y viceversa, y no se observa ningún patrón de interferencia. La intensidad resultante de las ondas originadas por dos o más fuentes incoherentes es simplemente la suma de las intensidades debidas a las fuentes aisladas.

## 16.2 Ondas estacionarias

Cuando las ondas están confinadas en el espacio, como las ondas de una cuerda de piano, las ondas sonoras de un tubo de órgano o las ondas luminosas de un láser se producen reflexiones en ambos extremos y, por consiguiente, existen ondas que se mueven en los dos sentidos que se combinan de acuerdo con el principio de superposición. Para una cuerda o tubo determinados, existen ciertas frecuencias para las cuales la superposición da un patrón de vibración estacionario denominado **onda estacionaria**. Este tipo de ondas tiene aplicaciones importantes en instrumentos musicales y en teoría cuántica.

### Ondas estacionarias en cuerdas

**Cuerda fija por ambos extremos** Si fijamos los dos extremos de una cuerda y movemos una parte de la misma hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple de pequeña amplitud, resulta que a ciertas frecuencias se obtienen unos patrones de ondas estacionarias semejantes a los indicados en la figura 16.10. Las frecuencias que producen estos patrones se denominan **frecuencias de resonancia** del sistema de la cuerda. Cada una de estas frecuencias y la función de onda que la acompaña se llama **modo de vibración**. La frecuencia de resonancia más baja se denomina frecuencia fundamental  $f_1$  y produce el patrón de ondas estacionarias indicado en la figura 16.10a que recibe el nombre de **modo fundamental** de vibración o **primer armónico**. La segunda frecuencia más baja  $f_2$  produce el patrón indicado en la figura 16.10b. Este modo de vibración tiene una frecuencia que es el doble de la frecuencia fundamental y se denomina segundo armónico. La tercera frecuencia más baja  $f_3$  es tres veces la fundamental y produce el patrón del tercer armónico indicado en la figura 16.10c. El conjunto de todas las frecuencias resonantes de la cuerda se denomina **espectro de frecuencias de resonancia**.



**Figura 16.10** Ondas estacionarias en una cuerda fija por ambos extremos. Los puntos marcados con A son vientres o antinodos y los señalados con N son nodos. En general, el armónico  $n$ ésimo tiene  $n$  antinodos.

<sup>1</sup> En esta demostración, la intensidad sonora no será totalmente nula en los puntos de interferencia destructiva de las ondas sonoras que proceden directamente de los altavoces, debido a las reflexiones del sonido en las paredes y otros objetos presentes en la habitación.

No todas las frecuencias de resonancia reciben la denominación de armónicos sino únicamente aquellas del espectro de frecuencias resonantes que son un múltiplo entero de la frecuencia fundamental. Muchos sistemas tienen un espectro de ondas resonantes en donde las frecuencias resonantes no son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (la de menor frecuencia). Se denomina primer sobretono a la primera frecuencia después de la fundamental, el segundo sobretono a la segunda y así sucesivamente. Esta denominación tiene su origen en la terminología usada en la teoría musical, donde los armónicos son los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

Obsérvese en la figura 16.10 que para cada armónico existen ciertos puntos sobre la cuerda que no se mueven. Por ejemplo, el punto medio en la figura 16.10*b* no se mueve. Estos puntos se denominan **nodos**. En el punto intermedio entre cada par de nodos existe un punto de amplitud de vibración máxima denominado **vientre o antinodo**. Como es natural, los dos extremos fijos de la cuerda son nodos. (Si se sujeta uno de los extremos a un diapasón u otro vibrador en lugar de estar fijo, seguirá siendo todavía aproximadamente un nodo porque la amplitud de vibración en dicho extremo será mucho menor que la amplitud en los antinodos.) Obsérvese que el fundamental o primer armónico tiene un antinodo, el segundo armónico tiene dos antinodos y así sucesivamente.

Podemos relacionar las frecuencias de resonancia con la velocidad de onda en la cuerda y la longitud de la misma. La distancia entre un nodo y el antinodo más próximo es un cuarto de longitud de onda. Por lo tanto, la longitud de la cuerda  $L$  es igual a la mitad de la longitud de onda del primer armónico (figura 16.11) y, como revela la figura 16.10,  $L$  es igual a dos medias longitudes de onda para el segundo armónico, tres medias longitudes de onda para el tercer armónico, etc. En general, si  $\lambda_n$  es la longitud de onda del armónico  $n$  se cumple

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.10)$$

CONDICIÓN DE ONDA ESTACIONARIA CON AMBOS EXTREMOS FIJOS

Este resultado se conoce como **condición de onda estacionaria**. Podemos hallar la frecuencia del  $n$ -ésimo armónico a partir del hecho de que la velocidad de la onda  $v$  es igual a la frecuencia  $f_n$  multiplicada por la longitud de onda. Así

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2L/n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

o bien

$$f_n = n \frac{v}{2L} = n f_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.11)$$

FRECUENCIAS DE RESONANCIA, AMBOS EXTREMOS FIJOS

en donde  $f_1 = v/2L$  es la frecuencia fundamental.

Un modo sencillo de recordar las frecuencias de resonancia dadas por la ecuación 16.11 es hacer el esquema de la figura 16.10 para reconstruir uno mismo la condición de onda estacionaria  $\lambda_n = 2L/n$  y luego utilizar  $f = v/\lambda_n$ .

SUGERENCIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Podemos entender la producción de ondas estacionarias en función de la resonancia. Consideremos una cuerda de longitud  $L$  que está sujeta por un extremo a un diapasón en vibración (figura 16.12), mientras que tiene fijo el otro extremo. La primera onda producida por el diapasón vibrante recorre la cuerda hasta que a una distancia  $L$  se encuentra con el extremo fijo, en donde se refleja e invierte. Entonces regresa hacia el diapasón, y se refleja de nuevo en éste. El tiempo total para recorrer la distancia  $2L$  es  $2L/v$ . Si este tiempo es igual al periodo del diapasón vibrante, la onda reflejada dos veces se solapa exactamente a la

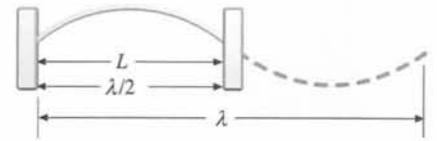


Figura 16.11

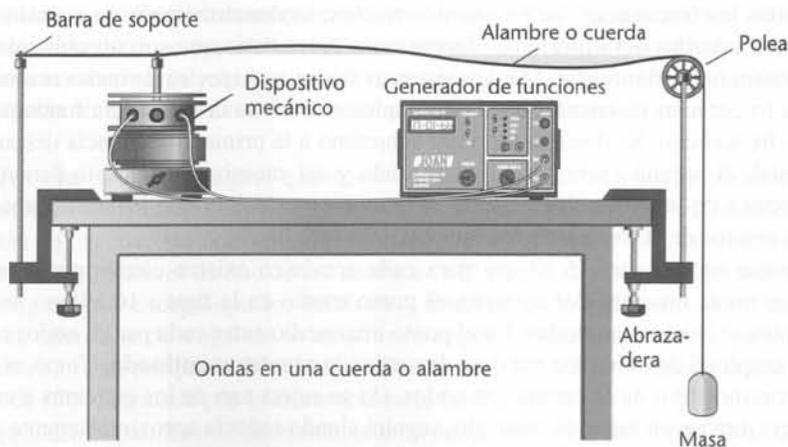


Figura 16.12

segunda onda producida por el diapasón y las dos ondas interferirán constructivamente, lo que significa que se sumarán para producir una onda que tendrá una amplitud doble que la de una de ellas. La onda combinada recorrerá la cuerda hasta el extremo fijo y retornará añadiéndose a la tercera onda producida por el diapasón y así sucesivamente. Así, el diapasón entra en resonancia con la cuerda. La longitud de onda es igual a  $2L$  y la frecuencia es  $v/(2L)$ .

La resonancia también se da en otras frecuencias. El diapasón entra en resonancia con la cuerda si el tiempo que le cuesta a la primera onda moverse una distancia  $2L$  es igual al producto  $nT_n$  en donde  $n$  es un número entero y  $T_n$  es el periodo del diapasón. Es decir, si  $2L/v = nT_n$ , donde  $2L/v$  es el tiempo de ida y vuelta de una onda. Así,

$$f_n = \frac{1}{T_n} = n \frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

es la condición de resonancia. Este resultado es el mismo que encontramos ajustando un número entero de semilongitudes de onda en la distancia  $L$ . Diversos efectos amortiguadores tales como la pérdida de energía durante la reflexión y la flexibilidad imperfecta de la cuerda limitan la amplitud máxima que puede alcanzarse.

Las frecuencias de resonancia dadas por la ecuación 16.11 se denominan también **frecuencias naturales** de la cuerda. Cuando la frecuencia del diapasón no coincide con ninguna de las frecuencias naturales de la cuerda vibrante, no se producen ondas estacionarias. Después de que la primera onda ha recorrido la distancia  $2L$  y se ha reflejado en el diapasón, su fase es diferente de la que posee la onda que en ese momento está generando el diapasón (figura 16.13). Cuando esta onda resultante ha recorrido la distancia  $2L$  y se refleja de nuevo en el dia-



**Figura 16.13** Ondas en una cuerda producidas por un dispositivo mecánico cuya frecuencia no está en resonancia con las frecuencias naturales de la cuerda. La onda que abandona el diapasón por primera vez (línea de trazos roja) no está en fase con las ondas que se han reflejado dos o más veces (líneas grises), y éstas no están en fase entre ellas, por lo que no existe crecimiento de amplitud. La onda resultante (línea negra) tiene aproximadamente la misma amplitud que las ondas individuales, que coinciden aproximadamente con la amplitud del dispositivo.



El viento turbulento produjo ondas estacionarias en el puente colgante de Tacoma Narrows, produciendo su derrumbamiento el 7 de noviembre de 1940, sólo cuatro meses después de haber sido abierto al tráfico.

pasón, tendrá una fase que será en general diferente de la que posee la siguiente onda generada en el diapasón. En algunos casos, la nueva onda resultante tendrá una amplitud mayor que la primera, mientras que en otros casos la nueva amplitud será menor. En promedio, sin embargo, la amplitud no aumentará sino que permanecerá en el orden de magnitud de la amplitud de la primera onda generada, que es la amplitud del diapasón y es muy pequeña en comparación con las amplitudes que se obtienen a las frecuencias de resonancia.

La resonancia de las ondas estacionarias es análoga a la resonancia de un oscilador armónico simple con una fuerza impulsora armónica. Sin embargo, un oscilador posee sólo una frecuencia natural, mientras que una cuerda vibrante posee una secuencia de frecuencias naturales que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Esta secuencia se denomina **serie armónica**.

### EJEMPLO 16.5 | Toca un La

Una cuerda se estira entre dos soportes fijos distantes 0,70 m entre sí y se ajusta la tensión hasta que la frecuencia fundamental de la cuerda es la nota La de 440 Hz. ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en la cuerda?

**Planteamiento del problema** La velocidad de la onda es igual al producto de la frecuencia por la longitud de onda. Si la cuerda está fija en los dos extremos, en el modo fundamental hay un único antinodo en el centro de la cuerda. Así la longitud de la cuerda coincide con la mitad de la longitud de onda.

1. La velocidad de la onda está relacionada con la frecuencia y la longitud de onda:  $v = f_1 \lambda_1$
2. La longitud de onda del modo fundamental es el doble de la longitud de la cuerda:  $L = \lambda_1/2$
3. Utilizar esta longitud de onda y la frecuencia conocida para determinar la velocidad:  $v = f_1 \lambda_1 = f_1 2L = (440 \text{ Hz}) \times 2(0,7 \text{ m}) = \boxed{616 \text{ m/s}}$



**Ejercicio** La velocidad de las ondas transversales en una cuerda tensa es de 200 m/s. Si la cuerda tiene 5 m de largo, hallar las frecuencias del armónico fundamental y del segundo y tercer armónicos. (Respuesta  $f_1 = 20 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 40 \text{ Hz}$ ,  $f_3 = 60 \text{ Hz}$ .)

### EJEMPLO 16.6 | Probando cuerdas de piano

Durante el verano un estudiante encuentra un trabajo en una tienda de música, donde colabora en la construcción de instrumentos musicales. Uno de los trabajos que tiene encomendado es probar la idoneidad del uso de cuerdas de un nuevo material en pianos. Una cuerda tiene una longitud de tres metros y una densidad de masa lineal de 0,0025 kg/m y se le han medido dos frecuencias resonantes consecutivas a 252 Hz y a 336 Hz. Hay que determinar la frecuencia fundamental de la cuerda y comprobar si una cuerda de este nuevo material es adecuada, teniendo en cuenta que si la tensión de la misma sobrepasa los 700 N hay problemas de seguridad.

**Planteamiento del problema** La tensión  $F_T$  se calcula a partir de la expresión  $v = \sqrt{F_T/\mu}$ , en donde la velocidad  $v$  se calcula a partir de  $v = f\lambda$  usando cualquier armónico. La longitud de onda de la onda fundamental es el doble de la longitud de la cuerda. Para calcular la frecuencia fundamental supongamos que el armónico  $n$  corresponde a una frecuencia de 252 Hz. Entonces  $f_n = nf_1$  y  $f_{n+1} = (n+1)f_1$ , en donde  $f_{n+1} = 336 \text{ Hz}$ . De estas dos ecuaciones se despeja  $f_1$ .

1. La tensión está relacionada con la velocidad de propagación de la onda:  $v = \sqrt{F_T/\mu}$  o  $F_T = \mu v^2$
2. Para obtener la velocidad usar la frecuencia fundamental  $f_1$ , con  $\lambda_1 = 2L$ :  $v = f_1 \lambda_1 = f_1(2L)$
3. Para obtener la tensión combinar los dos resultados anteriores:  $F_T = \mu v^2 = \mu f_1^2(2L)^2$
4. Los armónicos consecutivos  $f_n$  y  $f_{n+1}$  están relacionados con la frecuencia fundamental  $f_1$ :  $nf_1 = 252 \text{ Hz}$   
 $(n+1)f_1 = 336 \text{ Hz}$

5. Dividir las dos ecuaciones anteriores permite eliminar  $f_1$  y calcular  $n$ :

$$\frac{n}{n+1} = \frac{252 \text{ Hz}}{336 \text{ Hz}} = 0,75 = \frac{3}{4}$$

$$4n = 3n + 3, \text{ luego } n = 3$$

6. Despejar  $f_1$ :

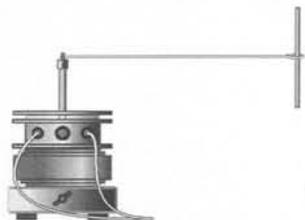
$$f_n = n f_1 \text{ por lo tanto } f_1 = \frac{f_n}{n} = \frac{f_3}{3} = \frac{252 \text{ Hz}}{3} = 84 \text{ Hz}$$

7. Se usa el resultado del paso 3 para calcular  $F_T$ :

$$F_T = \mu f_1^2 (2L)^2 = (0,0025 \text{ kg/m})(84 \text{ Hz})^2 (6 \text{ m})^2 = 635 \text{ N}$$

8. ¿La tensión es segura?

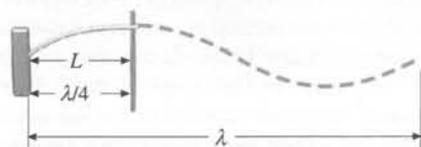
La tensión es inferior a 700 N, con lo cual parece que la cuerda es segura siempre y cuando la tensión no aumente de forma significativa.



**Figura 16.14** Se pueden reproducir las condiciones en que una cuerda está fija por un extremo y libre por el otro atando un anillo que se mueve con toda libertad por una varilla vertical al extremo libre de la cuerda. El otro extremo se ata a un dispositivo mecánico que oscila con una amplitud muy pequeña, con lo cual puede suponerse que el extremo está fijo.

**Cuerda fija por un extremo y libre por el otro** La figura 16.14 muestra una cuerda que tiene un extremo fijo y el otro atado a un anillo sin masa que puede moverse con toda libertad hacia arriba y hacia abajo por una varilla vertical. El movimiento vertical del extremo atado al anillo no tiene ninguna restricción, por lo que podemos decir que es un extremo libre. El anillo no tiene masa, es decir, si la cuerda le ejerce una fuerza vertical finita éste responderá con una aceleración infinita. La aceleración será finita sólo si la pendiente de la cuerda en su extremo libre es horizontal, lo cual significa que es un antinodo. En el modo fundamental de vibración de una cuerda sujeta únicamente por un extremo hay un nodo en un extremo y un antinodo en el otro, por lo tanto  $L = \lambda_1/4$  (figura 16.15). (La distancia de un nodo al siguiente antinodo es  $\lambda/4$ .)

En cada modo de vibración mostrado en la figura 16.16 hay un número impar de cuartos de longitud de onda en toda la cuerda, es decir,  $L = n\lambda_n/4$ , en donde  $n = 1, 3, 5, \dots$ . La condición de onda estacionaria se escribe como



**Figura 16.15**

$$L = n \frac{\lambda_n}{4}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (16.12)$$

CONDICIÓN DE ONDA ESTACIONARIA, UN EXTREMO LIBRE

con lo cual  $\lambda_n = 4L/n$ . En estas condiciones, las frecuencias de resonancia vienen dadas por

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{4L} = n f_1, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (16.13)$$

FRECUENCIAS DE RESONANCIA, UN EXTREMO LIBRE

en donde

$$f_1 = \frac{v}{4L} \quad (16.14)$$

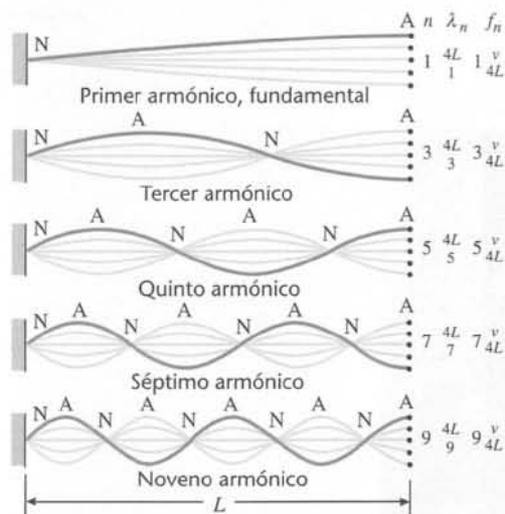
es la frecuencia fundamental. Las frecuencias naturales de este sistema se presentan en las razones 1:3:5:7:..., lo que significa que se han perdido los armónicos pares.

La ecuación 16.13 se esquematiza en la figura 16.16 para recordarnos de un modo sencillo las frecuencias de resonancia y la condición de onda estacionaria utilizando  $f = v_n/\lambda_n$ .

SUGERENCIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**Funciones de onda para ondas estacionarias** Cuando una cuerda vibra en su modo  $n$ , cada punto de la cuerda se mueve con movimiento armónico simple. Su desplazamiento  $y_n(x, t)$  viene dado por

$$y_n(x, t) = A_n(x) \cos(\omega_n t + \delta_n)$$



**Figura 16.16** Ondas estacionarias en una cuerda fija sólo por un extremo. El extremo libre es un vientre o antinodo.

en donde  $\omega_n$  es la frecuencia angular,  $\delta_n$  la constante de fase, que depende de las condiciones iniciales, y  $A_n(x)$  es la amplitud, que depende de la localización del segmento. La función  $A_n(x)$  es la forma de la cuerda cuando  $\cos(\omega_n t + \delta_n) = 1$  (el instante en que la vibración tiene su amplitud máxima). La amplitud de una cuerda vibrando en su armónico  $n$  es

$$A_n(x) = A_n \text{ sen } k_n x \quad (16.15)$$

en donde  $k_n = 2\pi/\lambda_n$  es el número de ondas. Por lo tanto, la función de onda para una onda estacionaria en el armónico  $n$  puede escribirse en la forma

$$y_n(x, t) = A_n \text{ sen } k_n x \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (16.16)$$

Es útil recordar las dos condiciones necesarias para que se den ondas estacionarias, a saber,

1. Cada punto de la cuerda permanece en reposo o bien oscila con movimiento armónico simple. (Los puntos en reposo son los nodos).
2. El movimiento de dos puntos cualesquiera de la cuerda que no sean nodos va en fase o con un desfase de  $180^\circ$ .

CONDICIONES NECESARIAS PARA EL MOVIMIENTO DE UNA ONDA ESTACIONARIA EN UNA CUERDA

## EJEMPLO 16.7 | Ondas estacionarias

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

(a) Las funciones de onda para dos ondas de igual amplitud, frecuencia y longitud de onda, pero que se propagan en sentidos opuestos, vienen dadas por  $y_1 = y_0 \text{ sen}(kx - \omega t)$  e  $y_2 = y_0 \text{ sen}(kx + \omega t)$ . Demostrar que la suma de estas dos ondas es una onda estacionaria. (b) Una onda estacionaria en una cuerda fija por sus dos extremos viene dada por  $y(x, t) = (0,024 \text{ m}) \text{ sen}(52,3 \text{ m}^{-1} x) \cos(480 \text{ s}^{-1} t)$ . Determinar la velocidad de las ondas sobre la cuerda y la distancia entre los nodos para las ondas estacionarias.

**Planteamiento del problema** Para demostrar que la superposición de dos ondas es una onda estacionaria hay que demostrar que la suma algebraica de  $y_1$  e  $y_2$  puede escribirse de una forma semejante a la ecuación 16.16. Para determinar la velocidad de propagación de la onda y la longitud de onda se compara la función de onda dada con la ecuación 16.16 y se identifican el número de onda y la frecuencia angular, y a partir de éstos se calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

### Pasos

1. Escribir la ecuación 16.16. Si la suma de  $y_1$  e  $y_2$  puede escribirse de esta forma, la superposición de las dos ondas es una onda estacionaria.
2. Sumar las dos funciones de onda y usar la identidad trigonométrica  $\text{sen } \theta_1 + \text{sen } \theta_2 = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \cos \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$ .

Nota: Esta expresión coincide con la forma dada por la ecuación 16.16 con  $A = 2y_0$ , por lo tanto, la superposición es una onda estacionaria.

1. Identificar el número de onda y la frecuencia angular.
2. Calcular la velocidad a partir de  $v = \omega/k$ .
3. Determinar la longitud de onda  $\lambda = 2\pi/k$ , y usar esta magnitud para calcular la distancia entre nodos.

### Respuestas

$$y(x, t) = A \text{ sen } kx \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} y &= y_0 \text{ sen}(kx - \omega t) + y_0 \text{ sen}(kx + \omega t) \\ &= 2y_0 \text{ sen } kx \cos \omega t \end{aligned}$$

$$k = 52,3 \text{ m}^{-1}, \quad \omega = 480 \text{ s}^{-1}$$

$$v = 9,18 \text{ m/s}$$

$$\frac{\lambda}{2} = 6,01 \text{ cm}$$

## Ondas sonoras estacionarias

Un tubo de órgano es un ejemplo familiar del empleo de ondas estacionarias en columnas de aire. En estos tubos de tipo lengüeta se dirige un chorro de aire contra el borde afilado de una abertura (punto A en la figura 16.17). El movimiento turbulento complicado del aire cerca de dicho borde crea vibraciones en la columna de aire. Las frecuencias de resonancia del tubo dependen de su longitud y de que su extremo esté abierto o cerrado.



**Figura 16.17** Tubo de órgano de lengüeta. Se sopla una corriente de aire contra el borde originando un movimiento turbulento del aire cerca de A que excita ondas estacionarias en el tubo. Existe un nodo de presión cerca del punto A, que está abierto a la atmósfera.

En un tubo de órgano abierto, la presión en ambos extremos es igual a la presión atmosférica y no varía. Por lo tanto, existe un nodo de presión en los dos extremos del tubo. (Este resultado está basado en la hipótesis de que la onda sonora en el tubo es una onda unidimensional, lo cual es aproximadamente cierto si el diámetro del tubo es mucho menor que la longitud de onda. En la práctica, los nodos de presión están ligeramente más allá de los extremos del tubo. La longitud efectiva del tubo es  $L_{\text{ef}} = L + \Delta L$ , en donde  $\Delta L$  es la corrección de los extremos, una distancia que es algo menor que el diámetro del tubo.) La condición de onda estacionaria para este sistema es la misma que para una cuerda fija por ambos extremos. Una vez que se reemplaza  $L$  por  $L_{\text{ef}}$  (la longitud efectiva del tubo), pueden aplicarse las mismas ecuaciones de la cuerda.

En un tubo de órgano cerrado (abierto por un extremo y cerrado por el otro) hay un nodo de presión próximo a la abertura (punto A de la figura 16.17) y un antinodo de presión en el extremo cerrado. La condición de onda estacionaria para este sistema es la misma que la de una cuerda con un extremo fijo y el otro libre. La longitud efectiva del tubo debe ser igual a un número impar de veces  $\lambda/4$ . Es decir, la longitud de onda del modo fundamental es 4 veces la longitud efectiva del tubo y sólo están presentes los armónicos impares.

Como vimos en el capítulo 15, una onda sonora puede considerarse como una onda de presión o como una onda de desplazamiento. Las variaciones de presión y desplazamiento en una onda sonora están desfasadas  $90^\circ$ . Así, en una onda sonora estacionaria, los nodos de presión son antinodos de desplazamiento y viceversa. Cerca del extremo abierto de un tubo de órgano hay un nodo de presión y un antinodo de desplazamiento, mientras que el extremo cerrado es un antinodo de presión y un nodo de desplazamiento.

### EJEMPLO 16.8 Ondas sonoras estacionarias en una columna de aire I

*¡INTÉNTELO USTED MISMO!*

Si la velocidad del sonido es 340 m/s, ¿cuáles son las frecuencias y las longitudes de onda permitidas en el caso de las ondas estacionarias de un tubo abierto por los dos lados cuya longitud efectiva es 1 m?

**Planteamiento del problema** En cada extremo hay un antinodo para el desplazamiento (y un nodo para la presión). Por consiguiente, la longitud efectiva del tubo es un número entero de semilongitudes de onda.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

1. Calcular la longitud de onda fundamental a partir de  $\lambda_1 = 2L_{\text{ef}}$ .
2. Utilizar el valor de  $\lambda_1$  para calcular la frecuencia fundamental  $f_1$ .
3. Escribir expresiones para las frecuencias  $f_n$  y longitudes de onda  $\lambda_n$  de los restantes armónicos en función de  $n$ .

#### Respuestas

$$\lambda_1 = 2L_{\text{ef}} = 2 \text{ m}$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = 170 \text{ Hz}$$

$$f_n = n f_1 = n(170 \text{ Hz}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{2 \text{ m}}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

### EJEMPLO 16.9 Ondas sonoras estacionarias en una columna de aire II

Cuando encima del tubo parcialmente lleno de agua de la figura 16.18 se mantiene un diapason de 500 Hz de frecuencia, aparecen resonancias cuando el nivel del agua está a distancias  $L = 16,0, 50,5, 85,0$  y  $119,5$  cm de la parte superior del tubo. (a) ¿Cuál es la velocidad del sonido en el aire? (b) ¿A qué distancia del extremo del tubo está el antinodo de desplazamiento?

**Planteamiento del problema** Ajustando el nivel del agua, en la columna de aire de longitud ajustable  $L$  se producen ondas sonoras de 500 Hz. La columna de aire está cerrada por un extremo y abierta por el otro. Así cuando hay resonancia, en el tubo hay un número impar de cuartos de longitudes de onda (véase la figura 16.19). Hay un nodo de desplazamiento en la superficie del agua y un antinodo de desplazamiento un poco por encima del extremo abierto del tubo. Ya que la frecuencia está determinada por el diapason también lo está la longitud de onda. La velocidad de propagación se calcula entonces a partir de  $v = f\lambda$ , donde  $f$  es 500 Hz.

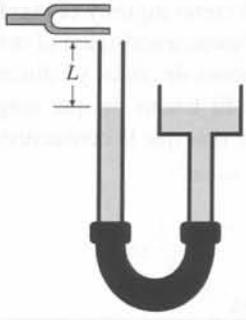


Figura 16.18

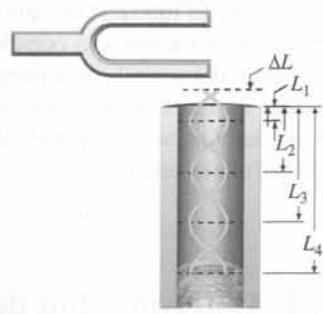


Figura 16.19

- (a) 1. La velocidad del sonido en el aire está relacionada con la frecuencia y la longitud de onda:
2. La longitud de onda es el doble de la distancia entre dos niveles sucesivos del agua en los que se da resonancia:
3. La distancia entre dos niveles sucesivos de agua se determina a partir de los datos del problema:
4. Para calcular  $v$  se sustituyen los valores de  $f$  y de  $\lambda$ :

$$v = f\lambda$$

$$\lambda = 2(L_{n+1} - L_n), \quad n = 1, 2, 3, 4$$

$$L_{n+1} - L_n = L_4 - L_3 = 119,5 \text{ cm} - 85 \text{ cm} = 34,5 \text{ cm}$$

sustituyendo arriba se obtiene

$$\lambda = 2(34,5 \text{ cm}) = 69 \text{ cm} = 0,69 \text{ m}$$

$$v = f\lambda = (500 \text{ Hz})(0,69 \text{ m}) = \boxed{345 \text{ m/s}}$$

- (b) Hay un antinodo  $\lambda/4$  por encima del nodo situado en la superficie del agua. Así, la distancia desde el nivel del agua más alto que da lugar a resonancia y el antinodo situado por encima del tubo es  $\lambda/4$ , es decir  $\frac{1}{4}\lambda = L_1 + \Delta L$ :

$$\Delta L = \frac{1}{4}\lambda - L_1 = \frac{1}{4}(69,0 \text{ cm}) - (16,0 \text{ cm}) = \boxed{1,25 \text{ cm}}$$



523 Hz



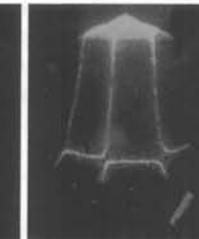
1569 Hz



2532 Hz



2819 Hz



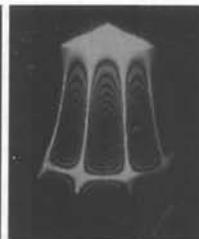
3104 Hz



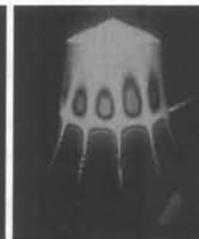
3866 Hz



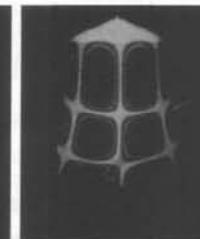
3957 Hz



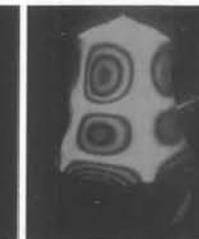
4709 Hz



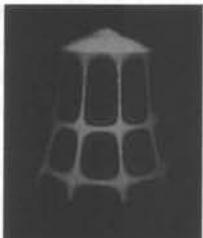
5323 Hz



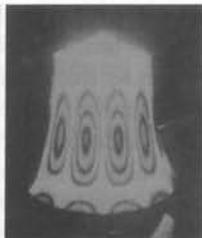
5435 Hz



6137 Hz



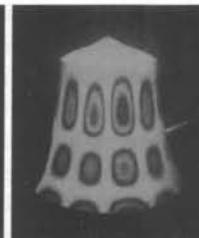
6263 Hz



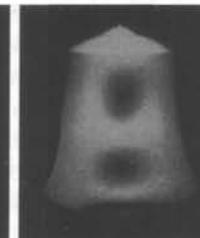
6571 Hz



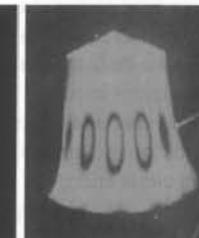
6892 Hz



7962 Hz



8002 Hz

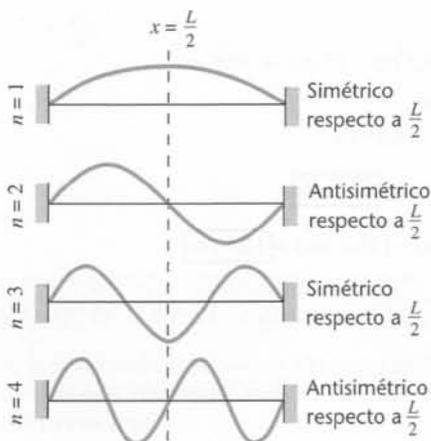


8639 Hz

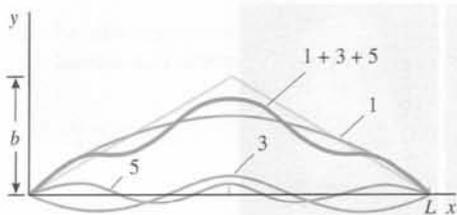
Interferogramas holográficos que muestran las ondas estacionarias de una campanilla. Los "ojos de buey" corresponden a las posiciones de los vientres o antinodos.



**Figura 16.20** Cuerda pulsada por el centro. Cuando se deja libre, su vibración es una combinación lineal de ondas estacionarias.



**Figura 16.21** Los cuatro primeros armónicos correspondientes a una cuerda fija por ambos extremos. Los armónicos impares son simétricos respecto al centro de la cuerda, cosa que no ocurre con los armónicos pares. Cuando una cuerda se pulsa por el centro, vibra únicamente con los armónicos impares.



**Figura 16.22** Forma aproximada de la cuerda pulsada por el centro, de la forma indicada en la figura 16.20, utilizando armónicos. La línea roja es la aproximación a la forma original de la cuerda basada en los tres primeros armónicos impares. La mayor parte de la energía está asociada con el fundamental, pero los armónicos tercero, quinto y demás impares poseen también cierta energía.

La mayoría de los instrumentos musicales son mucho más complicados que un simple tubo cilíndrico. El tubo cónico, que es la base del oboe, el fagot, el corno inglés y el saxofón tienen unas series armónicas completas con su longitud de onda fundamental igual al doble de la longitud del cono. Los instrumentos de viento son combinaciones de conos y cilindros. El análisis de estos instrumentos es extremadamente complejo. El hecho de que tengan series casi armónicas es un triunfo del método de tanteo inteligente más que la consecuencia de cálculos matemáticos.

### \* 16.3 Superposición de ondas estacionarias

Como hemos visto existen una serie de frecuencias de resonancia naturales que producen ondas estacionarias sonoras en columnas de aire o cuerdas vibrantes que están sujetas por uno o ambos extremos. Por ejemplo, para una cuerda fija en ambos extremos, la frecuencia del modo fundamental de vibración es  $f_1 = v/2L$ , en donde  $L$  es la longitud de la cuerda y  $v$  la velocidad de la onda. La función de onda correspondiente es la ecuación 16.16:

$$y_1(x, t) = A_1 \text{sen } k_1 x \cos(\omega_1 t + \delta_1)$$

En general, un sistema vibrante no vibra con un modo armónico aislado. En su lugar, el movimiento se compone de una mezcla de los armónicos permitidos. La función de onda es una combinación lineal de funciones de onda armónicas:

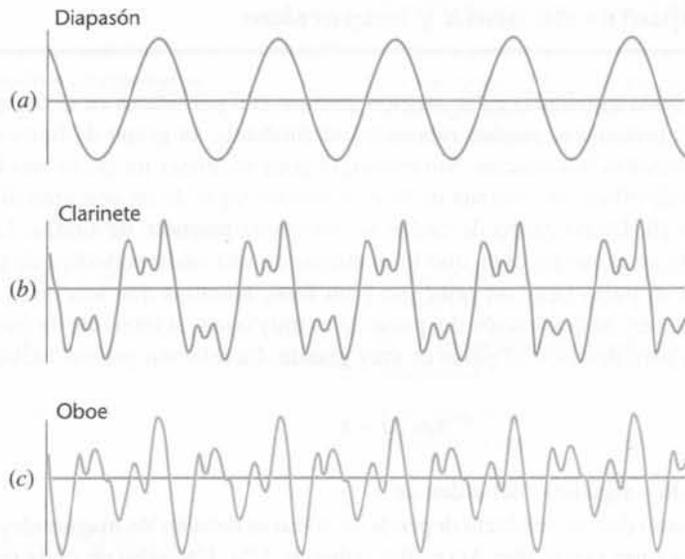
$$y(x, t) = \sum_n A_n \text{sen } k_n x \cos(\omega_n t + \delta_n) \tag{16.17}$$

en donde  $k_n = 2\pi/\lambda_n$ ,  $\omega_n = 2\pi f_n$  y  $A$  y  $\delta_n$  son constantes. Las constantes  $A_n$  y  $\delta_n$  dependen de la posición y velocidad iniciales de la cuerda. Si, por ejemplo, una cuerda de arpa se pulsa en el centro y se deja en libertad como muestra la figura 16.20, la forma inicial de la cuerda es simétrica alrededor del punto  $x = \frac{1}{2}L$  y la velocidad inicial es cero en toda la longitud de la cuerda. El movimiento de la cuerda permanecerá siendo simétrico alrededor de dicho punto una vez suelta. Sólo se excitarán los armónicos impares, que son también simétricos respecto al punto central y no se excitarán los pares, que son antisimétricos respecto a  $x = \frac{1}{2}L$ . Es decir, la constante  $A_n$  es cero para todo valor par de  $n$ . En la figura 16.21 se indican las formas de los cuatro primeros armónicos. La mayor parte de la energía de la cuerda pulsada está asociada con el armónico fundamental, pero existen también pequeñas cantidades de energía asociadas con los modos armónicos tercero, quinto e impares superiores. La figura 16.22 muestra una aproximación de la forma inicial de la cuerda utilizando las superposiciones únicamente de los tres primeros armónicos impares.

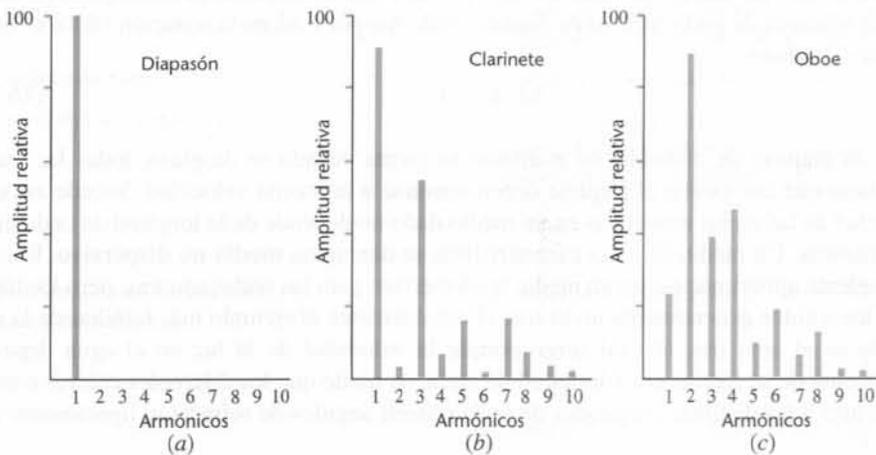
### \* 16.4 Análisis y síntesis armónicos

Cuando un oboe y un clarinete tocan la misma nota, por ejemplo la nota La, suenan de forma muy diferente. Ambas notas tienen el mismo **tono**, que es una sensación fisiológica de la altura de la nota que está fuertemente correlacionada con su frecuencia. Sin embargo, las notas difieren en lo que se denomina **calidad del tono o timbre**. La razón principal para la diferencia del timbre es que, aunque tanto el clarinete como el oboe están produciendo vibraciones con la misma frecuencia fundamental, cada uno de ellos está también produciendo armónicos cuyas intensidades relativas dependen del instrumento y de la forma en que se toque. Si cada instrumento produjese sólo la frecuencia fundamental, el sonido sería el mismo para los dos.

En la figura 16.23 se muestran algunos gráficos de las variaciones de presión en función de tiempo para un diapasón, un clarinete y un oboe, que tocan todos la misma nota. Estas



**Figura 16.23** Formas de onda de (a) un diapasón, (b) un clarinete y (c) un oboe, todos con una frecuencia fundamental de 440 Hz y la misma intensidad aproximada.

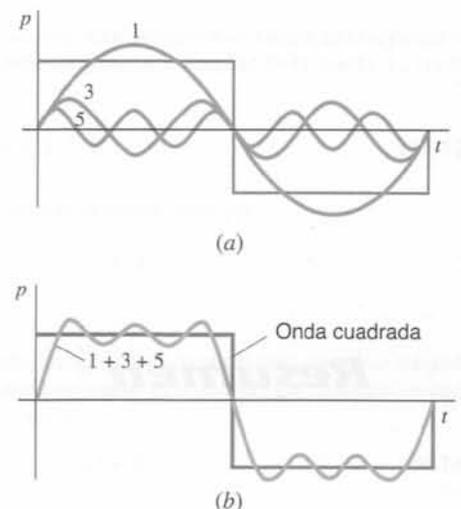


**Figura 16.24** Intensidades relativas de los armónicos de las formas de onda indicadas en la figura 16.23 para (a) el diapasón, (b) el clarinete y (c) el oboe.

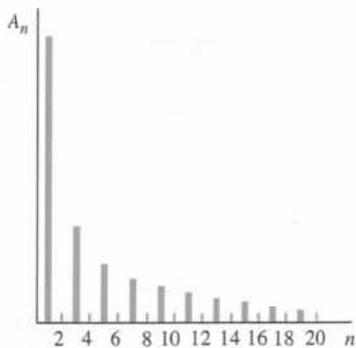
curvas reciben el nombre de **formas de onda**. La forma de onda correspondiente a un diapasón es prácticamente una onda sinusoidal pura, lo cual evidentemente no ocurre en el caso del clarinete y el oboe.

Las formas de onda pueden analizarse descomponiéndolas en los armónicos que la constituyen. Dicho análisis recibe el nombre de **análisis armónico**. (El análisis armónico también se llama a veces **análisis de Fourier**, ya que fue este científico francés quien desarrolló el método matemático para analizar funciones periódicas.) La figura 16.24 muestra una representación de las intensidades relativas de los armónicos de las formas de onda de la figura 16.23. La forma de onda del diapasón contiene sólo la frecuencia fundamental. La del clarinete contiene el armónico fundamental, grandes cantidades del tercero, quinto y séptimo armónicos y cantidades menores del segundo, cuarto y sexto armónicos. En el caso del oboe el segundo y cuarto armónicos tienen más energía que el fundamental.

La inversa del análisis armónico es la **síntesis armónica**, que es la construcción de una onda periódica a partir de sus componentes armónicos. La figura 16.25a muestra los tres primeros armónicos impares utilizados para sintetizar una onda cuadrada y la 16.25b muestra la onda cuadrada que resulta de la suma de los tres armónicos. Cuantos más armónicos se empleen en una síntesis, más se aproxima el resultado obtenido a la forma de onda real (la línea gris oscura de la figura). Las amplitudes relativas de los armónicos necesarios para sintetizar la onda cuadrada se indican en la figura 16.26.



**Figura 16.25** (a) Onda cuadrada y los tres primeros armónicos impares (ondas sinusoidales simples) utilizados para sintetizarla. (b) La forma aproximada de una onda cuadrada se obtiene sumando los tres primeros armónicos impares.



**Figura 16.26** Amplitudes relativas  $A_n$  de los diez primeros armónicos necesarios para sintetizar una onda cuadrada. Cuantos más armónicos se utilicen, más nos aproximaremos a la onda cuadrada.

## \* 16.5 Paquetes de onda y dispersión

Las formas de onda estudiadas en la sección anterior son periódicas en el tiempo. Los pulsos, que no son periódicos, pueden representarse mediante un grupo de funciones de onda armónicas de distintas frecuencias. Sin embargo, para sintetizar un pulso resulta necesario contar con una distribución continua de frecuencias en lugar de un conjunto discreto como en la figura 16.26. Dicho grupo de ondas se denomina **paquete de ondas**. La propiedad característica de un pulso de onda que lo distingue de una onda periódica de una sola frecuencia, es que el pulso tiene un principio y un final, mientras que una onda armónica se repite una y otra vez. Si la duración del pulso  $\Delta t$  es muy corta, el intervalo de frecuencias  $\Delta\omega$  que se necesita para describir el pulso es muy grande. La relación general existente entre  $\Delta t$  y  $\Delta\omega$  es

$$\Delta\omega \Delta t \sim 1 \quad (16.18)$$

donde el símbolo  $\sim$  significa “del orden de”.

El valor exacto de este producto depende de cómo se definen las magnitudes  $\Delta\omega$  y  $\Delta t$ . En todas las definiciones razonables  $\Delta\omega$  es del orden de  $1/\Delta t$ . Un pulso de onda producido por una fuente de corta duración  $\Delta t$ , como un golpe de bate sobre una pelota, tiene una anchura corta en el espacio  $\Delta x = v \Delta t$ , siendo  $v$  la velocidad de la onda. Toda onda armónica de frecuencia  $\omega$  tiene un número de onda  $k = \omega/v$ . Un intervalo de frecuencias  $\Delta\omega$  implica un intervalo de números de onda  $\Delta k = \Delta\omega/v$ . Sustituyendo  $\Delta\omega$  por  $v \Delta k$  en la ecuación 16.18 se tiene  $v \Delta k \Delta t \sim 1$  o bien

$$\Delta k \Delta x \sim 1 \quad (16.19)$$

Si un paquete de ondas ha de mantener su forma cuando se desplaza, todas las ondas armónicas que componen el paquete deben moverse a la misma velocidad. Sucede así si la velocidad de las ondas armónicas en un medio dado no depende de la longitud de onda ni de la frecuencia. Un medio de estas características se denomina **medio no dispersivo**. El aire, en excelente aproximación, es un medio no dispersivo para las ondas sonoras, pero los líquidos y los sólidos generalmente no lo son. (Probablemente el ejemplo más familiar de la dispersión es el arco iris, el cual surge porque la velocidad de la luz en el agua depende ligeramente de su frecuencia y longitud de onda, de modo que los diferentes colores correspondientes a las distintas longitudes de onda poseen ángulos de refracción ligeramente distintos.)

Cuando la velocidad de la onda en un medio dispersivo depende sólo ligeramente de la frecuencia y de la longitud de onda, un paquete de ondas cambia muy lentamente de forma en su propagación y recorre una distancia considerable como una entidad reconocible. Sin embargo, la velocidad de este paquete, llamada **velocidad de grupo**, no es la misma que la velocidad (media) de las ondas armónicas componentes individuales, llamada **velocidad de fase**. (La velocidad de una onda armónica individual es la velocidad de sus frentes de onda. Por lo tanto, se denomina velocidad de fase de la onda a la velocidad de los frentes de onda, ya que éstos son las líneas o superficies de fase constante.)

## Resumen

- 1 El principio de superposición, válido para todas las ondas electromagnéticas en el vacío, para las ondas en una cuerda flexible tensa en la aproximación de ángulos pequeños y para las ondas sonoras de pequeña amplitud, resulta de la linealidad de las correspondientes ecuaciones de ondas.
- 2 La interferencia es un fenómeno ondulatorio importante que se aplica a todas las ondas que se superponen coherentemente. Resulta del principio de superposición. La difracción y la interferencia distinguen el movimiento ondulatorio del movimiento de partículas.
- 3 Las condiciones de onda estacionaria pueden recordarse esquematizando una cuerda o un tubo con nodos en un extremo fijo o cerrado y antinodos en un extremo libre o abierto.

## 1. Superposición e interferencia

La superposición de dos ondas armónicas de igual amplitud, número de onda y frecuencia, pero fase distinta  $\delta$ , da lugar a una onda armónica del mismo número de onda y frecuencia pero distinta en fase y amplitud respecto a cada una de las ondas.

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = y_0 \sin(kx - \omega t) + y_0 \sin(kx - \omega t + \delta) \\ &= [2y_0 \cos \frac{1}{2} \delta] \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2} \delta) \end{aligned} \quad (16.6)$$

Interferencia constructiva

Si las ondas están en fase o difieren sus fases en un múltiplo entero de  $2\pi$ , las amplitudes de las ondas se suman y la interferencia es constructiva.

Interferencia destructiva

Si las ondas difieren en fase en  $\pi$  o en un múltiplo impar de  $\pi$ , las amplitudes se restan y la interferencia es destructiva.

Pulsaciones (o batidos)

Las pulsaciones resultan de la interferencia de dos ondas de frecuencias ligeramente distintas. La frecuencia de batido es igual a la diferencia entre las frecuencias de las dos ondas:

$$f_{\text{batido}} = \Delta f$$

Diferencia de fase  $\delta$  debida a la diferencia de trayectos  $\Delta x$

$$\delta = k \Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (16.9)$$

## 2. Ondas estacionarias

Cuando las ondas están confinadas en el espacio, las ondas estacionarias se producen a ciertas frecuencias y longitudes de onda. Sólo se dan ondas estacionarias cuando cada punto del sistema oscila en un movimiento armónico simple y dos puntos en movimiento cualesquiera oscilan en fase o con un desfase de  $180^\circ$

Longitud de onda

La distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es un cuarto de longitud de onda.

Cuerda fija por ambos extremos

En una cuerda fija por sus dos extremos se forma un nodo en cada uno de ellos. El resultado es que debe ajustarse un número entero de semilongitudes de onda en la longitud completa de la cuerda. En este caso, la condición de onda estacionaria es

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.10)$$

Onda estacionaria en una cuerda fija por los dos extremos

Las ondas permitidas forman una serie armónica, en que las frecuencias vienen dadas por

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = n f_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

en donde  $f_1 = v/2L$  es la frecuencia más baja, llamada fundamental.

Tubo de órgano abierto por ambos extremos

Las ondas sonoras estacionarias en el aire de un tubo abierto por ambos extremos dan lugar a un nodo de presión (y un antinodo de desplazamiento) cerca de cada extremo. La condición de onda estacionaria es la misma que la de una cuerda fija por los dos extremos.

Cuerda fija por un extremo y libre por el otro

Si una cuerda tiene un extremo fijo y el otro libre, existe un nodo en el primero y un vientre en el segundo, de modo que el número de cuartos de longitudes de onda debe ajustarse en la longitud de la cuerda. La condición de onda estacionaria en este caso es

$$L = n \frac{\lambda_n}{4}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (16.12)$$

Solamente están presentes los armónicos impares. Sus frecuencias vienen dadas por

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{4L} = n f_1, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

donde  $f_1 = v/4L$ .

Tubo de órgano abierto por un extremo y cerrado por el otro

Las ondas sonoras estacionarias en un tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro, tienen un antinodo de desplazamiento en el extremo abierto y un nodo de desplazamiento en el cerrado. La condición de onda estacionaria es la misma que la de una cuerda fija por un extremo.

Funciones de onda estacionaria

$$y_n(x, t) = A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (16.16)$$

en donde  $k_n = 2\pi/\lambda_n$  y  $\omega_n = 2\pi f_n$ .

Las condiciones necesarias para que haya ondas estacionarias en una cuerda son

- 1 Cada punto de la cuerda o bien permanece en reposo o bien oscila con movimiento armónico simple. (Los puntos en reposo son los nodos.)
- 2 El movimiento de dos puntos cualesquiera de la cuerda que no sean nodos va en fase o con un desfase de  $180^\circ$ .

- \*3. Superposición de ondas estacionarias** En general, un sistema vibrante no vibra en un solo modo armónico, sino según una superposición de armónicos permitidos.
- \*4. Análisis y síntesis armónicos** Los sonidos de diferente cualidad de tono contienen diferentes mezclas de armónicos. El análisis de un tono particular en función de su contenido armónico se llama análisis armónico. La síntesis armónica es la construcción de un tono por suma de armónicos.
- \*5. Paquetes de ondas** Un pulso de onda puede representarse por una distribución continua de ondas armónicas llamada paquete de ondas. El intervalo de frecuencias  $\Delta\omega$  está relacionado con la anchura del tiempo  $\Delta t$  y el intervalo de números de onda  $\Delta k$  con la anchura del espacio  $\Delta x$ .
- |   |                                |                |
|---|--------------------------------|----------------|
| Intervalos de frecuencia y tiempo       | $\Delta\omega \Delta t \sim 1$ | <b>(16.18)</b> |
| Intervalos de número de ondas y espacio | $\Delta k \Delta x \sim 1$     | <b>(16.19)</b> |
- \*6. Dispersión** En un medio no dispersivo, la velocidad de fase no depende de la frecuencia y el pulso (paquete de ondas) se propaga sin cambio de forma. En un medio dispersivo, la velocidad de fase sí depende de la frecuencia y el pulso cambia de forma durante su movimiento. El pulso se mueve con una velocidad denominada velocidad de grupo del paquete.

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.
- iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.
- iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

### Problemas conceptuales

- 1 ●● SSM** Dos pulsos de onda rectangulares se mueven en sentidos opuestos a lo largo de una cuerda. En  $t = 0$  los dos pulsos se encuentran tal y como indica la figura 16.27. Dibujar las funciones de onda para  $t = 1, 2$  y  $3$  s.

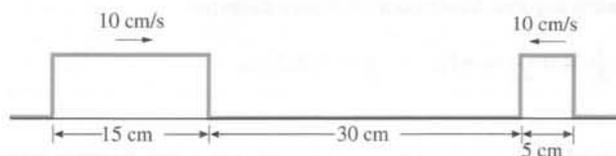


Figura 16.27 Problemas 1 y 2

- 2 ●●** Repetir el problema 1 para el caso en que el pulso de la derecha de la figura 16.27 esté invertido.

- 3 ●** Las pulsaciones se producen por la superposición de dos ondas armónicas sólo si (a) sus amplitudes y frecuencias son iguales, (b) sus amplitudes son iguales, pero sus frecuencias difieren ligeramente, (c) sus frecuencias difieren ligeramente, incluso si sus amplitudes no son iguales, (d) sus frecuencias son iguales pero sus amplitudes difieren ligeramente.

- 4 ●** Verdadero o falso:

- (a) La frecuencia del tercer armónico es tres veces la del primer armónico.  
 (b) La frecuencia del quinto armónico es cinco veces la del fundamental.  
 (c) En un tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro no se excitan los armónicos pares.

- 5 ●●** Las ondas estacionarias se producen por la superposición de dos ondas de (a) la misma amplitud, frecuencia y sentido de propagación, (b) la misma amplitud y frecuencia y sentidos opuestos de propagación, (c) la misma amplitud, frecuencia ligeramente distinta y el mismo sentido de propagación, (d) la misma amplitud, frecuencia ligeramente distinta y sentidos opuestos de propagación.

- 6 ● SSM** Las frecuencias de resonancia de una cuerda de un violín son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, mientras que las frecuencias de resonancia de un tambor circular tienen una distribución espacial irregular. A partir de este hecho explicar la diferencia entre el sonido de un violín y de un tambor.

- 7 ●** Un tubo de órgano abierto por ambos extremos tiene una frecuencia fundamental de 400 Hz. Si ahora se cierra un extremo de este tubo, la frecuencia fundamental será (a) 200 Hz, (b) 400 Hz, (c) 546 Hz, (d) 800 Hz.

- 8 ●●** Una cuerda fija por ambos extremos resuena con una frecuencia fundamental de 180 Hz. ¿Cuál de las acciones siguientes reducirá la frecuencia fundamental a 90 Hz? (a) Duplicar la tensión y duplicar la longitud. (b) Reducir a

la mitad la tensión y mantener fija la longitud. (c) Mantener fija la tensión y duplicar la longitud. (d) Mantener fija la tensión y reducir la longitud a la mitad.

9 ●● ¿Cómo se modifican las frecuencias de resonancia de un tubo de órgano cuando aumenta la temperatura del aire?

10 ● SSM Cuando dos ondas se mueven en direcciones opuestas se superponen como en la figura 16.1. ¿Impide cada una de ellas el progreso de la otra?

11 ● Cuando se pulsa la cuerda de una guitarra, ¿la longitud de onda de la onda que se produce en el aire es la misma que la que se produce en la cuerda?

12 ● Cuando dos ondas interfieren constructiva o destructivamente, ¿hay alguna ganancia o pérdida de energía? Razonar la respuesta.

13 ● Un instrumento musical está formado por un conjunto de vasos parcialmente llenos de agua que son golpeados con un pequeño mazo. Explicar cómo funciona.

14 ●● Durante un recital de órgano, el compresor de aire que alimenta los tubos se avería súbitamente. Un estudiante de física emprendedor, que forma parte del público, aconseja conectar un tanque de gas nitrógeno puro de alta presión a la salida del compresor. ¿Qué efecto, si lo hay, tendrá esta sustitución en el funcionamiento del órgano? ¿Y si el tanque fuera de helio?

15 ●● SSM Cuando aumenta la tensión de una cuerda de piano, ¿cuál de los siguientes hechos tiene lugar? (a) Su longitud de onda decrece. (b) Su longitud de onda permanece la misma, pero su frecuencia crece. (c) Su longitud de onda y su frecuencia crecen. (d) Ninguno de los anteriores.

16 ●● Las instrucciones para conectar correctamente los altavoces estéreo a un amplificador de modo que estén en fase son las siguientes: "Después de conectar ambos altavoces, póngase un disco o programa monofónico con el control de bajos al máximo y el de agudos al mínimo. Escuchando los altavoces, girar el control de balance, de modo que primero se oiga fuerte un solo altavoz, luego los dos juntos y finalmente sólo el otro altavoz. Si las notas bajas suenan más fuertes cuando los dos altavoces se oyen a la vez, entonces están conectados correctamente. Si las notas bajas se oyen más débiles con los dos altavoces juntos que con uno y otro solo, intercambiar las conexiones de uno de los altavoces". Explicar la razón de este método. En particular explicar por qué no se utiliza un programa estéreo y por qué se comparan sólo las notas bajas.

17 ●● La constante  $\gamma$  del helio (como la de todos los gases monoatómicos) es 1,67. Si un hombre inhala helio y después comienza a hablar, sus sonidos son más agudos. ¿Por qué?

18 ●● SSM La figura 16.28 corresponde a una fotografía de dos telas de seda, muy finas, colocadas una encima de otra. En los puntos donde las telas se superponen se pueden ver una serie de líneas oscuras y claras que corresponden a una figura de moiré, figura que aparece también cuando se utiliza un

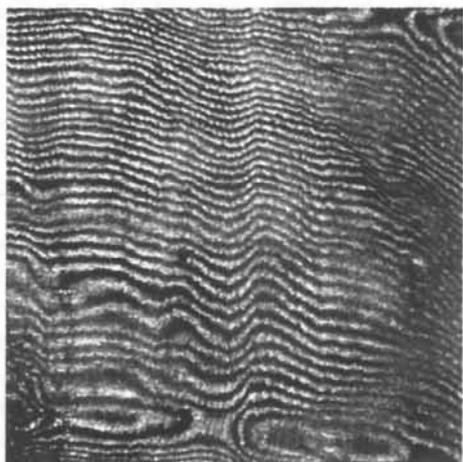


Figura 16.28 Problema 18

escáner para copiar fotos de un libro o de un periódico. ¿Cuál es la causa de la aparición de la figura de moiré y en qué se parece a una interferencia?

## Estimaciones y aproximaciones

19 ●● ¿Hasta cuando puede afinarse el sonido de una cuerda de piano con el de un diapason?

20 ● SSM Los tubos más cortos utilizados en los órganos tienen aproximadamente 7,5 cm de largo. (a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de un tubo con esta longitud que está abierto por ambos extremos? (b) ¿Cuál es el armónico más alto para un tubo de este tipo que está dentro del intervalo audible? (El intervalo de audición normal está entre 20 y 20 000 Hz.)

21 ●● En un día de mucho viento resuena a veces un tubo de desagüe. Estimar la frecuencia de resonancia de este tubo en una casa de un solo piso. Estimar el cambio de esta frecuencia del invierno al verano en una región templada.

## Superposición e interferencia

22 ● Dos ondas que se mueven por una cuerda en la misma dirección y sentido tienen la misma frecuencia de 100 Hz, una longitud de onda de 2 cm y una amplitud de 0,02 m. Determinar la amplitud de la onda resultante si las dos ondas difieren en fase (a) en  $\pi/6$  y (b) en  $\pi/3$ .

23 ● Dos ondas que tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, se están moviendo en la misma dirección y sentido. Si difieren en fase en  $\pi/2$  y cada una de ellas tiene una amplitud de 0,05 m, hallar la amplitud de la onda resultante.

24 ● SSM **SOLVE** Dos fuentes sonoras oscilan en fase con la misma amplitud  $A$ . Están separadas en el espacio por una distancia de  $\lambda/3$ . ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante de las dos fuentes en un punto situado en la línea que une las fuentes, admitiendo que el punto no está entre las fuentes?

25 ● Dos fuentes sonoras oscilan en fase con una frecuencia de 100 Hz. En un punto situado a 5,00 m de una de ellas y a 5,85 m de la otra, la amplitud del sonido procedente de cada fuente separadamente es  $A$ . (a) ¿Cuál es la diferencia de fase de las ondas sonoras procedentes de ambas fuentes en dicho punto? (b) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en dicho punto?

26 ● SSM Con un compás dibujar arcos de circunferencia que representen crestas de ondas para dos fuentes puntuales distantes entre sí  $d = 6$  cm y para  $\lambda = 1$  cm. Conectar las intersecciones que corresponden a los puntos de diferencias de caminos constantes y marcar dicha diferencia en cada línea. (ver figura 16.8)

27 ● Dos altavoces separados por una cierta distancia emiten sonidos de una misma frecuencia. En un punto determinado  $P$  la intensidad debida a cada altavoz separadamente es  $I_0$ . La distancia desde  $P$  a uno de los altavoces es  $\frac{1}{2}\lambda$  mayor que la de  $P$  al otro. Determinar la intensidad de  $P$  si los altavoces (a) son coherentes y están en fase; (b) son incoherentes; y (c) son coherentes, pero tienen una diferencia de fase de  $\pi$  rad.

28 ● Responder a las cuestiones del problema 27 para el punto  $P'$  en el cual la distancia al altavoz más alejado es  $1\lambda$  mayor que la distancia al más cercano. Admitir de nuevo que la intensidad en el punto  $P'$  es  $I_0$  debido a cada altavoz separadamente.

29 ● Dos altavoces separados cierta distancia emiten ondas sonoras de la misma frecuencia, pero están desfasados en  $90^\circ$ . Sea  $r_1$  la distancia de un punto determinado al altavoz 1 y  $r_2$  la que dista del mismo punto al altavoz 2. Hallar el menor valor de  $r_2 - r_1$  para el cual el sonido en ese punto sea (a) máximo y (b) mínimo. (Expresar la respuesta en función de la longitud de onda.)

**30** ●● SSM Demostrar que si la separación entre dos fuentes de sonido que irradian coherentemente en fase es inferior a media longitud de onda, no se observará interferencia totalmente destructiva en ninguna dirección.

**31** ●● SOLVE Una onda transversal de frecuencia 40 Hz se propaga por una cuerda. Dos puntos separados entre sí 5 cm están desfasados en  $\pi/6$ . (a) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda? (b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos en un punto determinado para instantes separados 5 ms entre sí? (c) ¿Cuál es la velocidad de la onda?

**32** ●● Se supone que el cerebro determina la dirección de una fuente de sonido porque es capaz de apreciar la diferencia de fase entre las ondas sonoras que chocan contra los tímpanos auditivos. Una fuente sonora distante emite un sonido de frecuencia 680 Hz. Si nuestro rostro está frontalmente dirigido hacia la fuente sonora, no apreciaremos diferencia de fase. Estimar la diferencia de fase entre los sonidos recibidos por cada oído si ahora giramos  $90^\circ$  respecto a la posición frontal.

**33** ●● SOLVE Una fuente sonora  $A$  está localizada en  $x = 0, y = 0$  y otra  $B$  en  $x = 0, y = 2,4$  m. Las dos fuentes emiten coherentemente en fase. Una observadora en  $x = 40$  m,  $y = 0$  observa que cuando camina en dirección y positiva o negativa alejándose de  $y = 0$ , la intensidad del sonido disminuye. ¿Cuál es la frecuencia más baja y más alta de las fuentes que puede explicar dicha observación?

**34** ●● Suponer que la observadora del problema 33 localiza un punto de intensidad mínima en  $x = 40$  m,  $y = 0$ . ¿Cuál es entonces la frecuencia más alta y más baja congruente con esta observación?

**35** ●● SSM Se superponen dos ondas armónicas en agua que tienen igual amplitud pero distinta frecuencia, número de onda y velocidad. La perturbación total se escribe mediante la ecuación  $y(x,t) = A[\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)]$ , donde  $\omega_1k_1 = v_1$  (la velocidad de la primera onda) y  $\omega_2k_2 = v_2$  (la velocidad de la segunda onda). (a) Demostrar que  $y(x,t)$  puede escribirse de la forma  $y(x,t) = 2A \cos[(\Delta k/2)x - (\Delta\omega/2)t] \cos(k_mx - \omega_mt)$  donde  $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ,  $k_m = (k_1 + k_2)/2$ ,  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  y  $\Delta k = k_1 - k_2$ . El factor  $2A \cos[(\Delta k/2)x - (\Delta\omega/2)t]$  es lo que se denomina la portadora de la onda. (b) Usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, representar  $y(x,t)$  si  $A = 1$ ,  $\omega_1 = 1$  rad/s,  $k_1 = 1$  m $^{-1}$ ,  $\omega_2 = 0,9$  rad/s y  $k_2 = 0,8$  m $^{-1}$  cuando  $t = 0$  s,  $t = 0,5$  s y  $t = 1$  s y si además  $x$  está entre 0 y 50 m. (c) ¿Cuál es la velocidad a la que se mueve la portadora?

**36** ●● Dos focos puntuales que están en fase se encuentran separados una distancia  $d$ . Se detecta un patrón de interferencia a lo largo de una recta paralela a la que une los focos y situada a una distancia grande  $D$ , como se indica en la figura 16.29. (a) Demostrar que la diferencia de trayectos desde los dos focos al mismo punto de la línea situado a un ángulo  $\theta$  viene dada aproximadamente por  $\Delta s = d \sin \theta$  (Sugerencia: Suponer que las líneas procedentes de las fuentes a  $P$  son aproximadamente paralelas.) (b) Demostrar que la distancia  $y_m$  desde el punto correspondiente al máximo central hasta el máximo de interferencia  $m$  viene dada aproximadamente por  $y_m = m(D\lambda/d)$ .

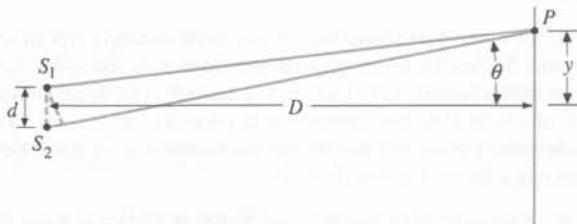


Figura 16.29 Problemas 36–40

**37** ●● SOLVE Dos focos sonoros que emiten en fase con una frecuencia de 480 Hz interfieren de tal modo que los máximos se oyen bajo ángulos de  $0^\circ$  y  $23^\circ$  medidos a partir de una línea perpendicular a la que une los focos. Determinar la separación entre ambos focos, así como cualquier otro ángulo bajo el cual se percibe una intensidad máxima. (Utilizar los resultados del problema 36.)

**38** ●●● SSM Se accionan en fase dos altavoces mediante un amplificador de audiofrecuencia de 600 Hz. Ambos están sobre el eje  $y$ , uno en  $y = +1,00$  m y el otro en  $y = -1,00$  m. Un observador empieza a andar desde  $y = 0$  a lo largo de una línea paralela al eje  $y$  pero a una distancia  $D$  muy grande de éste. (Ver problema 36.) (a) ¿Para qué ángulo  $\theta$  escuchará por primera vez un mínimo de intensidad sonora? (b) ¿Para qué ángulo escuchará el primer máximo (después de  $\theta = 0$ )? (c) ¿Cuántos máximos podrá escuchar posiblemente si se mantiene andando en la misma dirección?

**39** ●●● SOLVE Dos focos sonoros, accionados en fase por el mismo amplificador, están sobre el eje  $y$  y separados una distancia de 2 m. En un punto situado a una distancia muy grande del eje  $y$  se oye la primera interferencia constructiva a un ángulo  $\theta_1 = 0,140$  rad respecto al eje  $x$  y el siguiente se escucha a  $\theta_2 = 0,283$  rad. (Ver figura 16.29.) (a) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas sonoras procedentes de los focos? (b) ¿Cuál es la frecuencia de los focos? (c) ¿A qué otros ángulos se escuchará interferencia constructiva? (d) ¿Cuál es el ángulo menor para el cual se cancelarán completamente las ondas sonoras?

**40** ●●● Los dos focos sonoros del problema 39 funcionan ahora con un desfase de  $90^\circ$ , pero con la misma frecuencia del problema anterior. ¿A qué ángulos se oyen las interferencias constructiva y destructiva?

**41** ●●● Un radiotelescopio se compone de dos antenas separadas una distancia de 200 m. Cada antena se sintoniza a una frecuencia particular, como 20 MHz. Las señales procedentes de cada antena pasan a un amplificador común, pero una de las señales pasa primero por un ajustador de fase, que retrasa la fase en una cantidad prevista de modo que el telescopio pueda "mirar" en diferentes direcciones. Con un retraso de fase cero, las ondas de radio planas que inciden verticalmente se suman constructivamente en el amplificador. ¿Cuál deberá ser el retraso de fase para que las señales que vienen formando un ángulo de  $\theta = 10^\circ$  con la vertical (en el plano formado por la vertical y la línea que une las antenas) se sumen constructivamente en el amplificador?

## Pulsaciones

**42** ● SOLVE Se golpean simultáneamente dos diapasones y se oyen cuatro batidos por segundo. La frecuencia de uno de los diapasones es 500 Hz. (a) ¿Cuáles son los valores posibles de la frecuencia del otro diapason? (b) Se coloca un trocito de cera en el diapason de 500 Hz para disminuir ligeramente su frecuencia. Explicar cómo puede utilizarse la medida de la nueva frecuencia de batido para determinar cuál de las repuestas al apartado (a) es la frecuencia correcta del segundo diapason.

**43** ●● SSM Dos ambulancias se mueven a 80 km/h por una calle recta una en sentido contrario a la otra. La sirena de cada ambulancia funciona a 500 Hz. (a) El conductor de cada ambulancia oye la sirena de la otra y la pulsación que se produce cuando interfiere con el sonido de su sirena. ¿Cuál es la frecuencia de la pulsación? (b) Un peatón está a igual distancia de las dos ambulancias. ¿Cuál es la frecuencia que éste oye de la pulsación producida por las dos sirenas?

## Ondas estacionarias

**44** ● SSM SOLVE Una cuerda fija por ambos extremos tiene 3 m de largo. Resuena en su segundo armónico a una frecuencia de 60 Hz. ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en ella?

**45** ● Una cuerda de 3 m de largo y fija por sus dos extremos está vibrando en su tercer armónico. El desplazamiento máximo de los puntos de la cuerda es 4 mm. La velocidad de las ondas transversales en ella es 50 m/s. (a) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de esta onda? (b) Escribir la función de onda correspondiente a este caso.

**46** ● **ISOLVE** ✓ Calcular la frecuencia fundamental de un tubo de órgano de 10 m de longitud que está (a) abierto por sus dos extremos y (b) cerrado por un extremo.

**47** ● Un hilo de acero de 5 g de masa y 1,4 m de longitud está fijo por ambos extremos y soporta una tensión de 968 N. (a) Hallar la velocidad de las ondas transversales en él. (b) Hallar la longitud de onda y la frecuencia fundamental. (c) Hallar las frecuencias del segundo y tercer armónicos.

**48** ● Una cuerda de 4 m de longitud se fija por un extremo y se liga por el otro a una cuerda ligera de modo que puede moverse libremente en dicho extremo. La velocidad de las ondas en la cuerda es 20 m/s. Hallar la frecuencia (a) del armónico fundamental, (b) del segundo armónico y (c) del tercer armónico.

**49** ● Una cuerda de piano sin arrollamientos tiene una frecuencia fundamental de 200 Hz. Cuando se le arrolla un hilo, su densidad de masa lineal se duplica. ¿Cuál es la nueva frecuencia fundamental, suponiendo que no se varía la tensión?

**50** ● **SSM** El intervalo normal de audición humana está comprendido entre 20 y 20 000 Hz. ¿Cuál es la mayor longitud de un tubo de órgano cuya nota fundamental se encuentre dentro de este intervalo si (a) está cerrado por un extremo y (b) está abierto por los dos extremos?

**51** ●● **ISOLVE** ✓ La función de onda  $y(x, t)$  correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija por ambos extremos viene dada por  $y(x, t) = 4,2 \text{ sen } 0,20x \cos 300t$ , con  $y$  y  $x$  en centímetros y  $t$  en segundos. (a) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de esta onda? (b) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda? (c) Si la cuerda está vibrando en su cuarto armónico, ¿cuál es su longitud?

**52** ●● La función de onda  $y(x, t)$  para una onda estacionaria sobre una cuerda que está fija por ambos extremos es  $y(x, t) = (0,05 \text{ m}) \text{ sen } 2,5 \text{ m}^{-1}x \cos 500 \text{ s}^{-1}t$ . (a) Hallar la velocidad y la amplitud de las dos ondas móviles que originan esta onda estacionaria. (b) ¿Cuál es la distancia entre nodos sucesivos de la cuerda? (c) ¿Cuál es la longitud más corta posible de la cuerda?

**53** ●● Una cuerda de 2,51 m de largo tiene la función de onda dada en el problema 52. (a) Dibujar la posición de la cuerda en los instantes  $t = 0$ ,  $t = T/4$ ,  $t = T/2$ , y  $t = 3T/4$ , en donde  $T = 1/f$  es el periodo de la vibración. (a) Hallar  $T$  en segundos. (b) En un instante  $t$  en el que la cuerda está horizontal, es decir,  $y(x) = 0$  para todo valor de  $x$ , ¿cuál resulta ser la energía de la onda?

**54** ●● **SSM** **ISOLVE** En una cuerda existen las tres frecuencias de resonancia sucesivas de 75, 125 y 175 Hz. (a) Hallar los cocientes entre cada par de frecuencias sucesivas de resonancia. (b) ¿Cómo podría saberse si estas frecuencias corresponden a una cuerda fija por un extremo y no a una cuerda fija por los dos extremos? (c) ¿Cuál es la frecuencia fundamental? (d) ¿Qué armónicos son esas frecuencias de resonancia? (e) Si la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda es 400 m/s, hallar la longitud de la misma.

**55** ●● El espacio que hay encima del agua en un tubo semejante al del ejemplo 16.9 tiene una longitud de 120 cm. Cerca del extremo abierto existe un altavoz accionado por un oscilador de audio cuya frecuencia puede variarse de 10 a 5000 Hz. (a) ¿Cuál es la frecuencia más baja del oscilador que resonará dentro del tubo? (b) ¿Cuál es la frecuencia mayor con la que resonará? (c) Cuántas frecuencias diferentes del oscilador producirán resonancia? (Despreciar la corrección del extremo.)

**56** ●● Un diapason de 460 Hz produce resonancia en el tubo del ejemplo 16.9 cuando la parte superior del tubo está a 18,3 cm y a 55,8 cm por encima de la superficie del agua. (a) Hallar la velocidad del sonido en el aire. (b) ¿Cuál es la corrección del extremo para ajustar el hecho de que el vientre o antinodo no se presente exactamente en el extremo del tubo abierto?

**57** ●● **SSM** **ISOLVE** ✓ A 16 °C la frecuencia fundamental de un tubo de órgano es 440,0 Hz. ¿Cuál será la frecuencia fundamental del tubo si la temperatura aumenta a 32 °C? ¿Sería preferible construir el tubo con un material que se dilata sustancialmente cuando aumente la temperatura o con un material que mantuviera su longitud a todas las temperaturas normales?

**58** ●● La corrección  $\Delta L$  para un tubo circular es aproximadamente  $\Delta L = 0,3186D$ , en donde  $D$  es el diámetro del tubo (véase el ejemplo 16.9). Determinar la longitud de un tubo abierto por ambos extremos que produzca un *do* (256 Hz) como armónico fundamental si  $D = 1 \text{ cm}$ , 10 cm y 30 cm.

**59** ●● **ISOLVE** Una cuerda de violín de 40 cm de longitud y 1,2 g de masa tiene una frecuencia de 500 Hz cuando está vibrando en su modo fundamental. (a) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda? (b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (c) ¿Dónde se debería colocar el dedo para incrementar la frecuencia a 650 Hz?

**60** ●● La cuerda Sol de un violín tiene 30 cm de longitud. Cuando se toca sin pulsar, vibra con una frecuencia de 196 Hz. Las notas próximas más altas en la escala son: La (220 Hz), Si (247 Hz), Do (262 Hz) y Re (294 Hz). ¿A qué distancia del extremo de la cuerda debe colocarse un dedo para generar estas notas?

**61** ●● Una cuerda con una densidad de masa  $4 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$  está sometida a una tensión de 360 N y está fija en ambos extremos. Una de sus frecuencias de resonancia es 375 Hz. La frecuencia de resonancia más alta siguiente es 450 Hz. (a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia fundamental? (b) ¿Qué armónicos son los que se dan? (c) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

**62** ●● **ISOLVE** ✓ Una cuerda sujeta por ambos extremos tiene resonancias sucesivas con longitudes de onda de 0,54 m para el armónico  $n$  y de 0,48 m para el armónico  $(n + 1)$ . (a) ¿Qué armónicos son? (b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

**63** ●● Las cuerdas de un violín están afinadas con los tonos Sol, Re, La y Mi, que están separados entre sí por un quinto. Es decir,  $f(\text{Re}) = 1,5 f(\text{Sol})$ ,  $f(\text{La}) = 1,5 f(\text{Re}) = 440 \text{ Hz}$  y  $f(\text{Mi}) = 1,5 f(\text{La})$ . La distancia entre los dos puntos fijos de las cuerdas es de 30 cm. La tensión de la cuerda Mi es 90 N. (a) ¿Cuál es la masa por metro de longitud de dicha cuerda? (b) Para evitar distorsiones del instrumento con el tiempo, es importante que la tensión en todas las cuerdas sea la misma. Determinar las masas por metro de longitud de las restantes cuerdas.

**64** ●● Una ambulancia se mueve a 80 km/h hacia una pared de ladrillo de un hospital que refleja el sonido de la sirena. Cuando la ambulancia está parada, la sirena emite a 500 Hz. (a) ¿Cuál es el la longitud de onda de la onda estacionaria causada por la sirena y su reflexión? (b) Un médico que está parado entre la ambulancia y la pared oye que el sonido de la sirena aumenta y disminuye alternativamente a medida que la ambulancia se acerca a su posición. ¿Por qué?

**65** ●● Para afinar un violín, el violinista primero afina la cuerda La con el tono correcto de 440 Hz y después toca simultáneamente con el arco dos cuerdas contiguas y escucha las pulsaciones producidas. Cuando toca con el arco las cuerdas La y Mi detecta una frecuencia de batido de 3 Hz y observa que esta frecuencia crece cuando la tensión de la cuerda Mi aumenta (la cuerda Mi se afina a 660 Hz). (a) ¿Por qué se produce el batido cuando estas cuerdas se tocan simultáneamente? (b) ¿Cuál es la frecuencia de la cuerda Mi en vibración si la frecuencia de batido es de 3 Hz? (c) Si la tensión de la cuerda Mi es 80,0 N cuando la frecuencia de batido es 3 Hz, ¿qué tensión corresponde al tono perfecto de dicha cuerda?

**66** ●● Una estudiante lleva consigo un pequeño oscilador y altavoz cuando pasea muy lentamente por una larga sala. El altavoz emite un sonido de frecuencia 680 Hz que se refleja en las paredes de los extremos de la sala. La estudiante observa que cuando pasea a lo largo de la sala, la intensidad del sonido que ella percibe, pasa por una serie de máximos y mínimos sucesivos. ¿Qué distancia debe recorrer para que el sonido pase de un máximo al siguiente?

**67** ●● **SSM** Demostrar que la función de onda estacionaria  $A' \text{ sen } kx \cos(\omega t + \delta)$  puede escribirse como la suma de dos funciones de onda armónicas, la de una onda que se mueve en la dirección positiva del eje  $x$  y la de otra onda de la misma amplitud que se mueve en sentido contrario. Cada una de las ondas tiene el mismo número de onda y frecuencia angular que la onda estacionaria.

**68** ●● Se fija una cuerda de 2 m por un extremo y se la hace vibrar en su tercer armónico con una amplitud de 3 cm y una frecuencia de vibración de 100 Hz. (a) Escribir la función de onda correspondiente a esta vibración. (b) Escribir una expresión para la energía cinética de un segmento de la cuerda de longitud  $dx$  en el punto  $x$  y en cierto tiempo  $t$ . ¿En qué instante es máxima esta energía cinética? ¿Cuál es la forma de la cuerda en dicho momento? (c) Hallar la energía cinética máxima de la cuerda integrando la expresión del apartado (b) en la longitud total de la cuerda.

**69** ●● SSM En la figura 16.30 se muestra la disposición de un experimento de física muy habitual que sirve para estudiar las ondas transversales en una cuerda. Se cuelga un peso del extremo de una cuerda que pasa por una polea, y en el otro extremo un oscilador mecánico mueve la cuerda hacia arriba y hacia abajo con una frecuencia  $f$ . La longitud  $L$  entre el oscilador y la polea se mantiene constante y las ondas que se producen en la cuerda resuenan para determinados valores del peso. Si  $L = 1$  m,  $f = 80$  Hz, y la masa por unidad de longitud de la cuerda es  $\mu = 0,75$  g/m, ¿qué pesos habrá que colgar del extremo de la cuerda para que se produzcan los tres primeros modos resonantes?

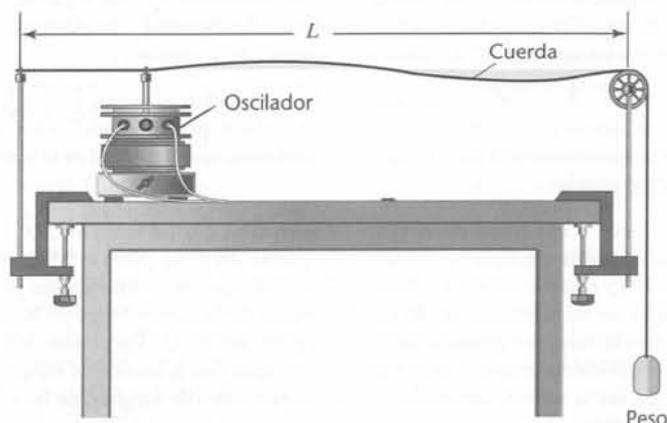


Figura 16.30 Problema 69

### \*Paquetes de ondas

**70** ● La información que utilizan los ordenadores se transmite por cable en forma de pulsos eléctricos cortos a razón de  $10^7$  pulsos por segundo. (a) ¿Cuál es la duración máxima de cada pulso para que dos pulsos no se solapen? (b) ¿Cuál es el intervalo de frecuencias a las cuales debe responder el equipo receptor?

**71** ● SSM Un diapason de frecuencia  $f_0$  empieza a vibrar en el instante  $t = 0$  y se detiene después de un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . La forma de la onda sonora un cierto tiempo después se muestra como una función de  $x$ . Sea  $N$  el número (aproximado) de ciclos de esta forma de onda. (a) ¿Cómo están relacionados entre sí  $N$ ,  $f_0$  y  $\Delta t$ ? (b) Si  $\Delta x$  es la longitud en el espacio de este paquete de ondas, ¿cuál es la longitud de onda en función de  $\Delta x$  y  $N$ ? (c) ¿Cuál es el número de ondas  $k$  en función de  $N$  y  $\Delta x$ ? (d) El número de ciclos  $N$  posee una incertidumbre de  $\pm 1$  ciclo aproximadamente. Explicar por qué, usando la figura 16.31. (e) Demostrar que la incertidumbre del número de onda debido a la incertidumbre en  $N$  es  $2\pi/\Delta x$ .

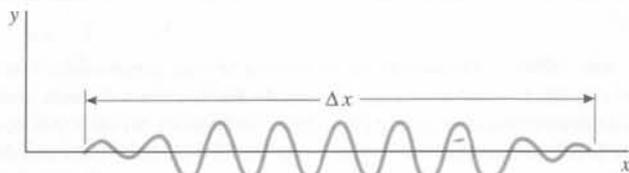


Figura 16.31 Problema 71

### Problemas generales

**72** ● La nota Do de la escala bien temperada utilizada por los constructores de instrumentos musicales modernos tiene una frecuencia de 261,63 Hz. Si una cuerda de piano de 7 g y 80 cm de longitud ha de afinarse de modo que 261,63 Hz sea su frecuencia fundamental, ¿qué tensión debe aplicarse a la cuerda?

**73** ● SOLVE El canal auditivo, que tiene una longitud próxima a los 2,5 cm, se puede considerar como un tubo cerrado por un extremo y abierto por el otro. (a) ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia del mismo? (b) Describir los posibles efectos de los modos de resonancia del canal auditivo sobre el umbral de audición.

**74** ● Una cuerda de 160 g de masa y 4 m de largo está fija por un extremo y ligada a una cuerda ligera por el otro. Su tensión es 400 N. (a) ¿Cuáles son las longitudes de onda del armónico fundamental y los dos siguientes? (b) ¿Cuáles son las frecuencias de estas ondas estacionarias?

**75** ●● Dos ondas procedentes de dos fuentes coherentes poseen la misma longitud de onda  $\lambda$ , frecuencia  $\omega$  y amplitud  $A$ . ¿Cuál es la diferencia de trayectos si la onda resultante en algún punto tiene la amplitud  $A$ ?

**76** ●● SOLVE Una cuerda de 35 m tiene una densidad de masa lineal de 0,0085 kg/m y soporta una tensión de 18 N. Determinar las frecuencias de los cuatro primeros armónicos si (a) el muelle está fijo por ambos extremos, y (b) la cuerda está fija por un extremo y atada a un hilo largo y delgado, de masa despreciable en el otro extremo.

**77** ●● SOLVE Una persona encuentra un pozo de una mina abandonada y desea medir su profundidad. Utilizando un oscilador de audio de frecuencia variable, observa que se producen en el pozo resonancias sucesivas a frecuencias de 63,58 y 89,25 Hz. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

**78** ●● Una cuerda de 5 m de largo que está fija sólo por un extremo está vibrando en su quinto armónico con una frecuencia de 400 Hz. El desplazamiento máximo de cualquier segmento de la cuerda es 3 cm. (a) ¿Cuál es la longitud de onda del mismo? (b) ¿Cuál es el número de onda  $k$ ? (c) ¿Cuál es la frecuencia angular? (d) Escribir la función de onda correspondiente a esta onda estacionaria.

**79** ●● Una onda estacionaria en una cuerda está representada por la siguiente función de onda:  $y(x, t) = 0,02 \sin 4\pi x \cos 60\pi t$ , en donde  $x$  e  $y$  se expresan en metros y  $t$  en segundos. Determinar el desplazamiento máximo y la velocidad máxima de un punto de la cuerda situado en (a)  $x = 0,10$  m, (b)  $x = 0,25$  m, (c)  $x = 0,30$  m y (d)  $x = 0,50$  m.

**80** ●● Un alambre de longitud 2,5 m y masa 0,10 kg está fijo por ambos extremos bajo una tensión de 30 N. Al excitar el armónico  $n$  se forma un nodo a 0,5 m de un extremo. (a) ¿Cuánto vale  $n$ ? (b) ¿Cuáles son las frecuencias de los primeros tres modos permitidos de vibración?

**81** ●● SSM En un método antiguo para determinar la velocidad del sonido en gases, se colocaba horizontalmente un tubo de vidrio cilíndrico y se esparcía en el fondo del tubo una determinada cantidad de un polvo muy fino. Un extremo se cerraba con un pistón que oscilaba con una frecuencia conocida  $f$ . El otro extremo se cerraba por un pistón cuya posición podía modificarse hasta conseguir la resonancia. Cuando esto ocurría, el polvo se recogía en montoncitos igualmente separados a lo largo del fondo del tubo. (a) Explicar por qué se recogía el polvo de esta manera. (b) Deducir una fórmula que nos dé la velocidad del sonido en el gas en función de  $f$  y de la distancia entre los montoncitos de polvo. (c) Dar valores adecuados de la frecuencia  $f$  y de la distancia entre los montoncitos de polvo. (d) Dar valores adecuados de la frecuencia  $f$  y de la longitud  $L$  del tubo con los cuales podía medirse la velocidad del sonido utilizando aire o helio.

**82** ●● En una demostración en una clase de ondas estacionarias, se sujeta una cuerda a un diapason que vibra a 60 Hz que origina la formación de ondas transversales de esta frecuencia en la cuerda. El otro extremo de la cuerda pasa por una polea, variándose la tensión con pesos en este extremo. La cuerda tiene nodos aproximadamente en el diapason y en la polea. (a) Si la cuerda tiene una densidad de masa lineal de 8 g/m y tiene una longitud de 2,5 m

(desde el diapasón hasta la polea), ¿cuál debe ser la tensión para que la cuerda vibre en su modo fundamental? (b) Hallar las tensiones necesarias para la cuerda de forma que vibre en sus armónicos segundo, tercero y cuarto.

**83** ●● **RESOLVER** Tres frecuencias de resonancia sucesivas de un tubo de órgano son 1310, 1834 y 2358 Hz. (a) ¿Está el tubo cerrado por un extremo o abierto en ambos extremos? (b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental? (c) ¿Cuál es la longitud del tubo?

**84** ●● **RESOLVER** Una cuerda de 1 g de masa y una longitud de 50 cm se tensa con una fuerza de 440 N. Está colocada próxima al extremo abierto del tubo del ejemplo 16.9 y se hace sonar con un arco de violín de modo que oscile con su frecuencia fundamental. El nivel de agua del tubo se hace bajar hasta que se obtiene por primera vez la resonancia a 18 cm por debajo de la parte superior del tubo. Utilizar estos datos para determinar la velocidad del sonido en el aire. ¿Por qué no es muy exacto este método?

**85** ●● Una onda estacionaria sobre una cuerda viene descrita por la siguiente función de onda:  $y(x, t) = 0,02 \sin \frac{1}{2} \pi x \cos 40 \pi t$ , en donde  $x$  e  $y$  están en metros y  $t$  en segundos. (a) Escribir funciones de onda para dos trenes de ondas que al superponerse produzcan un patrón de ondas estacionarias. (b) ¿Cuál es la distancia entre los nodos de la onda estacionaria? (c) ¿Cuál es la velocidad de un segmento de cuerda en  $x = 1$  m? (d) ¿Cuál es la aceleración del mismo segmento de cuerda?

**86** ●● **RESOLVER** Dos altavoces idénticos emiten uniformemente en todas direcciones ondas sonoras de 680 Hz de frecuencia con una potencia de salida total de audio de 1 mW cada uno de ellos. Un punto  $P$  está a una distancia de 2,00 m de un altavoz y a 3,00 m de otro. (a) Hallar las intensidades  $I_1$  e  $I_2$  de cada altavoz en el punto  $P$  separadamente. (b) Si los altavoces se alimentan coherentemente y en fase, ¿cuál será la intensidad en el punto  $P$ ? (c) Si se alimentan coherentemente pero desfasados en  $180^\circ$ , ¿cuál será la intensidad en el punto  $P$ ? (d) Si los altavoces son incoherentes, ¿cuál será la intensidad en el punto  $P$ ?

**87** ●● Tres ondas con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, se mueven en la misma dirección y sentido. Las tres ondas vienen dadas por

$$y_1(x, t) = 0,05 \sin \left( kx - \omega t - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$y_2(x, t) = 0,05 \sin (kx - \omega t)$$

$$y_3(x, t) = 0,05 \sin \left( kx - \omega t + \frac{\pi}{3} \right)$$

Hallar la onda resultante.

**88** ●● Una onda plana tiene la forma  $f(x, y, t) = A \cos(k_x x + k_y y - \omega t)$ . Demostrar que la dirección en que se mueve la onda forma un ángulo  $\theta = \arctg(k_y/k_x)$  con la dirección positiva del eje  $x$  y que la velocidad de propagación de la onda es  $v = \omega / \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

**89** ●● **SSM** La velocidad del sonido es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta  $T$  (ecuación 15.5). (a) Demostrar que si la temperatura varía en una pequeña cantidad  $\Delta T$ , la frecuencia fundamental de un tubo de órgano varía aproximadamente en  $\Delta f$ , siendo  $\Delta f/f = \frac{1}{2} \Delta T/T$ . (b) Suponer un tubo de órgano cerrado por un extremo y que tiene una frecuencia fundamental de 200 Hz cuando la temperatura es de  $20^\circ \text{C}$ . ¿Cuál será su frecuencia fundamental cuando la temperatura sea de  $30^\circ \text{C}$ ? (Ignorar cualquier variación de longitud del tubo debido a la dilatación térmica.)

**90** ●● Dos pulsos de onda que se mueven sobre una cuerda están representados por las funciones de onda

$$y_1(x, t) = \frac{0,02}{2 + (x - 2t)^2}$$

$$y_2(x, t) = \frac{-0,02}{2 + (x + 2t)^2}$$

en donde  $x$  está en metros y  $t$  en segundos. (a) Dibujar por separado cada onda en función de  $x$  para  $t = 0$  utilizando una hoja de cálculo o una calculadora grá-

fica y describir el comportamiento de ambas al aumentar el tiempo. (b) Hallar la función de onda resultante para  $t = 0$ . (c) Hallar la función de onda resultante para  $t = 1$  s. (d) Dibujar la función de onda resultante en este último caso.

**91** ●● Si pone su oído y su mano cerca de un extremo de un tubo abierto y hace un chasquido con los dedos, oírás un sonido parecido al que se da cuando se punea una cuerda de guitarra. (Los mejores tubos son los que tienen 1 m de longitud aproximadamente.) (a) Explicar cuál es la causa de este sonido. (b) ¿Qué longitud efectiva del tubo se necesita para producir un sonido como el de una cuerda de guitarra con un tono de *la* por encima del *do* central (440 Hz)?

**92** ●● La energía cinética de un segmento de longitud  $\Delta x$  y masa  $\Delta m$  de una cuerda vibrante viene dada por

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \Delta m \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \Delta x$$

en donde  $\mu = \Delta m/\Delta x$ . (a) Hallar la energía cinética total del modo  $n$ ésimo de vibración de una cuerda de longitud  $L$  fija por ambos extremos. (b) Determinar la energía cinética máxima de la cuerda. (c) ¿Cuál es la función de onda cuando la energía cinética tiene su máximo valor? (d) Demostrar que la energía cinética máxima del modo  $n$ ésimo es proporcional a  $n^2 A_m^2$ .

**93** ●● (a) Demostrar que si la tensión de una cuerda fija por ambos extremos varía en una pequeña cantidad  $dF$ , la frecuencia del armónico fundamental varía aproximadamente en  $df$ , siendo  $df/f = \frac{1}{2} dF/F$ . ¿Se aplica este resultado a todos los armónicos? (b) Utilizar este resultado para hallar la variación porcentual de la tensión que se necesita para aumentar la frecuencia del armónico fundamental de una cuerda de piano de 260 a 262 Hz.

**94** ●● **SSM** Dos fuentes de ondas armónicas situadas en el eje  $x$  tienen una diferencia de fase  $\delta_0$  que es proporcional al tiempo,  $\delta_0 = Ct$ , siendo  $C$  una constante. La amplitud de la onda procedente de cada fuente en un punto  $P$  del eje  $x$  es  $A_0$ . (a) Escribir las funciones de onda de cada una de las ondas en el punto  $P$  admitiendo que este punto está a una distancia  $x_1$  de una fuente y a  $x_1 + \Delta x$  de la otra. (b) Hallar la función de onda resultante y demostrar que su amplitud es  $2A_0 \cos [\frac{1}{2}(\delta + \delta_0)]$ , siendo  $\delta$  la diferencia de fase en  $P$  debida a la diferencia de trayectos. (c) Hacer un gráfico de la intensidad en el punto  $P$  en función del tiempo para una diferencia cero de trayectos utilizando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica. (Sea  $I_0$  la intensidad debida a cada onda separadamente.) ¿Cuál es el promedio temporal de la intensidad? (d) Hacer el mismo gráfico para la intensidad en un punto cuya diferencia de trayectos sea media longitud de onda.

**95** ●●● Las funciones de dos ondas estacionarias en una cuerda de longitud  $L$  son  $y_1(x, t) = A_1 \cos \omega_1 t \sin k_1 x$  e  $y_2(x, t) = A_2 \cos \omega_2 t \sin k_2 x$ , en donde  $k_n = n\pi/L$  y  $\omega_n = n\omega_1$ . La función de la onda resultante se expresa como  $y_r(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ . (a) Hallar la velocidad de un segmento  $dx$  de la cuerda. (b) Hallar la energía cinética de este segmento. (c) Por integración, hallar la energía cinética total de la onda resultante. Obsérvese la desaparición de los términos cruzados de modo que la energía cinética total es proporcional a  $(n_1 A_1)^2 + (n_2 A_2)^2$ .

**96** ●●● Un alambre de 2 m fijo por ambos extremos está vibrando en su modo fundamental. La tensión es 40 N y la masa del alambre es 0,1 kg. El punto medio del alambre tiene una amplitud de 2 cm. (a) Hallar la energía cinética máxima del alambre. (b) En el instante en que el desplazamiento transversal viene dado por  $(0,02 \text{ m}) \sin(\pi x/2)$ , ¿cuál es la energía cinética del alambre? (c) ¿En qué posición del alambre tiene su mayor valor la energía cinética por unidad de longitud del alambre? (d) ¿En dónde tiene su máximo valor la energía potencial por unidad de longitud?

**97** ●●● En principio una onda de forma arbitraria puede expresarse como la suma de ondas armónicas de diferentes frecuencias. (a) Considere una función definida por

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right) \\ = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos[(2n+1)x]}{2n+1}$$

Escribir un programa en una hoja de cálculo que calcule esta serie utilizando un número finito de términos y hacer tres representaciones gráficas de la función en el intervalo de  $x$  comprendido entre 0 y  $4\pi$ . En la primera representación gráfica, aproximar la suma desde  $n = 0$  hasta  $n = \infty$  con el primer término de la suma. En la segunda y tercera representación gráfica, usar sólo los cinco y los diez primeros términos respectivamente. Esta función se suele denominar la *onda cuadrada* (o función  $\theta$ ). (b) ¿Cuál es la relación entre esta función y la serie de Leibnitz para  $\pi$ ,

$$\frac{4}{\pi} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots?$$

98 ●●● Escribir un programa en una hoja de cálculo que calcule y representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} - \dots \right) \\ = \frac{4}{\pi} \sum_n \frac{(-1)^n \sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

¿Qué clase de onda es ésta?

99 ●●● Si se dan palmadas en el extremo de un tubo cilíndrico largo, el eco no suena igual que las palmadas sino que se oyen sonidos como los procedentes de un silbato, inicialmente con una frecuencia muy alta que rápidamente descende hasta hacerse imperceptible. Este efecto puede explicarse si se piensa que el sonido de la palmada es una compresión que se radia de las manos y que se propaga. Los diferentes ecos que llegan al oído, tal como se

muestra en la figura 16.32, recorren trayectorias distintas por el tubo. El primer eco resulta de una única reflexión en el fondo del tubo, mientras que el segundo también se refleja en el centro de las paredes del tubo, una vez al ir y otra al volver; el tercer eco se refleja dos veces en puntos situados a distancias  $1/4$  y  $3/4$ , etc. El tono del sonido que llega al oído es consecuencia de la frecuencia a la que estos sonidos reflejados llegan al oído. (a) Demostrar que el retraso del tiempo entre el eco  $n$  y el eco  $n + 1$  viene dado por

$$\Delta t_n = \frac{2}{v} (\sqrt{(2n)^2 r^2 + L^2} - \sqrt{[2(n-1)]^2 r^2 + L^2}),$$

en donde  $v$  es la velocidad del sonido,  $L$  la longitud del tubo y  $r$  su radio. (b) Usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, representar gráficamente  $\Delta t_n$  frente a  $n$  si  $L = 90$  m,  $r = 1$  m. (Estas son las dimensiones de un tubo del *Exploratorium* de San Francisco.) Represente como mínimo hasta  $n = 100$ . (c) A partir del gráfico, explique por qué la frecuencia disminuye con el tiempo. ¿Cuáles son las frecuencias máxima y mínima que se oirán?

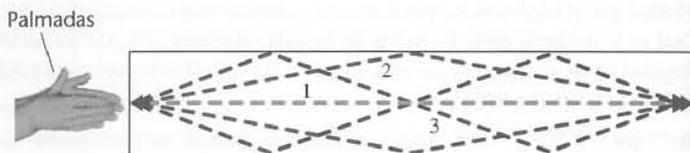


Figura 16.32 Problema 99

# TEMPERATURA Y TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

## Capítulo 17



Estos globos de helio se muestran bien inflados en un caluroso día de verano.

¿Qué les sucederá si los ponemos en el interior de una habitación con aire acondicionado?  
(Véase el ejemplo 17.6.)

Suele decirse que la temperatura es una medida del grado de calor o frío de los cuerpos.

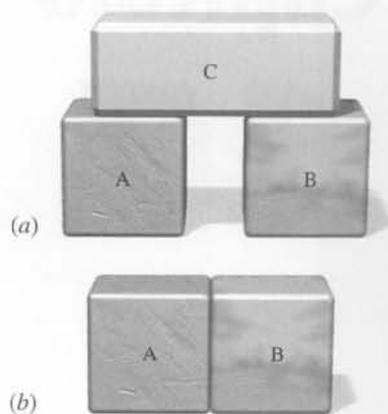
En este capítulo veremos que puede definirse una escala lógica de temperaturas en función de las propiedades de los gases a bajas densidades y que la temperatura es una medida de la energía cinética molecular de un cuerpo.

### 17.1 Equilibrio térmico y temperatura

Normalmente nuestro sentido del tacto puede decirnos si un objeto está caliente o frío. Desde la infancia se aprende que para conseguir que un objeto frío se caliente, basta con ponerlo en contacto con un cuerpo caliente. Y para enfriar un cuerpo caliente lo hemos de poner en contacto con un objeto frío.

Cuando un cuerpo se calienta o se enfría, cambian algunas de sus propiedades físicas. Por ejemplo, la mayor parte de los sólidos y de los líquidos se dilatan al calentarse. Un gas, si su

- 17.1 Equilibrio térmico y temperatura
- 17.2 Escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit
- 17.3 Termómetros de gas y escala de temperaturas absolutas
- 17.4 Ley de los gases ideales
- 17.5 La teoría cinética de los gases



**Figura 17.1** Principio cero de la termodinámica. (a) Los sistemas A y B están en contacto térmico con el sistema C, pero no entre sí. Cuando A y B están cada uno en equilibrio térmico con C, están mutuamente en equilibrio, como puede comprobarse colocándolos en contacto entre sí como se muestra en (b).

presión permanece constante, también se expandirá cuando se caliente, o bien, si su volumen se mantiene constante, aumentará su presión. Si se calienta un conductor eléctrico, variará su resistencia eléctrica, como se estudiará en el capítulo 25. Una propiedad física que varía con la temperatura se denomina **propiedad termométrica**. Un cambio en una propiedad termométrica indica que se ha producido una variación de la temperatura del objeto.

Supóngase que colocamos una barra caliente de cobre en contacto estrecho con una barra fría de hierro. La barra de cobre se contrae ligeramente, indicando que se está enfriando, mientras que la barra de hierro se dilata ligeramente, lo que indica que se está calentando. Se dice que ambas barras están en **contacto térmico**. Finalmente este proceso termina; es decir, ninguna de las dos barras varía posteriormente de longitud. Cuando ocurre esto se dice que las dos barras están en **equilibrio térmico** entre sí.

Supongamos ahora que introducimos la barra de cobre caliente en una corriente de agua fría. La barra se enfría, contrayéndose hasta alcanzar el equilibrio térmico con el agua. A continuación introducimos la barra de hierro fría en la corriente, lejos de la barra de cobre. La barra de hierro se calentará hasta alcanzar el equilibrio térmico con el agua. Si ahora sacamos las barras y las colocamos en contacto una con otra, observaremos que sus longitudes no cambian. Ambas están en equilibrio térmico entre sí. Aunque este hecho es de sentido común, no existe ningún procedimiento lógico para su deducción. Constituye el **principio cero de la termodinámica** (figura 17.1):

Si dos objetos están en equilibrio térmico con un tercero, entonces están en equilibrio térmico entre sí.

#### PRINCIPIO CERO DE LA TERMODINÁMICA

Se dice que dos objetos tienen la misma *temperatura* cuando están en equilibrio térmico entre sí. Como veremos, el principio cero nos permite definir una escala de temperatura.

## 17.2 Escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit

Para establecer una escala de temperatura se puede utilizar cualquier propiedad termométrica. Un termómetro común de mercurio está compuesto por un bulbo y un tubo de vidrio que contienen una cantidad fija de mercurio. Cuando se calienta el mercurio al colocar el termómetro en contacto con un cuerpo más caliente, el mercurio se dilata más que el vidrio y aumenta la longitud de la columna de mercurio.<sup>1</sup> Podemos crear una escala de temperatura a lo largo del tubo de vidrio del modo siguiente. Primero se coloca el termómetro en una mezcla de hielo y agua en equilibrio<sup>2</sup> a una presión de 1 atm. Cuando el termómetro está en equilibrio con el hielo y el agua, se marca la posición de la columna de mercurio sobre el tubo de vidrio. Esta es la **temperatura del punto del hielo** (también denominada **punto de congelación normal** del agua). A continuación se coloca el termómetro en agua hirviendo a una presión de 1 atm y, cuando el termómetro queda en equilibrio térmico con el agua hirviendo, se marca la nueva posición de la columna de mercurio. Esta es la **temperatura del punto del vapor** (también llamada **punto de ebullición normal** del agua).

La **escala de temperatura Celsius** define la temperatura del punto del hielo como cero grados Celsius ( $0^\circ\text{C}$ ) y la temperatura del punto del vapor como  $100^\circ\text{C}$ . El espacio de la columna entre las marcas  $0^\circ$  y  $100^\circ$  se divide en 100 intervalos iguales (grados). Las marcas de los grados se extienden por debajo y por encima de estos puntos. Si  $L_t$  es la longitud de la columna de mercurio, la temperatura Celsius,  $t_C$ , viene dada por

$$t_C = \frac{L_t - L_0}{L_{100} - L_0} \times 100^\circ \quad (17.1)$$

<sup>1</sup> Como el mercurio es muy tóxico, los termómetros de mercurio ya no se venden en los Estados Unidos. Hoy de ordinario se usan los termómetros de alcohol.

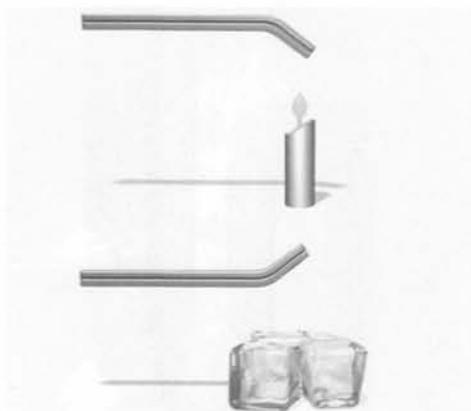
<sup>2</sup> El agua y el hielo en equilibrio constituyen un baño a temperatura constante. Cuando se coloca hielo en agua caliente, ésta se enfría y parte del hielo funde. Finalmente, se alcanza el equilibrio térmico y no se funde más hielo. Si el sistema se calienta ligeramente, se funde algo más de hielo, pero la temperatura no varía en tanto exista algo de hielo.

en donde  $L_0$  es la longitud de la columna de mercurio cuando el termómetro está dentro del baño de hielo, y  $L_{100}$  es su longitud cuando el termómetro está en el baño de vapor. La temperatura normal del cuerpo humano medido en la escala Celsius es de  $37^\circ\text{C}$  aproximadamente.

En la **escala de temperatura Fahrenheit** (usada comúnmente en los países de habla inglesa) se define como  $32^\circ\text{F}$  la temperatura del punto del hielo y como  $212^\circ\text{F}$  la del punto de ebullición del agua.<sup>1</sup> Obsérvese que entre la temperatura del punto del hielo y la del punto del vapor hay 100 grados Celsius y 180 grados Fahrenheit. Un cambio de temperatura de un grado Celsius es por lo tanto igual a un cambio de  $1,8 = 9/5$  grados Fahrenheit. Para convertir una temperatura dada en una escala a la otra debemos tener también en cuenta que las temperaturas cero de ambas no son iguales. La relación general entre una temperatura Fahrenheit  $t_F$  y una temperatura Celsius  $t_C$  es

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32^\circ) \quad (17.2)$$

CONVERSIÓN FAHRENHEIT-CELSIUS



**Figura 17.2** Cinta bimetálica. Cuando se calienta o se enfría, los dos metales se dilatan o contraen en cuantías diferentes, haciendo que la cinta se curve.

### EJEMPLO 17.1 | Conversión de temperaturas Fahrenheit y Celsius

(a) Hallar la temperatura en la escala Celsius equivalente a  $41^\circ\text{F}$ . (b) Hallar la temperatura en la escala Fahrenheit equivalente a  $37^\circ\text{C}$ .

(a) Aplicar la ecuación 17.2 con  $t_F = 41^\circ\text{F}$ :

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32^\circ) = \frac{5}{9}(41^\circ - 32^\circ) = \frac{5}{9}(9^\circ) = \boxed{5^\circ\text{C}}$$

(b) 1. Despejar  $t_F$  de la ecuación 17.2 en función de  $t_C$ :

$$t_F = \frac{9}{5}t_C + 32^\circ$$

2. Reemplazar  $t_C = 37^\circ\text{C}$ :

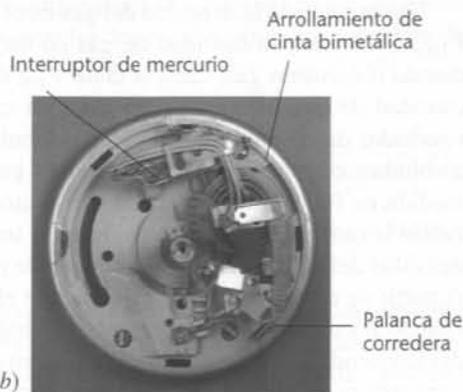
$$t_F = \frac{9}{5}(37,0^\circ) + 32^\circ = 66,6^\circ + 32^\circ = \boxed{98,6^\circ\text{F}}$$

**Ejercicio** (a) Determinar la temperatura Celsius equivalente a  $68^\circ\text{F}$ . (b) Determinar la temperatura Fahrenheit equivalente a  $-40^\circ\text{C}$ . (Respuestas (a)  $20^\circ\text{C}$ , (b)  $-40^\circ\text{F}$ .)

Pueden utilizarse otras propiedades termométricas para construir termómetros y establecer escalas de temperatura. La figura 17.2 muestra una cinta o tira bimetálica compuesta por dos metales diferentes unidos entre sí. Cuando la cinta se calienta o se enfría, se curva para



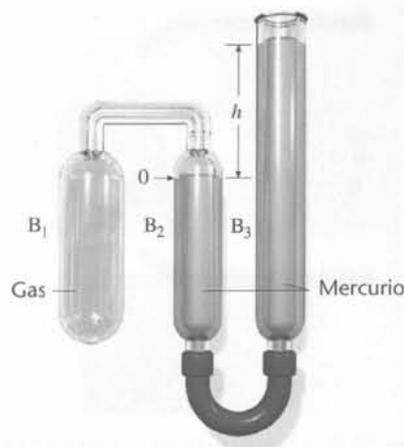
(a)



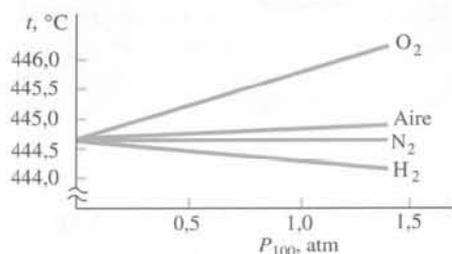
(b)

**Figura 17.3** (a) Termómetro que utiliza una cinta bimetálica en forma de arrollamiento en espiral. (La aguja roja está unida a uno de los extremos de la cinta.) Cuando el arrollamiento se calienta, la aguja gira en sentido horario porque el metal externo se dilata más que el interno. (b) Termostato casero. Cuando la habitación se calienta en exceso, la espiral se expande y el tubo montado sobre ella se inclina, de modo que el mercurio que contiene se desliza y cierra un interruptor eléctrico poniendo en marcha un acondicionador de aire. En la parte derecha puede verse una palanca de corredera montada sobre la espiral para ajustar la temperatura deseada. El circuito se abre cuando el aire más frío contrae suficientemente la espiral.

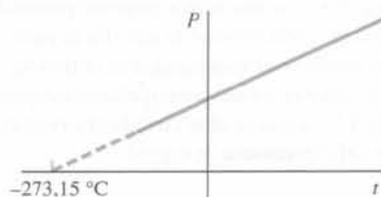
<sup>1</sup> Cuando el físico alemán Daniel Fahrenheit ideó su escala de temperatura, quería que todas las temperaturas mensurables fuesen positivas. Originalmente, escogió  $0^\circ\text{F}$  para la temperatura más baja que pudo obtener con una mezcla de hielo y agua salada, y  $96^\circ\text{F}$  (un número conveniente con muchos divisores) para la temperatura del cuerpo humano. Luego modificó su escala ligeramente para conseguir que el punto del hielo y el del vapor fuesen números enteros. Esto dio como resultado que la temperatura del cuerpo humano estuviese comprendida entre  $98^\circ\text{F}$  y  $99^\circ\text{F}$ .



**Figura 17.4** Termómetro de gas a volumen constante. Se mantiene constante el volumen subiendo o bajando el tubo B<sub>3</sub> de modo que se mantenga en la marca cero el mercurio que contiene el tubo B<sub>2</sub>. Se escoge que la temperatura sea proporcional a la presión del gas contenido en el tubo B<sub>1</sub>. Esta presión la indica la altura  $h$  de la columna de mercurio en el tubo B<sub>3</sub>.



**Figura 17.5** Temperatura del punto de ebullición del azufre medida con termómetros de gas a volumen constante rellenos con gases diferentes. Se modifica la presión en el punto de ebullición del agua  $P_{100}$  variando la cantidad de gas en los termómetros. Cuando se reduce la cantidad de gas, las temperaturas medidas por todos los termómetros se aproxima el valor 444,60 °C.



**Figura 17.6** Gráfico que muestra la presión en función de la temperatura según la mide un termómetro de gas a volumen constante. Cuando se extrapola a presión nula, la gráfica corta al eje de temperaturas en el valor de  $-273,15$  °C.

acomodarse a la diferencia de las dilataciones térmicas de los dos metales. La figura 17.3 muestra un arrollamiento bimetalico con una aguja que indica la temperatura sobre una escala adecuada. Cuando se calienta el termómetro, la espiral se curva más y la aguja se desplaza hacia la derecha. Se calibra el termómetro de la misma forma que un termómetro de mercurio, es decir, determinando el punto del hielo y el de ebullición del agua y dividiendo el intervalo entre ellos en 100 grados Celsius (o 180 grados Fahrenheit).

## 17.3 Termómetros de gas y escala de temperaturas absolutas

Todos los termómetros calibrados mediante agua con hielo y vapor de agua concuerdan (por definición) a 0 °C y 100 °C, pero ofrecen lecturas ligeramente distintas en los puntos intermedios. Las discrepancias pueden ser muy grandes por encima del punto del vapor y por debajo del punto del hielo. Sin embargo, existe un grupo de termómetros en el que las temperaturas medidas concuerdan muy bien incluso lejos de los puntos de calibración: se trata de los termómetros de gas. En una de sus versiones, el **termómetro de gas a volumen constante**, se mantiene constante el volumen del gas y su presión se utiliza como propiedad termométrica para medir temperaturas (figura 17.4). La presión  $P_0$  del punto del hielo y la presión  $P_{100}$  del punto del vapor de agua se determinan situando el termómetro en baños agua-hielo y agua-vapor, y el intervalo entre ellos se divide en 100 grados iguales (escala Celsius). Si la presión es  $P_i$  en el baño cuya temperatura desea determinarse, dicha temperatura en grados Celsius se define por

$$t_C = \frac{P_i - P_0}{P_{100} - P_0} \times 100^\circ \quad (17.3)$$

Supongamos que medimos una temperatura concreta, por ejemplo el punto de ebullición del azufre a 1 atm de presión, utilizando para ello cuatro termómetros de gas a volumen constante que contienen cada uno de ellos uno de los cuatro gases siguientes: aire, hidrógeno, nitrógeno y oxígeno. Los termómetros han sido calibrados y se han determinado para cada uno de ellos los valores de  $P_{100}$  y  $P_0$ . A continuación se sumergen en azufre hirviendo, y cuando están en equilibrio térmico con el azufre, se mide la presión en cada uno de los termómetros. Luego se calcula la temperatura haciendo uso de la ecuación 17.3. ¿Dará este proceso el mismo resultado en cada uno de los termómetros? Quizás de manera sorprendente, la respuesta es sí. Los cuatro termómetros miden la misma temperatura siempre que la densidad del gas en cada uno de ellos sea suficientemente baja.

Una medida de la densidad del gas en el termómetro es su presión en el punto del vapor,  $P_{100}$ . Si se varía la cantidad de gas en un termómetro a volumen constante, ya sea añadiendo o quitando gas, cambia tanto  $P_{100}$  como  $P_0$ . Por lo tanto, cada vez que se varía la cantidad de gas, el termómetro debe ser calibrado de nuevo. La figura 17.5 muestra los resultados de las medidas del punto de ebullición del azufre utilizando termómetros de gas a volumen constante llenos con diversos gases. En esta figura se representa la temperatura medida en función de la presión del punto del vapor del agua,  $P_{100}$ , que se varía modificando la cantidad de gas contenido en el termómetro. Cuando se reduce dicha cantidad, la densidad del gas disminuye, y lo mismo le ocurre a la presión del punto del vapor del agua. A partir de esta figura se comprueba que el acuerdo entre los termómetros es muy grande cuando las densidades de los gases son bajas ( $P_{100}$  baja). En el límite cuando la densidad del gas tiende a cero, todos los termómetros de gas dan exactamente el mismo valor para la temperatura de ebullición del azufre, con independencia de las propiedades del gas utilizado. Por supuesto, la temperatura de ebullición del azufre no tiene nada de especial. Los termómetros de gas a volumen constante y a densidades bajas concuerdan para cualquier temperatura. Por este motivo, los termómetros de gas a bajas densidades pueden utilizarse para definir la temperatura.

Consideremos a continuación una serie de medidas de temperatura con un termómetro de gas a volumen constante que contiene una cantidad de gas muy pequeña pero fija. De acuerdo

con la ecuación 17.3, la presión  $P_t$  en el termómetro varía linealmente con la temperatura medida  $t_C$ . La figura 17.6 muestra una gráfica de la presión en función de la temperatura medida en un termómetro de gas a volumen constante. Cuando extrapolamos esta línea recta hasta presión cero, la temperatura tiende a  $-273,15\text{ }^\circ\text{C}$ . Este límite es siempre el mismo con independencia del gas utilizado.

Un estado de referencia que puede reproducirse con mucha mayor precisión que el punto del hielo o el de ebullición del agua es el **punto triple del agua**, el cual se da a una temperatura y presión únicas en las que coexisten en equilibrio el agua, su vapor y el hielo (véase la figura 17.7). Este equilibrio tiene lugar a la presión de 4,58 mmHg y temperatura de  $0,01\text{ }^\circ\text{C}$ . La **escala de temperatura del gas ideal** de forma que la temperatura del punto triple sea 273,16 kelvins (K). (El kelvin es una unidad de temperatura que tiene el mismo tamaño que el grado Celsius.) Se define la temperatura  $T$  de cualquier otro estado de modo que sea proporcional a la presión de un termómetro de gas a volumen constante:

$$T = \frac{273,16\text{ K}}{P_3} P \quad (17.4)$$

ESCALA DE TEMPERATURA DEL GAS IDEAL

en donde  $P$  es la presión del gas en el termómetro cuando éste se halla en equilibrio térmico con el sistema cuya temperatura se está midiendo y  $P_3$  es la presión del gas en el termómetro cuando se encuentra inmerso en un baño de agua-vapor-hielo en su punto triple. El valor de  $P_3$  depende de la cantidad de gas contenido en el termómetro. La escala de temperatura del gas ideal, definida mediante la ecuación 17.4, tiene la ventaja de que la temperatura medida de un estado cualquiera es la misma con independencia del tipo de gas utilizado. Sólo depende de las propiedades generales de los gases.

La temperatura más baja que puede medirse con un termómetro de gases es aproximadamente 1K y ello exige que el gas sea helio. Por debajo de esta temperatura el helio licúa; todos los demás gases licúan a temperaturas más altas (véase la tabla 17.1). En el capítulo 19 veremos que puede utilizarse el segundo principio de la termodinámica para definir la **escala de temperatura absoluta** con independencia de las propiedades de cualquier sustancia y sin limitaciones en el margen de temperaturas que pueden medirse. Ha sido posible medir temperaturas tan bajas como una millonésima de kelvin. La escala absoluta así definida es idéntica a la que se definió mediante la ecuación 17.4 en el intervalo de temperaturas en que puede utilizarse el termómetro de gas. Cuando nos referimos a la temperatura absoluta se utiliza el símbolo  $T$ .

Como el grado Celsius y el kelvin tienen el mismo tamaño, las *diferencias* de temperaturas son las mismas tanto en la escala Celsius como en la escala de temperatura absoluta (también llamada **escala Kelvin**). Es decir, una *variación* de temperatura de 1 K es idéntica a una *variación* de temperatura de  $1\text{ }^\circ\text{C}$ .<sup>1</sup> La única diferencia entre las dos escalas radica en la elección de la temperatura cero. Para convertir de grados Celsius a kelvins, basta con sumar  $273,15$ :<sup>2</sup>

$$T = t_C + 273,15 \quad (17.5)$$

CONVERSIÓN CELSIUS-KELVIN

Aunque las escalas Celsius y Fahrenheit son útiles en su empleo cotidiano, la escala absoluta es mucho más conveniente para fines científicos, en parte porque muchas fórmulas se expresan de forma más simple si se utiliza la escala absoluta, y en parte porque puede darse una interpretación más fundamental de la temperatura absoluta.



Figura 17.7  $\text{H}_2\text{O}$  en su punto triple. Contiene agua, hielo y vapor de agua, todo en equilibrio.

TABLA 17.1 Las temperaturas de diversos lugares y fenómenos

Temperatura (K)	Fenómeno
$10^{10}$	
$10^9$	← Supernova
$10^8$	← Bomba de hidrógeno
$10^7$	← Interior del Sol
$10^6$	← Corona solar
$10^5$	
$10^4$	
$10^3$	← Superficie del Sol
$10^2$	← Funde el cobre
$10^1$	← Se hiela el agua
$10^0$	← Nitrógeno líquido
$10^{-1}$	← Hidrógeno líquido
$10^{-2}$	← Helio líquido
$10^{-3}$	← El $\text{He}^3$ se hace superfluido
$10^{-4}$	
$10^{-5}$	
$10^{-6}$	
$10^{-7}$	
$10^{-8}$	
$10^{-9}$	← Condensado de Bose-Einstein
$10^{-10}$	← Temperatura más baja alcanzada

<sup>1</sup> Escribimos  $1\text{ }^\circ\text{C}$  para indicar un *cambio de temperatura* de un grado Celsius, en lugar de  $1\text{ }^\circ\text{C}$  que representa la temperatura de un grado Celsius.

<sup>2</sup> En la mayor parte de los casos, es posible redondear la temperatura del cero absoluto a  $-273\text{ }^\circ\text{C}$ .

**EJEMPLO 17.2** | Transformación de grados Fahrenheit en kelvins

¿Cuál es la temperatura Kelvin correspondiente a 70 °F?

**Planteamiento del problema** Convertir primero a grados Celsius y luego a kelvins.

1. Convertir a grados Celsius:

$$t_C = \frac{5}{9}(70^\circ - 32^\circ) = 21,1^\circ \text{C}$$

2. Para hallar la temperatura Kelvin sumamos 273:

$$T = t_C + 273 = 21,1 + 273 = \boxed{294 \text{ K}}$$

**Ejercicio** El superconductor de “alta temperatura”  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  adquiere la propiedad de superconducción cuando su temperatura se baja a 92 K. Determinar esta temperatura en grados Fahrenheit. (Respuesta  $-294^\circ\text{C}$ .)

## 17.4 Ley de los gases ideales

Las propiedades de los gases a bajas densidades permiten definir la escala de temperaturas del gas ideal. Si comprimimos este gas manteniendo su temperatura constante, la presión crece. Del mismo modo, si el gas se expande a temperatura constante, su presión decrece. Con una buena aproximación, el producto de la presión por el volumen de un gas de baja densidad es constante a temperatura constante. Este resultado fue descubierto experimentalmente por Robert Boyle (1627-1691) y se conoce como **ley de Boyle**:

$$PV = \text{constante} \quad (\text{a temperatura constante})$$

Existe una ley más general que reproduce la ley de Boyle como un caso especial. De acuerdo con la ecuación 17.4, la temperatura absoluta de un gas de baja densidad es proporcional a su presión a volumen constante. Además —un resultado descubierto experimentalmente por Jacques Charles (1746-1823) y Gay-Lussac (1778-1850)— la temperatura absoluta de un gas de baja densidad es proporcional a su volumen a presión constante. Estos dos resultados pueden combinarse mediante la expresión

$$PV = CT \quad (17.6)$$

en donde  $C$  es una constante de proporcionalidad, que como veremos a continuación es proporcional a la cantidad de gas. En efecto, consideremos dos recipientes idénticos que contienen cada uno la misma cantidad de cierto tipo de gas a la misma temperatura y presión. Si ponemos en comunicación ambos recipientes, combinándolos, nos encontraremos al final con una cantidad y un volumen doble de gas a la misma presión y temperatura. Hemos duplicado la magnitud  $PV/T$  duplicando la cantidad de gas. Por lo tanto, podemos escribir  $C$  como una constante  $k$  multiplicada por el número  $N$  de moléculas del gas:

$$C = kN$$

Por lo tanto, la ecuación 17.6 se convierte en

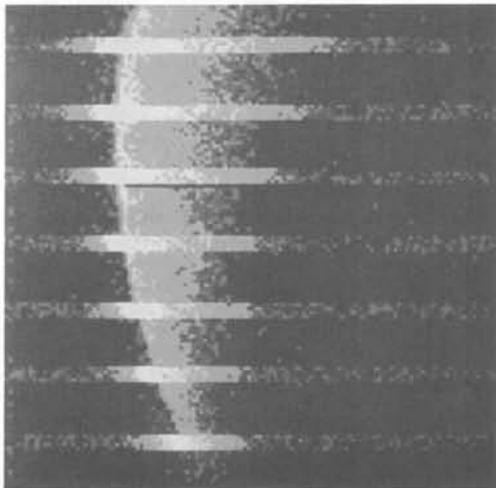
$$PV = NkT \quad (17.7)$$

La constante  $k$  se denomina **constante de Boltzmann**. Experimentalmente se demuestra que tiene el mismo valor para cualquier tipo de gas:

$$k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV/K} \quad (17.8)$$

Una cantidad determinada de gas suele expresarse en moles. Un **mol** de cualquier sustancia es la cantidad de la misma que contiene el número de Avogadro  $N_A$  de átomos o moléculas, definido como el número de átomos de carbono que hay en 12 gramos de  $^{12}\text{C}$ :

$$N_A = 6,022 \times 10^{23} \quad (17.9)$$



La atmósfera de Venus está compuesta casi por completo por  $\text{CO}_2$ . Sin embargo, las mediciones realizadas por el Pioneer Venus Orbiter demuestran que hay una nube de hidrógeno atómico rodeando Venus. La imagen en forma de media luna muestra la presencia de oxígeno atómico y las barras muestran el hidrógeno que se extiende mucho más allá de la atmósfera. Como la velocidad de escape de Venus es de 10,3 km/s, ligeramente menor que la de la Tierra, y la temperatura de su atmósfera es considerablemente más elevada, debería haber escapado todo el hidrógeno que pudiera haber existido en la atmósfera de Venus en la época de su formación.

Si tenemos  $n$  moles de una sustancia, el número de moléculas es

$$N = nN_A \quad (17.10)$$

La ecuación 17.7 se expresa entonces como

$$PV = nN_A kT = nRT \quad (17.11)$$

en donde  $R = N_A k$  se denomina **constante universal de los gases**. Su valor, que es el mismo para todos los gases, es

$$R = N_A k = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) = 0,08206 \text{ atm} \cdot \text{L}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \quad (17.12)$$

La figura 17.8 muestra una representación de  $PV/(nT)$  en función de la presión  $P$  para varios gases. Para todos los gases,  $PV/(nT)$  es casi constante en un intervalo de presiones bastante grande. Incluso el oxígeno, que presenta la mayor variación en esta representación, varía sólo alrededor del 1 por ciento entre 0 y 5 atm. Se define un **gas ideal** como aquel para el que  $PV/(nT)$  es constante a todas las presiones. En este caso, la presión, el volumen y la temperatura están relacionados por

$$PV = nRT \quad (17.13)$$

LEY DE LOS GASES IDEALES

La ecuación 17.13, que relaciona las variables  $P$ ,  $V$  y  $T$ , se conoce como ley de los gases ideales, y es un ejemplo de una **ecuación de estado**. A bajas densidades (y por consiguiente, a bajas presiones) describe las propiedades de los gases reales. A densidades más elevadas se han de hacer correcciones a esta ecuación. En el capítulo 20 se tratará otra ecuación de estado, la ecuación de van der Waals, que incluye dichas correcciones. Para todo gas a cualquier densidad existe una ecuación de estado que relaciona  $P$ ,  $V$  y  $T$  para una cantidad dada de gas. Así, el estado de una cantidad dada de gas queda determinado por dos cualesquiera de las tres **variables de estado**  $P$ ,  $V$  y  $T$ .

### EJEMPLO 17.3 | Volumen de un gas ideal

¿Qué volumen ocupa 1 mol de gas a una temperatura de  $0^\circ\text{C}$  y una presión de 1 atm?

Podemos hallar el volumen mediante la ley de los gases ideales, con  $T = 273 \text{ K}$ :

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1 \text{ mol})(0,0821 \text{ atm} \cdot \text{L}/[\text{mol} \cdot \text{K}])(273 \text{ K})}{1 \text{ atm}} = \boxed{22,4 \text{ L}}$$

**Observaciones** Escribiendo  $R$  en  $\text{atm} \cdot \text{L}/\text{mol}$ , podemos expresar  $P$  en atm y se obtiene  $V$  en litros.

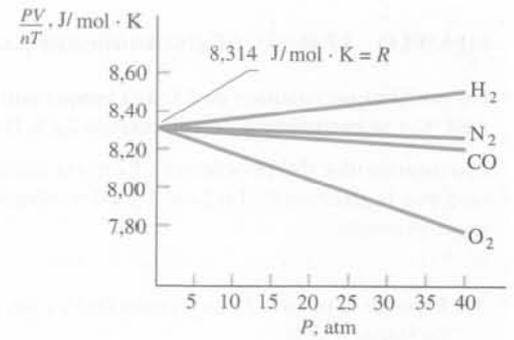
**Ejercicio** Hallar (a) el número de moles  $n$  y (b) el número de moléculas  $N$  que hay en  $1 \text{ cm}^3$  de un gas a  $0^\circ\text{C}$  y 1 atm. (Respuestas (a)  $n = 4,46 \times 10^{-5} \text{ mol}$ , (b)  $N = 2,68 \times 10^{19}$  moléculas.)

La temperatura de  $0^\circ\text{C}$  ( $273 \text{ K}$ ) y la presión de 1 atm suelen denominarse **condiciones estándar**. En el ejemplo 17.3 hemos visto que en condiciones estándar, 1 mol de un gas ideal ocupa un volumen de 22,4 l.

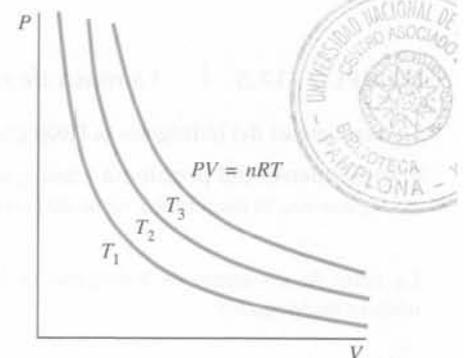
La figura 17.9 muestra los gráficos de  $P$  en función de  $V$  a varias temperaturas constantes  $T$ . Estas curvas se llaman **isotermas**. Las isotermas de un gas ideal son hipérbolas. Para una cantidad determinada de gas, vemos en la ecuación 17.13 que la magnitud  $PV/T$  es constante. Utilizando el subíndice 1 para los valores iniciales y 2 para los valores finales, tenemos

$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \quad (17.14)$$

LEY DE LOS GASES IDEALES PARA UNA CANTIDAD FIJA DE GAS



**Figura 17.8** Gráfico de  $PV/nT$  en función de la presión para gases reales. En estos gráficos, la presión varía modificando la cantidad de gas. Cuando se reduce la densidad del gas, y por lo tanto la presión, la relación  $PV/nT$  se aproxima al mismo valor:  $8,314 \text{ J}/\text{mol} \cdot \text{K}$  para todos los gases. Este valor es la constante universal de los gases  $R$ .



**Figura 17.9** Isotermas de un gas en un diagrama  $PV$ . Para un gas ideal estas curvas son hipérbolas definidas por  $PV = nRT$ .

**EJEMPLO 17.4** | Calentamiento y compresión de un gas

Un gas tiene un volumen de 2 l, una temperatura de 30 °C y una presión de 1 atm. Se calienta a 60 °C y se comprime a un volumen de 1,5 l. Hallar su nueva presión.

**Planteamiento del problema** Como la cantidad de gas es fija, la presión puede determinarse mediante la ecuación 17.14. Sean 1 y 2 los subíndices correspondientes a los estados inicial y final, respectivamente.

1. Expresar la presión  $P_2$  en función de  $P_1$  y los volúmenes y temperaturas inicial y final:
 
$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}, \quad P_2 = \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2} P_1$$
2. Calcular las temperaturas absolutas inicial y final:
 
$$T_1 = 273 + 30 = 303 \text{ K}$$

$$T_2 = 273 + 60 = 333 \text{ K}$$
3. Reemplazar por los valores numéricos del resultado del paso 1 para determinar  $P_2$ :
 
$$P_2 = \frac{(333 \text{ K})(2 \text{ l})}{(303 \text{ K})(1,5 \text{ l})} (1 \text{ atm}) = \boxed{1,47 \text{ atm}}$$

**Ejercicio** ¿Cuántos moles de gas existen en el sistema descrito en este ejemplo? (Respuesta  $n = 0,0804 \text{ mol}$ .)

La masa de 1 mol de una sustancia se denomina **masa molar**,  $M$ . (Algunas veces se utilizan los términos *peso molecular* y *masa molecular*.) La masa molar del  $^{12}\text{C}$  es, por definición, 12 g/mol o  $12 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ . Las masas molares de los elementos se dan en la tabla periódica del apéndice C. La masa molar de una molécula como el  $\text{CO}_2$ , por ejemplo, es la suma de las masas molares de los elementos que la componen. Como la masa molar del oxígeno es 16 g/mol (realmente 15,999 g/mol), la masa molar del  $\text{O}_2$  es 32 g/mol y la del  $\text{CO}_2$  es  $12 + 32 = 44 \text{ g/mol}$ .

La masa de  $n$  moles de gas viene dada por

$$m = nM$$

La densidad  $\rho$  de un gas ideal es

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}$$

Utilizando  $n/V = P/RT$  de la ecuación 17.13, podemos escribir

$$\rho = \frac{M}{RT} P \quad (17.15)$$

A una temperatura dada, la densidad de un gas ideal es proporcional a la presión.

**EJEMPLO 17.5** | La masa de un átomo de hidrógeno

La masa molar del hidrógeno es 1,008 g/mol. ¿Cuál es la masa de un átomo de hidrógeno?

**Planteamiento del problema** Sea  $m$  la masa de un átomo de hidrógeno. Como en un mol existen  $N_A$  átomos, la masa molar viene dada por  $M = mN_A$ . Utilizaremos esta expresión para deducir  $m$ .

La masa de un átomo de hidrógeno es la masa molar dividida por el número de Avogadro:

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{1,008 \text{ g/mol}}{6,022 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}} = \boxed{1,67 \times 10^{-24} \text{ g/átomo}}$$

**Observación** El número de Avogadro es aproximadamente el recíproco de la masa del átomo de hidrógeno medido en gramos.

**EJEMPLO 17.6** | Expansión de un gas a temperatura constante

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Cien gramos de  $\text{CO}_2$  ocupan un volumen de 55 l a una presión de 1 atm. (a) Hallar la temperatura. (b) Si se aumenta el volumen a 80 l y se mantiene constante la temperatura, ¿cuál es la nueva presión?

**Planteamiento del problema** Ambas cuestiones pueden resolverse utilizando la ley de los gases ideales (ecuación 17.13) si determinamos el número de moles,  $n$ .

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

Pasos	Respuestas
(a) 1. El número de moles $n$ se calcula a partir de la masa $m$ de la muestra y la masa molar $M$ del $\text{CO}_2$ . A partir de la información del apéndice C, se obtiene $M = 44 \text{ g/mol}$ .	$n = \frac{m}{M} = 2,27 \text{ mol}$
2. Determinar la temperatura $T$ a partir de la ley de los gases ideales.	$T = \frac{PV}{nR} = \boxed{295 \text{ K}}$
(b) Utilizar $PV = \text{constante}$ para determinar la nueva presión cuando $V = 80 \text{ L}$ .	$P_2 = \boxed{0,688 \text{ atm}}$

**Ejercicio** Si la temperatura decrece a presión constante, ¿qué le sucede al volumen? (Respuesta: Decrece)

## 17.5 La teoría cinética de los gases

La descripción del comportamiento de un gas en función de las variables  $P$ ,  $V$  y  $T$  puede relacionarse con los valores medios de magnitudes microscópicas, tales como la masa y velocidad de las moléculas del gas. La teoría correspondiente se denomina **teoría cinética de los gases**.

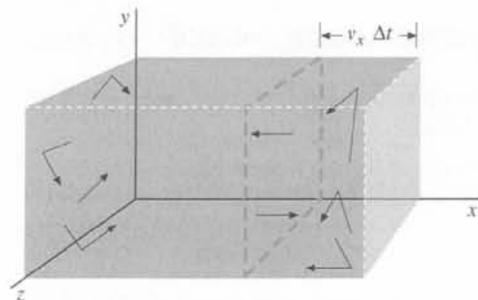
Desde el punto de vista de la teoría cinética, un gas está constituido por un gran número de moléculas que realizan colisiones elásticas entre sí y con las paredes del recipiente. En ausencia de fuerzas externas (las moléculas se mueven con tanta rapidez que podemos despreciar la acción de la gravedad), no existe ninguna posición preferida para una molécula en el interior del recipiente<sup>1</sup> y los vectores velocidad tampoco poseen ninguna dirección preferida. Las moléculas están separadas, en promedio, por distancias que son grandes en comparación con su diámetro y no ejercen ninguna fuerza entre sí, excepto durante el choque mutuo. (Esta última hipótesis es equivalente a suponer una densidad gaseosa muy baja, lo cual significa, como vimos en la última sección, que el gas es ideal. Como en las colisiones o choques se conserva la cantidad de movimiento, los choques que las moléculas realizan entre sí no influyen sobre la cantidad de movimiento total en ninguna dirección, de modo que podemos despreciarlos.)

### Cálculo de la presión ejercida por un gas

La presión que un gas ejerce sobre el recipiente que lo contiene se debe a las colisiones entre las moléculas de gas y las paredes del recipiente. La presión es una fuerza por unidad de área y, según la segunda ley de Newton, esta fuerza es la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de las moléculas que chocan contra la pared.

Supongamos que tenemos un recipiente rectangular de volumen  $V$  que contiene  $N$  moléculas de masa  $m$  y con velocidad  $v$ . Deseamos calcular la fuerza ejercida por estas moléculas sobre la pared de la derecha que es perpendicular al eje  $x$  y tiene el área  $A$ . El número de moléculas que chocan contra esta pared en el intervalo  $\Delta t$  es la totalidad de las que se están moviendo hacia la derecha y están a una distancia igual o inferior a  $v_x \Delta t$ . Este número es

<sup>1</sup> Debido a la gravedad, la densidad molecular en el fondo del recipiente es ligeramente mayor que en la parte superior. Como se vio en el capítulo 13, la densidad del aire disminuye con la altura, siendo igual a la mitad de su valor en la superficie terrestre aproximadamente a la altura de 5,5 km. Por ello, la variación de densidad en un recipiente de tamaño normal es despreciable.



**Figura 17.10** Moléculas gaseosas en un recipiente rectangular. En un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , las moléculas situadas a una distancia  $v_x \Delta t$  de la pared derecha chocarán contra esta pared si se mueven hacia la derecha.

igual al número de moléculas que hay por unidad de volumen  $N/V$  multiplicado por el volumen  $v_x \Delta t A$  y luego por  $\frac{1}{2}$  porque, en promedio, la mitad de las moléculas se estarán moviendo hacia la derecha y la otra mitad hacia la izquierda. Por lo tanto, el número de moléculas que choca contra la pared en el tiempo  $\Delta t$  es

$$\text{Moléculas que chocan contra la pared} = \frac{1}{2} \frac{N}{V} v_x \Delta t A$$

La componente  $x$  de la cantidad de movimiento de una molécula antes de chocar contra la pared es  $+mv_x$  y después de que tenga lugar un choque elástico con ella será  $-mv_x$ . El valor de la variación de la cantidad de movimiento durante el choque de una molécula contra la pared es, pues,  $2mv_x$ . El módulo de la variación total de la cantidad de movimiento de todas las moléculas durante un cierto intervalo de tiempo  $\Delta t$  es  $2mv_x$  multiplicado por el número de moléculas que chocan contra la pared en dicho intervalo:

$$|\Delta p| = (2mv_x) \times \left( \frac{1}{2} \frac{N}{V} v_x \Delta t A \right) = \frac{N}{V} m v_x^2 A \Delta t \quad (17.16)$$

El módulo de la fuerza ejercida por la pared sobre las moléculas y por éstas sobre la pared es  $|\Delta p|/\Delta t$ , y la presión es esta fuerza dividida por el área  $A$ :

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{N}{V} m v_x^2$$

o también

$$PV = N m v_x^2 \quad (17.17)$$

Para tener en cuenta el hecho de que no todas las moléculas dentro del recipiente tienen la misma velocidad, basta sustituir  $v_x^2$  por el valor medio  $(v_x^2)_m$ . Entonces, si escribimos la ecuación 17.17 en función de la energía cinética  $\frac{1}{2} m v_x^2$  asociada con el movimiento a lo largo del eje  $x$ , se tiene

$$PV = 2N \left( \frac{1}{2} m v_x^2 \right)_m \quad (17.18)$$

### Interpretación molecular de la temperatura

Comparando la ecuación 17.18 con la 17.17, que se obtuvo experimentalmente para todo gas a densidades muy bajas, podemos ver que

$$PV = NkT = 2N \left( \frac{1}{2} m v_x^2 \right)_m$$

o bien

$$\left( \frac{1}{2} m v_x^2 \right)_m = \frac{1}{2} kT \quad (17.19)$$

ENERGÍA MEDIA ASOCIADA AL MOVIMIENTO EN LA DIRECCIÓN  $x$

Así pues, la energía cinética media asociada con el movimiento a lo largo del eje  $x$  es  $\frac{1}{2} kT$ . Pero la dirección  $x$  no tiene ningún privilegio especial. En promedio

$$(v_x^2)_m = (v_y^2)_m = (v_z^2)_m \quad (17.20)$$

$$(v^2)_m = (v_x^2)_m + (v_y^2)_m + (v_z^2)_m = 3(v_x^2)_m$$

Escribiendo  $(v_x^2)_m = \frac{1}{3}(v^2)_m$  y  $(E_c)_m$  para la energía cinética media de traslación de las moléculas<sup>1</sup>, la ecuación 17.19 se reduce a

$$(E_c)_m = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_m = \frac{3}{2}kT \quad (17.21)$$

ENERGÍA CINÉTICA MEDIA DE UNA MOLÉCULA

La temperatura absoluta es, pues, una medida de la energía cinética de traslación media de las moléculas. La energía cinética de traslación total de  $n$  moles de un gas que contiene  $N$  moléculas es

$$E_c = N\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_m = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT \quad (17.22)$$

ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN DE  $n$  MOLES DE UN GAS

en donde se ha utilizado  $Nk = nN_Ak = nR$ . Por lo tanto, la energía de traslación es  $\frac{3}{2}kT$  por molécula y  $\frac{3}{2}RT$  por mol.

Podemos utilizar estos resultados para hacer una estimación del orden de magnitud de las velocidades de las moléculas en un gas. El valor medio de  $v^2$  es, según la ecuación 17.21

$$(v^2)_m = \frac{3kT}{m} = \frac{3N_AkT}{N_Am} = \frac{3RT}{M}$$

en donde  $M = N_Am$  es la masa molar. La raíz cuadrada de  $(v^2)_m$  es la **velocidad cuadrática media** (cm):

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{(v^2)_m} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (17.23)$$

Obsérvese que la ecuación 17.23 es semejante a la ecuación 15.5 correspondiente a la velocidad del sonido en un gas:

$$v_{\text{sonido}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (17.24)$$

en donde  $\gamma = 1,4$  para el aire. Esto no debe sorprendernos porque una onda sonora en el aire es una perturbación de la presión que se propaga mediante colisiones entre moléculas del aire.

### EJEMPLO 17.7 | La velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas

El gas oxígeno ( $\text{O}_2$ ) tiene una masa molar aproximada de 32 g/mol, mientras que el gas hidrógeno ( $\text{H}_2$ ) tiene una masa molar aproximada de 2 g/mol. Calcular (a) la velocidad cm de una molécula de oxígeno cuando la temperatura es 300 K y (b) la velocidad cm de una molécula de hidrógeno a la misma temperatura.

**Planteamiento del problema** (a) Determinaremos  $v_{\text{cm}}$  a partir de la ecuación 17.23. Con unidades coherentes utilizaremos  $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  y expresaremos la masa molar del  $\text{O}_2$  en kg/mol. (b) Como  $v_{\text{cm}}$  es proporcional a  $1/\sqrt{M}$  y la masa molar del hidrógeno es 1/16 la del oxígeno, la velocidad cm del hidrógeno es 4 veces la del oxígeno.

<sup>1</sup> Incluimos el término de *traslación* porque las moléculas pueden tener también energía cinética de rotación o de vibración. Sólo la energía cinética de traslación es relevante para el cálculo de la presión ejercida por un gas sobre las paredes de su recipiente.

(a) Sustituir los valores dados en la ecuación 17.23:

$$v_{\text{cm}}(\text{O}_2) = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{32 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}}} \\ = \boxed{483 \text{ m/s}}$$

(b) Utilizar  $v_{\text{cm}} \propto 1/\sqrt{M}$  para calcular  $v_{\text{cm}}$  del hidrógeno:

$$\frac{v_{\text{cm}}(\text{H}_2)}{v_{\text{cm}}(\text{O}_2)} = \frac{\sqrt{M_{\text{O}_2}}}{\sqrt{M_{\text{H}_2}}}$$

de modo que

$$v_{\text{cm}}(\text{H}_2) = \frac{\sqrt{M_{\text{O}_2}}}{\sqrt{M_{\text{H}_2}}} v_{\text{cm}}(\text{O}_2) = \sqrt{\frac{32 \text{ g/mol}}{2 \text{ g/mol}}} (483 \text{ m/s}) \\ = \boxed{1930 \text{ m/s}}$$

**Observaciones** La velocidad cm de las moléculas de oxígeno es 483 m/s, unas 1,4 veces la velocidad del sonido en el aire, que a 300 K vale aproximadamente 347 m/s.



**Ejercicio** Determinar la velocidad cm de una molécula de nitrógeno ( $M = 28 \text{ g/mol}$ ) a 300 K. (Respuesta 516 m/s.)

## El teorema de equipartición

Hemos visto que la energía cinética media asociada con el movimiento de traslación en cualquier dirección es  $\frac{1}{2}kT$  por molécula (ecuación 17.21) (lo que es equivalente a  $\frac{1}{2}RT$  por mol), en donde  $k$  es la constante de Boltzmann. Si la energía de una molécula asociada con su movimiento en una dirección se incrementa momentáneamente, por ejemplo, a causa de una colisión entre la molécula y un pistón móvil durante una compresión, los choques entre esa molécula y otras moléculas rápidamente redistribuirán la energía adicional. Cuando el gas se encuentre de nuevo en equilibrio, la energía estará repartida por igual entre las energías cinéticas de traslación, asociadas con el movimiento en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Este modo de compartir la energía por igual entre los tres términos de la energía cinética de traslación es un caso especial del **teorema de equipartición**, que se obtiene de la mecánica estadística clásica. Cada componente de la posición y cantidad de movimiento (la posición angular y el momento angular incluidos) que aparece como un término cuadrático en la expresión de la energía del sistema se denomina **grado de libertad**. Los grados típicos de libertad están asociados a la energía cinética de traslación, rotación y vibración y a la energía potencial de vibración. El teorema de equipartición establece que

Cuando una sustancia está en equilibrio, existe una energía media de  $\frac{1}{2}kT$  por molécula o  $\frac{1}{2}RT$  por mol asociada con cada grado de libertad.

TEOREMA DE EQUIPARTICIÓN

En el capítulo 18 utilizaremos el teorema de equipartición para estudiar la relación entre las capacidades caloríficas medidas de los gases y su estructura molecular.

## Recorrido libre medio

La velocidad media de las moléculas de un gas a presiones normales es de varios centenares de metros por segundo. Sin embargo, si alguien en el extremo de una habitación abre un frasco de perfume, el aroma no llega al otro extremo hasta transcurridos varios minutos. En realidad, si no fuera por las corrientes de aire de la habitación (convección), el olor del perfume tardaría semanas en percibirse. Ello es debido a que las moléculas del perfume, aunque individualmente son muy rápidas, viajan según una trayectoria en zigzag debido a los choques que experimentan con las moléculas del aire. La distancia media recorrida por una molécula entre colisiones,  $\lambda$ , se denomina **recorrido libre medio**.

El recorrido libre medio de una molécula está relacionado con su tamaño, el tamaño de las moléculas de gas que le rodean y la densidad del gas. Consideremos una molécula de radio  $r_1$  que se mueve con velocidad  $v$  a través de una región de moléculas estacionarias (figura 17.11). La molécula chocará con otra molécula de radio  $r_2$  si los centros de las dos moléculas distan entre sí la distancia  $d = r_1 + r_2$ . (Si todas las moléculas fueran del mismo tipo,  $d$  sería el diámetro molecular). Cuando la molécula se desplace, chocará con cualquier otra molécula cuyo centro se encuentre en un círculo de radio  $d$  (figura 17.12). En un tiempo  $t$ , la molécula recorre la distancia  $vt$  y choca con todas las moléculas contenidas en el volumen cilíndrico  $\pi d^2 vt$ . El número de moléculas contenido en este volumen es  $n_V \pi d^2 vt$ , en donde  $n_V = N/V$  es el número de moléculas por unidad de volumen. (Después de cada choque, la dirección de la velocidad cambia de modo que la trayectoria es en zigzag.) La longitud total recorrida dividida por el número de colisiones es el recorrido libre medio:

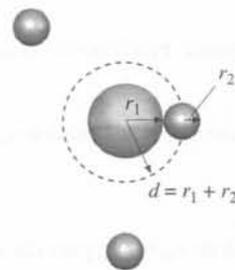
$$\lambda = \frac{vt}{n_V \pi d^2 vt} = \frac{1}{n_V \pi d^2}$$

Este cálculo del recorrido libre medio supone que todas las moléculas del gas excepto una son estacionarias. Cuando se tiene en cuenta el movimiento de todas las moléculas, la expresión correcta del recorrido libre medio viene dada por

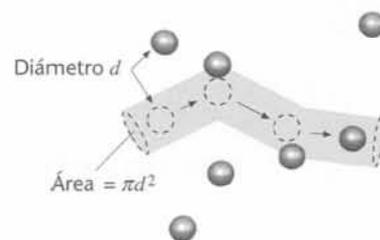
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n_V \pi d^2} \quad (17.25)$$

El tiempo medio entre colisiones se denomina tiempo de colisión,  $\tau$ . El valor recíproco del tiempo de colisión,  $1/\tau$ , es aproximadamente igual al número medio de choques por segundo o frecuencia de colisión. Si  $v_m$  es la velocidad media, la distancia media recorrida entre colisiones es

$$\lambda = v_m \tau \quad (17.26)$$



**Figura 17.11** Modelo de una molécula (esfera central) que se mueve en un gas. La molécula de radio  $r_1$  chocará con cualquier otra molécula de radio  $r_2$  si sus centros se encuentran a una distancia  $d = r_1 + r_2$ , es decir, con cualquier molécula cuyo centro se encuentra en un círculo de radio  $d = r_1 + r_2$ , centrado alrededor de la molécula.



**Figura 17.12** Modelo de una molécula que se mueve con velocidad  $v$  en un gas de moléculas semejantes. Se muestra el movimiento durante el intervalo de tiempo  $t$ . La molécula de diámetro  $d$  chocará con cualquier otra molécula semejante cuyo centro se encuentre en un cilindro de volumen  $\pi d^2 vt$ . En esta imagen, se supone que todos los choques son elásticos y que todas las moléculas excepto una que se encuentran en reposo.

### EJEMPLO 17.8 | Recorrido libre medio de una molécula de CO en el aire

El centro local de control de sustancias tóxicas desea tener más información sobre el monóxido de carbono y saber como se difunde por una habitación. Se pide (a) calcular el recorrido libre medio de una molécula de monóxido de carbono y (b) hacer una estimación del tiempo medio entre colisiones. La masa molar del monóxido de carbono es 28 g/mol. Se supone que una molécula de CO se desplaza en aire a 300 K y 1 atm, y que los diámetros de la molécula de CO y de las moléculas de aire son de aproximadamente  $3,75 \times 10^{-10}$  m.

**Planteamiento del problema** (a) Como se nos proporciona el valor de  $d$ , podemos hallar  $\lambda$  a partir de  $\lambda = 1/(\sqrt{2} n_V \pi d^2)$  haciendo uso de la ley de los gases ideales para obtener  $n_V = N/V$ . (b) Podemos hacer una estimación del tiempo de colisión utilizando  $v_{cm}$  como velocidad media.

(a) 1. Expresar  $\lambda$  en función de la densidad numérica  $n_V$  y el diámetro molecular  $d$ :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n_V \pi d^2}$$

2. Utilizar la ecuación  $PV = NkT$  para calcular  $n_V = N/V$ :

$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{P}{kT} = \frac{101,3 \times 10^3 \text{ Pa}}{(1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})} = 2,45 \times 10^{25} \text{ moléculas/m}^3$$

3. Aplicar este valor de  $n_V$  y el valor determinado de  $d$  para calcular  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2} n_V \pi d^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} (2,45 \times 10^{25} \text{ moléculas/m}^3) \pi (3,75 \times 10^{-10} \text{ m})^2} \\ &= \boxed{6,53 \times 10^{-8} \text{ m}} \end{aligned}$$

### ¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!



**Figura 17.14** Distribución de velocidades de las moléculas de un gas.

(b) 1. Expresar  $\tau$  en función del recorrido libre medio  $\lambda$ :

$$\tau = \frac{\lambda}{v_m}$$

2. Hacer una estimación de  $v_m$  a partir de  $v_{cm}$ :

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})}{28 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}}} \\ = 517 \text{ m/s}$$

3. Utilizar  $v_m \approx v_{cm}$  para dar valor de  $\tau$ :

$$\tau = \frac{\lambda}{v_m} = \frac{6,53 \times 10^{-8} \text{ m}}{517 \text{ m/s}} = \boxed{1,26 \times 10^{-10} \text{ s}}$$

**Observación** Nótese que se ha expresado la presión atmosférica en pascals para obtener las unidades adecuadas para  $\lambda$ . El recorrido libre medio es igual aproximadamente a 200 veces el diámetro de la molécula, y la frecuencia de colisión es aproximadamente igual a  $1/\tau \approx 8 \times 10^9$  colisiones por segundo.

### \*Distribución de velocidades moleculares

No es lógico que todas las moléculas de un gas posean la misma velocidad. El cálculo de la presión de un gas nos permite calcular el valor medio del cuadrado de la velocidad y, por lo tanto, la energía media de las moléculas de un gas, pero ello no nos da ningún detalle respecto a la *distribución* de las velocidades moleculares. Antes de considerar este problema, analizaremos el concepto general de funciones de distribución con algunos ejemplos elementales extraídos de la experiencia ordinaria.

**Funciones de distribución** Supongamos que un profesor propone un examen de 25 cuestiones a un gran número  $N$  de estudiantes. Para describir los resultados obtenidos, el profesor podría utilizar la puntuación media, pero esta descripción no sería completa. Si todos los estudiantes obtienen una puntuación de 12,5, por ejemplo, esto sería completamente distinto al caso en que la mitad de los alumnos obtuviesen una puntuación de 25 puntos y la otra mitad cero puntos, a pesar de que en ambos ejemplos la puntuación media sería la misma. Una distribución completa de los resultados sería la especificación del número  $n_i$  de estudiantes que recibieron la puntuación  $s_i$  extendida a todas las puntuaciones recibidas. De otro modo, podríamos especificar la fracción  $f_i = n_i/N$  de los estudiantes que recibieron la puntuación  $s_i$ . Tanto  $n_i$  como  $f_i$ , que son funciones de la variable  $s$ , se denominan **funciones de distribución**. La distribución fraccionaria suele ser la más conveniente. La probabilidad de que uno de los  $N$  estudiantes seleccionado al azar haya recibido la puntuación  $s_i$  es igual al número total de alumnos que recibieron dicha puntuación  $n_i$  dividido por  $N$ , es decir, la probabilidad es igual a  $f_i$ . Obsérvese que

$$\sum_i f_i = \sum_i \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_i n_i$$

y como  $\sum n_i = N$

$$\sum_i f_i = 1 \quad (17.27)$$

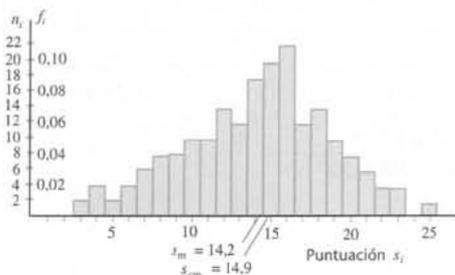
La ecuación 17.27 se denomina **condición de normalización** de las distribuciones fraccionarias.

Para determinar la puntuación media, basta sumar todas las puntuaciones y dividir por  $N$ . Como cada puntuación  $s_i$  fue obtenida por  $n_i = Nf_i$  estudiantes, esto es equivalente a

$$s_m = \frac{1}{N} \sum_i n_i s_i = \sum_i s_i f_i \quad (17.28)$$

De igual modo, el valor medio de cualquier función  $g(s)$  se define por

$$g(s)_m = \frac{1}{N} \sum_i g(s_i) n_i = \frac{1}{N} \sum_i g(s_i) f_i \quad (17.29)$$



**Figura 17.13** Distribución de calificaciones en un examen de 25 cuestiones a 200 estudiantes.  $n_i$  es el número de estudiantes que recibieron la calificación  $s_i$ , y  $f_i = n_i/N$  es la fracción de estudiantes que recibieron la calificación  $s_i$ .

En particular, el valor medio del cuadrado de las puntuaciones es

$$(s^2)_m = \frac{1}{N} \sum_i s_i^2 n_i = \sum_i s_i^2 f_i \quad (17.30)$$

La raíz cuadrada de  $(s^2)_m$  se denomina **puntuación cuadrática media** o puntuación cm. En la figura 17.13 se muestra una posible función de distribución. En ella, la puntuación más probable (la obtenida por el mayor número de estudiantes) es 16, la puntuación media es 14,2 y la puntuación cm es 14,9.

### EJEMPLO 17.9 | Prueba de nivel

Quince estudiantes realizan un examen de puntuación máxima 25. Las calificaciones fueron 25, 22, 22, 20, 20, 20, 18, 18, 18, 18, 18, 15, 15, 15 y 10. Determinar la calificación media y la calificación cm.

**Planteamiento del problema** La función de distribución de este problema es  $n_{25} = 1$ ,  $n_{22} = 2$ ,  $n_{20} = 3$ ,  $n_{18} = 5$ ,  $n_{15} = 3$  y  $n_{10} = 1$ . Para determinar la puntuación media, utilizamos la ecuación 17.28. Para calcular la puntuación cuadrática media usamos la ecuación 17.30 y luego extraemos la raíz cuadrada.

1. Por definición,  $s_m$  es:

$$\begin{aligned} s_m &= \frac{1}{N} \sum_i n_i v_i \\ &= \frac{1}{15} [1(25) + 2(22) + 3(20) + 5(18) + 3(15) + 1(10)] \\ &= \frac{1}{15} (274) = \boxed{18,3} \end{aligned}$$

2. Para calcular  $s_{cm}$  determinamos primero el valor medio de  $s^2$ :

$$\begin{aligned} (s^2)_m &= \frac{1}{N} \sum_i n_i s_i^2 \\ &= \frac{1}{15} [1(25)^2 + 2(22)^2 + 3(20)^2 + 5(18)^2 + 3(15)^2 + 1(10)^2] \\ &= \frac{1}{15} (5188) = 346 \end{aligned}$$

3. Extraemos la raíz cuadrada de  $(s^2)_m$ :

$$s_{cm} = \sqrt{(s^2)_m} = \boxed{18,6 \text{ m/s}}$$

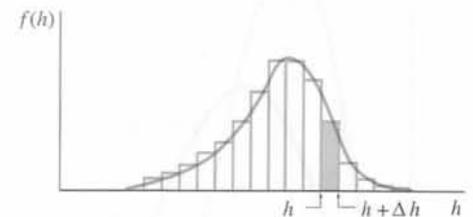
Consideremos ahora el caso de una distribución continua, por ejemplo, la distribución de alturas de los habitantes de una nación. Para cualquier número finito  $N$ , el número de personas que tienen *exactamente* la altura 2 m es cero. Si suponemos que la altura puede determinarse con cualquier exactitud deseada, existen un número infinito de alturas posibles y, por lo tanto, la probabilidad de que alguien tenga una altura exacta particular es cero. Por lo tanto, dividiremos las alturas en intervalos  $\Delta h$  (por ejemplo,  $\Delta h$  podría ser 1 cm o 0,5 cm) y determinaremos la fracción de personas del total cuyas alturas están comprendidas en un determinado intervalo. Para valores muy grandes de  $N$ , este número es proporcional al tamaño del intervalo, siempre que el intervalo sea suficientemente pequeño. Definiremos esta función de distribución  $f(h)$  como la fracción del número de personas con alturas comprendidas en el intervalo entre  $h$  y  $h + \Delta h$ . Así, para  $N$  personas,  $Nf(h) \Delta h$  es el número de éstas cuya altura está comprendida entre  $h$  y  $h + \Delta h$ . La figura 17.14 muestra una distribución posible de alturas.

La fracción de personas con alturas en un intervalo determinado  $\Delta h$  es el área  $f(h) \Delta h$ . Si  $N$  es muy grande podemos escoger un valor de  $\Delta h$  muy pequeño y el histograma será aproximadamente una curva continua. Podemos, pues, considerar la función de distribución  $f(h)$  como una función continua, expresar el intervalo como  $dh$  y reemplazar las sumas de las ecuaciones 17.27 a 17.30 por integrales:

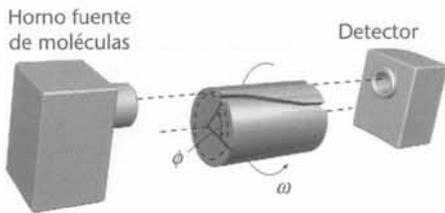
$$\int f(h) dh = 1 \quad (17.31)$$

$$h_m = \int hf(h) dh \quad (17.32)$$

$$[g(h)]_m = \int g(h)f(h) dh \quad (17.33)$$



**Figura 17.14** Distribución posible de alturas. La fracción del número de alturas comprendidas entre  $h$  y  $h + \Delta h$  es igual al área sombreada  $f(h) \Delta h$ . El histograma puede aproximarse mediante una curva continua del modo que se indica.



**Figura 17.15** Esquema del aparato para la determinación de la distribución de velocidades de las moléculas de un gas. Una sustancia se vaporiza en un horno y las moléculas de vapor escapan a través de un orificio hecho en la pared del horno hacia un recinto vacío. Estas moléculas son colimadas en un haz estrecho mediante una serie de rendijas (no indicadas en la figura). El haz apunta a un detector que cuenta el número de partículas incidentes sobre él en un determinado periodo de tiempo. La mayor parte del haz es detenido por un cilindro rotatorio. Unas pequeñas ranuras helicoidales del cilindro (sólo se ha representado una de ellas) permiten el paso de aquellas moléculas que están comprendidas dentro de un estrecho intervalo de velocidades (determinado por la velocidad angular de rotación  $\omega$ ). El número de moléculas de cada intervalo de velocidades se mide variando  $\omega$  en el cilindro y contando las que inciden en el detector para cada valor de  $\omega$ .

en donde  $g(h)$  es una función arbitraria de  $h$ . Así,

$$(h^2)_m = \int h^2 f(h) dh \tag{17.34}$$

La probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga una altura comprendida entre  $h$  y  $h + dh$  es  $f(h) dh$ . Una magnitud útil que caracteriza una distribución es la **desviación estándar**  $\sigma$  definida por

$$\sigma^2 = [(x - x_m)^2]_m \tag{17.35a}$$

Desarrollando el cuadrado del segundo miembro, se obtiene

$$\sigma^2 = (x^2 - 2xx_m + x_m^2)_m = (x^2)_m - 2x_mx_m + x_m^2$$

es decir

$$\sigma^2 = (x^2)_m - x_m^2 \tag{17.35b}$$

La desviación estándar mide la dispersión de los valores respecto al valor medio. En la mayor parte de las distribuciones existen pocos valores que difieran de  $x_m$  en una cantidad superior a unos pocos múltiplos de  $\sigma$ . En la conocida distribución en forma de campana (o distribución normal) aproximadamente el 68% de los valores suele localizarse dentro del intervalo  $x_m \pm \sigma$

En el ejemplo 17.7 vimos que el valor  $x_m$  era mayor que el valor medio. Esta es una característica general (a menos que todos los valores sean idénticos, en cuyo caso  $x_{cm} = x_m$ ). Podemos ver esto a partir de la ecuación 17.35b observando que  $x_{cm}^2 = (x^2)_m$ . Entonces  $\sigma^2 = (x^2)_m - x_m^2 = x_{cm}^2 - x_m^2$ . Como  $\sigma^2$  y  $x_{cm}$  son siempre positivas,  $x_{cm}$  debe ser siempre mayor que  $|x_m|$ .

Para la conocida distribución en forma de campana (llamada distribución normal) el 68% de los valores caen dentro del intervalo  $x_m \pm \sigma$ , el 95% caen dentro del intervalo  $x_m \pm 2\sigma$ , y el 99,7% caen dentro del intervalo  $x_m \pm 3\sigma$ . Esto se conoce como la regla 68, 95, 99,7.

**Distribución de Maxwell-Boltzmann** La distribución de las velocidades moleculares de un gas puede medirse directamente mediante el aparato que se muestra en la figura 17.15. En la figura 17.16 se representan estas velocidades para dos temperaturas distintas. La magnitud  $f(v)$  de la figura 17.16 se denomina **función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann**. Si el número total de moléculas es  $N$ , el número  $dN$  de las que tienen velocidades comprendidas en el intervalo entre  $v$  y  $v + dv$ , viene dado por

$$dN = Nf(v) dv \tag{17.36}$$

La fracción  $dN/N = f(v) dv$  en un intervalo concreto  $dv$  corresponde a la zona rayada de la figura. La función de distribución de Maxwell-Boltzmann puede obtenerse utilizando la mecánica estadística. El resultado es

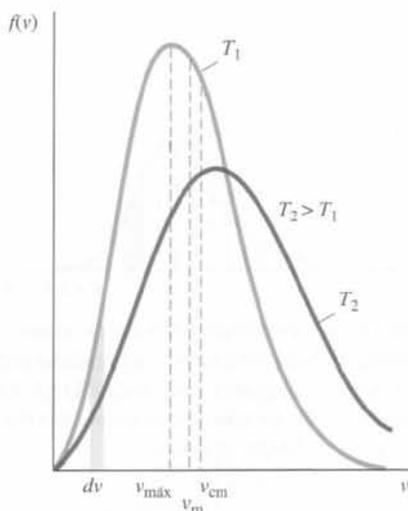
$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \tag{17.37}$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES DE MAXWELL-BOLTZMANN

La velocidad más probable  $v_{m\acute{a}x}$  es aquella velocidad que corresponde al máximo de  $f(v)$ . Se deja como problema demostrar que

$$v_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \tag{17.38}$$

Comparando la ecuación 17.38 con la 17.23, se ve que la velocidad más probable es ligeramente menor que la velocidad  $x_m$ .



**Figura 17.16** Distribución de velocidades moleculares de un gas a dos temperaturas,  $T_1$  y  $T_2 > T_1$ . El área sombreada  $f(v) dv$  es igual a la fracción del número de moléculas que poseen una velocidad concreta en un margen estrecho de velocidades  $dv$ . La velocidad media  $v_m$  y la velocidad  $x_m$  son las dos ligeramente mayores que la velocidad más probable,  $v_{m\acute{a}x}$ .

**EJEMPLO 17.10** | Uso de la distribución de Maxwell-Boltzmann

Utilizar la función de distribución de Maxwell-Boltzmann para calcular el valor medio de  $v^2$  de las moléculas de un gas.

**Planteamiento del problema** El valor medio de  $v^2$  se determina a partir de la ecuación 17.34 reemplazando  $h$  por  $v$ . La función  $f(v)$  viene dada por la ecuación 17.37.

1. Por definición  $(v^2)_m$  es:

$$(v^2)_m = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$$

2. Utilizar la ecuación 17.37 para  $f(v)$ :

$$\begin{aligned} (v^2)_m &= \int_0^{\infty} v^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)} dv \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-mv^2/(2kT)} dv \end{aligned}$$

3. La integral del paso 2 puede encontrarse en las tablas de integrales:

$$\int_0^{\infty} v^4 e^{-mv^2/(2kT)} dv = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2}$$

4. Utilizar el resultado anterior para el cálculo de  $(v^2)_m$ :

$$(v^2)_m = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} = \boxed{\frac{3kT}{m}}$$

**Observaciones** Este resultado está de acuerdo con  $v_{cm} = \sqrt{3kT/m}$  de la ecuación 17.23.

En el ejemplo 17.6 hallamos que la velocidad cm de las moléculas de hidrógeno es aproximadamente 1,93 km/s, valor que es un sexto de la velocidad de escape en la superficie de la Tierra, que resultaba ser 11,2 km/s como vimos en la sección 11.3. ¿Por qué no hay, pues, hidrógeno libre en la atmósfera terrestre? Como puede verse en la figura 17.16, una fracción considerable de las moléculas de un gas en equilibrio a una cierta temperatura tiene velocidades mayores que la velocidad cm. Cuando la velocidad cm de las moléculas de un gas concreto es solamente del orden del 15 al 20% de la velocidad de escape correspondiente a un determinado planeta, hay un número bastante elevado de moléculas que tienen velocidades mayores que la velocidad cm, de modo que el gas no puede permanecer en la atmósfera de dicho planeta durante mucho tiempo. Por consiguiente, en la práctica no hay hidrógeno en la atmósfera terrestre. Por otra parte, la velocidad cm de las moléculas de oxígeno es del orden de un cuarto de la correspondiente al hidrógeno, es decir, aproximadamente el 4% de la velocidad de escape en la superficie de la Tierra. Por lo tanto, muy pocas moléculas de oxígeno tienen velocidades mayores que la de escape y por eso se encuentra este gas en nuestra atmósfera.

**Distribución energética** La distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann dada por la ecuación 15.37 puede escribirse también como una distribución de energía. Escribamos el número de moléculas con energía  $E$  en el intervalo entre  $E$  y  $E + dE$  como

$$dn = NF(E) dE$$

en donde  $F(E)$  es la función de distribución de la energía. Esta dará el mismo número que se obtendría con la ecuación 17.37 si la energía está relacionada con la velocidad  $v$  por la expresión  $E = \frac{1}{2} mv^2$ . Entonces

$$dE = mv dv$$

y

$$Nf(v) dv = NF(E) dE$$

Podemos escribir

$$f(v) dv = Cv^2 e^{-mv^2/(2kT)} dv = Cve^{-E/(kT)} v dv = C \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} e^{-E/(kT)} \frac{dE}{m}$$

en donde  $C = (4/\sqrt{\pi})[m/(2kT)]^{3/2}$  según la ecuación 17.37. Así pues, la función  $F(E)$  de distribución de la energía viene dada por

$$F(E) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} \frac{1}{m} E^{1/2} e^{-E/(kT)}$$

Simplificando se obtiene la **función de distribución de la energía de Maxwell-Boltzmann**:

$$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} E^{1/2} e^{-E/(kT)} \quad (17.39)$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LA ENERGÍA DE MAXWELL-BOLTZMANN

En el lenguaje de la mecánica estadística, la distribución de energía se considera como el producto de dos factores: uno, llamado **densidad de estados**, es proporcional a  $E^{1/2}$ ; el otro,  $e^{-E/(kT)}$ , es la probabilidad de que un estado sea ocupado, y recibe el nombre de **factor de Boltzmann**.

## Resumen

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELACIONADAS

#### 1. Escala Celsius y Fahrenheit

En la escala Celsius, el punto del hielo es 0 °C y el punto del vapor de agua, 100 °C. En la escala Fahrenheit, el punto de hielo es igual a 32 °F mientras que el punto de ebullición es 212 °F. Las temperaturas de las escalas Celsius y Fahrenheit están relacionadas por

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32^\circ) \quad (17.2)$$

#### 2. Termómetros de gas

Los termómetros de gas tienen la propiedad de que todos ellos concuerdan entre sí en la medición de cualquier temperatura con tal de que la densidad del gas empleado en el termómetro sea muy baja. Se define la temperatura  $T$  del gas ideal mediante la expresión

$$T = \frac{273,16 \text{ K } P}{P_3} \quad (17.4)$$

en donde  $P$  es la presión del gas en el termómetro cuando éste se encuentra en equilibrio térmico con el sistema cuya temperatura se está midiendo, y  $P_3$  es la presión que se tiene cuando el termómetro está inmerso en un baño de agua-hielo-vapor en su punto triple.

#### 3. Escala de temperatura Kelvin

La temperatura absoluta o temperatura en kelvins está relacionada con la temperatura Celsius por

$$T = t_C + 273,15 \text{ K} \quad (17.5)$$

#### 4. Gas ideal

A densidades bajas, todos los gases obedecen la ley de los gases ideales:

$$PV = nRT \quad (17.13)$$

Ecuación de estado

Constante universal de los gases

$$R = kN_A = 8,314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} = 0,08206 \text{ atm} \cdot \text{L/(mol} \cdot \text{K)} \quad (17.12)$$

Constante de Boltzmann

$$k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV/K} \quad (17.8)$$

Número de Avogadro

$$N_A = 6,022 \times 10^{23} \quad (17.9)$$

Ecuación para una cantidad fija de gas

Una expresión de la ley de los gases ideales que es útil para la resolución de problemas en los que intervenga una cantidad fija de gas es

$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \quad (17.14)$$

## 5. Teoría cinética de gases

Interpretación molecular de la temperatura	La temperatura absoluta $T$ es una medida de la energía cinética media de traslación de las moléculas.
Teorema de equipartición	Cuando un sistema está en equilibrio, hay una energía media de $\frac{1}{2}kT$ por molécula o $\frac{1}{2}RT$ por mol asociada a cada grado de libertad.
Energía cinética media	En el caso de un gas ideal, la energía cinética de traslación media de las moléculas es $(E_c)_m = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_m = \frac{3}{2}kT \quad (17.21)$
Energía cinética total	La energía cinética de traslación total de $n$ moles de gas que contienen $N$ moléculas viene dada por $E_c = N\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_m = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT \quad (17.22)$
Velocidad cm de las moléculas	La velocidad cm de una molécula de un gas está relacionada con la temperatura absoluta por $v_{\text{cm}} = \sqrt{(v^2)_m} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (17.23)$ <p>en donde <math>m</math> es la masa de la molécula y <math>M</math>, la masa molar.</p>
Recorrido libre medio	El recorrido libre medio de una molécula está relacionado con su diámetro $d$ y el número de moléculas por unidad de volumen $n_V$ mediante la expresión $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n_V\pi d^2} \quad (17.25)$

## \*6. Funciones de distribución de Maxwell-Boltzmann

Función de distribución de energía

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)} \quad (17.37)$$

$$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} E^{1/2} e^{-E/(kT)} \quad (17.39)$$

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

### Problemas conceptuales

1 ● SSM Verdadero o falso:

- (a) Dos objetos en equilibrio térmico entre sí deben estar en equilibrio térmico con un tercer objeto.
- (b) Las escalas Fahrenheit y Celsius difieren sólo en la elección de la temperatura cero.
- (c) El kelvin tiene el mismo tamaño que el grado Celsius.
- (d) Todos los termómetros dan el mismo resultado al medir la temperatura de un sistema particular.

2 ● ¿Cómo podemos determinar si dos cuerpos están en equilibrio térmico entre sí, si resulta imposible ponerlos mutuamente en contacto?

3 ● "Un día me desperté y mi habitación estaba a 20 °F. "Eso no es nada", replicó un amigo. "Mi habitación estaba una vez a -5 °C". ¿Qué habitación era la más fría?

4 ●● Dos vasijas idénticas contienen gases ideales distintos a igual presión y temperatura. Así resulta que (a) el número de moléculas gaseosas es el mismo en ambas vasijas, (b) la masa total del gas es la misma en ambas vasijas, (c) la velocidad media de las moléculas del gas es la misma en ambas vasijas, (d) ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

- 5 ●● La figura 17.17 muestra un gráfico del volumen en función de la temperatura para un proceso seguido por un gas ideal desde el punto A al punto B. ¿Qué ocurre con la presión del gas?

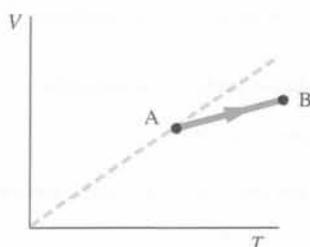


Figura 17.17 Problema 5

- 6 ●● SSM La figura 17.18 muestra un gráfico de la presión en función de la temperatura para un proceso seguido por un gas ideal desde el punto A al punto B. ¿Qué ocurre con el volumen del gas?

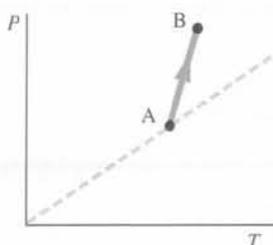


Figura 17.18 Problema 6

- 7 ● Verdadero o falso: La temperatura absoluta de un gas es una medida de la energía cinética media de traslación de las moléculas del gas.

- 8 ● ¿Por qué factor debe incrementarse la temperatura absoluta de un gas para duplicar la velocidad cm de sus moléculas?

- 9 ● ¿Cómo varía la energía cinética media de traslación de una molécula de un gas si se duplica la presión mientras permanece constante el volumen? ¿Y si se duplica el volumen permaneciendo constante la presión?

- 10 ●● Una vasija contiene el mismo número de moles de helio y metano,  $\text{CH}_4$ . La relación que existe entre las velocidades cm de los átomos de helio y las moléculas de  $\text{CH}_4$  es (a) 1, (b) 2, (c) 4, (d) 16

- 11 ● Verdadero o falso: Si la presión de un gas aumenta, la temperatura debe aumentar.

- 12 ● ¿Por qué las escalas Celsius y Fahrenheit son más convenientes que la escala absoluta para objetivos ordinarios, no científicos?

- 13 ● SSM La temperatura interna del Sol es aproximadamente de  $10^7$  grados. ¿Estos grados son Celsius o Kelvins o realmente no importa una escala u otra?

- 14 ● **¡OLVÉ!** Si la temperatura de un gas ideal se duplica manteniendo constante la presión, la velocidad media de las moléculas (a) permanece constante. (b) crece en un factor 4. (c) crece en un factor 2. (d) crece en un factor  $\sqrt{2}$ .

- 15 ● **¡OLVÉ!** Si la temperatura y el volumen de un gas ideal se reducen ambos a la mitad, la presión (a) disminuye en un factor 2, (b) permanece constante, (c) crece en un factor 2, (d) crece en un factor  $\sqrt{2}$ .

- 16 ● La energía cinética de traslación media de las moléculas de un gas ideal depende (a) del número de moles del gas y su temperatura, (b) de la presión del gas y su temperatura, (c) sólo de la presión del gas, (d) sólo de la temperatura del gas.

- 17 ● Si una vasija contiene cantidades iguales en peso de helio y argón, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?:

- (a) La presión ejercida por los dos gases sobre las paredes de la vasija es la misma.  
 (b) La velocidad media de un átomo de helio es la misma que la de un átomo de argón.  
 (c) El número de átomos de helio y de átomos de argón en la vasija son iguales.  
 (d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

- 18 ●● Dos habitaciones, A y B, tienen volúmenes iguales y están conectadas por una puerta abierta. La habitación A, que tiene aire acondicionado, está  $5^\circ\text{C}$  más fría que la habitación B. ¿Cuál de las dos habitaciones tiene más aire?

- 19 ● Dos gases diferentes están a igual temperatura. ¿Qué podemos decir respecto a las velocidades cm de las moléculas respectivas? ¿Qué podemos decir respecto a las energías cinéticas medias de las moléculas respectivas?

- 20 ●● Explicar en función del movimiento molecular por qué la presión sobre las paredes de un recinto crece cuando un gas se calienta a volumen constante.

- 21 ●● SSM Expresar en función del movimiento molecular por qué la presión sobre las paredes de un recinto crece cuando el volumen de un gas se reduce a temperatura constante.

- 22 ●● El oxígeno tiene una masa molar de  $32\text{ g/mol}$  y el nitrógeno de  $28\text{ g/mol}$ . Las moléculas de oxígeno y nitrógeno en una habitación tienen

- (a) iguales energías cinéticas medias, pero las moléculas de oxígeno son más rápidas.  
 (b) iguales energías cinéticas, pero las moléculas de oxígeno son más lentas.  
 (c) iguales energías cinéticas y velocidades;  
 (d) iguales velocidades medias, pero las moléculas de oxígeno tienen mayor energía cinética media;  
 (e) iguales velocidades medias, pero las moléculas de oxígeno tienen una energía cinética inferior;  
 (f) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

- 23 ●● Como sabe cualquier físico de bajas temperaturas, el nitrógeno líquido es relativamente barato, mientras que el helio líquido es muy caro. Un motivo es que mientras el nitrógeno es la componente más abundante de la atmósfera, el helio sólo se encuentra encerrado en cavidades de rocas subterráneas. Utilizar ideas de este capítulo para explicar por qué esto es así.

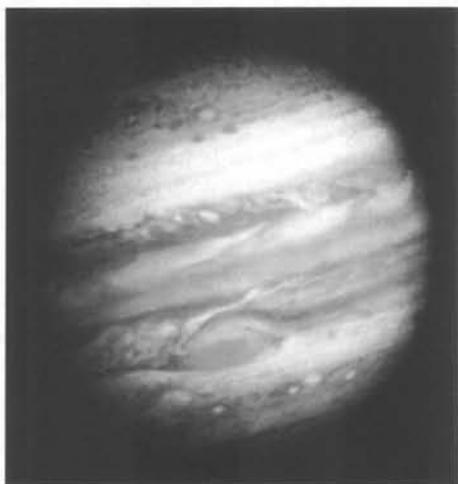
### Estimaciones y aproximaciones

- 24 ●● SSM Un tubo de ensayo sellado de  $10\text{ ml}$  de volumen contiene  $1\text{ ml}$  de agua, está a una temperatura de  $100^\circ\text{C}$  e inicialmente a una presión de  $1\text{ atm}$  ( $1,01 \times 10^5\text{ N/m}^2$ ). Hacer una estimación de la presión en el interior del tubo de ensayo cuando el agua está hirviendo sin parar.

- 25 ●●● En el capítulo 11 demostramos que la velocidad de escape en la superficie de un planeta de radio  $R$  y aceleración de la gravedad  $g$  viene dada por  $v_e = \sqrt{2gR}$ . Si la velocidad cm de un gas es mayor que entre el 15 y el 20 por ciento de la velocidad de escape de una planeta, prácticamente todas las moléculas de ese gas escaparán de la atmósfera del planeta.

- (a) ¿A qué temperatura el valor de  $v_{\text{cm}}$  para el  $\text{O}_2$  será igual al 15 por ciento de la velocidad de escape de la Tierra?  
 (b) ¿A qué temperatura el valor  $v_{\text{cm}}$  para el  $\text{H}_2$  igual al 15 por ciento de la velocidad de escape de la Tierra?  
 (c) Las temperaturas en la alta atmósfera alcanzan los  $1000\text{ K}$ . ¿Puede esto explicar la escasa presencia de hidrógeno en la atmósfera terrestre?  
 (d) Calcular las correspondientes temperaturas para los valores de  $v_{\text{cm}}$  para el  $\text{O}_2$  y el  $\text{H}_2$ , de manera que sean iguales a la velocidad de escape en la Luna, donde  $g$  es un sexto de su valor en la Tierra y  $R = 1738\text{ km}$ . ¿Puede explicarse de esta forma la ausencia de atmósfera en la Luna?

- 26 ●● La velocidad de escape en Marte es  $5,0\text{ km/s}$  y la temperatura de su superficie es típicamente  $0^\circ\text{C}$ . Calcular la velocidad cm del (a)  $\text{H}_2$ , (b)  $\text{O}_2$  y (c)  $\text{CO}_2$  a esta temperatura. (d) Basados en este criterio, ¿es probable encontrar  $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$  y  $\text{CO}_2$  en la atmósfera de Marte?



Júpiter visto desde una distancia de casi veinte millones de kilómetros. Como la velocidad de escape en la superficie de Júpiter es de 600 km/s aproximadamente, Júpiter retiene fácilmente hidrógeno en su atmósfera.

27 ●● SSM Repetir el problema 26 para Júpiter cuya velocidad de escape es 60 km/s y cuya temperatura es típicamente  $-150^{\circ}\text{C}$ .

### Escala de temperatura

28 ● Se aplica un tipo de cera en los esquíes para que resistan mejor las temperaturas comprendidas entre  $-12$  y  $-7^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuál es este intervalo de temperaturas en la escala Fahrenheit?

29 ● SOLVE El punto de fusión del oro (Au) es  $1945,4^{\circ}\text{F}$ . Expresar esta temperatura en la escala Celsius.

30 ● SSM SOLVE ¿Cuál es la temperatura Celsius correspondiente a la temperatura normal del cuerpo humano de  $98,6^{\circ}\text{F}$ ?

31 ● SOLVE La longitud de una columna de mercurio de un termómetro es de 4,0 cm cuando el termómetro se sumerge en agua con hielo y 24,0 cm cuando el termómetro se coloca en agua hirviendo. (a) ¿Cuál será su longitud en una habitación a  $22,0^{\circ}\text{C}$ ? (b) La columna de mercurio mide 25,4 cm cuando el termómetro se introduce en una solución química. ¿Cuál es la temperatura de la solución?

32 ● La temperatura en el interior del Sol es de unos  $10^7$  K. ¿Cuál es esta temperatura (a) en la escala de Celsius? (b) ¿Y en la escala de Fahrenheit?

33 ● El punto de ebullición del nitrógeno,  $\text{N}_2$ , es  $77,35$  K. Expresar esta temperatura en grados Fahrenheit.

34 ● SOLVE La presión de un termómetro de gas a volumen constante es de 0,400 atm en el punto de hielo y de 0,546 atm en el punto de vapor. (a) Cuando la presión es de 0,100 atm, ¿cuál es la temperatura? (b) ¿Cuál es la presión en el punto de ebullición del azufre ( $444,6^{\circ}\text{C}$ )?

35 ● SSM SOLVE Un termómetro de gas a volumen constante indica una presión de 50 torr en el punto triple del agua. (a) ¿Cuál será la presión cuando el termómetro mida una temperatura de 300 K? (b) ¿Qué temperatura de gas ideal corresponde a una presión de 678 torr?

36 ● Un termómetro de gas a volumen constante se encuentra a una presión de 30 torr cuando se aplica a una temperatura de 373 K. (a) ¿Cuál es su presión  $P_3$  en el punto triple? (b) ¿Qué temperatura corresponde a una presión de 0,175 torr?

37 ● ¿A qué temperatura las escalas Fahrenheit y Celsius ofrecen la misma lectura?

38 ● SOLVE El sodio funde a 371 K. ¿Cuál es el punto de fusión del sodio en las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit?

39 ● El punto de ebullición del oxígeno a 1 atm es  $90,2$  K. ¿Cuál es el punto de ebullición del oxígeno en las escalas Celsius y Fahrenheit?

40 ●● En la escala de temperaturas Réaumur, el punto de fusión del hielo es  $0^{\circ}\text{R}$  y el punto de ebullición del agua  $80^{\circ}\text{R}$ . Deducir expresiones para convertir las temperaturas de la escala Réaumur en temperaturas Celsius o Fahrenheit.

41 ●●● SSM Un termistor es un dispositivo en estado sólido cuya resistencia varía considerablemente con la temperatura. Esta dependencia frente a la temperatura viene dada aproximadamente por  $R = R_0 e^{B/T}$ , en donde  $R$  se expresa en ohmios ( $\Omega$ ),  $T$  en kelvins y  $R_0$  y  $B$  son constantes que pueden determinarse midiendo  $R$  para puntos de calibración conocidos, como el punto de congelación del hielo y el punto de ebullición del agua. (a) Si  $R = 7360 \Omega$  en el punto de congelación y  $153 \Omega$  en el punto de ebullición, calcular  $R_0$  y  $B$ . (b) ¿Cuál es la resistencia del termistor a  $98,6^{\circ}\text{F}$ ? (c) ¿Cuál es la variación de la resistencia con la temperatura ( $dR/dT$ ) en el punto de congelación y en el punto de ebullición? (d) ¿Para cuál de estas temperatura es este termistor más sensible?

### Ley de los gases ideales

42 ● SOLVE Un gas se mantiene a presión constante. Si su temperatura varía desde 50 a  $100^{\circ}\text{C}$ , ¿en qué factor varía su volumen?

43 ● SOLVE Una vasija de 10 L contiene gas a  $0^{\circ}\text{C}$  y a una presión de 4 atm. ¿Cuántos moles de gas hay en la vasija? ¿Cuántas moléculas?

44 ●● SOLVE Una presión baja de  $1 \times 10^{-8}$  torr puede conseguirse mediante una bomba de difusión de aceite. ¿Cuántas moléculas hay en  $1 \text{ cm}^3$  de un gas a esta presión si la temperatura es de 300 K?

45 ●● SSM De un libro de texto de física marciano copiamos el siguiente párrafo "1 *smorf* de un gas ideal ocupa un volumen de 1,35 *zaks*. A una temperatura de 22 *glips*, el gas tiene una presión de 12,5 *klads*. A una temperatura de  $-10$  *glips*, el mismo gas tiene ahora una presión de 8,7 *klads*." Determinar la temperatura del cero absoluto en *glips*.

46 ●● SOLVE Un conductor hincha los neumáticos de su coche a una presión de 180 kPa un día en que la temperatura ambiente es de  $-8,0^{\circ}\text{C}$ . Cuando llega a su destino, la presión de los neumáticos ha crecido a 245 kPa. ¿Cuál es la temperatura de los neumáticos si suponemos que (a) los neumáticos no se dilatan o (b) que los neumáticos se dilatan un 7%?

47 ●● Una habitación tiene  $6 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ . (a) Si la presión del aire en ella es 1 atm y su temperatura es 300 K, hallar el número de moles de aire en la habitación. (b) Si la temperatura sube en 5 K y la presión permanece constante, ¿cuántos moles de aire salen de la habitación?

48 ●● SSM SOLVE El punto de ebullición del helio a 1 atm es  $4,2$  K. ¿Cuál es el volumen ocupado por el gas helio al evaporarse 10 g de helio líquido a la presión de 1 atm y la temperatura de (a) 4,2 K y (b) 293 K?

49 ●● Un recipiente con volumen de 6,0 L contiene 10 g de helio líquido. Cuando el recipiente se calienta a la temperatura ambiente, ¿cuál es la presión ejercida por el gas sobre sus paredes?

50 ●● SSM SOLVE Un neumático de un automóvil está a una presión manométrica (que es la diferencia entre la presión real y la atmosférica) de 200 kPa cuando se encuentra a la temperatura de  $20^{\circ}\text{C}$ . Se conduce el coche a alta velocidad y la temperatura del neumático aumenta hasta  $50^{\circ}\text{C}$ . (a) Suponiendo que el volumen del neumático no varía, calcular la presión manométrica del aire en el mismo (suponiendo que el aire se comporta como gas ideal). (b) Calcular la presión manométrica si el neumático se dilata de forma que su volumen aumenta en un 10 por ciento.

51 ●● Haciendo uso de la ley de los gases ideales, calcular la densidad de masa del aire a una temperatura de 24 °C y una presión de 1 atm ( $1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ). El aire es aproximadamente 74%  $\text{N}_2$  y 26%  $\text{O}_2$ .

52 ●● **RESOLVER** Un submarinista a 40 m por debajo de la superficie de un lago, en donde la temperatura es 5 °C, suelta una burbuja de aire con volumen de 15  $\text{cm}^3$ . La burbuja sube a la superficie, en donde la temperatura es 25 °C. ¿Cuál es el volumen de la burbuja justo antes de romper en la superficie? *Sugerencia: Recordar que también varía la presión.*

53 ●● Un globo lleno de aire caliente tiene un volumen de 1,5  $\text{m}^3$  y está abierto por la parte inferior. Si el aire del interior del globo está a una temperatura de 75 °C, mientras que la temperatura del aire del exterior del globo está a 24 °C, a una presión de alrededor de 1 atm, ¿cuál es la fuerza neta sobre el globo y el contenido? (Despreciar el peso del globo.)

54 ●●● Un globo de helio se utiliza para elevar una carga de 110 N. El peso de la cubierta del globo es 50 N y su volumen cuando está totalmente hinchado es de 32  $\text{m}^3$ . La temperatura del aire es 0 °C y la presión atmosférica es de 1 atm. El globo se infla con el gas helio suficiente para que la fuerza neta sobre él y su carga sea de 30 N. Despreciar los cambios de temperatura con la altura. (a) ¿Cuántos moles de gas helio contiene el globo? (b) ¿A qué altura el globo estará completamente hinchado? (c) ¿Alcanzará el globo la altura a la cual está completamente hinchado? (d) Si la respuesta a (c) es afirmativa, ¿cuál será la altura máxima alcanzada por el globo?

### Teoría cinética de los gases

55 ● **SSM** (a) Calcular la  $v_{\text{cm}}$  de un átomo de argón si un mol de este gas se encuentra en un recipiente de 1 L a 10 atm. (Para el argón  $M = 40 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ .) (b) Compárese este resultado con la  $v_{\text{cm}}$  del gas helio en las mismas condiciones (el peso molecular del helio es de  $4 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ .)

56 ● **RESOLVER** Hallar la energía cinética de traslación total de 1 L de gas oxígeno a una temperatura de 0 °C y una presión de 1 atm.

57 ● **RESOLVER** Hallar la velocidad  $v_{\text{cm}}$  y la energía cinética media de un átomo de hidrógeno a una temperatura de  $10^7 \text{ K}$ . (A esta temperatura, que es del orden de las que existen en el interior de las estrellas, el hidrógeno está ionizado y está constituido por un simple protón.)

58 ● **SSM** En un modelo de un sólido, se supone que el material está constituido por una red regular de átomos, en la cual cada átomo se encuentra en una posición de equilibrio fija y conectado con sus átomos vecinos por medio de muelles. Cada átomo puede vibrar en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . La energía total de un átomo en este modelo es

$$E = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} K y^2 + \frac{1}{2} K z^2$$

¿Cuál es la energía media de un átomo del sólido cuando su temperatura es  $T$ ? ¿Cuál es la energía total de un mol de este sólido?

59 ● Demostrar que el recorrido libre medio de una molécula en un gas ideal a la temperatura  $T$  y presión  $P$  viene dado por

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2} P \pi d^2}$$

60 ●● **RESOLVER** Una cámara contiene helio a la temperatura ambiente (300 K) y a una presión muy baja  $P = 7 \times 10^{-11} \text{ Pa}$ . Estimar el recorrido libre medio  $\lambda$  y el tiempo medio de colisión  $\tau$  para el helio en esta cámara. Considerar que el diámetro de una molécula de helio es  $10^{-10} \text{ m}$ .

61 ●● **SSM** En una vasija cúbica de 15 cm de lado tenemos oxígeno ( $\text{O}_2$ ) a la temperatura de 300 K. Comparar la energía cinética media de una molécula del gas con la variación que experimentaría su energía potencial si cayera desde la parte superior al fondo del recipiente.

### \*Distribución de velocidades moleculares

62 ●● Demostrar que la función  $f(v)$  dada por la ecuación 17.37 es un máximo cuando  $v = \sqrt{2kT/m}$ . *Sugerencia: Hacer  $df/dv = 0$  y despejar  $v$ .*

63 ●● **SSM** Como  $f(v) dv$  da la fracción de moléculas que tienen velocidades en el intervalo  $dv$ , la integral de  $f(v) dv$  extendida a todos los intervalos posibles de velocidades debe ser igual a 1. Dada la integral

$$\int_0^{\infty} v^3 e^{-av^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2}$$

demostrar que  $\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$ , en donde  $f(v)$  viene dada por la ecuación 17.37.

64 ●● Dada la integral

$$\int_0^{\infty} v^3 e^{-av^2} dv = \frac{a^{-2}}{2}$$

calcular la velocidad media  $v_m$  de las moléculas de un gas utilizando la función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

65 ●● **SSM** Experimentos recientes de atrapamiento y enfriamiento de átomos pueden producir gases de baja densidad de rubidio y otros átomos con temperaturas en la escala del nanokelvin ( $10^{-9} \text{ K}$ ). Estos átomos se atrapan y enfrían utilizando campos magnéticos y láseres en cámaras de muy alto vacío. Un método que se usa para medir la temperatura de un gas atrapado consiste en soltar la trampa (apagar el láser y desconectar el campo magnético) y medir el tiempo que emplean las moléculas del gas en caer una distancia dada. Consideremos un gas de átomos de rubidio a una temperatura de 120 nK. Calcular cuanto tardaría un átomo que se desplaza a la velocidad  $v_{\text{cm}}$  del gas en caer una distancia de 10 cm si (a) inicialmente estuviese moviéndose hacia abajo y (b) inicialmente estuviese moviéndose hacia arriba. Supóngase que el átomo no colisiona con ningún otro átomo a lo largo de su trayectoria.

### Problemas generales

66 ● ¿A qué temperatura será la velocidad  $v_{\text{cm}}$  de una molécula de  $\text{H}_2$  igual a 331 m/s?

67 ●● (a) Si un mol de gas ocupa un volumen de 10 L a la presión de 1 atm, ¿cuál es la temperatura del gas en kelvins? (b) El recipiente, a fin de que el volumen pueda variarse, lleva acoplado un pistón. El gas se calienta a presión constante y se expande hasta un volumen de 20 L. ¿Cuál es la temperatura del gas en kelvins? (c) El volumen se fija ahora a 20 L y el gas se calienta a volumen constante hasta que su temperatura alcanza los 350 K. ¿Cuál es la presión del gas?

68 ●● **RESOLVER** Una caja cúbica metálica de 20 cm de lado, contiene aire a la presión de 1 atm y a 300 K de temperatura. Se cierra herméticamente, de forma que el volumen sea constante, y se calienta hasta 400 K. Hallar la fuerza neta que actúa sobre cada pared de la caja.

69 ●● **SSM** El agua ( $\text{H}_2\text{O}$ ) puede convertirse por electrólisis en gas  $\text{H}_2$  y gas  $\text{O}_2$ . ¿Cuántos moles de estos gases resultan de la electrólisis de 2 L de agua?

70 ●● Un cilindro de masa despreciable de 40 cm de longitud descansa sobre una mesa horizontal sin rozamiento. El cilindro se divide en dos secciones iguales por una membrana. Una sección contiene nitrógeno y la otra oxígeno. La presión del nitrógeno es doble a la del oxígeno. ¿Qué distancia recorrerá el cilindro si se quita la membrana?

71 ●● Un cilindro contiene una mezcla de gas nitrógeno ( $\text{N}_2$ ) y gas hidrógeno ( $\text{H}_2$ ). A una temperatura  $T_1$ , el nitrógeno está completamente disociado, pero el hidrógeno no se disocia en absoluto, y la presión es  $P_1$ . Si la temperatura se duplica a  $T_2 = 2T_1$ , la presión se triplica debido a la completa disociación del hidrógeno. Si la masa del hidrógeno es  $m_H$ , ¿cuál es la masa del nitrógeno,  $m_N$ ?

**72 ●● SSM** Tres vasijas aisladas de volúmenes iguales,  $V$ , se conectan mediante tubos delgados que pueden transferir gas, pero no calor. Inicialmente todas las vasijas se llenan con el mismo tipo de gas a una temperatura  $T_0$  y presión  $P_0$ . Entonces la temperatura de la primera vasija se duplica y la temperatura de la segunda vasija se triplica. La temperatura de la tercera vasija permanece invariable. Determinar la presión  $P'$  del sistema en función de la presión inicial  $P_0$ .

**73 ●●** Un termómetro de gas a volumen constante con una presión del punto triple  $P_3 = 500$  torr se utiliza para medir el punto de ebullición de una sustancia. Cuando se encuentra en contacto térmico con la sustancia en ebullición, su presión es de 734 torr. Parte del gas del termómetro se deja escapar, de forma que la presión del punto triple es ahora 200 torr. Cuando se coloca otra vez en contacto térmico con la sustancia en ebullición, su presión es de 293,4 torr. De nuevo parte del gas se deja salir del termómetro de forma que la presión del punto triple alcanza el valor de 100 torr. Su presión cuando se encuentra en contacto con la sustancia en ebullición es de 146,65 torr. Calcular la temperatura de gas ideal para la sustancia en ebullición.

**74 ●● SSM** El recorrido libre medio de las moléculas de  $O_2$  a una temperatura de 300 K y una presión de 1 atm ( $1,01 \times 10^5$  Pa) es  $\lambda = 7,1 \times 10^{-8}$  m. Utilizar este dato para hacer una estimación del tamaño de una molécula de  $O_2$ .

**75 ●●** Un globo experimental contiene gas hidrógeno ( $H_2$ ) a una temperatura de 300 K y una presión de 1 atm ( $1,01 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup>). (a) Calcular el recorrido libre medio de una molécula de hidrógeno, suponiendo que una molécula  $H_2$  es esférica y posee un diámetro medio de  $1,6 \times 10^{-10}$  m. (b) Calcular el volumen disponible por molécula ( $V/N$ ), y hallar la distancia media entre cada molécula y su vecina más próxima (aproximadamente la raíz cúbica del volumen disponible). ¿Cuál es mayor, el recorrido libre medio o la distancia media entre moléculas vecinas próximas?

**76 ●●●** Un cilindro de 2,4 m de altura se llena con 0,1 moles de un gas ideal a temperatura y presión normales (figura 17.19). El cilindro se cierra entonces con un pistón de masa 1,4 kg que se deja caer hasta alcanzar el equilibrio. (a) Determinar la altura del pistón suponiendo que la temperatura del gas no varía en la compresión. (b) Suponer que el pistón se empuja hacia abajo ligeramente más allá de la posición de equilibrio y luego se libera. Suponiendo

que la temperatura del gas permanece constante, determinar la frecuencia de vibración del pistón.

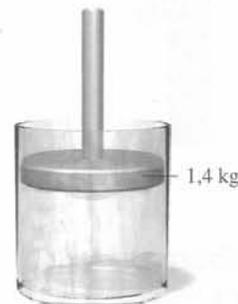


Figura 17.19 Problema 76

**77 ●●● SSM** La tabla inferior da valores de

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^x z^2 e^{-z^2} dz$$

para diferentes valores de  $x$ . Utilizar la tabla para dar respuesta a las siguientes preguntas: (a) Para el gas  $O_2$  a 273 K, ¿qué fracción de moléculas tienen velocidades menores que 400 m/s? (b) Para el mismo gas, ¿qué porcentaje de moléculas tienen velocidades comprendidas entre 190 m/s y 565 m/s?

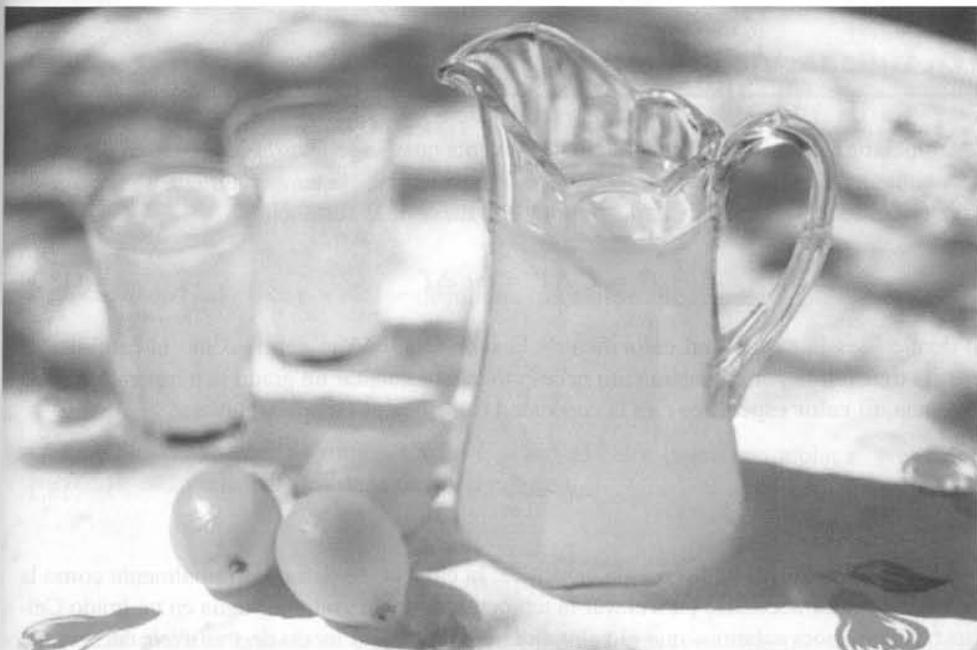
$x$	$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^x z^2 e^{-z^2} dz$
0,1	$7,48 \times 10^{-4}$
0,2	$5,58 \times 10^{-3}$
0,3	0,019
0,4	0,044
0,5	0,081
0,6	0,132

$x$	$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^x z^2 e^{-z^2} dz$
0,7	0,194
0,8	0,266
0,9	0,345
1,0	0,438
1,5	0,788
2,0	0,954

# CALOR Y PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

## Capítulo 18

- 18.1 Capacidad calorífica y calor específico
- 18.2 Cambio de fase y calor latente
- 18.3 El experimento de Joule y el primer principio de la termodinámica
- 18.4 La energía interna de un gas ideal
- 18.5 Trabajo y diagrama  $PV$  para un gas
- 18.6 Capacidades caloríficas de los gases
- 18.7 Capacidades caloríficas de los sólidos
- 18.8 Fallos del teorema de equipartición
- 18.9 Compresión adiabática cuasiestática de un gas



La limonada caliente de esta jarra se enfría añadiendo hielo. El calor pasa de la limonada al hielo debido a una diferencia de temperatura entre ambos.

¿Cuánto hielo debería añadirse a una copa de limonada para reducir su temperatura desde  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ? (Véase el ejemplo 18.4.)

**E**l calor es la energía que se transfiere de un objeto a otro debido a una diferencia de temperaturas. En el siglo XVII, Galileo, Newton y otros científicos apoyaban la teoría de los atomistas griegos, los cuales consideraban el calor como una manifestación del movimiento molecular. En la siguiente centuria se descubrieron métodos para realizar medidas cuantitativas de la cantidad de calor que entra o sale de un cuerpo y se encontró que, cuando dos cuerpos se hallan en contacto térmico, la cantidad de calor que sale de un cuerpo es igual a la cantidad de calor que entra en el otro. Este descubrimiento condujo al desarrollo de una teoría en la que se consideraba el calor como una sustancia material fluida, invisible y sin peso que se conservaba; esta sustancia, que se llamó “calórico”, no podía ser creada ni destruida, pero sí transferida de un cuerpo a otro.

La teoría del calórico reinó hasta el siglo XIX, cuando se observó que el rozamiento entre los cuerpos podía generar una cantidad ilimitada de calor, en contra de la idea del calórico como sustancia presente en una cantidad fija. La teoría moderna del calor no surgió hasta el decenio 1840-50, cuando James Joule (1818-1889) demostró que la ganancia o pérdida de una cantidad determinada de calor venía acompañada de la desaparición o aparición de una cantidad equivalente de energía mecánica. La energía térmica, por lo tanto, no se conserva por sí sola. El calor es una forma de energía interna y es la energía la magnitud que se conserva.

En este capítulo se define la capacidad calorífica y se estudia que el calentamiento de un sistema puede causar un cambio en su temperatura o un cambio de fase. A continuación se estudia la relación que existe entre la conducción del calor, el trabajo y la energía interna de un sistema, y se formula, como primer principio de la termodinámica, la ley de conservación de la energía para sistemas térmicos. Por último, veremos que la capacidad calorífica de un sistema está relacionada con su estructura molecular.

## 18.1 Capacidad calorífica y calor específico

La temperatura de un cuerpo generalmente aumenta cuando se le transfiere energía mediante calentamiento.<sup>1</sup> La cantidad de calor  $Q$  necesaria para elevar la temperatura de un sistema es proporcional a la variación de temperatura y a la masa de la sustancia:

$$Q = C \Delta T = mc \Delta T \quad (18.1)$$

en donde  $C$  es la **capacidad calorífica** de la sustancia, que se define como la cantidad de energía transferida por calentamiento necesaria para aumentar un grado la temperatura de la sustancia. El **calor específico**  $c$  es la capacidad calorífica por unidad de masa:

$$c = \frac{C}{m} \quad (18.2)$$

La unidad histórica de la energía calorífica, la **caloría**, se definió originalmente como la cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de un gramo de agua en un grado Celsius.<sup>2</sup> Como ahora sabemos que el calor es simplemente un modo de transferir energía, no necesitamos ninguna unidad especial para su medida. La caloría se define ahora en función de la unidad del SI de la energía, el julio:

$$1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J} \quad (18.3)$$

La unidad de uso ordinario del sistema técnico inglés es la **Btu** ("British thermal unit", unidad británica de calor), que se definió antiguamente como la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una libra de agua en un grado Fahrenheit. Esta unidad se relaciona con la caloría y el julio mediante las expresiones

$$1 \text{ Btu} = 252 \text{ cal} = 1,054 \text{ kJ} \quad (18.4)$$

Según la definición original de la caloría, el calor específico del agua es<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} c_{\text{agua}} &= 1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{C}^\circ) = 1 \text{ kcal}/(\text{kg} \cdot \text{C}^\circ) \\ &= 1 \text{ kcal}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 4,184 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \end{aligned} \quad (18.5a)$$

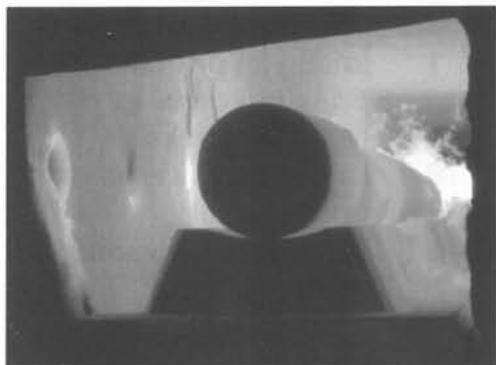
Análogamente, a partir de la definición de la Btu, el calor específico del agua en las unidades del sistema técnico inglés es

$$c_{\text{agua}} = 1 \text{ Btu}/(\text{lb} \cdot \text{F}^\circ) \quad (18.5b)$$

<sup>1</sup> Una excepción tiene lugar durante los cambios de fase, por ejemplo, cuando el agua se congela o evapora. Los cambios de fase se tratan en la sección 19.2.

<sup>2</sup> La kilocaloría es, por lo tanto, la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 kg de agua en un grado Celsius. La "caloría" utilizada en la medida del equivalente de energía de los alimentos es realmente la kilocaloría.

<sup>3</sup> Medidas cuidadosas demuestran que el calor específico del agua varía aproximadamente en un 1% en todo el margen de temperaturas de 0 a 100°C. Normalmente despreciaremos esta pequeña variación.



Lingotes de acero dentro de un horno en forma de túnel de dos tubos gemelos. Los tres lingotes de acero al carbono de 53 cm de diámetro que se ven aquí, se han estado calentando durante 7 horas, aproximadamente, hasta alcanzar los 1340 °C. Cada lingote de 3200 kg está situado sobre un carrito que lo va transportando a lo largo del horno de 81 m de largo, dividido en doce zonas de calentamiento separadas de forma que se haga aumentar gradualmente la temperatura del lingote para prevenir la formación de grietas. Los lingotes, que brillan con un color blanco amarillento, salen del horno en condiciones de ser laminados y transformados en tubos grandes y de paredes gruesas.

TABLA 18.1 Calores específicos y calores molares de algunos sólidos y líquidos

Sustancia	$c$ , kJ/kg·K	$c$ , kcal/kg·K o Btu/lb·F°	$c'$ , J/mol·K
Agua	4,18	1,00	75,2
Alcohol etílico	2,4	0,58	111
Aluminio	0,900	0,215	24,3
Bismuto	0,123	0,0294	25,7
Cobre	0,386	0,0923	24,5
Hielo (-10 °C)	2,05	0,49	36,9
Mercurio	0,140	0,033	28,3
Oro	0,126	0,0301	25,6
Plata	0,233	0,0558	24,9
Plomo	0,128	0,0305	26,4
Tungsteno	0,134	0,0321	24,8
Vidrio	0,840	0,20	—
Zinc	0,387	0,0925	25,2

La capacidad calorífica por mol se denomina **calor específico molar**,  $c'$ ,

$$c' = \frac{C}{n}$$

en donde  $n$  es el número de moles. Como  $C = mc$ , el calor específico molar  $c'$  y el calor específico  $c$  están relacionados de la forma siguiente

$$c' = \frac{C}{n} = \frac{mc}{n} = Mc \quad (18.6)$$

en donde  $M = m/n$  es la masa molar. La tabla 18.1 indica los calores específicos y los calores molares de algunos sólidos y líquidos. Obsérvese que los calores molares de todos los metales son aproximadamente iguales. El significado de este hecho será analizado en la sección 18.7.

### EJEMPLO 18.1 | Elevación de la temperatura

¿Qué cantidad de calor se necesita para elevar la temperatura de 3 kg de cobre en 20 °C?

**Planteamiento del problema** La cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de la sustancia (cobre) es proporcional a la variación de temperatura (20 °C) y a la masa (3 kg) de la sustancia.

El calor necesario se obtiene a partir de la ecuación 18.1 con  $c = 0,386 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$  tomado de la tabla 18.1:

$$Q = mc \Delta T = (3 \text{ kg})(0,386 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(20 \text{ K}) = \boxed{23,2 \text{ kJ}}$$

**Observaciones** Aquí usamos  $\Delta T = 20 \text{ C}^\circ = 20 \text{ K}$ . Alternativamente, podríamos expresar el calor específico como  $0,386 \text{ kJ/kg} \cdot \text{C}^\circ$  y escribir la variación de temperatura como  $20 \text{ C}^\circ$ .

**Ejercicio** Un bloque de aluminio de 2 kg está inicialmente a 10 °C. Si se le transfieren 36 kJ de energía calorífica, ¿cuál es su temperatura final? (Respuesta: 30 °C.)

Podemos ver en la tabla 18.1 que el calor específico del agua es considerablemente mayor que el de las demás sustancias. Debido a esta capacidad térmica tan grande, el agua es un material excelente para almacenar energía térmica, como ocurre en un sistema de energía solar, y también es un excelente refrigerante, como sucede en un motor de automóvil.



Una gran masa de agua, como un lago o un océano, tiende a moderar las variaciones de temperatura del aire de sus cercanías porque puede absorber o desprender grandes cantidades de energía térmica experimentando sólo cambios de temperatura pequeños.

## Calorimetría

El calor específico de un cuerpo puede medirse convenientemente calentándolo primero a una cierta temperatura, por ejemplo, el punto de ebullición del agua, situándolo a continuación en un baño de agua, de masa y temperatura conocidas, y midiendo, por último, la temperatura final de equilibrio entre el cuerpo y el baño. Si el sistema en su totalidad está aislado térmicamente de su entorno (aislando, por ejemplo, el recipiente), el calor que sale del cuerpo tiene que ser igual al calor que entra en el agua y en el recipiente. Este procedimiento se denomina **calorimetría** y el recipiente aislado que contiene el agua, **calorímetro**.

Sea  $m$  la masa del cuerpo u objeto,  $c$  su calor específico y  $T_{io}$  su temperatura inicial. Si  $T_f$  es la temperatura final del cuerpo dentro de su baño de agua, el calor que sale del cuerpo vale

$$Q_{\text{sale}} = mc(T_{io} - T_f)$$

Análogamente, si  $T_{ia}$  es la temperatura inicial del agua y su recipiente, y  $T_f$  su temperatura final (la temperatura final del cuerpo y del agua será la misma, puesto que finalmente alcanzarán el equilibrio), el calor absorbido por el agua y el recipiente es

$$Q_{\text{entra}} = m_a c_a (T_f - T_{ia}) + m_c c_c (T_f - T_{ia})$$

en donde  $m_a$  y  $c_a = 4,18 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$  son la masa y el calor específico del agua y  $m_c$  y  $c_c$  son la masa y el calor específico del recipiente. (Obsérvese que en estas ecuaciones hemos escogido las diferencias de temperaturas de forma que tanto el calor cedido como el recibido sean cantidades positivas). Igualando estas cantidades de calor, puede obtenerse el calor específico  $c$  del objeto:

$$Q_{\text{sale}} = Q_{\text{entra}}$$

$$mc(T_{io} - T_f) = m_a c_a (T_f - T_{ia}) + m_c c_c (T_f - T_{ia}) \quad (18.7)$$

Como en la ecuación 18.7 sólo aparecen diferencias de temperaturas y como los grados Celsius y los Kelvin tienen el mismo tamaño, pueden medirse todas las temperaturas bien en la escala Celsius o en la Kelvin sin que se vea afectado el resultado.

### EJEMPLO 18.2 | Medida del calor específico

Para medir el calor específico del plomo se calientan 600 g de perdigones de este metal a  $100^\circ\text{C}$  y se colocan en un calorímetro de aluminio de 200 g de masa que contiene 500 g de agua inicialmente a  $17,3^\circ\text{C}$ . Si la temperatura final del sistema es  $20,0^\circ\text{C}$ , ¿cuál es el calor específico del plomo? [El calor específico del aluminio del calorímetro es  $0,900 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ].

**Planteamiento del problema** Igualamos el calor cedido por el plomo con el calor absorbido por el agua y el recipiente y despejamos el calor específico del plomo  $c_{\text{pb}}$ .

1. Expresar el calor cedido por el plomo en función de su calor específico:
2. Determinar el calor absorbido por el agua:
3. Determinar el calor absorbido por el calorímetro
4. Igualar el calor cedido por el plomo con el calor absorbido por el agua y el calorímetro:

$$Q_{\text{pb}} = m_{\text{pb}} c_{\text{pb}} |\Delta T_{\text{pb}}|$$

$$Q_a = m_a c_a \Delta T_a$$

$$Q_c = m_c c_c \Delta T_c$$

$$Q_{\text{pb}} = Q_a + Q_c$$

$$m_{\text{pb}} c_{\text{pb}} |\Delta T_{\text{pb}}| = m_a c_a \Delta T_a + m_c c_c \Delta T_c$$

donde

$$\Delta T_c = \Delta T_a = 2,7 \text{ K y } |\Delta T_{\text{pb}}| = 80 \text{ K}$$

$$c_{\text{pb}} = \frac{(m_a c_a + m_c c_c) \Delta T_a}{m_{\text{pb}} |\Delta T_{\text{pb}}|}$$

$$= \frac{[(0,5 \text{ kg})(4,18 \text{ kJ/Kg}\cdot\text{K}) + (0,2 \text{ Kg})(0,9 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})](2,7 \text{ K})}{(0,6 \text{ kg})(80 \text{ K})}$$

$$= \boxed{0,128 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}}$$

5. Despejar  $c_{\text{pb}}$ :

**Observación** El calor específico del plomo es considerablemente menor que el del agua.

## 18.2 Cambio de fase y calor latente

Cuando se suministra calor al hielo a 0 °C, la temperatura del hielo no se modifica. En su lugar, el hielo se funde. Este es un ejemplo de **cambio de fase**. Las formas más corrientes de cambios de fase incluyen la solidificación (líquido a sólido), la fusión (sólido a líquido), la vaporización (líquido a vapor o gas), la condensación (gas o vapor a líquido) y la sublimación (sólido directamente a gas, como ocurre con el dióxido de carbono sólido o hielo seco). Existen otros tipos de cambios de fase, como el cambio que experimenta un sólido de una forma cristalina a otra distinta. Así, el carbono a grandes presiones se convierte en diamante.

El hecho de que la temperatura permanezca constante durante un cambio de fase puede entenderse en función de la teoría molecular. Las moléculas de un líquido están muy próximas unas de otras y ejercen fuerzas atractivas entre sí, mientras que las moléculas de un gas están muy separadas. Convertir una sustancia de líquido a vapor requiere la energía necesaria para vencer la atracción intermolecular del líquido. Consideremos una olla de agua colocada sobre la llama de un hornillo. Al principio, a medida que el agua se calienta, el movimiento de sus moléculas aumenta y la temperatura sube. Cuando la temperatura alcanza el punto de ebullición, las moléculas no pueden ya aumentar su energía cinética y permanecen en el líquido. Cuando el agua líquida se vaporiza, el calor añadido se emplea en vencer las fuerzas atractivas entre las moléculas, que se separan cada vez más en la fase gaseosa. La energía suministrada al líquido para vaporizarlo incrementa de este modo la energía potencial de las moléculas, pero no su energía cinética. Como la temperatura es una medida de la energía *cinética* media de traslación de las moléculas, la temperatura permanece constante durante el cambio de fase.

En una sustancia pura, un cambio de fase a una presión dada tiene lugar sólo a una temperatura determinada. Por ejemplo, el agua pura a una presión de 1 atm pasa de sólido a líquido a 0 °C (el punto de fusión normal del agua) y de líquido a gas a 100 °C (el punto de ebullición normal del agua).

El calor necesario para fundir una sustancia de masa  $m$  sin cambiar su temperatura es proporcional a la masa de la sustancia:

$$Q_f = mL_f \quad (18.8)$$

en donde  $L_f$  se denomina **calor latente de fusión** de la sustancia. A una presión de 1 atm, el calor latente de fusión del agua es 333,5 kJ/kg = 79 kcal/kg. Cuando el cambio de fase corresponde al paso de líquido a gas, el calor requerido es

$$Q_v = mL_v \quad (18.9)$$

en donde  $L_v$  es el **calor latente de vaporización**. En el caso del agua a una presión de 1 atm, el calor latente de vaporización es 2,26 MJ/kg = 540 kcal/kg. En la tabla 18.2 se indican los puntos normales de fusión y ebullición, y los calores latentes de fusión y de vaporización a 1 atm para diversas sustancias.

TABLA 18.2 Punto de fusión normal (PF), calor latente de fusión  $L_f$ , punto de ebullición normal (PE), y calor latente de vaporización  $L_v$  para varias sustancias a 1 atm

Sustancia	PF, K	$L_f$ , kJ/kg	PE, K	$L_v$ , kJ/kg
Agua	273,15	333,5	373,15	2257
Alcohol etílico	159	109	351	879
Azufre	388	38,5	717,75	287
Bromo	266	67,4	332	369
Cobre	1356	205	2839	4726
Dióxido de carbono	–	–	194,6 <sup>a</sup>	573 <sup>a</sup>
Helio	–	–	4,2	21
Mercurio	234	11,3	630	296
Nitrógeno	63	25,7	77,35	199
Oro	1336	62,8	3081	1701
Oxígeno	54,4	13,8	90,2	213
Plata	1234	–105	2436	2323
Plomo	600	24,7	2023	858
Zinc	692	102	1184	1768

<sup>a</sup> Estos valores corresponden a la sublimación. El dióxido de carbono no tiene fase líquida a 1 atm.



Aunque la fusión indica que el hielo ha experimentado un cambio de fase, la temperatura del hielo no varía.

**EJEMPLO 18.3** | Transformación de hielo en vapor**¡¡INTÉNTELO USTED MISMO!**

¿Cuánto calor es necesario suministrar para transformar 1,5 kg de hielo a  $-20\text{ }^\circ\text{C}$  y 1 atm en vapor?

**Planteamiento del problema** El calor necesario consta de cuatro partes:  $Q_1$ , calor necesario para elevar la temperatura del hielo de  $-20$  a  $0\text{ }^\circ\text{C}$ ;  $Q_2$ , calor necesario para fundir el hielo;  $Q_3$ , calor necesario para elevar la temperatura del agua de  $0$  a  $100\text{ }^\circ\text{C}$ ; y  $Q_4$ , calor necesario para vaporizar el agua. Al calcular  $Q_1$  y  $Q_3$  admitiremos que los calores específicos son constantes, con los valores  $2,05\text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$  para el hielo y  $4,18\text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$  para el agua.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

**Pasos**

1. Utilizar  $Q_1 = mc\Delta T$  para hallar el calor necesario para elevar la temperatura del hielo a  $0\text{ }^\circ\text{C}$ .
2. Usar  $L_f$  de la tabla 18.2 para hallar el calor  $Q_2$  necesario para fundir el hielo.
3. Determinar el calor  $Q_3$  necesario para elevar la temperatura del agua de  $0^\circ$  a  $100\text{ }^\circ\text{C}$ .
4. Usar  $L_v$  de la tabla 18.2 para hallar el calor  $Q_4$  necesario para vaporizar el agua.
5. Sumar todos estos resultados para obtener el calor total  $Q$ .

**Respuestas**

$$Q_1 = 61,5\text{ kJ} = 0,0615\text{ MJ}$$

$$Q_2 = 500\text{ kJ} = 0,500\text{ MJ}$$

$$Q_3 = 627\text{ kJ} = 0,627\text{ MJ}$$

$$Q_4 = 3,39\text{ MJ}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \boxed{4,58\text{ MJ}}$$

**Observaciones** La mayor parte del calor suministrado se ha invertido en vaporizar el agua y la cantidad necesaria para fundir el hielo fue casi tanta como la necesaria para elevar la temperatura del agua  $100\text{ }^\circ\text{C}$ . En la figura 18.1 puede verse el gráfico de la temperatura en función del tiempo en el caso de que el calor se adicione a un ritmo constante de  $1\text{ kJ/s}$ . Obsérvese que se tarda mucho más en vaporizar el agua que en fundir el hielo o en elevar la temperatura del agua. Cuando toda el agua se ha vaporizado, la temperatura aumentará de nuevo conforme se vaya adicionando calor.

**Ejercicio** Un trozo de plomo de  $830\text{ g}$  se calienta hasta su punto de fusión de  $600\text{ K}$ . ¿Cuánta energía calorífica adicional debe añadirse para fundir el plomo? (Respuesta  $20,5\text{ kJ}$ .)

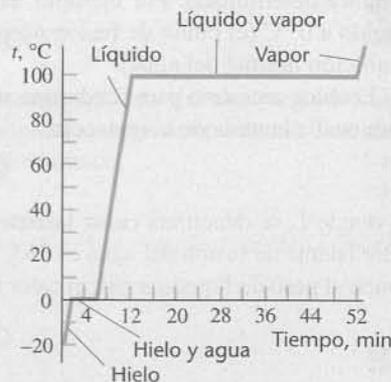


Figura 18.1

**EJEMPLO 18.4** | Una bebida fresca**¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!**

Una jarra de limonada de 2 litros ha permanecido todo el día sobre una mesa de picnic a  $33\text{ }^\circ\text{C}$ . En un vaso de corcho blanco echamos  $0,24\text{ kg}$  de limonada y dos cubitos de hielo (cada uno de  $0,025\text{ kg}$  a  $0\text{ }^\circ\text{C}$ ). (a) Suponiendo que no hay pérdidas de calor a través de las paredes del vaso, ¿cuál será la temperatura final de la limonada? (b) ¿Cuál sería la temperatura final si añadimos 6 cubitos de hielo?

**Planteamiento del problema** Establecemos que el calor perdido por la limonada es igual al calor ganado por los cubos de hielo. Llamemos  $T_f$  a la temperatura final de la limonada y el agua. Se supone que la limonada tiene la misma capacidad calorífica que el agua.

- (a) 1. Expresar el calor perdido por la limonada en función de la temperatura final,  $T_f$ :

$$Q_{\text{perdido}} = m_L c |\Delta T| = m_L c (T_{\text{Li}} - T_f)$$

2. Expresar el calor ganado por los cubos de hielo y el agua resultante en función de la temperatura final:

$$Q_{\text{ganado}} = m_{\text{hielo}} L_f + m_{\text{hielo}} c \Delta T_a = m_{\text{hielo}} L_f + m_{\text{hielo}} c T_f$$

3. Igualar el calor perdido con el calor ganado y despejar  $T_f$ :

$$Q_{\text{perdido}} = Q_{\text{ganado}}$$

$$m_L c (T_{Li} - T_f) = m_{\text{hielo}} L_f + m_{\text{hielo}} c T_f$$

de modo que

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{m_L c T_{Li} - m_{\text{hielo}} L_f}{(m_L + m_{\text{hielo}}) c} \\ &= \frac{(0,24 \text{ kg})(4,18 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{C}^\circ))(33^\circ\text{C}) - (0,05 \text{ kg})(333,5 \text{ kJ}/\text{kg})}{(0,29 \text{ kg})(4,18 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{C}^\circ))} \\ &= \boxed{13,6^\circ\text{C}} \end{aligned}$$

(b) 1. En el caso de los 6 cubos de hielo,  $m_{\text{hielo}} = 0,15 \text{ kg}$ . Determinar la temperatura final como en el paso 3 del apartado (a).

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{m_L c T_{Li} - m_{\text{hielo}} L_f}{(m_L + m_{\text{hielo}}) c} \\ &= \frac{(0,24 \text{ kg})(4,18 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{C}^\circ))(33^\circ\text{C}) - (0,15 \text{ kg})(333,5 \text{ kJ}/\text{kg})}{(0,39 \text{ kg})(4,18 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{C}^\circ))} \\ &= -10,4^\circ\text{C} \end{aligned}$$

2. ¡Este resultado no puede ser correcto! Sabemos que si añadimos hielo a  $0^\circ\text{C}$  a la limonada a  $33^\circ\text{C}$ , la temperatura final de la mezcla no puede ser  $-10^\circ\text{C}$ . ¿Dónde está el error? El calor cedido por la limonada cuando se enfría de  $33$  a  $0^\circ\text{C}$  no es suficiente para fundir todo el hielo, en contra de nuestra hipótesis de que todo el hielo se funde, utilizada en el paso 2 del apartado (a). La temperatura final es, pues,

$$T_f = \boxed{0^\circ\text{C}}$$



**Comprobar el resultado** Comprobemos cuánto hielo se ha fundido en el apartado

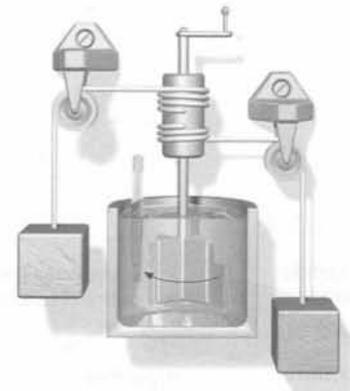
(b). Para que la limonada se enfríe de  $33$  a  $0^\circ\text{C}$  debe ceder el calor  $Q_{\text{cedido}} = (0,24 \text{ kg})(4,18 \text{ kJ}/\text{kg} \cdot \text{C}^\circ)(33^\circ\text{C}) = 33,1 \text{ kJ}$ . La masa de hielo que esta cantidad de calor fundirá es  $m_{\text{hielo}} = Q_{\text{cedido}}/L_f = 33,1 \text{ kJ}/(333,5 \text{ kJ}/\text{kg}) = 0,10 \text{ kg}$ . Esta masa corresponde, aproximadamente, a la de cuatro cubos de hielo. La adición de más de cuatro cubos de hielo no disminuirá la temperatura por debajo de  $0^\circ\text{C}$ , sino que simplemente aumentará la cantidad de hielo en la mezcla hielo-limonada. En problemas como este, primero debemos hallar cuánto hielo debe fundirse para reducir la temperatura del líquido a  $0^\circ\text{C}$ . Si esta cantidad es menor que la añadida, entonces procederemos como en el apartado (a). Si se ha añadido más hielo, la temperatura final será  $0^\circ\text{C}$ .

## 18.3 El experimento de Joule y el primer principio de la termodinámica

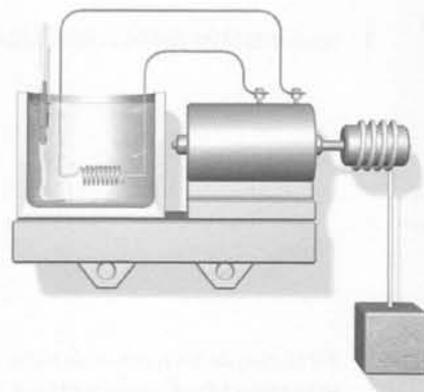
La temperatura de un sistema puede elevarse dándole calor, pero también puede conseguirse realizando trabajo sobre él.

La figura 18.2 es un diagrama del aparato utilizado por Joule en su famoso experimento para determinar el trabajo necesario para elevar la temperatura de  $1 \text{ g}$  de agua en  $1^\circ\text{C}$ . En este caso el sistema consiste en un recipiente aislado térmicamente que contiene  $1 \text{ g}$  de agua. El aparato de Joule convierte la energía potencial de las pesas que caen en trabajo realizado sobre el agua por medio de unas paletas adosadas, como se muestra en la figura. Joule encontró que la temperatura de su muestra de agua se elevaba en  $1^\circ\text{F}$  cuando la máquina funcionaba con la caída de  $772$  libras de peso desde la altura de un pie. En unidades modernas esto equivale a decir que es necesario el trabajo de  $4,184 \text{ J}$  (unidad de energía adoptada por la comunidad científica en 1948) para elevar la temperatura de  $1 \text{ g}$  de agua en  $1^\circ\text{C}$ . Este resultado según el cual  $4,184 \text{ J}$  de energía mecánica es equivalente a  $1 \text{ cal}$  de energía térmica se conoce con el nombre de **equivalente mecánico del calor**.

Existen otras formas de realizar trabajo sobre este sistema. Por ejemplo, podríamos simplemente dejar caer el recipiente de agua aislado desde cierta altura  $h$ , de forma que se produzca un choque inelástico contra el suelo, o bien podríamos aprovechar el trabajo mecánico para generar electricidad y utilizar luego la electricidad para calentar el agua (figura 18.3). En todos estos experimentos se necesita la misma cantidad de trabajo para producir un determinado cambio de temperatura en un sistema dado. Según la conservación de la energía, el trabajo realizado debe convertirse en un incremento de la energía interna del sistema.



**Figura 18.2** Diagrama esquemático del aparato utilizado por Joule. El agua se encuentra en un recinto con paredes aislantes para evitar la transmisión de calor. Cuando las pesas caen a velocidad constante, hacen girar una rueda de paletas, que produce trabajo sobre el agua. Si el rozamiento es despreciable, este trabajo es igual a la pérdida de energía mecánica de las pesas, es decir, a la pérdida de su energía potencial.



**Figura 18.3** Otro método para realizar trabajo sobre un recipiente con agua térmicamente aislado. El generador, que está accionado por un peso que cae, realiza trabajo eléctrico sobre el sistema.

### EJEMPLO 18.5 | Calentar agua dejándola caer

Se deja caer desde una altura  $h$  sobre el suelo un recipiente térmicamente aislado y lleno de agua. Si el choque es perfectamente inelástico y toda la energía mecánica perdida en la caída se convierte en energía interna del agua, ¿cuál debe ser  $h$  para que la temperatura del agua aumente en  $1\text{ C}^\circ$ ?

**Planteamiento del problema** La energía cinética del agua justo antes de que choque contra el suelo es igual a su energía potencial original  $mgh$ . Durante el choque, esta energía se convierte en calor  $Q$  y éste ocasiona una elevación de temperatura dada por  $Q = mc \Delta T$ .

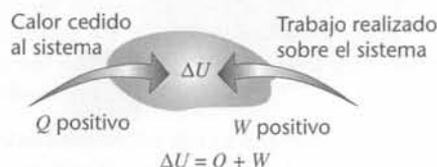
1. Igualar la energía potencial con el calor:
2. Despejar la altura  $h$ :
3. Sustituir  $c = 4,18\text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$  y  $\Delta T = 1\text{ C}^\circ = 1\text{K}$ :

$$mgh = mc \Delta T$$

$$h = \frac{c \Delta T}{g}$$

$$h = \frac{(4,18\text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(1\text{ K})}{9,81\text{ N/kg}} = 0,426\text{ km} = \boxed{426\text{ m}}$$

**Observaciones** La altura  $h$  es independiente de la masa del agua. Obsérvese también que la altura es bastante grande, lo cual ilustra una de las dificultades del experimento de Joule. Es necesaria una gran cantidad de trabajo para producir un cambio mensurable en la temperatura del agua.



**Figura 18.4** Convenio de signos para las magnitudes que intervienen en el primer principio de la termodinámica.

Supongamos, a continuación, que realizamos el experimento de Joule pero sustituyendo las paredes aislantes del recipiente por paredes conductoras. En este caso se encuentra que el trabajo necesario para producir una variación dada de la temperatura del sistema depende de la cantidad de calor que se añade o se quita del sistema por conducción a través de las paredes. Sin embargo, si se suma el trabajo realizado sobre el sistema y el calor neto suministrado al mismo, el resultado es siempre el mismo para una variación dada de la temperatura. Es decir, la suma del calor *añadido* al sistema más el trabajo realizado *sobre* él es igual a la variación de la energía interna del sistema. Este es el **primer principio de la termodinámica**, que es simplemente un enunciado de la conservación de la energía.

Es costumbre escribir  $W$  para el trabajo realizado *sobre* el sistema por el medio que le rodea y  $-W$  para designar el trabajo realizado *por* el sistema sobre el medio. Por ejemplo, supongamos que el sistema es un gas encerrado en un cilindro por medio de un émbolo. Si el émbolo comprime el gas, el medio realiza un trabajo positivo sobre el gas, es decir,  $W$  es positivo. (Sin embargo, si el gas se expande contra el émbolo, es el gas el que realiza trabajo sobre el medio y el trabajo se considera negativo). Asimismo, si se transfiere calor al sistema,  $Q$  es positivo y si se extrae del sistema,  $Q$  es negativo (figura 18.4). Utilizando este criterio de signos y tomando el símbolo  $U$  para la energía interna del sistema, el primer principio de la termodinámica se expresa:

$$\Delta U = Q + W \quad (18.10)$$

La variación de energía interna de un sistema es igual al calor transferido al sistema más el trabajo realizado sobre el sistema.

## PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

La ecuación 18.10 es equivalente al teorema trabajo-energía,  $W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sist}}$  del capítulo 7 (ecuación 7.9), excepto en que hemos añadido el término del calor  $Q$ , hemos cambiado la convención de signos para  $W$  y hemos llamado  $U$  a la energía del sistema.

**EJEMPLO 18.6** | Agitación del agua

Un sistema consiste en 3 kg de agua. Sobre él se realiza un trabajo de 25 kJ agitándolo con una rueda de paletas. Durante este tiempo, 15 kcal de calor se escapan del sistema debido a un deficiente aislamiento. ¿Cuál es la variación de la energía interna del sistema?

**Planteamiento del problema** Expresaremos todas las energías en julios y aplicaremos el primer principio de la termodinámica.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\Delta U$ se deduce del primer principio de la termodinámica:                    | $\Delta U = Q + W$   |
| 2. El calor <i>se extrae</i> del sistema, luego el calor <i>añadido</i> es negativo: | $Q = -15 \text{ kcal} = -(15 \text{ kcal}) \left( \frac{4,18 \text{ kJ}}{1 \text{ kcal}} \right) = -62,7 \text{ kJ}$ |
| 3. El trabajo realizado <i>sobre</i> el sistema es positivo:                         | $W = 25 \text{ kJ}$  |
| 4. Sustituir estas magnitudes y despejar $\Delta U$ :                                | $\Delta U = Q + W = (-62,7 \text{ kJ}) + (25 \text{ kJ})$<br>$= \boxed{-37,7 \text{ kJ}}$                            |

**Observación** La energía interna disminuye porque el sistema ha perdido una energía en forma de calor superior a la que ha ganado en forma de trabajo realizado sobre él.

Es importante comprender que la energía interna  $U$  es una función del estado del sistema, de la misma forma que lo son  $P$ ,  $V$  y  $T$ . Consideremos un gas en cierto estado inicial ( $P_i$ ,  $V_i$ ). La temperatura  $T_i$  está determinada por la ecuación de estado. Por ejemplo, si el gas es ideal,  $T_i = P_i V_i / nR$ . La energía interna  $U_i$  también depende solamente del estado del gas, el cual está determinado por dos cualesquiera de las variables de estado, por ejemplo,  $P$  y  $V$ ,  $P$  y  $T$ , o  $V$  y  $T$ . Si comprimimos el gas o le dejamos expandir, si le añadimos o le extraemos calor, o si realizamos trabajo sobre él o es el gas el que realiza el trabajo, el gas se irá encontrando en una secuencia de estados; esto es, irá teniendo valores diferentes de las funciones de estado  $P$ ,  $V$ ,  $T$  y  $U$ . Si luego se hace volver al gas a su estado inicial ( $P_i$ ,  $V_i$ ), la temperatura  $T$  y la energía interna  $U$  deben ser iguales a sus valores originales.

Por otra parte, el calor neto  $Q$  que entra en el gas y el trabajo  $W$  realizado por el mismo, no son funciones de estado del sistema. No hay funciones  $Q$  o  $W$  asociadas con un estado particular del gas. Podemos hacer que el gas pase por una secuencia de estados comenzando y terminando en el estado ( $P_i$ ,  $V_i$ ) y durante ese proceso es posible que el gas realice un trabajo positivo y absorba una cantidad igual de calor. O podemos conseguir a través de una secuencia diferente de estados que sobre el gas se realice un trabajo y al mismo tiempo el gas desprenda calor. Por lo tanto, es correcto decir que un sistema tiene una gran cantidad de energía interna pero no es correcto afirmar que un sistema tiene una gran cantidad de calor o de trabajo. El calor no es algo contenido en un sistema. Más bien es una medida de la energía que fluye de un sistema a otro a causa de una diferencia de temperatura. El trabajo es una medida de la energía que fluye de un sistema a otro porque el punto de contacto de una fuerza ejercida por un sistema sobre el otro sufre un desplazamiento que no es perpendicular a la fuerza.

En el caso en que las cantidades de calor añadidas, el trabajo realizado y las variaciones de energía interna sean muy pequeñas, es costumbre escribir la ecuación 18.10 en la forma

$$dU = dQ + dW \quad (18.11)$$

En esta ecuación,  $dU$  es la diferencial de la función energía interna. Sin embargo, ni  $dQ$  ni  $dW$  son diferenciales de ninguna función. Simplemente, representan pequeñas cantidades de calor adicionado al sistema, o de trabajo realizado sobre él.

## 18.4 La energía interna de un gas ideal

La energía cinética de traslación  $E_c$  de las moléculas de un gas ideal está relacionada con la temperatura absoluta  $T$  por la ecuación 17.22 del capítulo 17:

$$E_c = \frac{3}{2}nRT$$

en donde  $n$  es el número de moles del gas y  $R$ , la constante universal de los gases. Si se considera que esta energía de traslación constituye toda la energía interna del gas, entonces  $U = E_c$  y

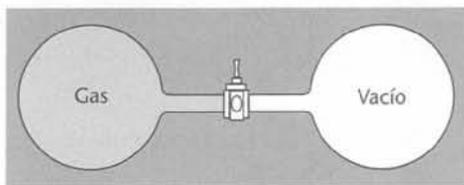
$$U = \frac{3}{2}nRT \quad (18.12)$$

En este caso la energía interna dependerá sólo de la temperatura y no de su volumen o de su presión. Si las moléculas, además de la energía cinética de traslación, tienen otros tipos de energía tales como la energía de rotación, la energía interna será mayor que la expresada por la ecuación 18.12. Sin embargo, de acuerdo con el teorema de equipartición (capítulo 17, sección 5), la energía media asociada con cualquier grado de libertad será  $\frac{1}{2}kT$  por molécula o  $\frac{1}{2}RT$  por mol, de modo que de nuevo, la energía interna dependerá sólo de la temperatura y no del volumen ni la presión.

Podemos imaginar que la energía interna de un gas *real* incluye otras formas de la energía que dependan de la presión y volumen del gas. Supóngase, por ejemplo, que entre las moléculas del gas que se encuentran próximas se ejercen fuerzas atractivas. Entonces se requiere trabajo para aumentar la separación entre las moléculas. Así pues, si se incrementa la distancia media entre las moléculas, también se verá incrementada la energía potencial asociada con la atracción molecular. Por lo tanto, la energía interna del gas dependerá ahora del volumen del gas además de depender de la temperatura.

Joule, utilizando un aparato semejante al que se muestra en la figura 18.5, realizó un interesante experimento para determinar si la energía interna de un gas depende de su volumen. Inicialmente el compartimiento de la izquierda de la figura 18.5 contiene un gas, mientras que se ha hecho el vacío en el compartimiento de la derecha. Ambos están conectados por una llave de paso inicialmente cerrada. El sistema completo está térmicamente aislado del medio usando paredes rígidas que no permiten el intercambio de calor ni la realización de ningún trabajo entre el sistema y el exterior. Cuando se abre la llave, el gas se expande bruscamente en su tendencia a ocupar la cámara vacía. Este proceso se denomina **expansión libre**. Finalmente, el gas alcanza el equilibrio térmico consigo mismo. Puesto que no se ha realizado ningún trabajo sobre el gas ni se le ha transferido ningún calor, la energía interna final del gas debe ser igual a su energía interna inicial. Si las moléculas del gas ejercen fuerzas atractivas entre sí, la energía potencial asociada con estas fuerzas aumentará al aumentar el volumen. Pero, como la energía se conserva, la energía cinética de traslación deberá disminuir, dando como resultado un descenso de la temperatura del gas.

Cuando Joule realizó este experimento, se encontró con que la temperatura final era igual a la inicial. Otros experimentos confirmaron este resultado para gases a densidades bajas. Esto implica que en el caso de un gas a baja densidad (es decir, para un gas ideal) la temperatura depende únicamente de la energía interna o, como es más corriente decir, la energía interna depende únicamente de la temperatura. Sin embargo, cuando se realiza el experimento con una gran cantidad de gas inicialmente en el compartimiento de la izquierda de modo que la densidad sea alta, la temperatura después de la expansión es ligeramente menor que antes de la expansión. Esto indica que existe una pequeña atracción entre las moléculas de un gas real.



**Figura 18.5** Expansión libre de un gas. Al abrir la llave, el gas se expande rápidamente en la cámara de vacío. Como no se realiza trabajo y todo el sistema está térmicamente aislado, las energías internas inicial y final del gas son iguales.

## 18.5 Trabajo y diagrama PV para un gas

En muchos tipos de máquinas, el trabajo se obtiene permitiendo que un gas se expanda contra un pistón o émbolo móvil. Por ejemplo, en la máquina de vapor, el agua se calienta en una caldera para producir vapor, que a continuación produce trabajo cuando se expande y mueve a un émbolo. En un motor de automóvil se provoca la ignición de una mezcla de vapor

de gasolina y aire, originando su explosión. Las elevadas presiones y temperaturas resultantes hacen que el gas se expanda rápidamente empujando a un pistón y realizando trabajo. En esta sección, veremos cómo se puede describir matemáticamente el trabajo realizado por un gas que se expande.

### Procesos cuasiestáticos

En la figura 18.6 se ve un gas ideal encerrado en un recipiente provisto de un pistón que ajusta muy bien y que supondremos carece de rozamientos. Cuando el pistón se mueve, el volumen del gas varía. La temperatura o la presión, o ambas a la vez, deberán variar también puesto que estas tres variables están relacionadas mediante la ecuación de estado  $PV = nRT$ . Si empujamos rápidamente hacia dentro el pistón para comprimir el gas, inicialmente la presión cerca del pistón será mayor que en un lugar más alejado. Finalmente, el gas se estabilizará en una nueva presión y temperatura. No podemos determinar variables macroscópicas, tales como  $T$ ,  $P$  o  $U$  para el sistema gaseoso completo hasta que el equilibrio se restaure en el gas. Sin embargo, si movemos lentamente el pistón en pequeños desplazamientos y permitimos que se reestablezca el equilibrio después de cada desplazamiento, podemos comprimir y dilatar el gas de forma que se aleje poco de su estado de equilibrio. En este tipo de proceso, denominado **proceso cuasiestático**, el gas pasa por una serie de estados de equilibrio. En la práctica, es posible aproximarse bastante bien a los procesos cuasiestáticos.

Comencemos con un gas a presión alta y dejémosle expandir cuasiestáticamente. El módulo de la fuerza ejercida por el gas sobre el pistón es  $PA$ , donde  $A$  es el área del pistón y  $P$  es la presión del gas. Si el pistón se desplaza una distancia  $dx$ , el trabajo realizado por el gas sobre el pistón vale

$$dW_{\text{por el gas}} = F dx = PA dx = P dV \quad (18.13)$$

donde  $dV = A dx$  es el incremento de volumen del gas. Durante la expansión el pistón ejerce sobre el gas una fuerza de módulo  $PA$  pero en sentido opuesto a la fuerza del gas sobre el pistón. Así, el trabajo realizado por el pistón sobre el gas es exactamente el realizado por el gas cambiado de signo:

$$dW_{\text{sobre el gas}} = -dW_{\text{por el gas}} = -P dV \quad (18.14)$$

Obsérvese que en una expansión,  $dV$  es positivo y el gas realiza trabajo sobre el pistón, de modo que  $dW_{\text{sobre el gas}}$  es negativo, y para una compresión,  $dV$  es negativo y se realiza trabajo sobre el gas, siendo  $dW_{\text{sobre el gas}}$  positivo.

El trabajo efectuado sobre el gas durante una expansión o compresión desde un volumen  $V_i$  hasta un volumen  $V_f$  es

$$W_{\text{sobre el gas}} = -\int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (18.15)$$

TRABAJO REALIZADO SOBRE UN GAS

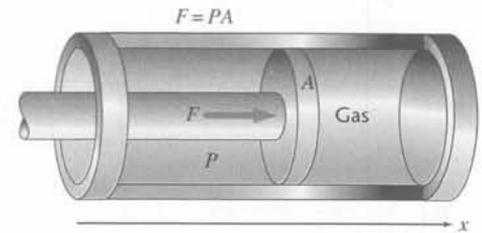
Para calcular este trabajo se necesita saber cómo varía la presión durante la expansión o compresión. Las distintas posibilidades pueden ilustrarse fácilmente utilizando un diagrama PV.

### Diagramas PV

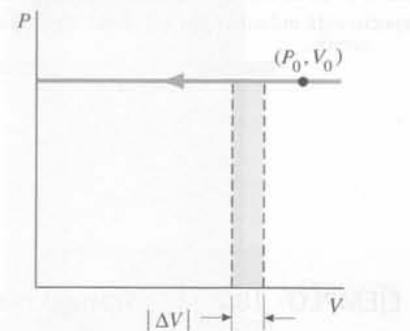
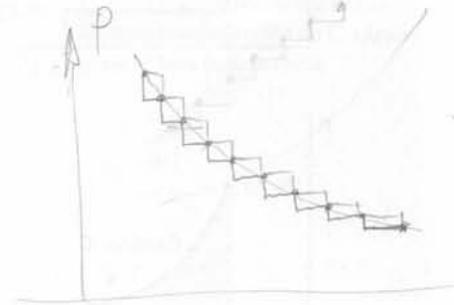
Los estados de un gas pueden representarse en un diagrama de  $P$  en función de  $V$ . Como especificando ambos  $P$  y  $V$  especificamos el estado del gas, cada punto sobre el diagrama PV indica un estado particular del gas. La figura 18.7 muestra un diagrama PV con una línea horizontal que representa una serie de estados en que todos tienen el mismo valor de  $P$ . Esta recta representa una **compresión** a presión constante, proceso que recibe el nombre de **compresión isobara**. Para una variación de volumen  $\Delta V$ , ( $\Delta V$  es negativo en una compresión), tenemos

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P dV = -P \int_{V_i}^{V_f} dV = -P \Delta V$$

que es igual al área sombreada bajo la línea recta de la figura. En general, para una compresión el trabajo realizado por el gas es igual al área bajo la correspondiente curva de  $P$  en fun-



**Figura 18.6** Gas confinado en un cilindro térmicamente aislado dotado de pistón móvil. Cuando el pistón se desplaza una distancia  $dx$ , el volumen del gas varía en  $dV = A dx$ . El trabajo realizado por el gas es  $PA dx = P dV$ , siendo  $P$  la presión.



**Figura 18.7** Cada punto de un diagrama PV, como el  $(P_0, V_0)$ , representa un estado particular del gas. La recta horizontal representa estados con una presión constante  $P_0$ . El trabajo realizado sobre el gas cuando se comprime una cantidad  $\Delta V$  está representado por la zona sombreada  $P_0 |\Delta V|$ .

ción de  $V$ . (Para una expansión el trabajo realizado sobre el gas es igual al área bajo la curva de  $P$  en función de  $V$ , cambiada de signo.) Como las presiones suelen darse en atmósferas y los volúmenes se dan a veces en litros, es conveniente tener un factor de conversión entre atmósferas-litro y julios:

$$1 \text{ atm} \cdot \text{L} = (10^{-3} \text{ m}^3)(101,3 \times 10^3 \text{ N/m}^2) = 101,3 \text{ J} \quad (18.16)$$

**Ejercicio** Si 5 L de un gas ideal a una presión de 2 atm se enfría de forma que se contrae hasta que su volumen es 3 L, ¿cuál es el trabajo realizado sobre el gas? (Respuesta 405,2 J.)

En la figura 18.8 se ven tres posibles caminos o procesos sobre un diagrama  $PV$  para un gas que inicialmente está en el estado  $(P_i, V_i)$  y al final se encuentra en el estado  $(P_f, V_f)$ . Suponemos que el gas es ideal y hemos escogido los estados inicial y final de modo que tengan la misma temperatura, de forma que  $P_i V_i = P_f V_f = nRT$ . Como la energía interna depende sólo de la temperatura, las energías internas inicial y final también son iguales.

En la figura 18.8a, el gas se calienta a volumen constante hasta que su presión es  $P_f$  y luego se enfría a presión constante hasta que su volumen es  $V_f$ . El trabajo realizado sobre el gas a lo largo del camino A es  $P_f |V_f - V_i| = -P_f (V_f - V_i)$  para la parte horizontal del mismo y es nulo en el trayecto a volumen constante.

En la figura 18.8b, primero se enfría el gas a presión constante hasta que su volumen es  $V_f$  y después se calienta a volumen constante hasta que su presión vale  $P_f$ . El trabajo realizado a lo largo del camino B es  $P_i |V_f - V_i| = -P_i (V_f - V_i)$ , que es mucho menor que el obtenido a lo largo del camino A, como puede verse comparando las regiones sombreadas en las figuras 18.8a y b.

En la figura 18.8c, la trayectoria C representa una **compresión isoterma**, es decir, un proceso a temperatura constante. (Mantener constante la temperatura durante la compresión exige que se extraiga calor del gas a lo largo de ese proceso). El trabajo realizado a lo largo de C puede calcularse teniendo en cuenta que  $P = nRT/V$ . De aquí que el trabajo realizado sobre el gas cuando se comprime isotérmicamente desde  $V_i$  hasta  $V_f$  sea

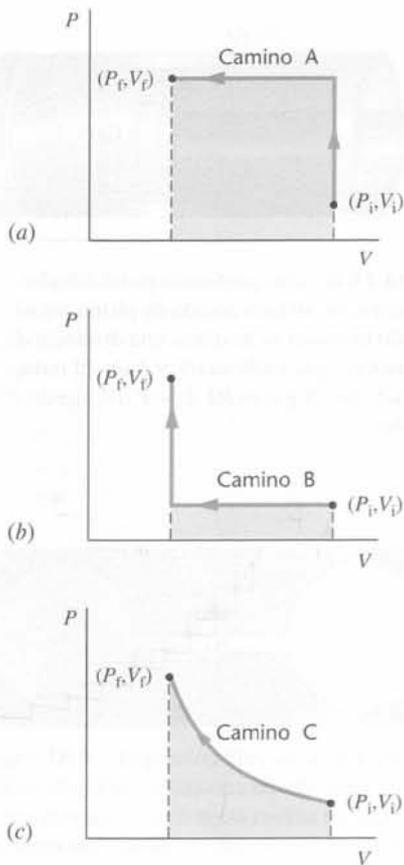
$$W_{\text{isoterma}} = -\int_{V_i}^{V_f} P \, dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} \, dV$$

Como en un proceso isoterma  $T$  es constante, podemos extraerla de la integral. Entonces se tiene

$$W_{\text{isoterma}} = -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = nRT \ln \frac{V_i}{V_f} \quad (18.17)$$

TRABAJO REALIZADO SOBRE UN GAS EN UNA COMPRESIÓN ISOTERMA

Como hemos visto, el trabajo realizado sobre el gas es distinto en cada proceso ilustrado. Como  $U_f = U_i$  en estos estados, el calor neto añadido al sistema debe ser diferente en cada uno de los procesos. Este análisis ilustra el hecho de que tanto el trabajo realizado como el calor añadido dependen del tipo de proceso que realiza el sistema al pasar de un estado al otro, pero la variación de la energía interna no depende de ello.

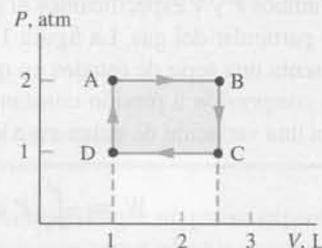


**Figura 18.8** Tres caminos sobre un diagrama  $PV$  para conectar un estado inicial  $(P_i, V_i)$  y un estado final  $(P_f, V_f)$ . El trabajo realizado a lo largo de cada trayecto está indicado por las zonas sombreadas.

### EJEMPLO 18.7 | Trabajo realizado sobre un gas ideal

Un gas ideal experimenta un proceso cíclico A-B-C-D-A, como indica la figura 18.9. El gas inicialmente tiene un volumen de 1 L y una presión de 2 atm y se expande a presión constante hasta que su volumen es 2,5 L, después de lo cual se enfría a volumen constante hasta que su presión es 1 atm. Entonces se comprime a presión constante hasta que su volumen es de nuevo 1 L. Finalmente se calienta a volumen constante hasta volver a su estado original. Determinar el trabajo total realizado sobre el gas y el calor total añadido durante el ciclo.

**Planteamiento del problema** Calcularemos el trabajo realizado en cada paso. Como  $\Delta U = 0$  para cualquier ciclo completo, el primer principio de la termodinámica establece que la suma de la cantidad total de calor suministrado al gas y del trabajo total realizado sobre el gas sea igual a cero.



**Figura 18.9**

- De A a B el proceso es una expansión isóbara (la presión es constante) de modo que el trabajo realizado sobre el gas es negativo. El trabajo realizado sobre el gas es igual al área sombreada bajo la recta AB de la figura 18.10a cambiada de signo:
- Convertir las unidades a julios:
- De B a C (figura 18.9) el gas se enfría a volumen constante y el trabajo es cero:
- Como el gas experimenta una compresión isóbara de C a D, el trabajo realizado sobre él es positivo y viene dado por el área rayada bajo la línea CD, mostrada en la figura 18.10b:
- Como de vuelta a su estado original A el gas se calienta a volumen constante (figura 18.9), no se realiza trabajo en este proceso:
- El trabajo total realizado por el gas es la suma de los trabajos realizados en cada uno de los pasos:
- Como el gas vuelve a su estado inicial, el cambio total de energía interna es cero:
- El calor añadido se deduce del primer principio:

$$W_{AB} = -P\Delta V = -P(V_B - V_A) \\ = -(2 \text{ atm})(2,5 \text{ L} - 1 \text{ L}) \\ = -3 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

$$W_{AB} = -3 \text{ atm} \cdot \text{L} \times \frac{101,3 \text{ J}}{1 \text{ atm} \cdot \text{L}} \\ = -304 \text{ J}$$

$$W_{BC} = 0$$

$$W_{CD} = -P\Delta V = -P(V_D - V_C) \\ = -(1 \text{ atm})(1 \text{ L} - 2,5 \text{ L}) \\ = 1,5 \text{ atm} \cdot \text{L} = \boxed{152 \text{ J}}$$

$$W_{DA} = 0$$

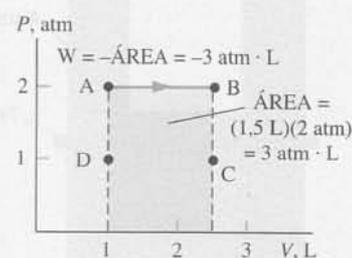
$$W_{\text{total}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \\ = (-304 \text{ J}) + 0 + 152 \text{ J} + 0 \\ = \boxed{-152 \text{ J}}$$

$$\Delta U = 0$$

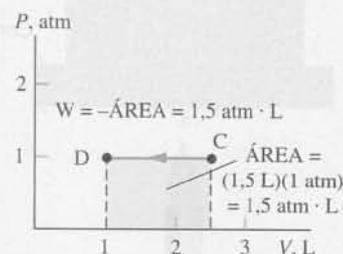
$$\Delta U = Q + W$$

de donde

$$Q = \Delta U - W = 0 - (-152 \text{ J}) \\ = \boxed{152 \text{ J}}$$



(a)



(b)

**Figura 18.10** (a) El trabajo realizado sobre el gas durante la expansión de A a B es igual al área bajo la recta cambiada de signo. (b) El trabajo realizado sobre el gas durante la compresión de C a D es igual al área bajo la recta.

**Observaciones** El trabajo realizado por el gas es igual al realizado sobre el gas cambiado de signo, de modo que el trabajo total realizado por el gas durante el ciclo es +152 J. A lo largo del ciclo el gas extrae 152 J en forma de calor del medio y suministra a éste 152 J en forma de trabajo. Este proceso deja al gas en su estado inicial. El trabajo total realizado por el gas viene representado por el área encerrada por el ciclo en la figura 18.9. Estos procesos cíclicos tienen importantes aplicaciones en las máquinas térmicas, como veremos en el capítulo 20.

## 18.6 Capacidades caloríficas de los gases

La determinación de la capacidad calorífica de una sustancia proporciona información sobre su energía interna, que está relacionada con su estructura molecular. En el caso de todas las sustancias que se dilatan al calentarse, la capacidad calorífica a presión constante  $C_p$  es mayor que la capacidad calorífica a volumen constante  $C_v$ . Si se suministra calor a presión constante, la sustancia se expande y efectúa trabajo positivo sobre el medio (figura 18.11). Por lo tanto, se necesita más calor para obtener un cambio de temperatura dado a presión constante que para obtener el mismo cambio de temperatura calentando a volumen constante. La expansión es normalmente despreciable en el caso de los sólidos y los líquidos, de modo que para ellos  $C_p \approx C_v$ . Sin embargo, cuando un gas se calienta a presión constante, se dilata fácilmente y realiza un trabajo importante, de modo que  $C_p - C_v$  no es despreciable.

Cuando se añade calor a un gas a volumen constante, éste no realiza trabajo (figura 18.12), de modo que el calor añadido es igual al incremento de energía interna del gas. Llamando  $Q_v$  al calor suministrado a volumen constante, se tiene

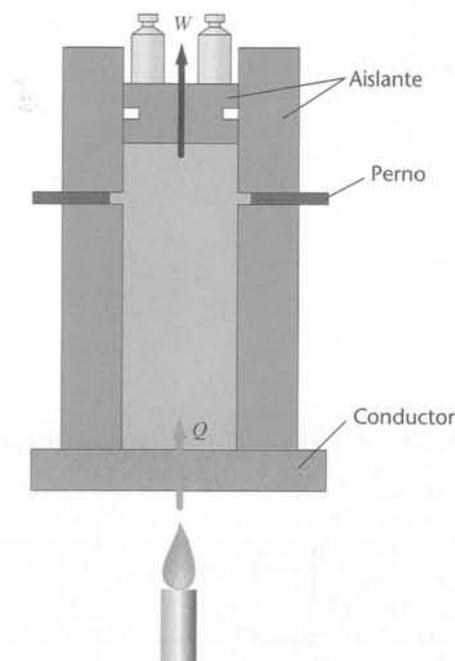
$$Q_v = C_v \Delta T$$

Como  $W = 0$ , tenemos según el primer principio de la termodinámica

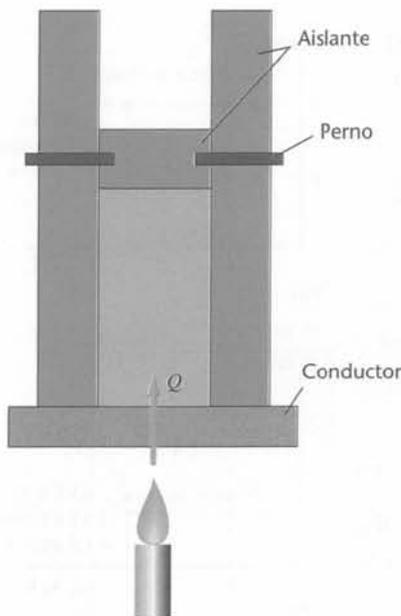
$$\Delta U = Q_v + W = Q_v$$

Por lo tanto,

$$\Delta U = C_v \Delta T$$



**Figura 18.11** El calor se suministra a presión constante. El gas se expande y realiza trabajo positivo sobre el pistón.



**Figura 18.12** El calor se suministra a volumen constante, de modo que no se realiza trabajo y todo el calor se convierte en energía interna del gas. El pistón se mantiene en su posición mediante unos pernos.

Tomando el límite cuando  $\Delta T$  tiende a cero, obtenemos

$$dU = C_v dT \quad (18.18a)$$

y

$$C_v = \frac{dU}{dT} \quad (18.18b)$$

Así pues, la capacidad calorífica a volumen constante es la tasa de variación de la energía interna con la temperatura. Como  $U$  y  $T$  son funciones de estado, las ecuaciones 18.18a y 18.18b son válidas para cualquier proceso.

Calcularemos ahora la diferencia  $C_p - C_v$  para un gas ideal. Si designamos con  $Q_p$  al calor añadido a presión constante, tendremos a partir de la definición de  $C_p$

$$Q_p = C_p \Delta T$$

Según el primer principio de la termodinámica

$$\Delta U = Q_p + W_{\text{sobre}} = Q_p - P \Delta V$$

Por consiguiente,

$$\Delta U = C_p \Delta T - P \Delta V \quad \text{o} \quad C_p \Delta T = \Delta U + P \Delta V$$

En el caso de cambios infinitesimales, esta expresión se reduce a

$$C_p dT = dU + P dV$$

Utilizando la ecuación 18.18a para  $dU$ , se obtiene

$$C_p dT = C_v dT + P dV \quad (18.19)$$

La presión, el volumen y la temperatura de un gas ideal están relacionados por

$$PV = nRT$$

Diferenciando ambos miembros de la ley de los gases ideales, se tiene

$$P dV + V dP = P dV = nR dT$$

Para un proceso a presión constante  $dP = 0$ , de donde

$$P dV = nR dT$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 18.19 se obtiene

$$C_p dT = C_v dT + nR dT = (C_v + nR)dT$$

Por lo tanto

$$C_p = C_v + nR \quad (18.20)$$

En el caso de un gas ideal, la capacidad calorífica a presión constante es mayor que a volumen constante en una cantidad  $nR$ .

En la tabla 18.3 se proporcionan las capacidades molares medidas  $c'_p$  y  $c'_v$  para varios gases. Se observa en la misma que la predicción para el gas ideal de que  $c'_p - c'_v = R$  se cumple bastante bien para todos los gases. Obsérvese también que  $c'_v$  es aproximadamente  $1,5R$  para todos los gases monoatómicos,  $2,5R$  para todos los diatómicos y mayor que  $2,5R$  para los gases cuyas moléculas son más complejas. Podemos comprender estos resultados

TABLA 18.3 Capacidades caloríficas molares (J/mol·K) de varios gases a 25°C

Gas	$c'_p$	$c'_v$	$c'_v/R$	$c'_p - c'_v$	$(c'_p - c'_v)/R$
<i>Monoatómico</i>					
He	20,79	12,52	1,51	8,27	0,99
Ne	20,79	12,68	1,52	8,11	0,98
Ar	20,79	12,45	1,50	8,34	1,00
Kr	20,79	12,45	1,50	8,34	1,00
Xe	20,79	12,52	1,51	8,27	0,99
<i>Diatómico</i>					
N <sub>2</sub>	29,12	20,80	2,50	8,32	1,00
H <sub>2</sub>	28,82	20,44	2,46	8,38	1,01
O <sub>2</sub>	29,37	20,98	2,52	8,39	1,01
CO	29,04	20,74	2,49	8,30	1,00
<i>Poliatómico</i>					
CO <sub>2</sub>	36,62	28,17	3,39	8,45	1,02
N <sub>2</sub> O	36,90	28,39	3,41	8,51	1,02
H <sub>2</sub> S	36,12	27,36	3,29	8,76	1,05

considerando el modelo molecular de un gas estudiado en el capítulo 17. En ella vimos que la energía cinética de traslación total de  $n$  moles de un gas es  $E_c = \frac{3}{2}nRT$  (ecuación 17.22). Así pues, si la energía interna de un gas está constituida únicamente por energía cinética de traslación, se tiene

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad (18.21)$$

Las capacidades caloríficas son entonces

$$C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}nR \quad (18.22)$$

$C_v$  PARA UN GAS IDEAL MONOATÓMICO

y

$$C_p = C_v + nR = \frac{5}{2}nR \quad (18.23)$$

$C_p$  PARA UN GAS IDEAL MONOATÓMICO

Podemos ver que los resultados experimentales de la tabla 18.3 concuerdan bien con estas predicciones en el caso de los gases monoatómicos, pero para los demás gases, las capacidades caloríficas son mayores que las predichas por las ecuaciones 18.22 y 18.23. La energía interna de un gas compuesto por moléculas diatómicas o aún más complicadas es evidentemente mayor que  $\frac{3}{2}nRT$ . La razón está en que estas moléculas pueden tener otros tipos de energía, como la de rotación o vibración, además de la energía cinética de traslación.

### EJEMPLO 18.8 | Calentamiento, enfriamiento y compresión de un gas ideal

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un sistema formado por 0,32 moles de un gas ideal monoatómico con  $c'_v = \frac{3}{2}RT$  ocupa un volumen de 2,2 L a una presión de 2,4 atm (punto A de la figura 18.13). El sistema describe un ciclo formado por tres procesos:

1. El gas se calienta a presión constante hasta que su volumen es 4,4 L en el punto B.
2. El gas se enfría a volumen constante hasta que la presión disminuye a 1,2 atm (punto C).
3. El gas experimenta una compresión isoterma y vuelve al punto A.

(a) ¿Cuál es la temperatura en los puntos A, B y C? (b) Determinar  $W$ ,  $Q$  y  $\Delta U$  para cada proceso y para el ciclo completo.

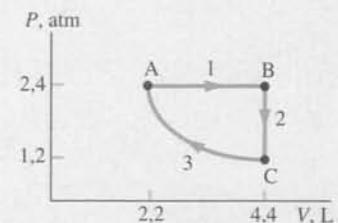


Figura 18.13

**Planteamiento del problema** A partir de la ley de los gases ideales se pueden determinar las temperaturas de todos los puntos A, B y C. El trabajo correspondiente a cada proceso puede determinarse a partir del área bajo la curva representativa. El calor intercambiado en cada proceso se obtiene de la capacidad calorífica dada y de las temperaturas inicial y final correspondientes. En el proceso 3,  $T$  es constante, de modo que  $\Delta U = 0$  y el calor absorbido más el trabajo realizado sobre el gas es igual a cero.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

### Pasos

- Determinar las temperaturas de los puntos A, B y C a partir de la ley de los gases ideales.
- En el proceso 1 utilizar  $W_1 = -P_A \Delta V$  para calcular el trabajo y  $C_p = \frac{5}{2}nR$  para calcular el calor  $Q_1$ . Después usar  $W_1$  y  $Q_1$  para calcular  $\Delta U_1$ .
- En el proceso 2 usar  $C_v = \frac{3}{2}nR$  y  $T_C - T_B$  a partir del paso (a) para determinar  $Q_2$ . Después, como  $W_2 = 0$ ,  $\Delta U = Q_2$ .
- Calcular  $W_3$  a partir de  $W = -nRT \ln(V_A/V_C)$  en la compresión isoterma. Entonces, como  $\Delta U_3 = 0$ ,  $Q_3 = -W_3$ .
- Determinar el trabajo total  $W$ , el calor total  $Q$  y la variación total de energía interna  $\Delta U$  sumando las magnitudes deducidas en los pasos 1, 2 y 3.

### Respuestas

$$T_A = T_C = \boxed{201 \text{ K}}, \quad T_B = \boxed{402 \text{ K}}$$

$$W_1 = 5,28 \text{ atm} \cdot \text{l} = \boxed{-535 \text{ J}}, \quad Q_1 = \boxed{1337 \text{ J}}$$

$$\Delta U_1 = Q_1 + W_1 = \boxed{802 \text{ J}}$$

$$W_2 = \boxed{0}, \quad Q_2 = \boxed{-802 \text{ J}}, \quad \Delta U_2 = \boxed{-802 \text{ J}}$$

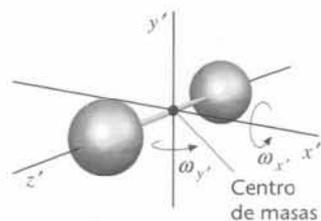
$$W_3 = \boxed{371 \text{ J}}, \quad Q_3 = \boxed{-371 \text{ J}}, \quad \Delta U_3 = \boxed{0}$$

$$W_{\text{total}} = W_1 + W_2 + W_3 = (-535 \text{ J}) + 0 + 371 \text{ J} = \boxed{-164 \text{ J}}$$

$$Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1337 \text{ J} + (-802 \text{ J}) + (-371 \text{ J}) = \boxed{164 \text{ J}}$$

$$\Delta U_{\text{total}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 = 802 \text{ J} + (-802 \text{ J}) + 0 = \boxed{0}$$

**Observaciones** La variación total de energía interna es cero por tratarse de un proceso cíclico. El trabajo total realizado sobre el gas más el calor total absorbido por el gas es igual a cero. Este trabajo es igual al área bajo la curva CA menos el área bajo la recta AB, es decir, el área encerrada por las tres líneas de la figura 18.13 cambiada de signo.



**Figura 18.14** Modelo "pesa de gimnasia" rígida de una molécula diatómica.

## Capacidades caloríficas y teorema de equipartición

De acuerdo con el teorema de equipartición establecido en la sección 5 del capítulo 17, la energía interna de  $n$  moles de un gas debería ser igual a  $\frac{1}{2}nRT$  por cada grado de libertad de la molécula del gas. La capacidad calorífica a volumen constante de un gas sería  $\frac{1}{2}nR$  multiplicado por el número de grados de libertad de la molécula. De acuerdo con la tabla 18.2, el nitrógeno, el oxígeno, el hidrógeno y el monóxido de carbono tienen todas capacidades caloríficas molares a volumen constante de  $\frac{5}{2}R$  aproximadamente. Por lo tanto, las moléculas de cada uno de estos gases tienen cinco grados de libertad. Por el año 1880, Clausius especulaba que estos gases debían estar formados de moléculas diatómicas que pueden rotar alrededor de dos ejes, lo que les da dos grados de libertad adicionales (figura 18.14). Se sabe ahora que los dos grados de libertad que se añaden a los tres de traslación, están asociados con su rotación alrededor de los dos ejes  $x'$  e  $y'$  perpendiculares a la línea que une los dos átomos. Por consiguiente, la energía cinética de una molécula diatómica es

$$E_c = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y \omega_y^2$$

La energía interna total de  $n$  moles de estos gases es, por lo tanto,

$$U = 5 \times \frac{1}{2}nRT = \frac{5}{2}nRT \quad (18.24)$$

y la capacidad calorífica a volumen constante es

$$C_v = \frac{5}{2}nR \quad (18.25)$$

Aparentemente, los gases diatómicos no rotan alrededor de la línea que une los dos átomos. Si lo hicieran, tendrían seis grados de libertad y  $C_v$  sería  $\frac{6}{2}nR = 3nR$ , en contra de los resultados experimentales. Por otra parte, los gases monoatómicos carecen de movimientos de rotación. En la sección 18.8 veremos cómo estos hechos enigmáticos pueden explicarse fácilmente cuando se tiene en cuenta la cuantización de la energía.

**EJEMPLO 18.9** | Calentamiento de un gas ideal diatómico

Dos moles de gas oxígeno se calientan desde una temperatura de  $20\text{ }^\circ\text{C}$  y una presión de  $1\text{ atm}$  a una temperatura de  $100\text{ }^\circ\text{C}$ . Suponer que el oxígeno es un gas ideal. (a) ¿Cuánto calor debe suministrarse si el volumen se mantiene constante durante el calentamiento? (b) ¿Cuánto calor debe suministrarse si la presión permanece constante? ¿Cuánto trabajo realiza el gas en el apartado (b)?

**Planteamiento del problema** El calor necesario para el calentamiento a volumen constante es  $Q_v = C_v \Delta T$ , en donde  $C_v = \frac{5}{2}nR$ , ya que el oxígeno es un gas diatómico. Para el calentamiento a presión constante,  $Q_p = C_p \Delta T$ , en donde  $C_p = C_v + nR$ . Finalmente, el trabajo realizado por el gas es igual (cambio de signo) al realizado sobre el gas, el cual puede obtenerse a partir de  $\Delta U = Q + W_{\text{sobre}}$ . Asimismo,  $W_{\text{por}} = P \Delta V$ .

(a) 1. Expresar el calor necesario para el proceso a volumen constante en función de  $C_v$  y  $\Delta T$ :

$$Q_v = C_v \Delta T$$

2. Calcular el calor para  $\Delta T = 80\text{ }^\circ\text{C} = 80\text{ K}$ :

$$\begin{aligned} Q_v &= C_v \Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T \\ &= \frac{5}{2}(2\text{ mol})\left(8,314\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}\right)(80\text{ K}) \\ &= \boxed{3,33\text{ kJ}} \end{aligned}$$

(b) 1. Expresar el calor necesario para el proceso a presión constante en función de  $C_p$  y  $\Delta T$ :

$$Q_p = C_p \Delta T$$

2. Calcular la capacidad calorífica a presión constante:

$$C_p = C_v + nR = \frac{5}{2}nR + nR = \frac{7}{2}nR$$

3. Calcular el calor suministrado a presión constante para  $\Delta T = 80\text{ K}$ :

$$\begin{aligned} Q_p &= C_p \Delta T \\ &= \frac{7}{2}(2\text{ mol})\left(8,314\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}\right)(80\text{ K}) \\ &= \boxed{4,66\text{ kJ}} \end{aligned}$$

(c) 1. El trabajo  $W$  realizado sobre el gas puede determinarse a partir del primer principio de la termodinámica:

$$\Delta U = Q + W, \text{ de modo que } W = \Delta U - Q$$

2. La variación de energía interna es igual al calor suministrado a volumen constante en (a):

$$\Delta U = Q_v = C_v \Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T$$

y

$$Q_p = C_p \Delta T = \frac{7}{2}nR\Delta T$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} W &= \Delta U - Q_p = \frac{5}{2}nR\Delta T - \frac{7}{2}nR\Delta T = -nR\Delta T \\ &= -(2\text{ mol})\left(8,314\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}\right)(80\text{ K}) = -1,33\text{ kJ} \end{aligned}$$

3. El trabajo realizado a presión constante es, por lo tanto:

$$W_{\text{por}} = -W_{\text{sobre}} = \boxed{1,33\text{ kJ}}$$

**Observaciones** La variación de energía interna es la misma independientemente del proceso. Sólo depende de los estados inicial y final.

**Ejercicio** Determinar los volúmenes inicial y final de este gas a partir de la ley de los gases ideales y utilizarlos para calcular el trabajo realizado por el gas a partir de  $W_{\text{por}} = P \Delta V$  cuando el calor se añade a presión constante. (Respuestas  $V_i = 48,0\text{ L}$ ,  $V_f = 61,1\text{ L}$ ,  $W = 13,1\text{ atm}\cdot\text{L} = 1,33\text{ kJ}$ .)



Figura 18.17 Moléculas de un gas ideal diatómico.

El diagrama muestra un grupo de moléculas de gas ideal diatómico. Cada molécula está formada por dos átomos (representados por esferas) unidos por una línea que representa el enlace químico. Las moléculas están distribuidas aleatoriamente en un espacio tridimensional, lo que es característico de un gas ideal.

Este tipo de diagrama se utiliza para visualizar el comportamiento de los gases ideales, donde las moléculas se consideran partículas puntuales que interactúan entre sí únicamente a través de choques perfectamente elásticos.

En el contexto del ejemplo, estas moléculas representan el oxígeno que se está calentando. El hecho de que sean diatómicas es relevante porque afecta a su capacidad calorífica, ya que poseen más grados de libertad que los gases monoatómicos.

La distribución espacial de las moléculas ilustra el concepto de volumen constante en el primer apartado del ejemplo, donde el espacio que ocupan las moléculas no cambia durante el proceso de calentamiento.

Al observar el diagrama, se puede apreciar cómo las moléculas están más próximas unas a otras que en un gas a menor temperatura, lo que sugiere un aumento de la energía cinética promedio por molécula al calentarse.

Este diagrama también ayuda a comprender el trabajo realizado por el gas en el apartado (b). Cuando el gas se calienta a presión constante, su volumen aumenta, lo que implica que las moléculas se expanden y realizan trabajo sobre el entorno.

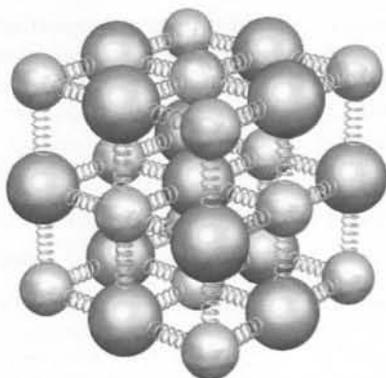
Finalmente, el diagrama refuerza la idea de que, aunque las moléculas interactúan entre sí, en un gas ideal estas interacciones no afectan a las propiedades macroscópicas del gas, como la presión o el volumen.

Este tipo de representaciones visuales son fundamentales para conectar los conceptos microscópicos de la física molecular con las leyes macroscópicas de la termodinámica.

**18.7 Capacidades caloríficas de los sólidos**

En la sección 18.1 señalábamos que todos los metales que aparecen en la tabla 18.1 tienen aproximadamente iguales sus calores molares. Experimentalmente se encuentra que la mayoría de los sólidos tienen capacidades caloríficas molares aproximadamente iguales a  $3R$ :

$$c' = 3R = 24,9\text{ J/mol}\cdot\text{K} \quad (18.26)$$



**Figura 18.15** Modelo de un sólido en el que los átomos están conectados entre sí mediante muelles. La energía interna del sólido se compone de las energías de vibración cinética y potencial.

Este resultado se conoce como **ley de Dulong-Petit**. Puede comprenderse esta ley si aplicamos el teorema de equipartición al modelo sencillo de sólido indicado en la figura 18.15. De acuerdo con este modelo, un sólido consiste en una ordenación regular de átomos, cada uno de los cuales tiene una posición fija de equilibrio y está conectado mediante muelles a sus vecinos. Todos los átomos pueden vibrar en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ . La energía total de un átomo en un sólido es, pues,

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}k_{\text{ef}}x^2 + \frac{1}{2}k_{\text{ef}}y^2 + \frac{1}{2}k_{\text{ef}}z^2$$

en donde  $k_{\text{ef}}$  es la constante de fuerza efectiva de los hipotéticos muelles. Cada átomo tiene así seis grados de libertad. El teorema de equipartición establece que una sustancia en equilibrio tiene una energía media por mol de  $\frac{1}{2}RT$  por cada grado de libertad. Así, la energía interna de 1 mol de un sólido es

$$U = 6 \times \frac{1}{2}RT = 3RT \quad (18.27)$$

lo cual significa que la capacidad calorífica molar  $c'$  es  $3R$ .

### EJEMPLO 18.10 | Uso de la ley de Dulong-Petit

La masa molar del cobre es 63,5 g/mol. Utilizar la ley de Dulong-Petit para calcular el calor específico del cobre.

**Planteamiento del problema** La ley de Dulong-Petit nos permite determinar el calor molar de un sólido,  $c'$ . El calor específico es  $c = c'/M$  (ecuación 18.6), en donde  $M$  es la masa molar.

1. La ley de Dulong-Petit nos da  $c'$ :

$$c' = 3R$$

2. Como  $M = 63,5$  g/mol para el cobre, el calor específico es:

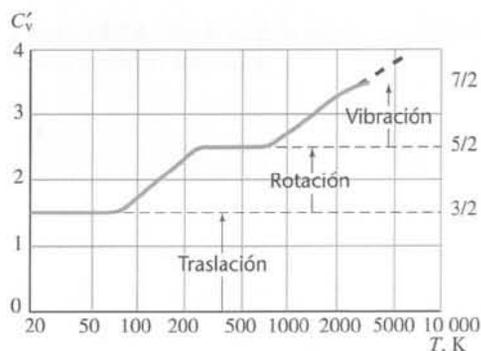
$$c = \frac{c'}{M} = \frac{3R}{M} = \frac{3(8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K})}{63,5 \text{ g/mol}} = 0,392 \text{ J/(g} \cdot \text{K)} = \boxed{0,392 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}}$$

**Observaciones** Esta solución difiere del valor medido experimentalmente, 0,386 kJ/kg · K, dado en la tabla 18.1, en menos del 2%.

**Ejercicio** El calor específico de cierto metal, medido experimentalmente, resulta ser 1,02 kJ/kg · K. (a) Calcular la masa molar de este metal, suponiendo que cumple la ley de Dulong-Petit. (b) ¿De qué metal se trata? (Respuestas (a)  $M = 24,4$  g/mol. (b) El metal debe ser magnesio, cuya masa molar es 24,31 g/mol.)

## 18.8 Fallos del teorema de equipartición

Si bien el teorema de equipartición alcanzó éxitos espectaculares en la interpretación de los calores molares de gases y sólidos, tuvo igualmente fallos espectaculares. Por ejemplo, si una molécula de un gas diatómico como la de la figura 18.14 gira alrededor de la línea que une los átomos, deberá haber un grado de libertad adicional. Análogamente, si una molécula diatómica no es rígida, los dos átomos deberán vibrar a lo largo de la línea que los une. Entonces deberíamos tener dos grados de libertad más, correspondientes a las energías cinética y potencial de vibración. De acuerdo con los valores medidos de las capacidades caloríficas molares de la tabla 18.3, los gases diatómicos, sin embargo, aparentemente ni giran alrededor de la línea que une los átomos, ni vibran. El teorema de equipartición no da ninguna explicación para esto, ni para el hecho de que las moléculas monoatómicas aparentemente no giren alrededor de ninguno de los tres ejes posibles de rotación mutuamente perpendiculares. Además, el teorema de equipartición predice valores constantes para las capacidades caloríficas de los gases, pero cuando se hacen medidas cuidadosas se ve que estas magnitudes dependen ligeramente de la temperatura, lo cual es contrario a las predicciones del teorema de equipartición. El caso más espectacular de la dependencia de la capacidad calorífica con la temperatura es el del  $\text{H}_2$ , que se muestra en la figura 18.16. A



**Figura 18.16** Dependencia con la temperatura del calor molar del  $\text{H}_2$ . (La curva es cualitativa en los lugares donde  $c'_v$  varía).

temperaturas inferiores a 70 K, el valor de  $c'_v$  para el  $H_2$  es  $\frac{3}{2}R$ , el mismo que el correspondiente a moléculas de gas que tienen movimiento de translación, pero no de rotación o vibración. A temperaturas entre 250 K y 700 K,  $c'_v = \frac{5}{2}R$ , que corresponde a moléculas con movimiento de rotación, pero no de vibración, y a temperaturas mayores que 700 K, las moléculas de  $H_2$  empiezan a vibrar. Sin embargo, las moléculas se disocian antes de que  $c'_v$  alcance el valor  $\frac{7}{2}R$ . Por último, el teorema de equipartición de la energía predice un valor constante de  $3R$  para la capacidad calorífica de los sólidos. Este resultado es válido para la mayoría de los sólidos a altas temperaturas, aunque no para todos, y deja de ser válido a temperaturas muy bajas.

El teorema de equipartición falla porque la energía está **cuantizada**. Una molécula puede tener sólo ciertos valores de energía interna, como ilustra esquemáticamente el diagrama de niveles de energía de la figura 18.17. La molécula puede ganar o perder energía sólo si la ganancia o pérdida le conduce a otro nivel permitido. Por ejemplo, en un gas la energía que puede transferirse por choques moleculares es del orden de  $kT$ , la energía térmica típica de una molécula. La validez del teorema de equipartición depende del tamaño relativo de  $kT$  y del espaciado de los niveles de energía permitidos.

Si el espaciado de los niveles de energía permitidos es grande comparado con  $kT$ , la energía no puede transferirse por choques y el teorema de equipartición clásico no es válido. Si el espaciado de los niveles es mucho menor que  $kT$ , la cuantización de la energía no se observa y el teorema de equipartición se cumplirá.

#### CONDICIONES PARA LA VALIDEZ DEL PRINCIPIO DE EQUIPARTICIÓN

Consideremos la rotación de una molécula. La energía de rotación es

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I} \quad (18.28)$$

en donde  $I$  es el momento de inercia de la molécula,  $\omega$  su velocidad angular y  $L = I\omega$  su momento angular. En la sección 10.4 vimos que el momento angular está cuantizado y su valor restringido a

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (18.29)$$

en donde  $\hbar = h/(2\pi)$  y  $h$  es la constante de Planck. La energía de una molécula en rotación está, por lo tanto, cuantizada según los valores

$$E = \frac{L^2}{2I} = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I} = \ell(\ell+1)E_{0r} \quad (18.30)$$

en donde

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} \quad (18.31)$$

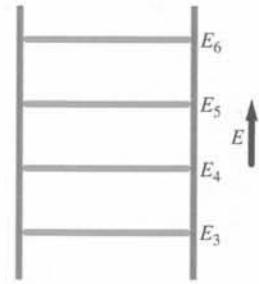
es una característica del espaciado de energía entre los niveles. Si esta energía es mucho menor que  $kT$ , la física clásica y el teorema de equipartición deberán cumplirse. Definimos una temperatura crítica,  $T_c$  mediante la expresión

$$kT_c = E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} \quad (18.32)$$

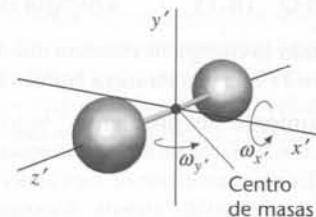
Si  $T$  es mucho mayor que esta temperatura crítica,  $kT$  será mucho mayor que el espaciado de los niveles de energía, el cual es del orden de  $kT_c$ , y se cumplirán la física clásica y el teorema de equipartición. Para valores de  $T$  inferiores o del orden de  $T_c$ ,  $kT$  no será mucho mayor que el espaciado de los niveles de energía y la física clásica y el teorema de equipartición dejan de ser válidos. Hagamos una estimación de  $T_c$  para algunos casos de interés.

1. *Rotación del  $H_2$  alrededor de un eje perpendicular a la línea que une los átomos de H y pasa por su centro de masas (figura 18.18):* El momento de inercia del  $H_2$  alrededor del eje es

$$I_H = 2M_H \left(\frac{r_s}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} M_H r_s^2$$



**Figura 18.17** Diagrama de niveles de energía. Un sistema sólo puede tener ciertas energías discretas.



**Figura 18.18** Modelo "pesa de gimnasia" rígida de una molécula de un gas diatómico.

en donde  $M_H$  es la masa de un átomo de H, y  $r_s$  es la distancia de separación de los dos átomos. Para el hidrógeno,  $M_H = 1,67 \times 10^{-27}$  kg, y  $r_s = 8 \times 10^{-11}$  m. La temperatura crítica es, por lo tanto,

$$T_c = \frac{\hbar^2}{2kI_H} = \frac{\hbar^2}{kM_H r_s^2} = \frac{(1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{(1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(8 \times 10^{-11} \text{ m})^2} \approx 75 \text{ K}$$

Como puede verse en la figura 18.16, ésta es aproximadamente la temperatura por debajo de la cual la energía de rotación no contribuye a la capacidad calorífica.

- $O_2$ : Como la masa del  $O_2$  es aproximadamente 16 veces la del  $H_2$ , y la separación atómica es aproximadamente la misma, la temperatura crítica del  $O_2$  deberá ser aproximadamente  $(75/16) \approx 4,6$  K. Para todas las temperaturas a las que el  $O_2$  existe en forma gaseosa,  $T \gg T_c$ , de modo que  $kT$  es mucho mayor que el espaciado de niveles energéticos y es lógico que se cumpla el teorema de equipartición de la física clásica.
- Rotación de un gas monoatómico.* Consideremos el átomo de He, que está formado por el núcleo de He y dos electrones. La masa del electrón es aproximadamente 8000 veces menor que la del núcleo de He. Sin embargo, el radio del núcleo es aproximadamente 100 000 veces menor que la distancia al electrón. Así, el momento de inercia del átomo es casi enteramente debido a sus electrones. La distancia del núcleo a los dos electrones en el He es aproximadamente la mitad que la distancia de separación de los átomos de H en el  $H_2$ , y la masa del electrón es aproximadamente 2000 veces menor que la del núcleo de H. Así, utilizando  $m_e = M_H/2000$  y  $r = r_s/2$ , el momento de inercia de los dos electrones del He es aproximadamente

$$I_{He} = 2m_e r^2 \approx 2 \left( \frac{M_H}{2000} \right) \left( \frac{r_s}{2} \right)^2 = \frac{I_H}{2000}$$

La temperatura crítica del He será, por lo tanto, 2000 veces la del  $H_2$ , o sea, del orden de 150 000 K. Este valor es muy superior al de la temperatura de disociación (la temperatura a la cual los electrones se separan de sus núcleos) del helio. Así, el espaciado entre los niveles energéticos permitidos es siempre mayor que  $kT$  y las moléculas de He no pueden ser inducidas a girar por colisiones ocurridas en el gas. Otros gases monoatómicos poseen momentos de inercia ligeramente mayores por su mayor número de electrones, pero sus temperaturas críticas son todavía del orden de decenas de miles de kelvins y por lo tanto sus moléculas tampoco pueden adquirir movimientos de rotación por colisiones en el gas.

- Rotación de un gas diatómico alrededor del eje que une sus átomos:* De acuerdo con nuestra exposición sobre gases monoatómicos, el momento de inercia para el gas diatómico será también debido principalmente a los electrones y, por lo tanto, del mismo orden de magnitud que el de un gas monoatómico. De nuevo, la temperatura crítica  $T_c$  calculada para decidir si esta rotación ocurre por causa de las colisiones entre moléculas del gas, excede la temperatura de disociación del gas, haciendo imposible la rotación en esas circunstancias.

Es interesante señalar que los éxitos del teorema de equipartición al explicar las capacidades caloríficas experimentales de los sólidos y de los gases condujeron, por primera vez, a entender realmente la estructura molecular en el siglo diecinueve, mientras que sus fallos jugaron un papel importante en el desarrollo de la mecánica cuántica en el siglo veinte.

### EJEMPLO 18.11 | Energía de rotación del átomo de hidrógeno

(a) Estimar la energía de rotación más baja (distinta de cero) del átomo de hidrógeno y compararla con  $kT$  a la temperatura ambiente,  $T = 300$  K. (b) Calcular la temperatura crítica  $T_c$ .

**Planteamiento del problema** Según la ecuación 18.30, la energía de rotación más baja corresponde a  $\ell = 1$ . Hacemos uso de esa ecuación para determinar la energía en función del momento de inercia. Como el momento de inercia del núcleo puede despreciarse (pues su radio es 100 000 veces menor que el radio del átomo), el momento de inercia del átomo es esencialmente el momento de inercia del electrón alrededor del núcleo. Por lo tanto,  $I = m_e r^2$ , en donde  $r = 5 \times 10^{-11}$  m es la distancia del núcleo al electrón.

(a) 1. La energía más baja superior a cero corresponde a  $\ell = 1$ :

$$E_\ell = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

de aquí que

$$E_1 = \frac{1(1+1)\hbar^2}{2m_e r^2} = \frac{\hbar^2}{m_e r^2}$$

2. Los valores numéricos son:

$$\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$r = 5 \times 10^{-11} \text{ m}$$

3. Reemplazar por los valores numéricos:

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} = \frac{(1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(5 \times 10^{-11} \text{ m})^2} = \boxed{4,8 \times 10^{-18} \text{ J}}$$

4. El valor de  $kT$  para  $T = 300 \text{ K}$  es:

$$kT = (1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K}) = 4,1 \times 10^{-21} \text{ J}$$

5. Comparar  $E_1$  con  $kT$ :

$$\frac{E_1}{kT} = \frac{4,8 \times 10^{-18} \text{ J}}{4,1 \times 10^{-21} \text{ J}} \approx 10^3$$

$E_1$  es aproximadamente tres órdenes de magnitud mayor que  $kT$ .

(b) Hacer  $kT_c = E_1$  y despejar  $T_c$ :

$$kT_c = E_1$$

$$T_c = \frac{E_1}{k} = \frac{4,8 \times 10^{-18} \text{ J}}{1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}} = \boxed{3,48 \times 10^5 \text{ K}}$$

**Observaciones** La temperatura crítica de un átomo de hidrógeno es tan elevada que el átomo se ionizaría antes de alcanzar el valor crítico.

## 18.9 Compresión adiabática cuasiestática de un gas

Todo proceso en el que no existe flujo de calor ni entrante ni saliente del sistema se denomina **proceso adiabático**. Un proceso de este tipo puede darse cuando el sistema está muy bien aislado, o cuando el proceso ocurre muy rápidamente. En esta sección consideraremos la expansión adiabática cuasiestática de un gas, durante la cual el gas, contenido en un recipiente térmicamente aislado, se comprime lentamente mediante un pistón, el cual realiza trabajo sobre el gas. Como ni entra ni sale calor del gas, el trabajo realizado sobre el mismo es igual a su aumento de energía interna, y la temperatura del gas aumenta. En la figura 18.19 se indica la curva que representa este proceso en un diagrama  $PV$ .

Podemos hallar la ecuación correspondiente a la curva adiabática de un gas ideal utilizando la ecuación de estado ( $PV = nRT$ ) y el primer principio de la termodinámica ( $dU = dQ + dW$ ). Se tiene

$$C_v dT = 0 + (-P dV) \quad (18.33)$$

en donde se ha hecho uso de  $dU = C_v dt$  (ecuación 18.18a),  $dQ = 0$  (el proceso es adiabático) y  $dW = -P dV$  (ecuación 18.15 para el trabajo realizado sobre el gas). Por lo tanto, si se sustituye  $P = nRT/V$ , se obtiene

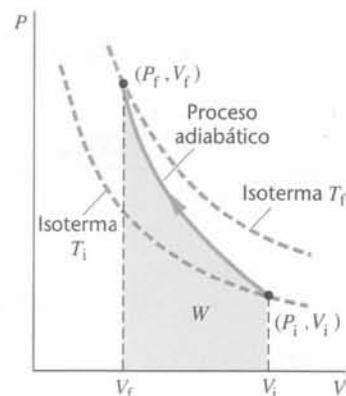
$$C_v dT = -nRT \frac{dV}{V}$$

y, tras reordenar, se expresa

$$\frac{dT}{T} + \frac{nR}{C_v} \frac{dV}{V} = 0$$

Si se integra, se llega a

$$\ln T + \frac{nR}{C_v} \ln V = \text{constante}$$



**Figura 18.19** Compresión adiabática cuasiestática de un gas ideal. Las líneas a trazos son las isotermas correspondientes a las temperaturas inicial y final. La curva que conecta los estados inicial y final de la compresión adiabática tiene una pendiente mayor que las isotermas debido a que la temperatura aumenta durante la compresión.



Se forman nubes cuando al elevarse el aire húmedo se enfría debido a la expansión adiabática del aire. El enfriamiento provoca vapor de agua que se condensa en gotitas líquidas.

Esta expresión puede simplificarse en la forma

$$\ln T + \frac{nR}{C_v} \ln V = \ln T + \ln V^{nR/C_v} = \ln TV^{nR/C_v} = \text{constante}$$

o bien

$$TV^{nR/C_v} = \text{constante} \quad (18.34)$$

en donde las constantes de las dos ecuaciones precedentes no son las mismas. La ecuación 18.34 puede escribirse de nuevo recordando que  $C_p - C_v = nR$  (ecuación 18.20):

$$\frac{nR}{C_v} = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} - 1 = \gamma - 1 \quad (18.35)$$

en donde  $\gamma$  es la razón de las capacidades caloríficas:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (18.36)$$

Por lo tanto,

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \quad (18.37)$$

Si se elimina  $T$  de la ecuación 18.37 por medio de  $PV = nRT$ , se tiene

$$\frac{PV}{nR} V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

o sea

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (18.38)$$

PROCESO ADIABÁTICO CUASISTÁTICO

La ecuación 18.38 relaciona las variables  $P$  y  $V$  para expansiones y compresiones adiabáticas.

**Ejercicio** Demostrar que para un proceso adiabático cuasistático  $T^\gamma/P^{\gamma-1} = \text{constante}$ .

El trabajo realizado sobre el gas en una compresión adiabática cuasistática puede calcularse a partir del primer principio de la termodinámica:

$$dU = dQ + dW \quad \text{o bien} \quad dW = dU - dQ$$

Como  $dU = C_v dT$  y  $dQ = 0$ , resulta

$$dW = C_v dT$$

Por lo tanto,

$$W_{\text{adiabático}} = \int dW = \int C_v dT = C_v \Delta T \quad (18.39)$$

TRABAJO ADIABÁTICO REALIZADO SOBRE UN GAS

en donde hemos supuesto que  $C_v$  es constante.<sup>1</sup> Obsérvese que el trabajo realizado sobre el gas depende únicamente de la variación de la temperatura absoluta del mismo. En una compresión adiabática cuasistática, se realiza trabajo sobre el gas y tanto su energía interna como su temperatura aumentan. En una *expansión* adiabática cuasistática, el trabajo es realizado *por* el gas, y disminuyen su temperatura y su energía interna.

<sup>1</sup> En el caso de un gas ideal,  $U$  es proporcional a la temperatura absoluta y, por lo tanto,  $C_v = dU/dT$  es una constante.

Podemos utilizar la ley de los gases ideales para escribir la ecuación 18.39 en función de los valores inicial y final de la presión y del volumen. Si la temperatura inicial es  $T_i$  y la final es  $T_f$ , tenemos para el trabajo realizado

$$W_{\text{adiabático}} = C_v \Delta T = C_v (T_f - T_i)$$

Utilizando  $PV = nRT$ , se tiene

$$W_{\text{adiabático}} = C_v \left( \frac{P_f V_f}{nR} - \frac{P_i V_i}{nR} \right) = \frac{C_v}{nR} (P_f V_f - P_i V_i)$$

y haciendo uso de la ecuación 18.35 para simplificar esta expresión, se tiene

$$W_{\text{adiabático}} = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1} \quad (18.40)$$

TRABAJO ADIABÁTICO REALIZADO SOBRE UN GAS

### EJEMPLO 18.12 | Compresión adiabática cuasiestática del aire

Una cantidad de aire se comprime adiabática y cuasiestáticamente desde una presión inicial de 1 atm y volumen de 4 L a la temperatura de 20 °C hasta la mitad de su volumen original. (a) ¿Cuál es la presión final? (b) ¿Cuál es la temperatura final? (c) ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el gas?

**Planteamiento del problema** Como el proceso es cuasiestático y adiabático, sabemos que  $PV^\gamma = \text{constante}$  y  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ . Estas relaciones permiten determinar la presión final y la temperatura final respectivamente. Hallar  $\gamma$  utilizando las ecuaciones 18.36, 18.20 y 18.25. El trabajo realizado se deduce de  $W_{\text{adiabático}} = C_v \Delta T$  (ecuación 18.39). Para un gas diatómico  $C_v = \frac{5}{2} nR$ . El subíndice 1 se refiere a los valores iniciales y el 2 a los valores finales. Tenemos  $P_1 = 1 \text{ atm}$ ,  $V_1 = 4 \text{ L}$ ,  $V_2 = 2 \text{ L}$  y  $T_1 = 20 \text{ °C} = 293 \text{ K}$ .

- (a) 1. Expresar  $PV^\gamma = \text{constante}$  en función de los valores iniciales y finales:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

2. Hallar  $\gamma$  para un gas diatómico a partir de las ecuaciones 18.36, 18.20 y 18.25:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + nR}{C_v} = 1 + \frac{nR}{C_v} = 1 + \frac{nR}{\frac{5}{2}nR} = 1,4$$

3. Despejar  $P_2$ :

$$P_2 = P_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = (1 \text{ atm}) \left( \frac{4 \text{ L}}{2 \text{ L}} \right)^{1,4} = \boxed{2,64 \text{ atm}}$$

- (b) 1. Expresar  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$  en función de los valores iniciales y finales:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

2. Despejar  $T_2$ :

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = (293 \text{ K}) \left( \frac{4 \text{ L}}{2 \text{ L}} \right)^{0,4} = 387 \text{ K} = \boxed{114 \text{ °C}}$$

- (c) 1. La ecuación 18.39 nos da el trabajo realizado:

$$W_{\text{adiabático}} = C_v \Delta T = \frac{5}{2} nR \Delta T$$

2. Utilizando la ley de los gases ideales para las condiciones iniciales, expresar  $nR$  en función de  $P_1$ ,  $V_1$  y  $T_1$ :

$$\begin{aligned} W_{\text{adiabático}} &= \frac{5}{2} nR \Delta T = \frac{5 P_1 V_1}{2 T_1} (T_2 - T_1) \\ &= \frac{5 (1 \text{ atm}) (4 \text{ L})}{2 \cdot 293 \text{ K}} (387 \text{ K} - 293 \text{ K}) \\ &= 3,20 \text{ atm} \cdot \text{L} = \boxed{324 \text{ J}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PV &= nRT \\ \frac{PV}{T} &= nR \end{aligned}$$

**Observaciones** El trabajo puede calcularse también mediante la ecuación 18.40, pero es preferible utilizar  $W_{\text{adiabático}} = C_v \Delta T$  porque está más directamente relacionada con el primer principio de la termodinámica, y es más fácil de recordar.

### Velocidad de las ondas sonoras

Podemos utilizar la ecuación 18.38 para calcular el módulo de compresibilidad adiabática de un gas ideal, que está relacionado con la velocidad de las ondas sonoras en el aire. Diferenciando los dos miembros de  $PV^\gamma = \text{constante}$  (ecuación 18.38) resulta:

$$P d(V^\gamma) + V^\gamma dP = 0$$

o sea,

$$P\gamma V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dP = 0$$

y, por lo tanto,

$$dP = -\frac{\gamma P dV}{V}$$

Recordando la ecuación 13.6, podemos definir el módulo de compresibilidad adiabático:<sup>1</sup>

$$B_{\text{adiabático}} = -\frac{dP}{dV/V} = \gamma P \quad (18.41)$$

La velocidad del sonido (ecuación 15.4) viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{B_{\text{adiabático}}}{\rho}}$$

en donde la densidad  $\rho$  está relacionada con el número de moles  $n$  y la masa molecular  $M$  por  $\rho = m/V = nM/V$ . Utilizando la ley de los gases ideales  $PV = nRT$  podemos eliminar  $V$  a partir de la densidad

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{nM}{nRT/P} = \frac{MP}{RT}$$

y, de acuerdo con la ecuación 18.41, resulta

$$v = \sqrt{\frac{B_{\text{adiabático}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{MP/(RT)}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

que es la ecuación 15.5 para la velocidad del sonido en un gas.

## Resumen

- 1 El primer principio de la termodinámica, que es un enunciado de la conservación de la energía, es una ley fundamental de la Física.
- 2 El teorema de equipartición es una ley fundamental de la Física Clásica. No se cumple cuando la energía térmica típica  $kT$  es pequeña comparada con el espaciado de los niveles de energía cuantizados.

### TEMA

#### 1. Calor Caloría

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

El calor es la energía que se transfiere de un objeto a otro debido a una diferencia de temperaturas.

La caloría, definida originalmente como el calor necesario para elevar la temperatura de 1 g de agua en 1° C, se define ahora como 4,184 julios.

<sup>1</sup> El módulo de compresibilidad es el cociente negativo entre el cambio de presión y la variación relativa de volumen,  $B = -\Delta P/(\Delta V/V)$  (capítulo 13). El módulo de compresibilidad isoterma, que describe los cambios que ocurren a  $T$  constante, difiere del módulo de compresibilidad adiabático, que describe los cambios sin transferencia de calor. Para las ondas sonoras a frecuencias audibles, los cambios son tan rápidos que pueden considerarse sin transferencias de calor. El módulo de compresibilidad apropiado es el adiabático.

**2. Capacidad calorífica**

La capacidad calorífica es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una sustancia en un grado.

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \quad (18.1)$$

A volumen constante

$$C_v = \frac{Q_v}{\Delta T}$$

A presión constante

$$C_p = \frac{Q_p}{\Delta T}$$

Calor específico (capacidad calorífica por unidad de masa)

$$c = \frac{C}{m} \quad (18.2)$$

Calor específico molar (capacidad calorífica por mol)

$$c' = \frac{C}{n} \quad (18.6)$$

Capacidad calorífica relacionada con la energía interna

$$C_v = \frac{dU}{dT} \quad (18.18a)$$

Gas ideal

$$C_p = C_v + nR \quad (18.20)$$

Gas ideal monoatómico

$$C_v = \frac{3}{2} nR \quad (18.22)$$

Gas ideal diatómico

$$C_v = \frac{5}{2} nR \quad (18.25)$$

**3. Fusión y vaporización**

Durante la fusión y la vaporización, la temperatura no se modifica.

Calor latente de fusión

El calor necesario para fundir una sustancia sólida es el producto de la masa de la sustancia por el calor latente de fusión  $L_f$ :

$$Q_f = mL_f \quad (18.8)$$

$L_f$  del agua

$$L_f = 333,5 \text{ kJ/kg}$$

Calor latente de vaporización

El calor necesario para vaporizar un líquido es el producto de su masa por su calor latente de vaporización  $L_v$ :

$$Q_v = mL_v \quad (18.9)$$

$L_v$  del agua

$$L_v = 2257 \text{ kJ/kg}$$

**4. Primer principio de la termodinámica**

La variación de la energía interna de un sistema es igual al calor suministrado al sistema más el trabajo realizado sobre el mismo:

$$\Delta U = Q + W \quad (18.10)$$

**5. Energía interna,  $U$** 

La energía interna de un sistema es una propiedad de estado del sistema, igual que lo son la presión, el volumen y la temperatura, pero no ocurre lo mismo con el trabajo ni con el calor.

Gas ideal

La energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura absoluta  $T$ .

Gas ideal monoatómico

$$U = \frac{3}{2} nRT \quad (18.12)$$

Energía interna y capacidad calorífica

$$dU = C_v dT \quad (18.18b)$$

**6. Proceso cuasiestático**

Un proceso cuasiestático es aquél que ocurre lentamente, de forma que el sistema recorre una serie de estados de equilibrio.

Isobárico

$$P = \text{constante}$$

Isotermo

$$T = \text{constante}$$

Adiabático

$$Q = 0$$

Adiabático, gas ideal

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \quad (18.37)$$

$$PV^{\gamma} = \text{constante} \quad (18.38)$$

en donde

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (19.35)$$

### 7. Trabajo realizado sobre un gas en un proceso cuasiestático

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P dV = C_v \Delta T - Q \quad (18.10, 18.15 \text{ y } 18.18)$$

A volumen constante

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P dV = 0 \quad V_f = V_i$$

Isobárico

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P dV = -P \int_{V_i}^{V_f} dV = -P \Delta V$$

Isotermo

$$W_{\text{isotermo}} = -\int_{V_i}^{V_f} P dV = -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_i}{V_f} \quad (18.17)$$

Adiabático

$$W_{\text{adiabático}} = C_v \Delta T \quad (18.39)$$

### 8. Teorema de equipartición

El teorema de equipartición establece que cuando un sistema está en equilibrio, existe una energía media de  $\frac{1}{2}kT$  por molécula o de  $\frac{1}{2}RT$  por mol asociada a cada grado de libertad.

Fallo del teorema de equipartición

El teorema de equipartición no se cumple cuando la energía térmica ( $-kT$ ) que puede transferirse en las colisiones es menor que el espaciado energético  $\Delta E$  entre los niveles de energía cuantizados. Por ejemplo, los gases monoatómicos no poseen movimiento de rotación porque el primer nivel de energía permitido no nulo es mucho mayor que  $kT$ .

### 9. Ley de Dulong-Petit

El calor molar de la mayor parte de los sólidos es  $3R$ . Esto se deduce del teorema de equipartición, suponiendo que un átomo de sólido posee seis grados de libertad.

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

**SSM** La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

**iSOLVE** Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

**iSOLVE** Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

Utilizar  $v = 340$  m/s para la velocidad del sonido en el aire a menos que se indique lo contrario.

### Problemas conceptuales

**1** ● Un cuerpo A posee una masa doble que la de otro cuerpo B y su calor específico es también el doble. Si a ambos se les suministra la misma cantidad de calor, ¿qué relación existe entre los cambios experimentados por sus respectivas temperaturas?

**2** ● **SSM** La variación de temperatura de dos bloques de masas  $M_A$  y  $M_B$  es la misma cuando absorben iguales cantidades de calor. La relación entre sus calores específicos será (a)  $c_A = (M_A/M_B)c_B$ , (b)  $c_A = (M_B/M_A)c_B$ , (c)  $c_A = c_B$ , (d) ninguna de las anteriores.

**3** ● El calor específico del aluminio es más del doble que el del cobre. En un calorímetro que contiene agua a  $40^\circ\text{C}$  se introducen masas idénticas de cobre y aluminio, ambas a  $20^\circ\text{C}$ . Cuando se alcanza el equilibrio térmico (a) el aluminio está a mayor temperatura que el cobre, (b) el aluminio ha absorbido

menos energía que el cobre, (c) el aluminio ha absorbido más energía que el cobre, (d) ambas afirmaciones (a) y (c) son correctas.

**4** ● El experimento de Joule, que establece el equivalente mecánico del calor, implica la conversión de energía mecánica en energía interna. Dar algunos ejemplos de la conversión de energía interna de un sistema en energía mecánica.

**5** ● **SSM** ¿Puede un sistema absorber calor sin modificar su energía interna?

**6** ● En la ecuación  $\Delta U = Q + W$  (enunciado formal del primer principio de la termodinámica), las magnitudes  $Q$  y  $W$  representan (a) el calor suministrado al sistema y el trabajo realizado por el sistema; (b) el calor suministrado al sistema y el trabajo realizado sobre el sistema; (c) el calor liberado por el sistema y el trabajo realizado por el sistema; (d) el calor liberado por el sistema y el trabajo realizado sobre el sistema.

7 ● Un gas real se enfría en una expansión libre, mientras que un gas ideal no varía su temperatura. Dar una explicación.

8 ● Un recipiente aislado está dividido en dos partes iguales por un tabique delgado. En una de las mitades se hace el vacío y en la otra se encierra un gas ideal a una atmósfera de presión y 300 K. Se quita el tabique y se establece el equilibrio en todo el recipiente. En el equilibrio, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? (a) La presión es media atmósfera y la temperatura 150 K. (b) La presión es una atmósfera y la temperatura 150 K. (c) La presión es media atmósfera y la temperatura 300 K. (d) Ninguna de las anteriores.

9 ● Un gas está formado por iones que se repelen entre sí. El gas experimenta una expansión libre sin intercambio de calor ni trabajo realizado. ¿Cómo cambia la temperatura del gas? ¿Por qué?

10 ●● SSM Dos globos de goma llenos de gas tienen inicialmente el mismo volumen en el fondo de un frío lago. La superficie del lago está más caliente que el fondo. Un globo asciende rápidamente y se expande de manera adiabática a medida que sube. El otro globo asciende más lentamente y su expansión es isotérmica. ¿Cuál de los globos es mayor al llegar a la superficie del lago?

11 ● Un gas cambia reversiblemente su estado de A a C (figura 18.20). El trabajo realizado por el gas es (a) máximo en la trayectoria A → B → C; (b) mínimo en la trayectoria A → C; (c) máximo en la trayectoria A → D → C; (d) el mismo en las tres trayectorias.

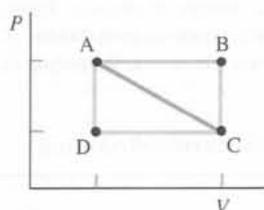


Figura 18.20 Problema 11

12 ● Cuando un gas ideal se somete a un proceso adiabático, (a) el sistema no realiza trabajo; (b) no se suministra calor al sistema; (c) la energía interna permanece constante; (d) el calor suministrado al sistema es igual al trabajo realizado por el sistema.

13 ● Verdadero o falso:

- (a) La capacidad calorífica de un cuerpo es la cantidad de calor que puede almacenar a una temperatura determinada.
- (b) Cuando un sistema evoluciona del estado 1 al estado 2, el calor suministrado al sistema es el mismo para todos los procesos posibles.
- (c) Cuando un sistema evoluciona del estado 1 al estado 2, el trabajo realizado sobre el sistema es el mismo para todos los procesos posibles.
- (d) Cuando un sistema evoluciona del estado 1 al estado 2, la variación de energía interna del sistema es la misma para todos los procesos posibles.
- (e) La energía interna de una determinada cantidad de gas ideal depende sólo de su temperatura absoluta.
- (f) Un proceso cuasiestático es un proceso en el cual el sistema nunca se encuentra lejos del equilibrio.
- (g) Para toda sustancia que se expande al calentarse,  $C_p$  es mayor que  $C_v$ .

14 ● SSM Si el volumen de un sistema permanece constante mientras experimenta variaciones de temperatura y presión, (a) la energía interna del sistema no varía; (b) el sistema no realiza trabajo; (c) el sistema no absorbe calor; (d) la variación de energía interna del sistema es igual al calor absorbido por el sistema.

15 ● Cuando un gas ideal se somete a un proceso isotermo, (a) ningún trabajo es realizado por el sistema. (b) no se suministra calor al sistema. (c) el calor suministrado al sistema es igual a la variación de energía interna. (d) el calor suministrado al sistema es igual al trabajo realizado por éste.

16 ●● El depósito de combustible de una cocina de gas tiene un volumen de 1 L y contiene 600 g de propano ( $C_3H_8$ ) a una presión de 2 MPa. ¿Qué podemos decir respecto al estado (sólido, líquido o gas) del propano?

17 ●● Un gas ideal experimenta un proceso durante el cual  $P\sqrt{V}$  es constante y el volumen del gas decrece. ¿Qué ocurre con la temperatura?

18 ●● SSM ¿Cuál cree que tiene una mayor capacidad calorífica por unidad de masa, el plomo o el cobre? ¿Por qué? (No busque las capacidades caloríficas para responder a esta pregunta).

19 ●● Calcular la capacidad calorífica de un líquido es muy difícil, debido a las fuertes interacciones intermoleculares y a las posiciones aleatorias de las moléculas en el líquido. Sin embargo, basándose sólo en el número de grados de libertad, ¿cabría esperar que un líquido monoatómico tuviese una capacidad calorífica mayor o menor que la de la fase sólida de la que procede por fusión? Supóngase que la temperatura de fusión es lo bastante elevada como para no estar obligados a tener en cuenta los efectos cuánticos en el cálculo de la capacidad calorífica del sólido.

### Estimaciones y aproximaciones

20 ●● SSM Un sencillo experimento para demostrar que el calor es una forma de energía consiste en coger una bolsa de perdigones y dejarla caer repetidamente desde una pequeña altura sobre una superficie muy rígida. La temperatura de la bolsa aumentará, y ello permite hacer una estimación de la capacidad calorífica del plomo. (a) Hacer un cálculo aproximado del aumento de temperatura de una bolsa llena con 1 kg de perdigones a la que se deja caer 50 veces desde una altura de 1 m. (b) En principio, la variación de temperatura es independiente de la masa del perdigón; en la práctica, es mejor emplear una masa mayor que una más pequeña. ¿A qué puede deberse esto?

21 ●● Un horno "típico" de microondas consume una potencia de unos 1200 W. Hacer una estimación de lo que tardaría en hervir una taza de agua en el microondas suponiendo que el 50% de la potencia consumida se emplea en calentar el agua. ¿Concuerda esta estimación con la experiencia cotidiana?

22 ● Una prueba del calentamiento que experimenta un gas en una compresión adiabática comporta colocar unos trocitos de papel en un gran tubo de ensayo que se cierra entonces con un pistón. Si el pistón comprime el aire atrapado muy rápidamente, el papel arderá. Suponiendo que el punto de ignición del papel es 451 °F, hacer una estimación del factor en qué se ha de reducir el volumen del aire atrapado por el pistón para que funcione esta prueba.

23 ●● Hay un pequeño cambio en el volumen de un líquido al calentarlo a presión constante. Utilizar los siguientes datos del agua para hacer una estimación de lo que constituye este cambio de volumen en la capacidad calorífica del agua entre 4 °C y 100 °C:

Densidad del agua a 4 °C y 1 atm de presión: 1,000 g/cm<sup>3</sup>

Densidad del agua líquida a 100 °C y 1 atm de presión: 0,9584 g/cm<sup>3</sup>

24 ●● SSM Una determinada molécula posee niveles de energía de vibración con un espaciado constante de 0,15 eV. Determinar la temperatura crítica  $T_c$ , tal que para  $T \gg T_c$  se cumplirá el teorema de equipartición y para  $T \ll T_c$  fallará este teorema.

### Capacidad calorífica; calor específico; calor latente

25 ● SSM Un varón adulto "típico" consume alimentos con un valor energético de 2500 kcal por día. (a) Determinar su equivalencia en julios. (b) Si la energía consumida se disipa en forma de calor a largo de 24 h, ¿cuál es la potencia media disipada en vatios?

26 ● **RESOLVE** Una casa solar contiene 10<sup>5</sup> kg de hormigón (calor específico = 1,00 kJ/kg·K). ¿Cuánto calor cederá el hormigón cuando se enfríe de 25 a 20 °C?

27 ● **ISOLVE** ¿Cuántas calorías deben suministrarse a 60 g de hielo a  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  para fundirlo y elevar la temperatura del agua a  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

28 ●● **ISOLVE** ¿Qué cantidad de calor se desprende cuando 100 g de vapor de agua a  $150\text{ }^{\circ}\text{C}$  se enfrían y congelan produciendo 100 g de hielo a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ? (Tomar para el calor específico del vapor el valor  $2,01\text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ .)

29 ●● **ISOLVE** Un trozo de 50 g de aluminio a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  se enfría a  $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$  colocándolo en un recipiente grande con nitrógeno líquido a esta temperatura. ¿Cuánto nitrógeno se vaporizará? (Suponer que el calor específico del aluminio es constante e igual a  $0,90\text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ .)

30 ●● **ISOLVE** Si se vierten 500 g de plomo fundido a  $327\text{ }^{\circ}\text{C}$  dentro de una cavidad de un gran bloque de hielo a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ¿cuánto hielo se funde?

31 ●● **SSM ISOLVE** Una bala de plomo de 30 g inicialmente a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  se dispara contra el bloque de un péndulo balístico y allí se detiene. Suponer que la mitad de la energía cinética de la bala se convierte en calor dentro de la misma. Si la velocidad de la bala era de  $420\text{ m/s}$ , ¿cuál es la temperatura de la bala inmediatamente después de alcanzar el reposo en el bloque?

32 ●● **ISOLVE** Un coche de  $1400\text{ kg}$  que viaja a  $80\text{ km/h}$  se detiene aplicando los frenos. Si el calor específico del acero es  $0,11\text{ cal/g}\cdot\text{K}$ , ¿cuál debe ser la masa total de acero contenida en los tambores de freno para que su temperatura no se eleve más de  $120\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

## Calorimetría

33 ● **ISOLVE** Un pedazo de plomo de  $200\text{ g}$  se calienta a  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$  y se echa en  $500\text{ g}$  de agua inicialmente a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Despreciando la capacidad calorífica del recinto, determinar la temperatura final del plomo y del agua.

34 ● **SSM ISOLVE** El calor específico de cierto metal se determina midiendo la variación de temperatura que tiene lugar cuando un trozo del metal se calienta y luego se sitúa en un recinto aislado construido del mismo material y que contiene agua. El trozo de metal posee una masa de  $100\text{ g}$  y una temperatura inicial de  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . El recipiente posee una masa de  $200\text{ g}$  y contiene  $500\text{ g}$  de agua a una temperatura inicial de  $20,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . La temperatura final es  $21,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuál es el calor específico del metal?

35 ●● En el Tour de Francia de 2002, el campeón ciclista Lance Armstrong consumió una potencia media de  $400\text{ W}$ , durante 5 horas diarias a lo largo de 20 días. ¿Qué cantidad de agua, inicialmente a  $24\text{ }^{\circ}\text{C}$ , podría llevarse hasta su punto de ebullición si se aprovechase completamente toda esa energía?

36 ●● Un vaso de vidrio de  $25\text{ g}$  contiene  $200\text{ mL}$  de agua a  $24\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Si echamos en el vaso dos cubos de hielo de  $15\text{ g}$  cada uno a la temperatura de  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ¿cuál es la temperatura final de la mezcla? Despreciar la conducción térmica entre el vaso y el medio exterior.

37 ●● Un trozo de hielo de  $200\text{ g}$  a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  se introduce en  $500\text{ g}$  de agua a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . El sistema se encuentra en un recinto de capacidad calorífica despreciable y aislado del exterior. (a) ¿Cuál es la temperatura final de equilibrio del sistema? (b) ¿Qué cantidad de hielo se funde?

38 ●● **ISOLVE** ✓ En un vaso que contiene una mezcla de hielo y agua con una masa total de  $1,2\text{ kg}$  se deja caer un bloque de cobre de  $3,5\text{ kg}$  a una temperatura de  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Cuando se alcanza el equilibrio, la temperatura del agua es  $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuánto hielo existía en el agua antes de que el bloque de cobre se situara en él? (Despreciar la capacidad calorífica del vaso.)

39 ●● **ISOLVE** ✓ Una vasija bien aislada contiene  $150\text{ g}$  de hielo a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . (a) Si se introducen en su interior  $20\text{ g}$  de vapor a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ¿cuál es la temperatura final de equilibrio del sistema? (b) ¿Queda algo de hielo?

40 ●● **ISOLVE** ✓ Un calorímetro de masa despreciable contiene  $1\text{ kg}$  de agua a  $303\text{ K}$  y  $50\text{ g}$  de hielo a  $273\text{ K}$ . Determinar la temperatura final,  $T$ . Resolver el mismo problema para una masa de hielo de  $500\text{ g}$ .

41 ●● **SSM** Un calorímetro de aluminio de  $200\text{ g}$  contiene  $500\text{ g}$  de agua a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Dentro del recipiente se introduce un trozo de hielo de  $100\text{ g}$  enfriado a  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . (a) Determinar la temperatura final del sistema suponiendo que no hay pérdidas caloríficas (para el calor específico del hielo tómesese el

valor  $2,0\text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ). (b) Se añade un segundo trozo de hielo de  $200\text{ g}$  a  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuánto hielo queda en el sistema, una vez que se ha alcanzado el equilibrio? (c) ¿Sería distinta la respuesta al apartado (b) si ambos trozos se agregaran al mismo tiempo?

42 ●● **ISOLVE** Para determinar el calor específico de un bloque de  $100\text{ g}$  de material se introduce en un calorímetro de cobre de  $25\text{ g}$  que contiene  $60\text{ g}$  de agua. El sistema se encuentra inicialmente a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . A continuación se añaden  $120\text{ mL}$  de agua a  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  al vaso calorimétrico. Cuando se alcanza el equilibrio térmico, la temperatura del agua es  $54\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Determinar el calor específico del bloque.

43 ●● Un trozo de cobre de  $100\text{ g}$  se calienta en un horno a una temperatura  $t$ . Se introduce luego el cobre en un calorímetro de cobre de  $150\text{ g}$  que contiene  $200\text{ g}$  de agua. La temperatura inicial del agua y el calorímetro es  $16\text{ }^{\circ}\text{C}$  y la temperatura final después de que se establezca el equilibrio es  $38\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Cuando se pesan el calorímetro y su contenido se encuentra que se han evaporado  $1,2\text{ g}$  de agua. ¿Cuál era la temperatura  $t$ ?

44 ●● Un calorímetro de aluminio de  $200\text{ g}$  contiene  $500\text{ g}$  de agua a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Se calientan a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  virutas de aluminio de  $300\text{ g}$  de masa y luego se introducen en el calorímetro. (a) Utilizando el valor del calor específico del aluminio dado en la tabla 18.1, hallar la temperatura final del sistema suponiendo que no se pierde calor hacia el medio exterior. (b) El error debido a la transferencia de calor hacia o desde el medio puede reducirse al mínimo si se escoge la temperatura inicial del agua y del calorímetro de forma que esté a  $\frac{1}{2}\Delta T_a$  por debajo de la temperatura ambiente, en donde  $\Delta T_a$  es la variación de temperatura del calorímetro y del agua durante el proceso. Entonces la temperatura final estará a  $\frac{1}{2}\Delta T_a$  por encima de la temperatura ambiente. ¿Cuál deberá ser la temperatura inicial del agua y del recipiente si la temperatura ambiente es  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

## Primer principio de la termodinámica

45 ● **ISOLVE** Un gas diatómico realiza  $300\text{ J}$  de trabajo y absorbe  $600\text{ cal}$  de calor. ¿Cuál es la variación de energía interna experimentada por el gas?

46 ●● **SSM ISOLVE** Si se adicionan  $400\text{ kcal}$  a un gas que se expande y realiza  $800\text{ kJ}$  de trabajo, ¿cuál es la variación de la energía interna del gas?

47 ● **ISOLVE** Una bala de plomo con una velocidad de  $200\text{ m/s}$  se detiene en un bloque de madera. Suponiendo que toda la energía se invierte en calentar la bala, determinar la temperatura final de ésta si la temperatura inicial es de  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

48 ● (a) En las cataratas del Niágara, el agua cae desde una altura de  $50\text{ m}$ . Si toda la variación de energía potencial se invierte en energía interna del agua, ¿cuál será el incremento de temperatura? (b) Repetir el cálculo para las cataratas de Yosemite en donde el agua cae desde una altura de  $740\text{ m}$ . (Estos aumentos de temperatura no se observan en la realidad porque el agua se enfría por evaporación durante su caída.)

49 ● Cuando  $20\text{ cal}$  de calor son absorbidas por un gas, éste realiza  $30\text{ J}$  de trabajo. ¿Cuál es la variación de energía interna del gas?

50 ●● **ISOLVE** Una bala de plomo inicialmente a  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  se funde al golpear un blanco. Suponiendo que toda la energía cinética inicial de la bala se convierte en energía interna de la misma para elevar su temperatura y fundirla, calcular su velocidad en el momento del impacto.

51 ●● **SSM** Es posible calentarse las manos en un día frío frotándose una contra la otra. (a) Suponer que el coeficiente de rozamiento entre las manos es  $0,5$  y que pueden frotarse con una velocidad media de  $35\text{ cm/s}$ , mientras las manos se ejercen una fuerza normal de  $35\text{ N}$  entre ellas. ¿Con qué ritmo se genera calor? (b) Suponer además que la masa de cada mano es aproximadamente de  $350\text{ g}$ , que el calor específico de las mismas es del orden de  $4\text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$  y que todo el calor generado se utiliza para elevar la temperatura de las manos. ¿Durante cuánto tiempo habrá que frotarse las manos para conseguir un incremento de temperatura de  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

## Trabajo y diagrama PV de un gas

En los problemas 52 a 55, el estado inicial de 1 mol de un gas ideal es  $P_1 = 3$  atm,  $V_1 = 1$  L y  $U_1 = 456$  J, y su estado final es  $P_2 = 2$  atm,  $V_2 = 3$  L y  $U_2 = 912$  J.

**52** ● **ISOLV** ✓ El gas se deja expandir a presión constante hasta un volumen de 3 L. Entonces se enfría a volumen constante hasta que su presión es de 2 atm. (a) Representar este proceso en un diagrama PV y determinar el trabajo realizado por el gas. (b) Determinar el calor absorbido durante este proceso.

**53** ● **ISOLV** ✓ El gas se enfría primero a volumen constante hasta que su presión es de 2 atm. Se deja entonces expandir a presión constante hasta que su volumen es de 3 L. (a) Representar este proceso en un diagrama PV y determinar el trabajo realizado por el gas. (b) Determinar el calor absorbido durante este proceso.

**54** ●● **SSM** El gas se expande isotérmicamente hasta que su volumen es de 3 L y su presión 1 atm. Se calienta entonces a volumen constante hasta que su presión es de 2 atm. (a) Representar este proceso en un diagrama PV y calcular el trabajo realizado por el gas. (b) Determinar el calor absorbido durante este proceso.

**55** ●● El gas se expande y se añade calor de tal forma que el gas sigue una línea recta en el diagrama PV desde el estado inicial al estado final. (a) Indicar este proceso en un diagrama PV y calcular el trabajo realizado por el gas. (b) Determinar el calor absorbido en este proceso.

**56** ●● **ISOLV** ✓ Un mol de gas ideal se encuentra inicialmente en el estado  $P_0 = 1$  atm,  $V_0 = 25$  L. Cuando el gas se calienta lentamente, su estado evoluciona de modo que en un diagrama PV sigue una línea recta hasta el estado final  $P = 3$  atm,  $V = 75$  L. Determinar el trabajo realizado por el gas en este proceso.

**57** ●● Un mol de gas ideal se calienta de modo que  $T = AP^2$ , en donde A es una constante. La temperatura cambia de  $T_0$  a  $4T_0$ . Determinar el trabajo realizado por el gas.

**58** ● **SSM** Una expansión *isobárica* es una que se lleva a cabo a presión constante. Dibujar varias isobaras de un gas ideal en un diagrama que muestre el volumen como una función de la temperatura.

**59** ●● **ISOLV** ✓ Un gas ideal inicialmente a  $20^\circ\text{C}$  y 200 kPa posee un volumen de 4 L. Experimenta una expansión isoterma cuasiestática hasta que su presión se reduce a 100 kPa. Calcular (a) el trabajo realizado por el gas y (b) el calor suministrado al gas durante la expansión.

## Capacidades caloríficas de gases y teorema de equipartición

**60** ● La capacidad calorífica a volumen constante de cierto gas monoatómico es  $49,8$  J/K. (a) Determinar el número de moles de gas. (b) ¿Cuál es la energía interna de este gas a  $T = 300$  K? (c) ¿Cuál es la capacidad calorífica a presión constante?

**61** ● La ley de Dulong-Petit se utilizó originalmente para determinar la masa molecular de una sustancia a partir de sus capacidades caloríficas medidas. Sabiendo que el calor específico de un sólido dado es de  $0,447$  kJ/kg·K, (a) calcular su masa molecular. (b) ¿De qué elemento se trata?

**62** ●● **SSM** (a) Calcular los valores específicos por unidad de masa del aire a volumen constante y a presión constante. Suponer una temperatura de  $300$  K y una presión de  $10^5$  N/m<sup>2</sup>. Admitir asimismo que el aire se compone de un 74% de moléculas de  $\text{N}_2$  (peso molecular 28 g/mol) y de un 26% de moléculas de  $\text{O}_2$  (peso molecular 32 g/mol), y que ambos componentes son gases ideales. (b) Comparar el resultado con el valor de  $1,032$  J/g·K recogido en el *Handbook of Chemistry and Physics* para la capacidad calorífica a presión constante.

**63** ●● Un mol de un gas ideal diatómico se calienta a volumen constante desde  $300$  K a  $600$  K: (a) Determinar el incremento de energía interna, el tra-

bajo realizado y el calor absorbido. (b) Determinar estas mismas magnitudes para el caso en que el gas se calienta de  $300$  a  $600$  K a presión constante. Utilizar el primer principio de la termodinámica y el resultado obtenido en el apartado (a) para calcular el trabajo realizado. (c) Calcular directamente el trabajo realizado en el apartado (b) a partir de  $dW = P dV$ .

**64** ●● **ISOLV** ✓ Un gas diatómico (masa molar  $M$ ) está confinado en un recipiente cerrado de volumen  $V$  a una presión  $P_0$ . ¿Qué cantidad de calor  $Q$  debe transferirse al gas para que su presión se triplique? (Expresar la respuesta en función de  $P_0$  y  $V$ .)

**65** ●● Un mol de aire ( $c_v = 5R/2$ ) está encerrado a la presión atmosférica en un cilindro mediante un pistón a la temperatura de  $0^\circ\text{C}$ . El volumen inicial ocupado por el gas es  $V$ . Determinar el volumen de gas  $V'$  después de suministrarle el calor equivalente a  $13\,200$  J.

**66** ●● La capacidad calorífica de una determinada cantidad de un gas particular a presión constante es mayor que la correspondiente a volumen constante en  $29,1$  J/K. (a) ¿Cuántos moles de gas se tienen? (b) Si el gas es monoatómico, ¿cuánto valen  $C_v$  y  $C_p$ ? (c) Si el gas está formado por moléculas diatómicas que tienen movimiento de rotación, pero no de vibración, ¿cuánto valen  $C_v$  y  $C_p$ ?

**67** ●● **SSM** El dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) a 1 atm de presión y una temperatura de  $-78,5^\circ\text{C}$  sublima directamente desde un estado sólido a uno gaseoso, sin pasar por una fase líquida. ¿Cuál es el cambio que se produce en la capacidad calorífica (a presión constante) por mol de  $\text{CO}_2$  cuando tiene lugar la sublimación? Suponer que las moléculas del gas pueden girar pero no vibrar. ¿Es positivo o negativo el cambio en la capacidad calorífica en la sublimación? La molécula de  $\text{CO}_2$  aparece representada en la figura 18.21.

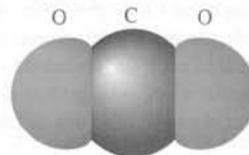


Figura 18.21 Problema 67

**68** ●● Un mol de un gas ideal monoatómico se encuentra inicialmente a  $273$  K y 1 atm. (a) ¿Cuál es su energía interna inicial? (b) Determinar su energía interna final y el trabajo realizado por el gas cuando se suministran  $500$  J de calor a presión constante. (c) Determinar las mismas magnitudes cuando los  $500$  J de calor se suministran a volumen constante.

**69** ●● Hacer una lista de todos los grados de libertad posibles de una molécula de agua y hacer una estimación de la capacidad calorífica del agua muy por encima de su punto de ebullición. (Ignorar el hecho de que la molécula pudiera disociarse a altas temperaturas.) Reflexionar detenidamente sobre todos los distintos modos de que dispone una molécula de agua para vibrar.

## Expansión adiabática cuasiestática de un gas

**70** ●● Un mol de un gas ideal ( $\gamma = \frac{5}{3}$ ) se expande adiabáticamente y cuasiestáticamente desde una presión de  $10$  atm y temperatura de  $0^\circ\text{C}$  a un estado final de presión 2 atm. Determinar (a) los volúmenes inicial y final, (b) la temperatura final y (c) el trabajo realizado por el gas.

**71** ● Un gas ideal a la temperatura ambiente de  $20^\circ\text{C}$  se comprime adiabática y cuasiestáticamente hasta la mitad de su volumen original. Calcular su temperatura final si (a)  $C_v = \frac{3}{2}nR$  y (b)  $C_v = \frac{5}{2}nR$ .

**72** ● **ISOLV** ✓ Dos moles de gas neón inicialmente a  $20^\circ\text{C}$  y a una presión de 1 atm se comprimen adiabáticamente hasta  $1/4$  de su volumen inicial. Determinar la temperatura y presión después de la compresión.

**73** ●● **SSM** Medio mol de un gas ideal monoatómico a una presión de  $400$  kPa y una temperatura de  $300$  K se expande hasta que la presión ha dismi-

nuido a 160 kPa. Determinar la temperatura y volumen finales, el trabajo realizado y el calor absorbido por el gas si la expansión es (a) isoterma y (b) adiabática.

74 ●● Repetir el problema 73 para un gas diatómico.

75 ●● Medio mol de helio se expande adiabática y cuasiestáticamente desde una presión inicial de 5 atm y una temperatura de 500 K hasta una presión final de 1 atm. Calcular (a) la temperatura final, (b) el volumen final, (c) el trabajo realizado por el gas y (d) la variación de energía interna del mismo.

76 ●●● SSM Para inflar un neumático de bicicleta se emplea una bomba de mano, siendo la presión manométrica final de 482 kPa. ¿Cuánto trabajo deberá realizarse si cada embolada es un proceso adiabático? La presión atmosférica es de 1 atm, la temperatura inicial del aire es 20 °C y el volumen del aire dentro del neumático permanece constante e igual a 1 L.

77 ●●● Un gas ideal con un volumen inicial  $V_1$  y una presión  $P_1$  se expande adiabática y cuasiestáticamente hasta un volumen  $V_2$  y una presión  $P_2$ . Calcular el trabajo realizado por el gas integrando directamente  $P dV$  y comprobar que el resultado es el mismo que el dado por la ecuación 18.39.

### Procesos cíclicos

78 ●● Un mol de gas  $N_2$  ( $C_v = \frac{5}{2}nR$ ) se mantiene a la temperatura ambiente (20 °C) y a una presión de 5 atm. Se deja expandir adiabática y cuasiestáticamente hasta que su presión iguala a la ambiente de 1 atm. Entonces se calienta a presión constante hasta que su temperatura es de nuevo de 20 °C. Durante este calentamiento el gas se expande. Una vez que ha alcanzado la temperatura ambiente, se calienta a volumen constante hasta que su presión es de 5 atm. Se comprime entonces a presión constante hasta volver a su estado original. (a) Construir un diagrama  $PV$  de precisión suficiente mostrando cada etapa del ciclo. (b) A partir de este gráfico determinar el trabajo realizado por el gas en todo el ciclo. (c) ¿Cuánto calor fue absorbido o cedido por el gas en el ciclo completo? (d) Comprobar el cálculo gráfico del apartado (b) determinando el trabajo realizado por el gas en cada una de las etapas del ciclo.

79 ●● SSM Un mol de un gas ideal diatómico se deja expandir a lo largo de la recta que va de 1 a 2 en el diagrama  $PV$  de la figura 18.22. A continuación se comprime isotérmicamente desde 2 hasta 1. Calcular el trabajo total realizado sobre el gas durante este ciclo.

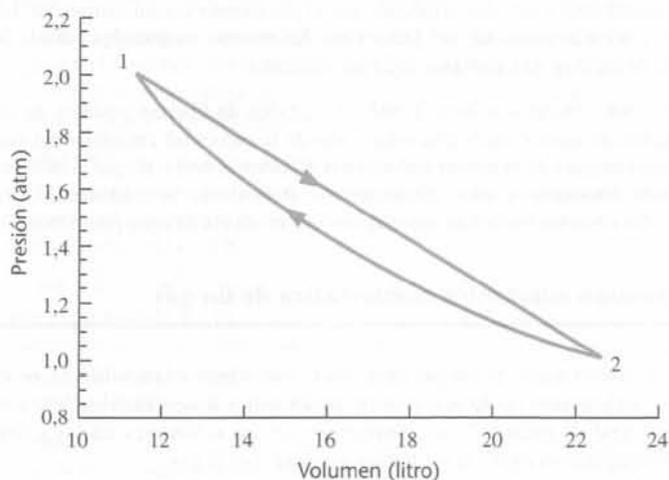


Figura 18.22 Problema 79

80 ●● Dos moles de un gas ideal monoatómico tienen una presión inicial  $P_1 = 2$  atm y un volumen inicial  $V_1 = 2$  L. Se obliga al gas a realizar cuasiestáticamente el siguiente proceso cíclico: Se expande isotérmicamente hasta que tiene un volumen de  $V_2 = 4$  L. Luego se calienta a volumen constante hasta que su presión vale  $P_3 = 2$  atm. Finalmente se enfría a presión constante hasta que vuelve a su estado inicial. (a) Dibujar este ciclo en un diagrama  $PV$ . (b) Calcu-

lar el calor añadido y el trabajo realizado por el gas durante cada parte del ciclo. (c) Hallar las temperaturas  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ .

81 ●●● En el punto D de la figura 18.23 la presión y la temperatura de 2 moles de un gas ideal monoatómico son 2 atm y 360 K. El volumen del gas en el punto B del diagrama  $PV$  es tres veces mayor que en el punto D y su presión es doble que la del punto C. Las trayectorias AB y CD representan procesos isotermos. El gas realiza un ciclo completo a lo largo del ciclo DABCD. Determinar el trabajo total realizado por el gas y el calor suministrado al gas a lo largo de cada porción del ciclo.

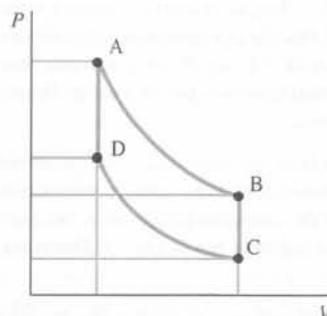


Figura 18.23 Problemas 81 y 82

82 ●●● SSM Repetir el problema 81 con un gas diatómico.

83 ●●● Un gas ideal de  $n$  moles se encuentra inicialmente a la presión  $P_1$ , volumen  $V_1$  y temperatura  $T_h$ . Experimenta una expansión isotérmica hasta que su presión y volumen son  $P_2$  y  $V_2$ . Luego se expande adiabáticamente hasta que la temperatura es  $T_c$  y la presión y el volumen son  $P_3$  y  $V_3$ . A continuación se comprime isotérmicamente hasta alcanzar la presión  $P_4$  y el volumen  $V_4$ , el cual está relacionado con el volumen inicial  $V_1$  por  $T_c V_4^{-1} = T_h V_1^{-1}$ . El gas entonces se comprime adiabáticamente hasta recuperar su estado original. (a) Suponiendo que cada una de las etapas es cuasiestática, representar este ciclo en un diagrama  $PV$ . (Este ciclo se denomina ciclo de Carnot para un gas ideal.) (b) Demostrar que el calor absorbido  $Q_h$  durante la expansión isotérmica a  $T_h$  es  $Q_h = nRT_h \ln(V_2/V_1)$ . (c) Demostrar que el calor cedido  $Q_c$  por el gas durante la compresión isotérmica a  $T_c$  es  $Q_c = nRT_c \ln(V_3/V_4)$ . (d) Utilizando el resultado de que para una expansión adiabática  $TV^{\gamma-1}$  es constante, demostrar que  $V_2/V_1 = V_3/V_4$ . (e) El rendimiento del ciclo Carnot viene definido por el trabajo neto realizado dividido por el calor absorbido  $Q_h$ . Teniendo en cuenta el primer principio de la termodinámica, demostrar que este rendimiento es  $1 - Q_c/Q_h$ . (f) Utilizando los resultados de los apartados previos de este problema, demostrar que  $Q_c/Q_h = T_c/T_h$ .

### Problemas generales

84 ● El volumen ocupado por tres moles de un gas monoatómico se incrementa de 50 a 200 L a presión constante. La temperatura inicial del gas es de 300 K. ¿Cuánto calor se ha suministrado al gas?

85 ● En el proceso de compresión de  $n$  moles de un gas ideal diatómico hasta un quinto de su volumen inicial se realiza un trabajo de 180 kJ sobre el gas. Si esto se realiza isotérmicamente a la temperatura ambiente (293 K), ¿cuántas calorías se extraen del gas?

86 ● SSM ¿Cuál es el número de moles  $n$  del gas considerado en el problema 85?

87 ● El diagrama  $PV$  de la figura 18.24 representa procesos realizados por 3 moles de un gas ideal monoatómico. El gas está inicialmente en el punto A. Las trayectorias AD y BC representan procesos isotérmicos. Si el sistema evoluciona hasta el punto C a lo largo de la trayectoria AEC, determinar (a) las temperaturas inicial y final, (b) el trabajo realizado por el gas y (c) el calor absorbido por el gas.

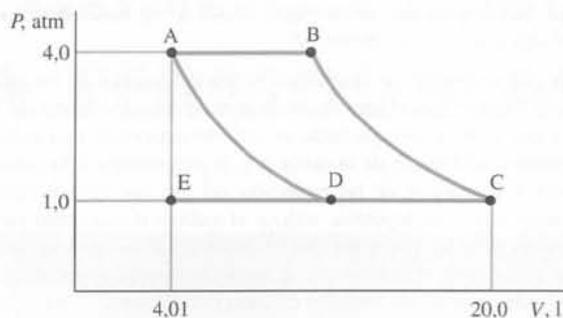


Figura 18.24 Problemas 87–90

**88** ●● Repetir el problema 87 en el caso de que el gas recorra la trayectoria ABC.

**89** ●● SSM Repetir el problema 87 en el caso de que el gas recorra la trayectoria ADC.

**90** ●● Suponer que las trayectorias AD y BC representan procesos adiabáticos. ¿Cuáles son entonces el trabajo realizado por el gas y el calor absorbido al seguir la trayectoria ABC?

**91** ●● A temperaturas muy bajas el calor específico de un metal viene dado por la expresión  $c = aT + bT^3$ . Para el cobre,  $a = 0,0108 \text{ J/kg} \cdot \text{K}^2$  y  $b = 7,62 \times 10^{-4} \text{ J/kg} \cdot \text{K}^4$ . (a) ¿Cuál es el calor específico del cobre a 4 K? (b) ¿Qué calor es necesario suministrar para calentar el cobre desde 1 a 3 K?

**92** ●● Dos moles de un gas ideal diatómico se comprimen isotérmicamente de 18 a 8 L. En el proceso, 170 calorías escapan del sistema. Determinar el trabajo realizado por el gas, la variación de energía interna y las temperaturas inicial y final del gas.

**93** ●● Suponer que los dos moles del gas ideal diatómico del problema 92 se comprimen de 18 a 8 L adiabáticamente. El trabajo realizado por el gas es 820 J. Determinar la temperatura inicial y las presiones inicial y final.

**94** ●● Determinar el trabajo que hay que realizar a la temperatura y presión estándares para comprimir 30 g de CO a un quinto de su volumen inicial si el proceso es (a) isotermo y (b) adiabático.

**95** ●● Repetir el problema 94 con gas  $\text{CO}_2$ .

**96** ●● Repetir el problema 94 con gas argón.

**97** ●● **RESOLVER** Un sistema térmicamente aislado está formado por 1 mol de un gas ideal diatómico a 100 K y 2 moles de un sólido a 200 K separados por una pared aislante rígida. Determinar la temperatura de equilibrio del sistema al retirar la pared aislante suponiendo que el sólido cumple la ley de Dulong-Petit.

**98** ●● SSM Cuando un gas ideal sufre una variación de temperatura a volumen constante, su energía cambia en  $\Delta U = C_v \Delta T$ . (a) Explicar por qué el resultado  $\Delta U = C_v \Delta T$  es válido en el caso de un gas ideal para cualquier variación de temperatura con independencia del proceso. (b) Demostrar explícitamente que este resultado es válido para la expansión de un gas ideal a presión constante calculando primeramente el trabajo realizado y demostrando que puede escribirse como  $W = -nR \Delta T$ , y luego utilizando  $\Delta U = Q + W$ , siendo  $Q = C_p \Delta T$ .

**99** ●● Un mol de un gas monoatómico ideal se calienta a volumen constante de 300 a 600 K. (a) Hallar el calor suministrado, el trabajo realizado por el gas y la variación de su energía interna. (b) Hallar estas mismas magnitudes si el gas se calienta de 300 a 600 K a presión constante.

**100** ●● SSM Se suministra calor por valor de 500 J a 2 moles de un gas ideal diatómico. (a) Hallar la variación de la temperatura si se mantiene la presión constante. (b) Hallar el trabajo realizado por el gas. (c) Hallar el cociente entre el volumen final y el inicial del gas si la temperatura inicial es 20 °C.

**101** ●● Un cilindro aislado en el que se encuentra un pistón móvil para mantener la presión constante, contiene inicialmente 100 g de hielo a  $-10$  °C.

Se suministra calor al sistema a ritmo constante mediante un calentador de 100 W. Dibujar un gráfico que muestre la temperatura del contenido del cilindro en función del tiempo, comenzando desde  $t = 0$ , cuando la temperatura vale  $-10$  °C, y terminando cuando la temperatura es 110 °C. (Utilizar  $c = 2,0 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$  para el calor específico medio del hielo desde  $-10$  a 0 °C y del vapor desde 100 a 110 °C.)

**102** ●● SSM Dos moles de un gas ideal diatómico se expansionan adiabáticamente. La temperatura inicial del gas es 300 K. El trabajo realizado por el gas durante la expansión es 3,5 kJ. ¿Cuál es la temperatura final del gas?

**103** ●● Un mol de gas monoatómico, inicialmente a la temperatura  $T$ , experimenta un proceso en el cual su temperatura se cuadruplica y su volumen se reduce a la mitad. Determinar el calor  $Q$  transferido al gas. Sabemos que en este proceso la presión nunca fue menor que la presión inicial y que el trabajo realizado sobre el gas fue el mínimo posible.

**104** ●● Si en un líquido se disuelve una pequeña cantidad de una sustancia, la presión del líquido aumentará ligeramente. Para una disolución diluida, la variación de presión se obtiene de la ley de los gases ideales,  $PV = NkT$ , en donde  $N$  es el número de moléculas de soluto disueltas en el líquido,  $V$  es el volumen del líquido y  $P$  es el aumento de la presión en el líquido. Calcular el aumento en la presión cuando 20 g de sal de mesa ( $\text{NaCl}$ ) se disuelven en 1 L de agua a una temperatura de 24 °C.

**105** ●● Un cilindro vertical adiabáticamente aislado está dividido en dos partes por medio de un pistón móvil de masa  $m$ . Inicialmente, el pistón se mantiene en reposo. La parte superior se vacía y la parte inferior se llena con un mol de gas ideal diatómico a la temperatura de 300 K. Cuando se libera el pistón y el gas alcanza el equilibrio, el volumen ocupado por éste se ha reducido a la mitad. Determinar la temperatura final del gas.

**106** ●● De acuerdo con el modelo de Einstein de un sólido cristalino, la energía interna por mol viene dada por

$$U = \frac{3N_A k T_E}{e^{T_E/T} - 1}$$

en donde  $T_E$  es una temperatura característica denominada temperatura de Einstein y  $T$  es la temperatura del sólido en kelvins. Evaluar la energía interna molar del diamante ( $T_E = 1060 \text{ K}$ ) a 300 y 600 K y con ello el incremento de esta magnitud al calentar el diamante de 300 a 600 K.

**107** ●● SSM En una expansión isotermica, un gas ideal a una presión inicial  $P_0$  se expansiona hasta duplicar su volumen inicial. (a) Hallar su presión después de la expansión. (b) Luego el gas se comprime adiabática y cuasiestáticamente hasta su volumen original, en cuyo momento su presión vale  $1,32 P_0$ . El gas, ¿es monoatómico, diatómico o poliatómico? (c) ¿Cómo varía en estos procesos la energía cinética de traslación del gas?

*Nota: Aunque los problemas 108-109 se refieren a procesos no cuasiestáticos, las funciones de estado de los productos finales pueden calcularse suponiendo que los gases son ideales y aplicando el primer principio de la termodinámica. Para  $T > 2000 \text{ K}$ , la vibración de los átomos contribuye al valor de  $C_p$  del  $\text{CO}_2$  y del  $\text{H}_2\text{O}$ , de modo que el  $C_p$  de estos gases es  $7,5 R$  a temperaturas elevadas. Suponer que los gases no se disocian.*

**108** ●● La combustión del benceno está representada por la reacción química  $2(\text{C}_6\text{H}_6) + 15(\text{O}_2) \rightarrow 12(\text{CO}_2) + 6(\text{H}_2\text{O})$ . El calor liberado en la combustión de dos moles de benceno es 1516 kcal. Un mol de benceno y 7,5 moles de oxígeno a 300 K están encerrados en un recinto aislado a la presión de 1 atm. (a) Determinar la temperatura y el volumen después de la combustión si la presión se mantiene a 1 atm. (b) Si después de la combustión se elimina el aislamiento térmico alrededor del recinto y el sistema se enfría a 300 K, ¿cuál es la presión final?

**109** ●● SSM El monóxido de carbono y el oxígeno se combinan formando  $\text{CO}_2$  con un desprendimiento de 280 kJ/mol de CO según la reacción  $2(\text{CO}) + \text{O}_2 \rightarrow 2(\text{CO}_2)$ . Dos moles de CO y 1 mol de  $\text{O}_2$  a 300 K están dentro de un recipiente de 80 L; la reacción de combustión se inicia con una chispa. (a) ¿Cuál es la presión del recinto antes de la reacción? (b) Si la reacción tiene lugar adiabáticamente, ¿cuáles son la temperatura y presión finales? (c) Si el gas  $\text{CO}_2$  resultante se enfría a 0 °C, ¿cuál es entonces la presión del recinto?

**110 ●●●** Utilizar la expresión dada en el problema 106 para la energía interna molar de un sólido de acuerdo con el modelo de Einstein para demostrar que el calor molar a volumen constante viene dado por

$$c'_v = 3R \left( \frac{T_E}{T} \right)^2 \frac{e^{T_E/T}}{(e^{T_E/T} - 1)^2}$$

**111 ●●●** (a) Utilizar los resultados del problema 110 para demostrar que la ley de Dulong-Petit,  $c'_v \approx 3R$ , equivale al modelo de Einstein cuando  $T > T_E$ . (b) En el caso del diamante,  $T_E$  es aproximadamente 1060 K. Integrar numéricamente la expresión  $dU = c'_v dT$  para determinar el incremento de energía

interna de 1 mol de diamante al calentarlo de 300 a 600 K. Comparar el resultado con el obtenido en el problema 106.

**112 ●●●** Si se pincha un neumático, el aire del interior se irá escapando poco a poco. Suponer que el área del orificio es  $A$ , que el volumen del neumático es  $V$ , y que  $\tau$ , el tiempo que tarda en salir del neumático casi todo el aire, puede expresarse en función de la razón  $A/V$ , la temperatura  $T$ , la constante de Boltzmann  $k$  y la masa  $m$  de las moléculas del gas que llena el neumático. (a) De acuerdo con estas hipótesis, utilizar el análisis dimensional para hacer una estimación de  $\tau$ . (b) Hacer uso del resultado obtenido en (a) para calcular de manera aproximada el tiempo que tardaría en desinflarse un neumático de automóvil que ha sufrido un pinchazo causado por un clavo.

# SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

## Capítulo 19



La máquina de este viejo tren produce vapor, el cual hace un trabajo sobre un pistón que obliga a las ruedas del tren a desplazarse. El rendimiento de la máquina de vapor está limitado por el segundo principio de la termodinámica.

¿Cuál es el rendimiento máximo posible de esta máquina? (Véase ejemplo 19.4.)

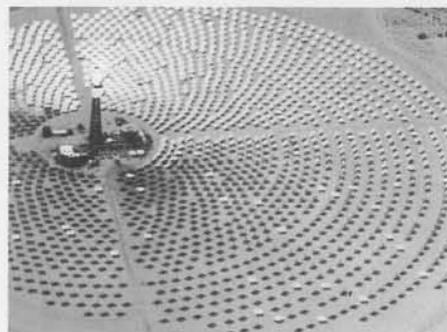
Continuamente se nos pide que conservemos la energía. Pero de acuerdo con el primer principio de la termodinámica, la energía se conserva siempre. Entonces, ¿qué significa “conservar” la energía, si la cantidad total de energía del Universo no cambia con independencia de lo que hagamos? En este capítulo veremos que el primer principio de la termodinámica no nos lo explica todo. La energía se conserva siempre, pero algunas formas de la misma son más útiles que otras. La posibilidad o imposibilidad de conseguir energía que esté en condiciones de ser *utilizada*, es el punto central del **segundo principio de la termodinámica**. Por ejemplo, es fácil convertir completamente el trabajo mecánico en calor (energía térmica), pero es imposible absorber calor de un sistema y convertirlo completamente en trabajo mecánico sin ningún otro cambio adicional. Este hecho experimental es uno de los enunciados del segundo principio de la termodinámica.

Es imposible que un sistema pueda extraer energía en forma de calor de una sola fuente térmica y convertirla completamente en trabajo sin que se produzcan cambios netos en el sistema o en el medio que le rodea.

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA: ENUNCIADO DE KELVIN

➤ Más adelante en este capítulo, veremos otras formulaciones del mismo principio.

- 19.1 Máquinas térmicas y el segundo principio de la termodinámica
- 19.2 Refrigeradores y segundo principio de la termodinámica
- 19.3 Equivalencia entre los enunciados de la máquina térmica y del refrigerador
- 19.4 La máquina de Carnot
- \* 19.5 Bombas de calor
- 19.6 Irreversibilidad y desorden
- 19.7 Entropía
- 19.8 Entropía y energía utilizable
- 19.9 Entropía y probabilidad



La energía solar se dirige directamente hacia el horno solar situado en el centro de esta distribución circular de reflectores en Barstow, California (Estados Unidos).

Un ejemplo corriente de la conversión de energía mecánica en calor es el movimiento con rozamiento. Por ejemplo, supongamos que empleamos dos minutos en empujar un bloque en cualquier dirección sobre la superficie de una mesa siguiendo un camino cerrado que deja al bloque en su posición inicial. Supongamos también que el sistema bloque-mesa está inicialmente en equilibrio térmico con el entorno. El trabajo que realizamos sobre el sistema se convierte en energía interna del sistema, y esto da como resultado que el sistema bloque-mesa se calienta. En consecuencia, el sistema ya no está en equilibrio con el medio. Sin embargo, el sistema cederá energía en forma de calor al medio hasta que vuelva a estar en equilibrio térmico con él. Como los estados inicial y final del sistema son el mismo, según el primer principio de la termodinámica la energía transmitida al medio en forma de calor debe ser igual al trabajo que hemos realizado sobre el sistema. El proceso inverso no ocurre nunca, es decir, un bloque y una mesa no se enfriarán nunca espontáneamente para convertir su energía interna en energía cinética que ponga en movimiento el bloque sobre la mesa. Sin embargo, si este sorprendente fenómeno se verificara, no violaría el primer principio de la termodinámica, ni ninguna otra ley física de las que hemos estudiado hasta ahora. Sin embargo, sí violaría el segundo principio de la termodinámica. Existe, pues, una falta de simetría en los papeles que desempeñan el calor y el trabajo que no resulta evidente a partir del primer principio. Esta falta de simetría está relacionada con el hecho de que algunos procesos son *irreversibles*.

Existen muchos procesos irreversibles, aparentemente muy diferentes unos de otros, pero todos relacionados con el segundo principio. Por ejemplo, la conducción de calor es un proceso irreversible. Si colocamos un cuerpo caliente en contacto con otro frío, el calor fluirá del cuerpo caliente al cuerpo frío hasta que estén a la misma temperatura. Sin embargo, el proceso inverso no se presenta nunca. Dos cuerpos en contacto a la misma temperatura, permanecen a la misma temperatura. El calor no fluye de uno al otro, haciendo que uno de ellos se enfríe cada vez más mientras que el otro cada vez se calienta más. Este hecho experimental nos ofrece otro enunciado del segundo principio de la termodinámica.

Es imposible un proceso cuyo único resultado sea transferir energía en forma de calor de un objeto a otro más caliente.

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA: ENUNCIADO DE CLAUSIUS

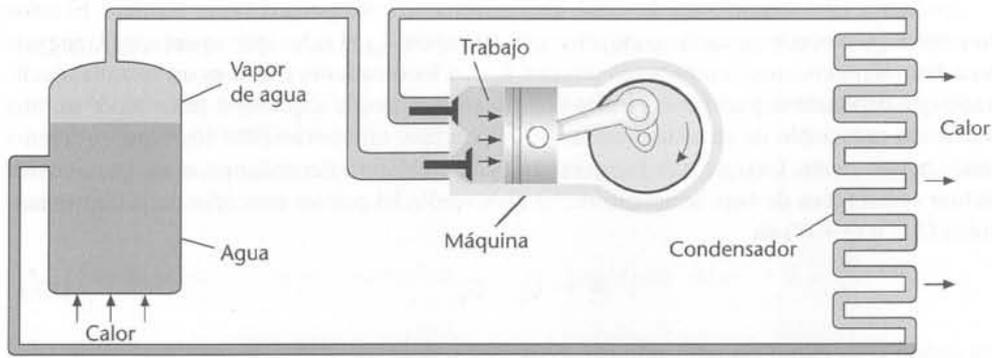
En este capítulo demostraremos que los enunciados de Kelvin y de Clausius del segundo principio son equivalentes.

## 19.1 Máquinas térmicas y el segundo principio de la termodinámica

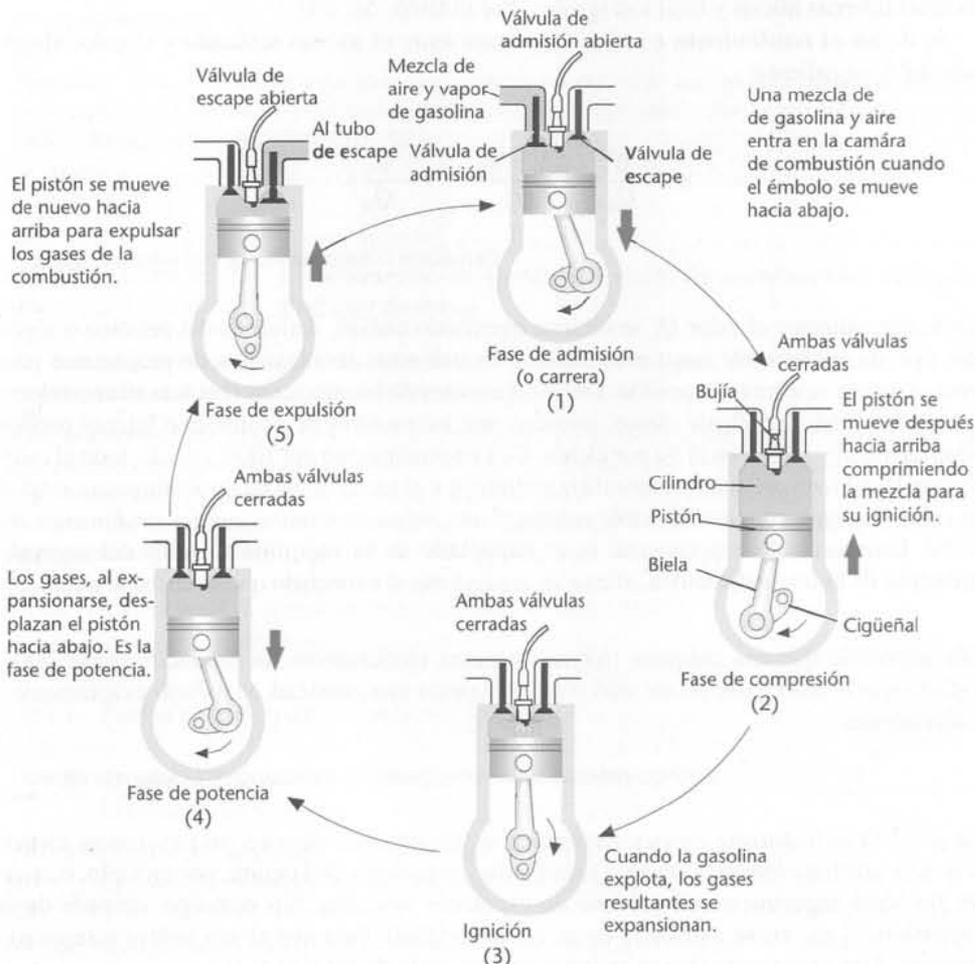
El estudio del rendimiento de las máquinas térmicas dio origen a los primeros enunciados claros del segundo principio de la termodinámica. Una **máquina térmica** es un dispositivo cíclico cuyo propósito es convertir la máxima cantidad posible de calor en trabajo. Todas ellas contienen una **sustancia de trabajo** (agua en la máquina de vapor, aire y vapor de gasolina en los motores de combustión interna) que absorbe una cantidad de calor  $Q_h$ , realiza el trabajo  $W$  y cede el calor  $Q_c$  cuando vuelve a su estado inicial, en donde

$Q_h$ ,  $W$  y  $Q_c$  representan cantidades positivas

Las primeras máquinas térmicas fueron máquinas de vapor, inventadas en el siglo XVIII para bombear el agua de las minas de carbón. Hoy las máquinas de vapor se utilizan para generar electricidad. En una máquina de vapor típica se calienta agua a una presión muy elevada (normalmente hasta varios cientos de atmósferas) hasta que se vaporiza dando vapor de agua a temperatura alta (del orden de 500 °C) (figura 19.1). El vapor se expande contra un pistón (o las palas de una turbina) realizando trabajo, escapa después a una temperatura mucho menor y se enfría aún más en el condensador, donde se le extrae calor para producir su condensación. A continuación el agua se bombea e introduce de nuevo en la caldera, donde se calienta otra vez.

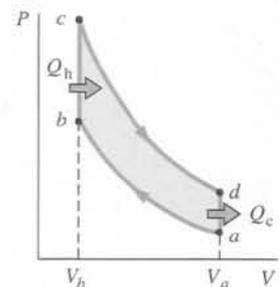


**Figura 19.1** Esquema de una máquina de vapor. El vapor a alta presión procedente de la caldera realiza trabajo contra el pistón.

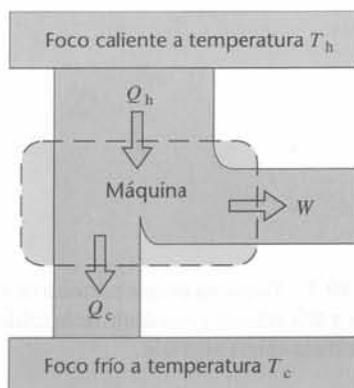


**Figura 19.2** Máquina de combustión interna. En algunos motores de inyección, el carburante se inyecta directamente en el cilindro en lugar de hacerlo en la corriente de aire.

La figura 19.2 es un diagrama esquemático de otro tipo de máquina térmica. Es la máquina de combustión interna utilizada por la mayoría de los automóviles. Con la válvula de escape cerrada, una mezcla de vapor de gasolina y aire entra en la cámara de combustión a medida que el pistón se mueve hacia abajo en la fase de admisión. La mezcla es después comprimida y explota por la acción de una chispa creada en la bujía. Los gases calientes se expansionan contra el pistón, que desciende en la llamada fase de potencia, realizando trabajo. Los gases se expulsan a continuación por la válvula de escape y el ciclo se repite. Un modelo idealizado de estos procesos en la máquina de combustión interna constituye el **ciclo de Otto** que se muestra en la figura 19.3.



**Figura 19.3** Ciclo de Otto correspondiente a una máquina de combustión interna. La mezcla de aire-gasolina entra en *a* y se comprime adiabáticamente hasta *b*. Entonces se calienta (al quemarse debido a la chispa que salta en la bujía) a volumen constante hasta *c*. La fase de potencia está representada por la expansión adiabática desde *c* a *d*. El enfriamiento a volumen constante desde *d* a *a* representa la expulsión de los gases quemados y la admisión de una nueva mezcla de aire-gasolina.



**Figura 19.4** Representación esquemática de una máquina térmica. La máquina extrae calor  $Q_h$  de un foco caliente a temperatura  $T_h$ , realiza trabajo  $W$ , y elimina calor  $Q_c$  a un foco frío a temperatura  $T_c$ .



Con el fin de extraer calor del motor y reducir su temperatura, el "dragster" de la figura dispone de un sistema de escape múltiple.

La figura 19.4 nos muestra de forma esquemática una máquina o motor térmico. El calor que entra  $Q_h$  procede de un foco caliente a temperatura  $T_h$ ; el calor que se escapa  $Q_c$  se cede a un foco térmico a una temperatura inferior  $T_c$ . Un **foco caliente o frío** es un sistema idealizado que tiene una capacidad calorífica tan grande que puede absorber o ceder calor sin una variación apreciable de su temperatura. En la práctica, un combustible fósil que se quema suele actuar como foco de alta temperatura, y la atmósfera del entorno, o un lago, suelen actuar como focos de baja temperatura. La aplicación del primer principio de la termodinámica ( $\Delta U = Q + W$ ) da

$$W = Q_h - Q_c \quad (19.1)$$

en donde  $W$  es el trabajo realizado *por* la máquina en un ciclo completo,  $Q_h - Q_c$  es la energía total en forma de calor transferida a la máquina durante un ciclo y  $\Delta U$  es la variación de la energía interna de la máquina (incluyendo la sustancia de trabajo) también durante un ciclo. Como los estados inicial y final de la máquina en un ciclo completo coinciden, las energías internas inicial y final son iguales. Por lo tanto,  $\Delta U = 0$ .

Se define el **rendimiento**  $\varepsilon$  como el cociente entre el trabajo realizado y el calor absorbido del foco caliente:

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \quad (19.2)$$

DEFINICIÓN — RENDIMIENTO DE UNA MÁQUINA TÉRMICA

Como normalmente el calor  $Q_h$  se obtiene quemando carbón, derivados del petróleo o algún otro tipo de combustible que cuesta dinero, las máquinas térmicas han de proyectarse para tener el mayor rendimiento posible. Los rendimientos de las máquinas térmicas tienen valores típicos del orden del 40 por ciento, mientras que los motores de combustión interna pueden alcanzar valores próximos al 50 por ciento. Con un rendimiento del 100% ( $\varepsilon = 1$ ), todo el calor absorbido del foco caliente se convertiría en trabajo y el foco frío no recibiría ninguna cantidad de calor. Sin embargo, *es imposible construir una máquina térmica con un rendimiento del 100%*. Este resultado experimental es el **enunciado de la máquina térmica del segundo principio de la termodinámica**, el cual es equivalente al enunciado que se atribuye a Kelvin:

Es imposible que una máquina térmica funcione cíclicamente sin producir *ningún otro efecto* que extraer calor de un solo foco realizando una cantidad de trabajo exactamente equivalente.

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA: ENUNCIADO DE LA MÁQUINA TÉRMICA

❗ La palabra *cíclicamente* en este enunciado es importante, pues en un proceso no cíclico sí que es posible convertir el calor totalmente en trabajo. Así ocurre, por ejemplo, cuando un gas ideal experimenta un proceso de expansión isoterma. Sin embargo, después de la expansión, el gas no se encuentra en su estado original. Para que el gas vuelva a su estado original, debe realizarse sobre él un trabajo y una parte de calor se pierde.

Esencialmente, el segundo principio nos dice que si queremos extraer energía de un foco térmico para realizar trabajo, tenemos que disponer de un foco más frío en el que pueda eliminarse parte de la energía. Si esto no fuese cierto, podría proyectarse una máquina térmica para su empleo en un barco que funcionaría extrayendo calor del océano y transformándolo en trabajo para mover el barco. Desgraciadamente, este enorme depósito de energía no resulta utilizable para este empleo, a no ser que se encuentre otro foco más frío a donde enviar el calor a eliminar. (Teóricamente es posible que una máquina térmica funcione entre la superficie más caliente del agua del océano y el agua más fría a grandes profundidades, pero hasta ahora no ha surgido un esquema práctico para utilizar esta diferencia de temperaturas como fuente de energía.) El problema reside en que para convertir íntegramente la energía térmica (el calor), totalmente desordenada, a una sola temperatura en la energía perfectamente ordenada de un objeto en movimiento (sin otros cambios en la fuente u objeto), debe utilizarse otro foco frío.

**EJEMPLO 19.1** | Rendimiento de una máquina térmica

En cada ciclo una máquina térmica absorbe 200 J de calor de un foco caliente, realiza trabajo y cede 160 J a un foco frío. ¿Cuál es su rendimiento?

**Planteamiento del problema** Utilizaremos la definición del rendimiento de una máquina térmica (ecuación 19.2).

- |  |  |
|--|--|
| 1. El rendimiento es el cociente entre el trabajo realizado y el calor absorbido:                        | $\varepsilon = \frac{W}{Q_h}$  |
| 2. El calor absorbido se conoce:   | $Q_h = 200 \text{ J}$  |
| 3. El trabajo realizado se deduce del primer principio:  | $W = Q_h - Q_c = 200 \text{ J} - 160 \text{ J} = 40 \text{ J}$                           |
| 4. Reemplazando $Q_h$ y $W$ por sus valores en la expresión de $\varepsilon$ , se deduce el rendimiento: | $\varepsilon = \frac{W}{Q_h} = \frac{40 \text{ J}}{200 \text{ J}} = 0,20 = \boxed{20\%}$ |

**Ejercicio** Una máquina térmica posee un rendimiento del 35%. (a) ¿Cuánto trabajo realiza por ciclo si absorbe 150 J de calor del foco caliente por ciclo? (b) ¿Cuánto calor no se aprovecha en cada ciclo? (Respuestas (a) 52,5 J, (b) 97,5 J.)

**EJEMPLO 19.2** | Rendimiento de un motor ideal de combustión interna. El Ciclo de Otto*¡INTÉNTELO USTED MISMO!*

(a) Determinar el rendimiento del ciclo de Otto indicado en la figura 19.3. (b) Expresar la respuesta en función del cociente de volúmenes  $r = V_d/V_b = V_d/V_c$ .

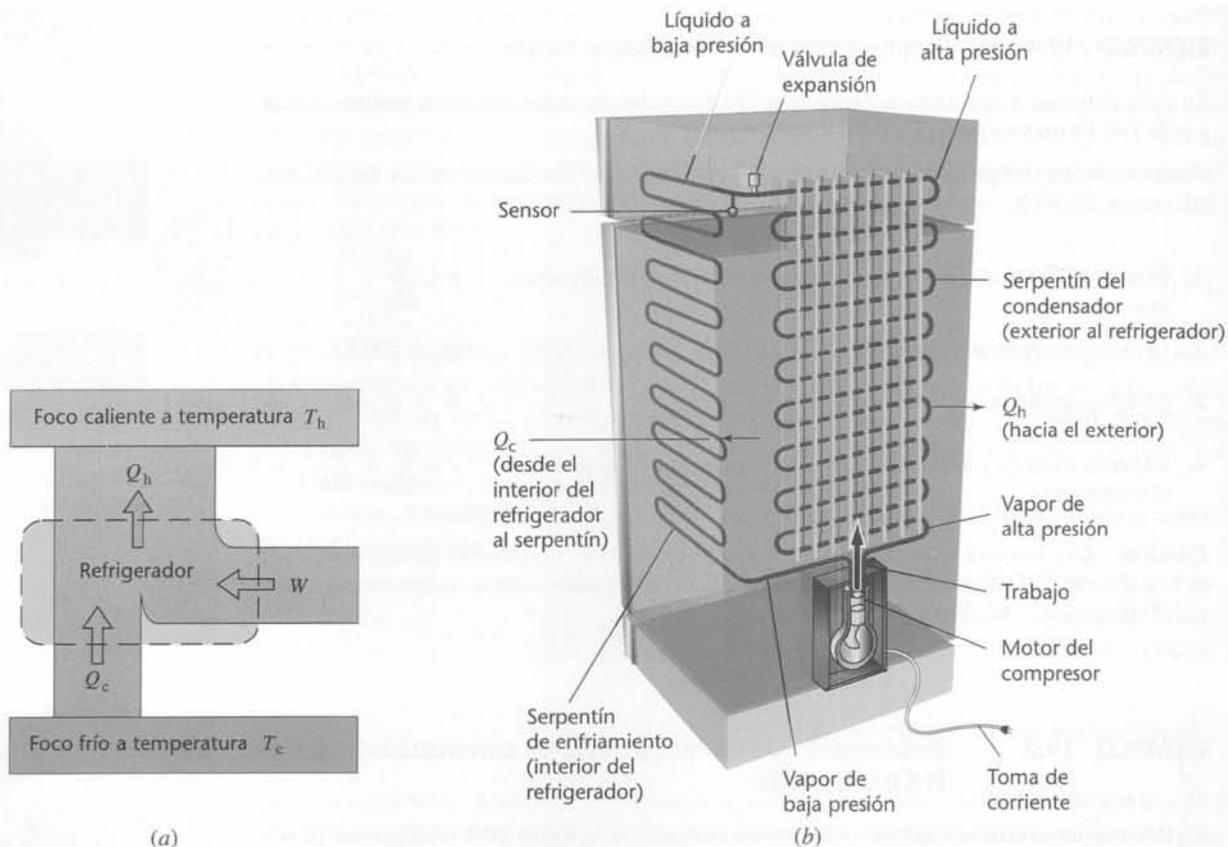
**Planteamiento del problema** (a) Para determinar  $\varepsilon$  debemos conocer previamente  $Q_h$  y  $Q_c$ . La transferencia de calor tiene lugar solamente durante los dos procesos a volumen constante,  $b-c$  y  $d-a$ . Conocidos  $Q_h$  y  $Q_c$  se puede determinar  $\varepsilon$  en función de las temperaturas  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $T_c$  y  $T_d$ . (b) Las temperaturas se relacionan con los volúmenes mediante la expresión  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$  para procesos adiabáticos.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

**Pasos****Respuestas**

- |   |   |
|---|---|
| (a) 1. Escribir el rendimiento en función de $Q_h$ y $Q_c$ .  | $\varepsilon = 1 - \frac{Q_{\text{frío}}}{Q_{\text{caliente}}} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h}$                             |
| 2. El calor que se cede tiene lugar a volumen constante de $d$ a $a$ . Expresar $Q_c$ en función de $C_v$ y las temperaturas $T_a$ y $T_d$ .    | $Q_c =  Q_{d \rightarrow a}  = C_v  T_a - T_d  = C_v (T_d - T_a)$   |
| 3. El calor que se absorbe tiene lugar a volumen constante de $b$ a $c$ . Expresar $Q_h$ en función de $C_v$ y las temperaturas $T_c$ y $T_b$ . | $Q_h = Q_{b \rightarrow c} = C_v (T_c - T_b)$   |
| 4. Sustituir estos valores de $Q_c$ y $Q_h$ para determinar el rendimiento en función de las temperaturas $T_a$ , $T_b$ , $T_c$ y $T_d$ .       | $\varepsilon = 1 - \frac{T_d - T_a}{T_c - T_b}$   |
| (b) 1. Relacionar $T_c$ con $T_d$ mediante las ecuaciones $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ y $V_d/V_c = r$ .                                  | $T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}$<br>$T_c = T_d \frac{V_d^{\gamma-1}}{V_c^{\gamma-1}} = T_d r^{\gamma-1}$ |
| 2. Relacionar $T_b$ y $T_a$ como en el paso anterior.   | $T_b = T_a r^{\gamma-1}$  |
| 3. Mediante estas relaciones eliminar $T_c$ y $T_b$ de $\varepsilon$ en (a), de modo que $\varepsilon$ se exprese en función de $r$ .           | $\varepsilon = 1 - \frac{T_d - T_a}{T_d r^{\gamma-1} - T_a r^{\gamma-1}} = \boxed{1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}}$    |

**Observación** La razón  $r$  (volumen antes de la compresión/volumen después de la compresión) se denomina *razón de compresión*.



**Figura 19.5** (a) Representación esquemática de un refrigerador. El refrigerador extrae energía térmica  $Q_c$  de un foco frío y cede calor  $Q_h$  a un foco caliente, utilizando para ello un trabajo  $W$ . (b) Un refrigerador real.

## 19.2 Refrigeradores y segundo principio de la termodinámica

La figura 19.5a es una representación esquemática de un **refrigerador**, el cual es esencialmente una máquina térmica que funciona en sentido inverso. El refrigerador extrae calor de su interior (foco frío) y lo cede al medio (foco caliente). La experiencia demuestra que en esta transferencia siempre debe consumirse cierta cantidad de trabajo. Este resultado constituye el **enunciado del refrigerador del segundo principio de la termodinámica**, que es otra manera de expresar el enunciado de Clausius:

Es imposible que un refrigerador funcione cíclicamente sin producir *ningún otro efecto* que la transferencia de calor de un objeto frío a otro caliente.

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA: ENUNCIADO DEL REFRIGERADOR

Si esta afirmación no fuese cierta, sería en principio posible enfriar nuestros domicilios en verano con un refrigerador que bombease el calor hacia el exterior sin utilizar electricidad o algún otro tipo de energía.

Una medida de la eficiencia de un refrigerador es la razón  $Q_c/W$  del calor extraído del foco de baja temperatura y el trabajo realizado sobre el refrigerador. (Este trabajo es igual a la energía eléctrica que procede de la toma de corriente de la pared.) La razón  $Q_c/W$  recibe el nombre de **coeficiente de eficiencia**

$$\eta = \frac{Q_c}{W} \quad (19.3)$$

DEFINICIÓN — COEFICIENTE DE EFICIENCIA (REFRIGERADOR)



Cuanto mayor es el coeficiente de eficiencia, mejor es el refrigerador. Los refrigeradores ordinarios tienen coeficientes del orden de 5 ó 6. En función de esta razón, el enunciado del refrigerador del segundo principio afirma que el coeficiente de eficiencia de un refrigerador no puede ser infinito.

### EJEMPLO 19.3 | Fabricación de cubitos de hielo

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

Una hora antes de que empiecen a llegar los invitados nos damos cuenta de que hemos olvidado comprar cubitos de hielo para las bebidas. Rápidamente ponemos un litro de agua a  $10^\circ\text{C}$  en la bandeja de los cubitos y la colocamos en el congelador. ¿Tendremos a tiempo el hielo para los invitados? En la etiqueta de especificaciones del refrigerador consta que el aparato tiene un coeficiente de eficiencia de 5,5 y una potencia de 550 W. Se estima que sólo el 10% de la potencia se emplea para fabricar los cubitos.

**Planteamiento del problema** El trabajo es igual a la potencia multiplicada por el tiempo. Como se nos da la potencia, hemos de hallar el trabajo para determinar el tiempo. El trabajo está relacionado con  $Q_c$  por la ecuación 19.3. Para obtener el valor de  $Q_c$  hemos de calcular cuánto calor se ha de extraer del agua.

1. El tiempo está relacionado con la potencia disponible y el trabajo requerido:

$$P = W/t$$

$$t = W/P$$

2. El trabajo está relacionado con el coeficiente de eficiencia y el calor extraído:

$$W = \frac{Q_c}{\eta}$$

3. El calor  $Q_c$  extraído del interior del refrigerador es igual al calor  $Q_1$  extraído del agua para enfriarla más el calor  $Q_2$  que se ha de extraer del agua para congelarla:

$$Q_c = Q_1 + Q_2$$

4. El calor  $Q_1$  necesario para enfriar 1 L de agua (masa 1 kg) en  $10^\circ\text{C}$  ( $\Delta T = 10\text{ K}$ ) es:

$$Q_1 = mc \Delta T = (1\text{ kg})(4,18\text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}))(10\text{ K}) = 41,8\text{ kJ}$$

5. El calor  $Q_2$  necesario para congelar el agua en cubitos de hielo es:

$$Q_2 = mL_f = (1\text{ kg})(333,5\text{ kJ}/\text{kg}) = 333,5\text{ kJ}$$

6. La suma de estos calores nos da  $Q_c$ :

$$Q_c = 41,8\text{ kJ} + 333,5\text{ kJ} = 375,3\text{ kJ} \approx 375\text{ kJ}$$

7. Sustituyendo  $Q_c$  en el paso 2 se determina el trabajo  $W$ :

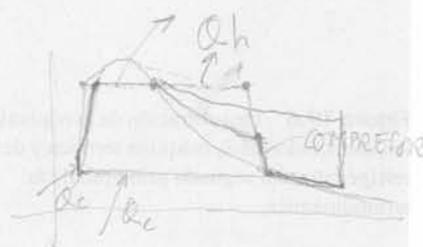
$$W = \frac{Q_c}{\eta} = \frac{375\text{ kJ}}{5,5} = 68,2\text{ kJ}$$

8. El tiempo  $t$  se obtiene utilizando este valor del trabajo  $W$  y el de la potencia disponible, 55 W:

$$t = \frac{W}{P} = \frac{68,2\text{ kJ}}{55\text{ J/s}} = 1,24\text{ ks} \times \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = \boxed{20,7\text{ min}}$$

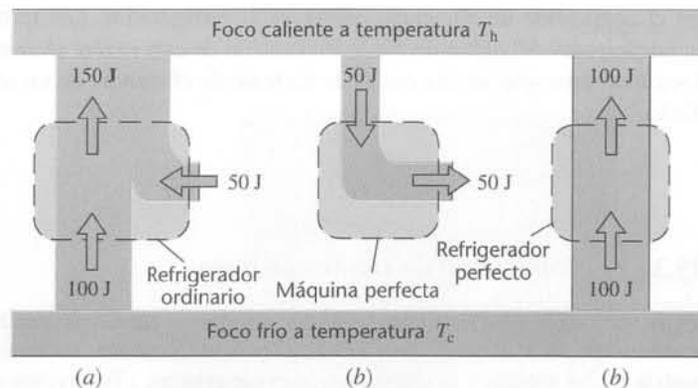
**Observación** Hay tiempo suficiente para fabricar cubitos de hielo. Si hubiésemos hecho el cálculo antes de poner el agua en el refrigerador podríamos incluso haber casi triplicado la cantidad de agua a congelar.

**Ejercicio** Un refrigerador tiene un coeficiente de eficiencia igual a 4,0. ¿Cuánto calor hay que ceder al foco caliente si se extraen 200 kJ del foco frío? (Respuesta 250 kJ.)



## 19.3 Equivalencia entre los enunciados de la máquina térmica y del refrigerador

Aunque los enunciados de la máquina térmica y del refrigerador (o enunciados de Kelvin y Clausius respectivamente) del segundo principio de la termodinámica parecen muy diferentes, son en realidad equivalentes. Puede demostrarse esta equivalencia comprobando que si se supone falso uno cualquiera de ellos, el otro debe ser también falso. Utilizaremos un ejemplo numérico para mostrar que si el enunciado de la máquina térmica es falso, el del refrigerador resulta a su vez falso.



(a) Refrigerador ordinario que extrae 100 J de un foco frío y cede 150 J a un foco caliente, requiriendo el consumo de 50 J de trabajo.

(b) Máquina térmica perfecta que viola el enunciado de la máquina térmica del segundo principio extrayendo 50 J del foco caliente y convirtiéndolos completamente en trabajo.

(b) El refrigerador ordinario de (a) y la máquina térmica perfecta de (b) trabajando juntos constituyen un refrigerador perfecto que viola el enunciado del refrigerador del segundo principio transfiriendo 100 J de energía del foco frío al foco caliente sin producir ningún otro efecto.

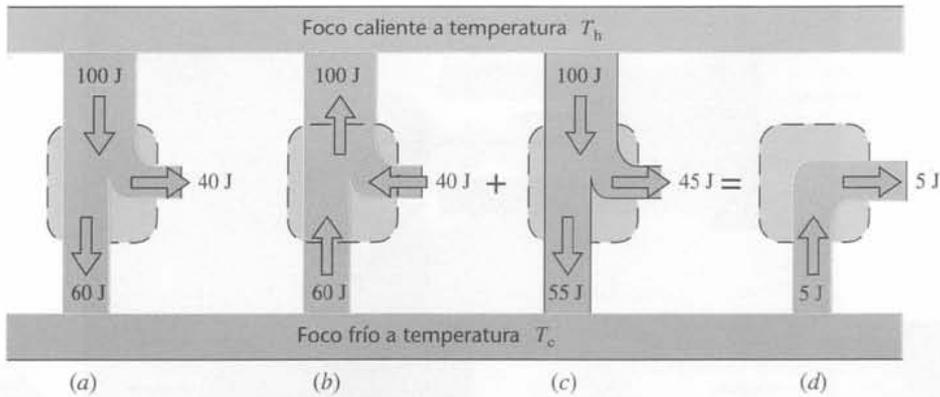
**Figura 19.6** Demostración de la equivalencia de los enunciados de la máquina térmica y del refrigerador del segundo principio de la termodinámica.

En la figura 19.6a puede verse un refrigerador ordinario que utiliza 50 J de trabajo para extraer 100 J de energía en forma de calor de un foco frío, cediendo 150 J a un foco caliente. Si no fuese cierto el enunciado de la máquina térmica del segundo principio de la termodinámica, podríamos disponer de una máquina perfecta que extrajese energía del foco caliente convirtiéndola completamente en trabajo con un rendimiento del 100 por ciento. Esta máquina podría utilizarse para extraer 50 J de energía del foco caliente y obtener en consecuencia 50 J de trabajo (figura 19.6b). Entonces, si empleamos esta máquina térmica perfecta en unión con el refrigerador ordinario, se podría construir un refrigerador perfecto que transfiriese 100 J de energía en forma de calor del foco frío al foco caliente sin requerir el consumo de trabajo, como se ilustra en la figura 19.6c. Así se violaría el enunciado del refrigerador del segundo principio de la termodinámica. Por consiguiente, si el enunciado de la máquina térmica es falso, el del refrigerador debe ser asimismo falso. Análogamente, puede demostrarse que si existiese un refrigerador perfecto, podría utilizarse, junto con una máquina térmica ordinaria, para construir una máquina térmica perfecta. Así pues, si es falso el enunciado del refrigerador, también lo es el de la máquina térmica. Se deduce entonces que si uno cualquiera de los enunciados es verdadero, el otro debe ser igualmente cierto. Por consiguiente, ambos son equivalentes.

## 19.4 La máquina de Carnot

Hemos visto que, de acuerdo con el segundo principio de la termodinámica, es imposible que una máquina térmica que funciona entre dos focos térmicos tenga un rendimiento del 100 por ciento. Entonces, ¿cuál es el rendimiento máximo posible para esta máquina? Esta cuestión fue contestada por un joven ingeniero francés en 1824, Sadi Carnot, antes de que se hubieran establecido el primer principio o el segundo principio de la termodinámica. Carnot dedujo que una *máquina reversible* es la máquina más eficiente que puede operar entre dos focos térmicos determinados. Este resultado se conoce como el teorema de Carnot:

Ninguna máquina térmica que funcione entre dos focos térmicos dados puede tener un rendimiento mayor que una máquina reversible que opere entre estos dos focos.



**Figura 19.7** Demostración del teorema de Carnot. (a) Una máquina térmica reversible con un rendimiento del 40% extrae 100 J de un foco caliente, realiza 40 J de trabajo y cede 60 J al foco frío. (b) Si la misma máquina funciona al revés, es decir como un refrigerador, se han de hacer 40 J de trabajo para extraer 60 J del foco frío y ceder 100 J al foco caliente. (c) Una hipotética máquina térmica que funciona entre los mismos focos con un rendimiento del 45%, el cual es mayor que el de la máquina reversible (a). (d) El efecto neto del funcionamiento conjunto de la máquina (c) con el refrigerador (b) es el mismo que el de una máquina térmica perfecta que extrae 5 J del foco frío y los convierte completamente en trabajo sin ningún otro efecto, violando así el segundo principio de la termodinámica. Por consiguiente, la máquina reversible (a) es la máquina de mayor rendimiento que puede operar entre estos dos focos térmicos.

Una máquina térmica reversible que funciona cíclicamente entre dos focos térmicos se denomina **máquina de Carnot** y su ciclo es el **ciclo de Carnot**. La figura 19.7 ilustra el teorema de Carnot con un ejemplo numérico.

Si no hay ninguna máquina que pueda tener un rendimiento mayor que la máquina de Carnot, se deduce que todas las máquinas reversibles que funcionen entre los dos mismos focos deben tener el mismo rendimiento. Este rendimiento, que se denomina **rendimiento de Carnot**, debe ser independiente de las sustancias de trabajo (es decir, de los sistemas que efectúan el ciclo) que empleen las máquinas y depende únicamente de la temperatura de los focos.

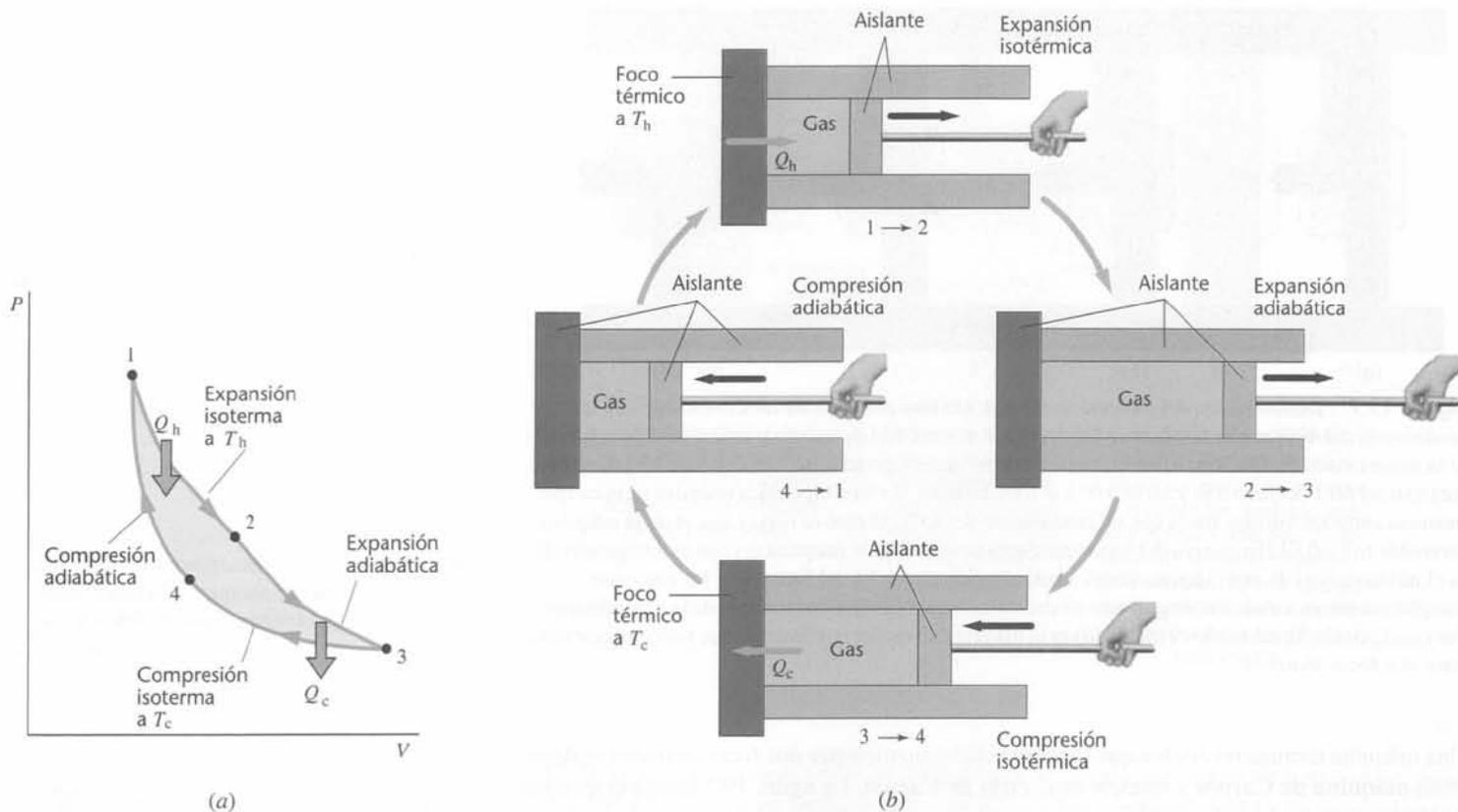
Examinemos lo que hace que un proceso sea reversible o irreversible. De acuerdo con el segundo principio, el calor fluye desde objetos calientes hasta objetos fríos y nunca en sentido inverso. Por lo tanto, la conducción de calor de un objeto caliente a uno frío *no* es reversible. Del mismo modo, el rozamiento puede transformar trabajo en calor, pero nunca calor en trabajo. La conversión de trabajo en calor por medio del rozamiento *no* es reversible. El rozamiento y el resto de fuerzas disipativas transforman energía mecánica en energía térmica de manera irreversible. Se presenta un tercer tipo de irreversibilidad cuando un sistema pasa a través de estados de no equilibrio, como se da el caso si existen turbulencias en un gas o en una explosión. Para que un proceso sea reversible, debe poderse desplazar el sistema hacia el punto inicial en sentido inverso pasando a través de los mismos estados de equilibrio.

A partir de estas consideraciones y de los enunciados del segundo principio de la termodinámica, podemos indicar algunas condiciones que son necesarias para que un proceso sea reversible.

1. La energía mecánica no debe transformarse en energía térmica por rozamiento, fuerzas viscosas u otras fuerzas disipativas.
2. La transferencia de energía en forma de calor sólo puede ocurrir entre sistemas a la misma temperatura (o infinitesimalmente próximos a la misma temperatura).
3. El proceso debe ser cuasiestático, de modo que el sistema se encuentre siempre en un estado de equilibrio (o infinitesimalmente cerca de un estado de equilibrio.)

#### CONDICIONES DE REVERSIBILIDAD

Todo proceso que viole alguna de las condiciones anteriores es irreversible. La mayoría de los procesos naturales son irreversibles. Para conseguir un proceso reversible, debe tenerse gran cuidado en eliminar el rozamiento y otras fuerzas disipativas y en hacer que el proceso sea cuasiestático. Como esto no puede conseguirse nunca por completo, un proceso



**Figura 19.8** (a) Ciclo de Carnot para un gas ideal:

*Etapas 1* Se absorbe calor de un foco caliente a temperatura  $T_h$  durante la expansión isoterma desde el estado 1 al estado 2.

*Etapas 2* El gas se expande adiabáticamente desde el estado 2 al 3 hasta que su temperatura se reduce a  $T_c$ .

*Etapas 3* El gas cede calor al foco frío cuando se comprime isotérmicamente a  $T_c$  del estado 3 al estado 4.

*Etapas 4* El gas se comprime adiabáticamente hasta que su temperatura es de nuevo  $T_h$ .

(b) Durante cada etapa se realiza trabajo sobre el gas o es realizado por éste. El trabajo resultante durante el ciclo se representa por el área sombreada. Todos los procesos son reversibles. Todas las etapas son cuasiestáticas.

reversible es una idealización parecida a la del movimiento sin rozamiento de los problemas de mecánica. Sin embargo, podemos hacer en la práctica que un proceso se aproxime mucho a la reversibilidad.

Ahora estamos en condiciones de comprender las características de un ciclo de Carnot, que es un ciclo reversible entre dos focos solamente. Como toda transferencia de calor debe realizarse isotérmicamente para que el proceso sea reversible, la absorción de calor del foco caliente debe realizarse de forma isoterma. La siguiente etapa debe ser una expansión adiabática cuasiestática hasta la temperatura más baja del foco frío. A continuación se cede calor isotérmicamente al foco frío. Finalmente se produce una compresión adiabática cuasiestática hasta alcanzar la temperatura más alta del foco caliente. El ciclo de Carnot consta, pues, de las cuatro etapas reversibles siguientes:

1. Una absorción isoterma y cuasiestática de calor de un foco caliente.
2. Una expansión adiabática y cuasiestática hasta una temperatura más baja.
3. Una cesión isoterma y cuasiestática de calor a un foco frío.
4. Una compresión adiabática y cuasiestática hasta el estado original.

#### ETAPAS DE UN CICLO DE CARNOT

Para calcular el rendimiento de una máquina de Carnot, elegimos como sustancia de trabajo un material de propiedades conocidas —un gas ideal— y calculamos explícitamente el trabajo realizado sobre ella a lo largo de un ciclo de Carnot (figura 19.8). Como todos los ciclos de Carnot poseen el mismo rendimiento, independientemente de la sustancia de trabajo, nuestro resultado será válido de modo general.



Central eléctrica alimentada por carbón en Four Corners, Nuevo México (Estados Unidos).

El rendimiento de este ciclo (ecuación 19.2) es

$$\varepsilon = 1 - \frac{Q_c}{Q_h}$$

El calor  $Q_h$  se absorbe durante la expansión isoterma del estado 1 al estado 2. El primer principio de la termodinámica establece que  $\Delta U = Q + W$ . Para una expansión isoterma de un gas ideal,  $\Delta U = 0$ . Aplicando el primer principio a la expansión isoterma desde el estado 1 al estado 2 se obtiene que  $Q_h$  es igual al trabajo realizado por el gas en esa etapa:

$$Q_h = W_{\text{por el gas}} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_h}{V} dV = nRT_h \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_h \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Análogamente, el calor cedido al foco frío es igual al trabajo realizado sobre el gas durante la compresión isoterma a temperatura  $T_c$  desde el estado 3 al 4. Este trabajo tiene el mismo valor absoluto que el realizado por el gas si se expande del estado 4 al 3. El calor cedido vale, por lo tanto

$$Q_c = W_{\text{por el gas}} = nRT_c \ln \frac{V_3}{V_4}$$

El cociente entre estas cantidades de calor es

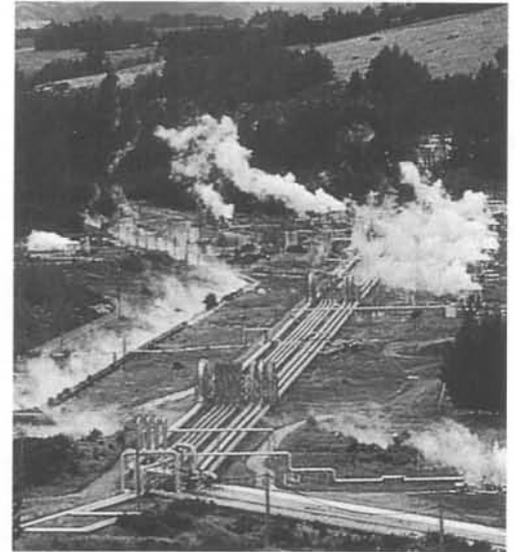
$$\frac{Q_c}{Q_h} = \frac{T_c \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_h \ln \frac{V_2}{V_1}} \quad (19.4)$$

Podemos relacionar las razones  $V_2/V_1$  y  $V_3/V_4$  utilizando la ecuación 18.37 correspondiente a una expansión adiabática cuasiestática. Aplicando esta ecuación a la expansión del estado 2 al 3, se obtiene

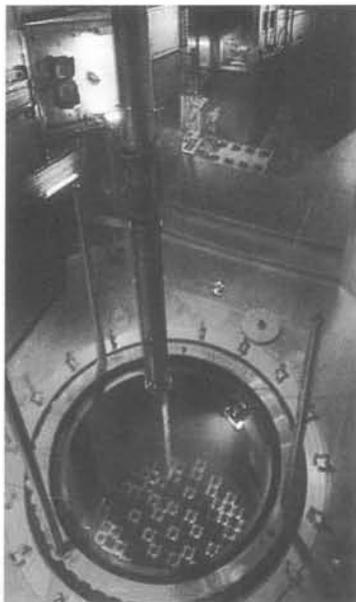
$$T_h V_2^{\gamma-1} = T_c V_3^{\gamma-1}$$

Análogamente, en el caso de la compresión adiabática del estado 4 al 1, tenemos

$$T_h V_1^{\gamma-1} = T_c V_4^{\gamma-1}$$



Central eléctrica en Wairakei (Nueva Zelanda), que transforma la energía geotérmica en electricidad.



Las barras de control se están insertando en este reactor nuclear en Tihange (Bélgica).



La energía solar se concentra y recoge individualmente para producir electricidad mediante estos heliostatos que se están probando en el Sandia National Laboratory (Estados Unidos).



Generador eléctrico experimental accionado por el viento en el Sandia National Laboratory (Estados Unidos). El tipo de hélice propulsora está proyectado para una transferencia óptima de la energía del viento a energía mecánica.

Dividiendo ambas ecuaciones, resulta

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Así se tiene

$$\frac{Q_c}{Q_h} = \frac{T_c \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_h \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_c}{T_h} \quad (19.5)$$

El rendimiento de Carnot  $\epsilon_c$  es, pues

$$\epsilon_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (19.6)$$

RENDIMIENTO DE CARNOT

La ecuación 19.6 demuestra que el rendimiento de Carnot es independiente de la sustancia de trabajo de la máquina que se considere: sólo depende de las temperaturas de los dos focos.

#### EJEMPLO 19.4 | Rendimiento de una máquina de vapor

Una máquina de vapor funciona entre un foco térmico a  $100^\circ\text{C} = 373\text{ K}$  y un foco frío a  $0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$ . (a) ¿Cuál es el máximo rendimiento posible de esta máquina? (b) Si la máquina funciona en sentido inverso como un refrigerador, ¿cuál es su máximo coeficiente de eficiencia?

**Planteamiento del problema** El rendimiento máximo corresponde al ciclo de Carnot dado por la ecuación 19.6. Para determinar el máximo coeficiente de eficiencia, se utiliza la definición de rendimiento ( $\epsilon = W/Q_h$ ), la definición de  $\eta$  ( $\eta = Q_c/W$ ) y la ecuación 19.5.

(a) El máximo rendimiento es el del ciclo de Carnot:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{273 \text{ K}}{373 \text{ K}} = 0,268 = \boxed{26,8\%}$$

(b) 1. Escribir la expresión para  $\eta$  si la máquina funciona en sentido inverso en un ciclo:

$$\eta = \frac{Q_c}{W}$$

2. Escribir la expresión para  $\varepsilon$  si la máquina funciona en sentido directo en un ciclo. (Como para la máxima eficiencia posible la máquina es reversible, los valores de  $Q_h$ ,  $Q_c$  y  $W$  son los mismos cualquiera que sea el sentido de funcionamiento):

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_h}$$

3. A partir del paso 2, despejar  $W$  y sustituir el resultado en la expresión del paso 1:

$$\eta = \frac{Q_c}{W} = \frac{Q_c}{\varepsilon Q_h}$$

4. Empleando la ecuación 19.5 y el resultado de (a) obtener el valor de  $\eta$ :

$$\eta = \frac{Q_c}{\varepsilon Q_h} = \frac{T_c}{\varepsilon T_h} = \frac{273 \text{ K}}{0,268(373 \text{ K})}$$

$$\eta = \boxed{2,73}$$

**Observaciones** Aunque el rendimiento de la máquina parece muy bajo, es el máximo posible para toda máquina que opere entre estas temperaturas. Las máquinas reales tienen aún menores rendimientos debido al rozamiento, la conducción térmica y otros procesos irreversibles. De igual modo, los refrigeradores reales tienen un menor coeficiente de eficiencia. Puede observarse que el coeficiente de eficiencia de un refrigerador de Carnot es  $T_c/\Delta T$ .

El rendimiento de Carnot establece un límite superior de posibles rendimientos y, por lo tanto, es útil conocerlo. Por ejemplo, hemos calculado en el ejemplo 19.4 que el rendimiento de Carnot es 26,8%. Esto quiere decir que por mucho que se reduzca el rozamiento y otras pérdidas irreversibles, el mejor rendimiento obtenido entre focos térmicos a 373 K y 273 K es del 26,8 por ciento. Por lo tanto, se ha de reconocer que una máquina que funciona entre esas temperaturas con un rendimiento del 25 por ciento es una máquina muy buena.

### EJEMPLO 19.5 | Trabajo perdido por un máquina

Una máquina consume 200 J de un foco caliente a 373 K, realiza 48 J de trabajo y cede 152 J a un foco frío a 273 K. ¿Cuánto trabajo se “pierde” por ciclo debido a la irreversibilidad de la máquina?

**Planteamiento del problema** La diferencia entre el trabajo máximo que puede realizarse (ciclo de Carnot) y 48 J será el trabajo perdido.

1. El trabajo perdido es la cantidad máxima de trabajo que puede realizarse utilizando una máquina de Carnot menos el trabajo realmente obtenido:

$$W_{\text{perdido}} = W_{\text{máx}} - W$$

2. La cantidad máxima de trabajo que puede realizarse es:

$$W_{\text{máx}} = \varepsilon_C Q_h$$

3. El trabajo perdido es entonces:

$$W_{\text{perdido}} = \varepsilon_C Q_h - W$$

4. El rendimiento de Carnot puede expresarse en función de las temperaturas:

$$\varepsilon_C = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

5. Sustituyendo el valor de  $\varepsilon_C$  se obtiene:

$$W_{\text{perdido}} = \left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right) Q_h - W = \left(1 - \frac{273 \text{ K}}{373 \text{ K}}\right) (200 \text{ J}) - 48 \text{ J}$$

$$= \boxed{5,6 \text{ J}}$$

**Observaciones** Los 5,6 J de energía de la respuesta final no se han “perdido” en el universo, ya que la energía total se conserva. Sin embargo, la máquina real cede 5,6 J de energía al foco frío que podrían haberse convertido en trabajo útil si la máquina hubiera sido ideal, es decir, reversible.

**EJEMPLO 19.6** | Pérdida de trabajo entre focos térmicos

Si se transmiten por conducción 200 J de calor de un foco térmico a 373 K a otro a 273 K sin máquina térmica entre los focos ¿qué capacidad de producir trabajo se “pierde” en este proceso?

Vimos en el ejemplo anterior que una máquina de Carnot funcionando entre estos dos focos podría realizar 53,6 J de trabajo si extrayese 200 J del foco a 373 K y cediese el resto al foco de 273 K. Así pues, si se conducen 200 J directamente del foco caliente al foco frío sin realizar ningún trabajo, se “perderán” 53,6 J de esta energía en el sentido de que podrían haberse convertido en trabajo útil.

**Ejercicio** Una máquina de Carnot opera entre focos térmicos a 500 K y 300 K. (a) ¿Cuál es su rendimiento? (b) Si emplea 200 kJ de calor del foco caliente, ¿cuánto trabajo realiza? (Respuesta (a) 40%, (b) 80 kJ.)

**Ejercicio** Una máquina real trabaja entre focos térmicos a 500 K y 300 K. Emplea 500 kJ de calor del foco caliente y realiza 150 kJ de trabajo durante cada ciclo. ¿Cuál es su rendimiento? (Respuesta 30%.)

**La escala termodinámica o absoluta de temperaturas**

En el capítulo 17 definimos la escala de temperaturas del gas ideal en función de las propiedades de los gases a bajas densidades. Como el rendimiento de Carnot depende sólo de las temperaturas de los dos focos térmicos, puede utilizarse para definir la relación de las temperaturas de los focos, independientemente de las propiedades de cualquier sustancia. Definiremos la relación de las temperaturas absolutas de los focos caliente y frío en la forma

$$\frac{T_c}{T_h} = \frac{Q_c}{Q_h} \quad (19.7)$$

DEFINICIÓN DE TEMPERATURA TERMODINÁMICA

en donde  $Q_h$  es la energía extraída del foco caliente y  $Q_c$  la energía cedida al foco frío por una máquina de Carnot que funcione entre los dos focos. Así pues, para determinar la relación de temperaturas de los dos focos, disponemos una máquina reversible que funcione entre ellos y medimos el calor absorbido y cedido por cada uno de los focos durante un ciclo. La **temperatura termodinámica** está completamente determinada por la ecuación 19.7 y la elección de un punto fijo. Si el punto fijo se define igual a 273,16 K para el punto triple del agua, la escala termodinámica de temperaturas coincide con la escala de temperaturas del gas ideal en el intervalo de temperaturas en el cual puede utilizarse un termómetro de gases. Una temperatura que marque cero en el cero absoluto pertenece a una *escala absoluta de temperaturas*.

**\* 19.5 Bombas de calor**

Una **bomba de calor** es un refrigerador con un objetivo diferente. Lo característico de un refrigerador es enfriar un cuerpo o sistema de interés. Sin embargo, el objetivo de una bomba de calor es calentarlos. Por ejemplo, si utilizamos una bomba de calor para calentar una casa, lo que estamos haciendo es extraer calor del aire frío del exterior de la casa para cederlo al aire más cálido del interior. El objetivo es calentar el interior de la casa. Si se efectúa un trabajo  $W$  sobre una bomba de calor para extraer un calor  $Q_c$  del foco frío y ceder un calor  $Q_h$  al foco caliente, el coeficiente de eficiencia de la bomba de calor se define de la forma

$$\eta_{BC} = \frac{Q_h}{W} \quad (19.8)$$

DEFINICIÓN—COEFICIENTE DE EFICIENCIA (BOMBA DE CALOR)

Este coeficiente de eficiencia es distinto del definido para el refrigerador, el cual es  $Q_c/W$  (ecuación 19.3). Utilizando la relación  $W = Q_h - Q_c$ , la expresión (19.8) puede escribirse como

$$\eta_{BC} = \frac{Q_h}{Q_h - Q_c} = \frac{1}{1 - \frac{Q_c}{Q_h}} \quad (19.9)$$

Se obtiene el máximo coeficiente de eficacia utilizando una bomba de calor de Carnot. En este caso  $Q_c$  y  $Q_h$  están relacionados por la ecuación 19.5. Sustituyendo la fracción  $Q_c/Q_h$  por  $T_c/T_h$  en la ecuación 19.9, se obtiene para el coeficiente de eficiencia máximo

$$\eta_{BC \text{ máx}} = \frac{1}{1 - \frac{T_c}{T_h}} = \frac{T_h}{T_h - T_c} = \frac{T_h}{\Delta T} \quad (19.10)$$

en donde  $\Delta T$  es la diferencia de temperaturas entre los focos caliente y frío. Las bombas de calor y los refrigeradores reales tienen unos coeficientes de eficacia menores que  $\eta_{BC \text{ máx}}$  debido a los rozamientos, la conducción del calor y otros procesos irreversibles.

Los coeficientes de eficiencia del refrigerador y de la bomba de calor están relacionados, como puede verse utilizando  $Q_h = Q_c + W$  y las ecuaciones 19.3 y 19.8:

$$\eta_{BC} = \frac{Q_h}{W} = \frac{Q_c + W}{W} = 1 + \frac{Q_c}{W} = 1 + \eta \quad (19.11)$$

### EJEMPLO 19.7 | Una bomba de calor ideal

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Una bomba de calor ideal se utiliza para bombear calor desde el aire exterior a  $-5^\circ\text{C}$  hasta el suministro de aire caliente para el sistema de calefacción de una casa, que está a  $40^\circ\text{C}$ . ¿Cuánto trabajo se necesita para bombear 1 kJ de calor dentro de la casa?

**Planteamiento del problema** Utilizar la ecuación 19.11 con el coeficiente de eficiencia  $\eta_{BC \text{ máx}}$  calculado mediante la ecuación 19.10 para  $T_c = -5^\circ\text{C} = 268\text{ K}$  y  $\Delta T = 45\text{ K}$ .

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

1. Calcular el trabajo a partir de la ecuación 19.8:
2. Calcular  $\eta_{BC}$  a partir de la ecuación 19.10:
3. Despejar el trabajo:

#### Respuestas

$$W = \frac{Q_h}{\eta_{BC}}$$

$$\eta_{BC} = \eta_{BC \text{ máx}} = \frac{T_h}{\Delta T}$$

$$W = \frac{Q_h}{\eta_{BC}} = Q_h \frac{\Delta T}{T_h} = (1 \text{ kJ}) \frac{45 \text{ K}}{313 \text{ K}}$$

$$W = \boxed{0,144 \text{ kJ}}$$

**Observaciones** El coeficiente es  $\eta_{BC \text{ máx}} = T_h/\Delta T = 6,96$ . Es decir, la energía transferida dentro de la casa en forma de calor es 6,96 veces mayor que el trabajo realizado. (Sólo se necesitan 0,144 kJ de trabajo para bombear 1 kJ de calor al sistema de abastecimiento de aire caliente de la casa.)

## 19.6 Irreversibilidad y desorden

Existen muchos procesos irreversibles que no pueden describirse por los enunciados de la máquina térmica o del refrigerador del segundo principio; por ejemplo, un vaso de cristal que cae al suelo y se rompe o un globo que se pincha. Sin embargo, todos los procesos irreversibles tienen algo en común: el sistema más el medio que lo rodea tiende hacia un estado menos ordenado.

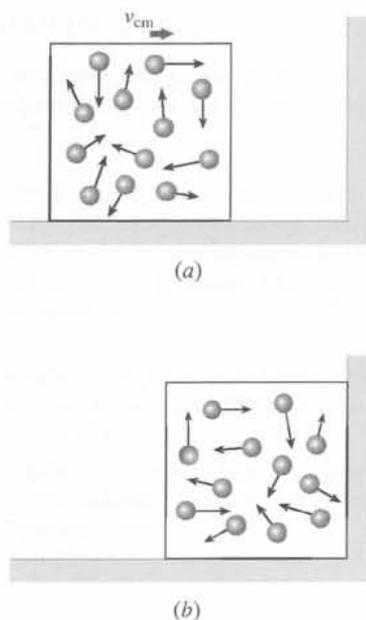


Figura 19.9

Consideremos una caja que contiene un gas de masa  $M$  a una temperatura  $T$  que se está moviendo sobre una mesa sin rozamiento con velocidad  $v_{cm}$  (figura 19.9a). La energía cinética total del gas tiene dos componentes. La primera es la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masas del gas,  $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ . Esta energía es una energía mecánica ordenada que puede convertirse completamente en trabajo. (Por ejemplo, si con una cuerda se sujetase un peso a la caja móvil por medio de una polea, esta energía podría utilizarse para levantar el peso.) La otra componente de la energía cinética del gas es la energía del movimiento de sus moléculas respecto al centro de masas. Se trata de la energía térmica interna del gas, que está relacionada con su temperatura,  $T$ , y es una energía aleatoria, no ordenada, que no puede convertirse totalmente en trabajo.

Supongamos ahora que la caja choca contra una pared fija y se detiene (figura 19.9b). Esta colisión inelástica es claramente un proceso irreversible. La energía mecánica ordenada del gas se convierte en energía interna aleatoria y la temperatura del gas se incrementa. Éste tendrá la misma energía total, pero ahora toda ella estará asociada al movimiento aleatorio de sus moléculas respecto al centro de masas del sistema, que en esta situación se encuentra en reposo. Así pues, el gas ha resultado menos ordenado (o más desordenado) y ha perdido algo de su capacidad para realizar trabajo.

## 19.7 Entropía

Existe una función termodinámica denominada **entropía**  $S$  que es una medida del desorden del sistema. Como la presión  $P$ , el volumen  $V$ , la temperatura  $T$  y la energía interna  $U$ , la entropía  $S$  es una función de estado del sistema. Lo mismo que ocurre con la energía interna, lo importante son las *variaciones* de la entropía. La variación de entropía  $dS$  de un sistema cuando pasa de un estado a otro se define por la expresión:

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} \quad (19.12)$$

DEFINICIÓN—CAMBIO DE ENTROPÍA

donde el numerador  $dQ_{rev}$  es la energía en forma de calor que debe transferirse al sistema en un proceso *reversible* para llevarlo del estado inicial al estado final. Si se extrae calor del sistema,  $dQ_{rev}$  es negativo y también lo es la variación de entropía del mismo.

El término  $dQ_{rev}$  no significa que deba tener lugar una transferencia de calor reversible para que cambie la entropía de un sistema. Realmente existen muchos casos en los que varía la entropía de un sistema aun cuando no exista ninguna transferencia de calor, por ejemplo, la del gas que colisiona contra la pared en la figura 19.9. La ecuación 19.12 nos da simplemente un método para *calcular* la diferencia de entropía entre dos estados de un sistema. Como la entropía es una función de estado, la variación de entropía de un sistema cuando pasa de un estado a otro depende únicamente de los estados inicial y final del mismo y no del proceso según el cual se produce el cambio.

### Entropía de un gas ideal

Ilustraremos ahora que  $dQ_{rev}/T$  es realmente la diferencial de una función de estado (aunque  $dQ_{rev}$  no lo sea). Consideremos un proceso cuasiestático reversible arbitrario en el que un gas ideal absorbe una cantidad de calor  $dQ_{rev}$ . De acuerdo con el primer principio,  $dQ_{rev}$  se encuentra relacionado con la variación de energía interna  $dU$  del gas y con el trabajo realizado sobre el gas ( $dW = -P dV$ ) mediante

$$dU = dQ_{rev} + dW = dQ_{rev} - P dV$$

En el caso de un gas ideal, podemos escribir  $dU$  en función de la capacidad calorífica,  $dU = C_v dT$ , y reemplazar, a partir de la ecuación de estado,  $P$  por  $nRT/V$ . Entonces

$$C_v dT = dQ_{rev} - nRT \frac{dV}{V} \quad (19.13)$$

La ecuación 19.13 no puede integrarse a menos que sepamos cómo depende  $T$  de  $V$ . Esto es precisamente otro modo de decir que  $dQ_{\text{rev}}$  no es una diferencial exacta de una función de estado  $Q_{\text{rev}}$ . Pero si dividimos ambos miembros de la ecuación por  $T$ , resulta

$$C_v \frac{dT}{T} = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} - nR \frac{dV}{V} \quad (19.14)$$

Como  $C_v$  depende solo de  $T$ , el primer miembro puede integrarse y el segundo término del segundo miembro también.<sup>1</sup> Por consiguiente,  $dQ_{\text{rev}}/T$  es la diferencial de una función, la función entropía  $S$ .

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \left( C_v \times \frac{dT}{T} \right) + nR \frac{dV}{V} \quad (19.15)$$

Para mayor sencillez, supondremos que  $C_v$  es constante. Integrando la ecuación 19.15 resulta

$$\Delta S = \int \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (19.16)$$

La ecuación 19.16 nos da la variación de entropía de un gas ideal que experimenta una expansión reversible desde un estado inicial de volumen  $V_1$  y temperatura  $T_1$  a un estado final de volumen  $V_2$  y temperatura  $T_2$ .

## Cambios de entropía en diversos procesos

**$\Delta S$  en la expansión isoterma de un gas ideal** Cuando un gas ideal experimenta una expansión isoterma,  $T_2 = T_1$  y su variación de entropía es

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (19.17)$$

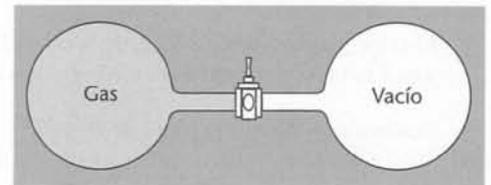
La variación de entropía del gas es positiva porque  $V_2$  es mayor que  $V_1$ . En este proceso, una cantidad de energía  $Q$  se transfiere en forma de calor desde el foco térmico al gas. Esta cantidad de calor es igual al trabajo realizado por el gas:

$$Q = W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (19.18)$$

La variación de entropía del gas es  $+Q/T$ . Como la cantidad de calor que abandona el foco a la temperatura  $T$  es la misma, la variación de entropía del foco es  $-Q/T$ . La variación neta de entropía del gas más el foco es cero. Designaremos como “universo” al sistema que se estudia más el medio que le rodea. Este ejemplo ilustra un resultado general:

En un proceso reversible, la variación de entropía del universo es nula.

**$\Delta S$  en la expansión libre de un gas ideal** En la expansión libre de un gas ideal expuesta en la sección 18.4, un gas está inicialmente confinado en un compartimiento de un recinto, el cual está conectado por una válvula con otro compartimiento donde se ha hecho el vacío. Todo el sistema tiene paredes rígidas y está térmicamente aislado del medio, de modo que el calor no puede entrar ni salir, ni puede realizarse ningún tipo de trabajo (figura 19.10). Si la válvula se abre, el gas se precipita hacia el recinto vacío y finalmente el gas alcanza el equilibrio térmico consigo mismo. Como no se realiza ningún trabajo y no se transfiere calor, la energía interna final del gas debe ser igual a su energía interna inicial. Si el gas es ideal, la temperatura final  $T$  es igual a la inicial.



**Figura 19.10** Expansión libre de un gas. Cuando la válvula se abre el gas se expande rápidamente hacia la cámara evacuada. Como no se realiza trabajo sobre el gas y el sistema en su conjunto está térmicamente aislado, las energías internas inicial y final del gas son iguales.

<sup>1</sup> Matemáticamente hablando, el factor  $1/T$  se denomina factor integrante de la ecuación 19.13.

A primera vista podríamos pensar que no hay cambio de entropía del gas, ya que no hay transferencia de calor. Este razonamiento es falso porque este proceso no es reversible y, por lo tanto, no podemos utilizar  $\int dQ/T$  para hallar la variación de entropía del gas. Sin embargo, los estados inicial y final del gas en la expansión libre son los mismos que los del gas en la expansión isoterma del ejemplo anterior. *Como la variación de entropía del sistema para cualquier proceso depende únicamente de los estados inicial y final del sistema, la variación de entropía en la expansión libre es la misma que en el caso de la expansión isoterma.* Si  $V_1$  es el volumen inicial del gas y  $V_2$  es su volumen final, la variación de entropía experimentada por el gas viene dada por la ecuación 19.17:

$$\Delta S_{\text{gas}} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

En este caso, no hay cambio de entropía en el medio y por lo tanto la variación de entropía del gas es también la variación de entropía del universo:

$$\Delta S_{\text{universo}} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (19.19)$$

Obsérvese que como  $V_2$  es mayor que  $V_1$ , la variación de entropía del universo para este proceso irreversible es positiva; es decir, la entropía del universo aumenta. Esto resulta ser también una propiedad general:

En un proceso irreversible, la entropía del universo aumenta.

Si el volumen final en la expansión libre fuese menor que el inicial, la entropía del universo disminuiría, pero esto no ocurre. Un gas no se contrae libremente por sí mismo hasta ocupar un volumen menor. Esto nos lleva a otro enunciado del segundo principio de la termodinámica:

En cualquier proceso, la entropía del universo nunca disminuye.

### EJEMPLO 19.8 | Expansión libre de un gas ideal

**Determinar la variación de entropía que tiene lugar en la expansión libre de 0,75 moles de un gas ideal de  $V_1 = 1,5 \text{ L}$  a  $V_2 = 3 \text{ L}$ .**

**Planteamiento del problema** En la expansión libre de un gas ideal las temperaturas inicial y final son las mismas. Por lo tanto, la variación de entropía  $\Delta S$  en este proceso irreversible es equivalente a la que tiene lugar en un proceso isoterma de  $V_1$  a  $V_2$  en forma reversible. Para el proceso isoterma  $\Delta U = 0$ , luego  $Q = W_{\text{por}}$ . Por lo tanto, primero calculamos  $Q$  y después establecemos que  $\Delta S = Q/T$ .

1. La variación de entropía es la misma que tiene lugar en un proceso isoterma de  $V_1$  a  $V_2$ :

$$\Delta S = \Delta S_{\text{isoterma}} = \frac{Q}{T}$$

2. El calor  $Q$  que absorbería el gas en la expansión isoterma a la temperatura  $T$  es igual al trabajo realizado por el gas durante la expansión:

$$Q = W_{\text{por}} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

3. Sustituir este valor de  $Q$  para calcular  $\Delta S$ :

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = (0,75 \text{ mol})(8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}) \ln 2$$

$$\Delta S = \boxed{4,32 \text{ J/K}}$$

**$\Delta S$  para procesos a presión constante** Cuando una sustancia se calienta desde la temperatura  $T_1$  a la temperatura  $T_2$  a presión constante, el calor absorbido  $dQ$  está relacionado con su cambio de temperatura  $dT$  por

$$dQ = C_p dT$$

Podemos aproximarnos a la conducción del calor reversible si disponemos de un gran número de focos térmicos con temperaturas comprendidas dentro del intervalo de  $T_1$  a  $T_2$  y con valores muy próximos entre sí. Entonces hay que colocar nuestra sustancia, cuya temperatura inicial es  $T_1$ , en contacto con el primer foco, a temperatura ligeramente mayor que  $T_1$ , y dejar que la sustancia absorba una pequeña cantidad de calor. Como la transferencia de calor es aproximadamente isoterma, el proceso será aproximadamente reversible. Luego se coloca la sustancia en contacto con el siguiente foco a una temperatura ligeramente superior, y así sucesivamente hasta que se alcance la temperatura final  $T_2$ . Cuando el calor  $dQ$  se absorbe reversiblemente, la variación de entropía del sistema es

$$dS = \frac{dQ}{T} = C_p \frac{dT}{T}$$

Integrando de  $T_1$  a  $T_2$ , obtenemos la variación total de entropía de la sustancia

$$\Delta S = C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (19.20)$$

Este resultado nos da la variación de entropía de una sustancia que se calienta de  $T_1$  a  $T_2$  por medio de cualquier proceso, reversible o irreversible, siempre que la presión final sea igual a la inicial. También nos da el cambio de entropía de una sustancia que se enfría. En este caso  $T_2$  es menor que  $T_1$  y  $\ln(T_2/T_1)$  es negativo, dando lugar a una variación de entropía negativa.

**Ejercicio** Determinar la variación de entropía de 1 kg de agua que se calienta de  $0^\circ\text{C}$  a  $100^\circ\text{C}$ . (Respuesta  $\Delta S = 1,31 \text{ kJ/K}$ .)

### EJEMPLO 19.9 | Cambios de entropía durante una transferencia de calor

*¡¡NTÉNELO USTED MISMO!*

Se mezcla 1 kg de agua a la temperatura  $T_1 = 30^\circ\text{C}$  con 2 kg de agua a  $T_2 = 90^\circ\text{C}$  en un calorímetro de capacidad calorífica despreciable a una presión constante de 1 atm. (a) Determinar la variación de entropía del sistema. (b) Hallar la variación de entropía del universo.

**Planteamiento del problema** Cuando se mezclan las dos cantidades de agua, se alcanza una temperatura final de equilibrio  $T_f$ , que puede determinarse igualando el calor perdido por una de las partes con el calor ganado por la otra. Para calcular la variación de entropía experimentada por cada una de las cantidades de agua, consideraremos un calentamiento isobárico reversible de la masa de 1 kg de agua de  $30^\circ\text{C}$  a  $T_f$  y un enfriamiento isobárico de la masa de 2 kg de  $90^\circ\text{C}$  a  $T_f$  utilizando la ecuación 19.18. El cambio de entropía del sistema es la suma de las variaciones de entropía de ambas cantidades. La variación de entropía del universo es la suma de las variaciones de entropía del sistema y de su medio. Para hallar la variación de entropía del medio, se supone que no escapa calor del calorímetro durante el tiempo que tarda el agua en alcanzar su temperatura final.

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

Pasos	Respuestas
(a) 1. Calcular $T_f$ estableciendo que el calor perdido es igual al calor ganado:	$T_f = 70^\circ\text{C} = 343 \text{ K}$
2. Utilizar el resultado de $T_f$ y los datos del enunciado para calcular $\Delta S_1$ y $\Delta S_2$ :	$\Delta S_1 = 0,519 \text{ kJ/K}$ $\Delta S_2 = -0,474 \text{ kJ/K}$
3. Sumar $\Delta S_1$ y $\Delta S_2$ para hallar la variación total de entropía del sistema:	$\Delta S_{\text{sistema}} = \boxed{+0,0453 \text{ kJ/K}}$
(b) 1. Suponiendo que no hay pérdidas de calor en el calorímetro, hallar el cambio de entropía del medio:	$\Delta S_{\text{medio}} = 0$
2. Sumar $\Delta S_{\text{sistema}}$ y $\Delta S_{\text{medio}}$ para obtener la variación de entropía del universo:	$\Delta S_{\text{u}} = \boxed{+0,0453 \text{ kJ/K}}$

**Observaciones** Hemos tenido que convertir las temperaturas a la escala absoluta para calcular los cambios de entropía. La variación de entropía del universo es positiva, como era de esperar.



**$\Delta S$  en una colisión inelástica** Como la energía mecánica se transforma en energía térmica en una colisión inelástica, tal proceso es claramente irreversible. La entropía del universo debe, por lo tanto, crecer. A modo de ejemplo, consideremos un bloque de masa  $m$  que cae desde una altura  $h$  y sufre un choque inelástico contra el suelo. Supongamos que el bloque, el suelo y la atmósfera están todos a la temperatura  $T$ , que no varía de forma significativa durante el proceso. Si consideramos el bloque, el suelo y la atmósfera como nuestro sistema aislado, nada de calor entra o sale del sistema. Su estado ha cambiado porque su energía interna se ha incrementado en una cantidad  $mgh$ . Esta variación es la misma que si añadiésemos calor  $Q = mgh$  al sistema de temperatura constante  $T$ . Para calcular la variación de entropía del sistema, consideremos así un proceso reversible en el que se añade calor  $Q_{\text{rev}} = mgh$  a temperatura  $T$  constante. De acuerdo con la ecuación 19.12 la variación de entropía es entonces

$$\Delta S = \frac{Q_{\text{rev}}}{T} = \frac{mgh}{T}$$

Este valor positivo es también la variación de entropía del universo.

**$\Delta S$  en la conducción del calor de un foco a otro** La conducción del calor es también un proceso irreversible y, por lo tanto, la entropía del universo debe crecer. Consideremos el caso simple en que se transporta un calor  $Q$  por conducción desde un foco caliente a la temperatura  $T_h$  a un foco frío a la temperatura  $T_c$ . El estado de un foco térmico viene determinado sólo por su temperatura y su energía interna. La variación de entropía de un foco térmico debida a un intercambio de calor es la misma, sea éste reversible o no. Si se añade calor  $Q$  en un foco a temperatura  $T$ , la entropía del foco aumenta en  $Q/T$ . Si se elimina el calor, su entropía disminuye en  $-Q/T$ . En el caso de la conducción del calor, el foco caliente pierde calor, de manera que su variación de entropía es

$$\Delta S_h = -\frac{Q}{T_h}$$

El foco frío absorbe calor, de modo que su cambio de entropía vale

$$\Delta S_c = +\frac{Q}{T_c}$$

La variación neta de entropía del universo es

$$\Delta S_u = \Delta S_c + \Delta S_h = +\frac{Q}{T_c} - \frac{Q}{T_h} \quad (19.21)$$

Obsérvese que como el calor siempre fluye de un foco caliente a un foco frío, la variación de entropía del universo es positiva.

**$\Delta S$  en un ciclo de Carnot** Como un ciclo de Carnot es, por definición, reversible, la variación de entropía del universo después de un ciclo debe ser nula. Este hecho puede demostrarse considerando que el cambio de entropía total de los focos es cero. (Como una máquina de Carnot funciona a lo largo de un ciclo, la variación de entropía de la propia máquina es cero, de modo que la variación de entropía del universo es justamente la suma de las variaciones de entropía de los focos.) El cambio de entropía del foco caliente es  $\Delta S_h = -Q_h/T_h$ , en donde  $Q_h$  es el calor que éste cede. El cambio de entropía del foco frío es  $\Delta S_c = +Q_c/T_c$ , donde  $Q_c$  es el calor que éste absorbe. Estas cantidades de calor vienen relacionadas por la definición de temperatura termodinámica (ecuación 19.7)

$$\frac{T_c}{T_h} = \frac{Q_c}{Q_h} \quad \left( \text{o} \quad \frac{Q_h}{T_h} = \frac{Q_c}{T_c} \right)$$

El cambio de entropía del universo es, por lo tanto,

$$\Delta S_u = \Delta S_h + \Delta S_c = -\frac{Q_h}{T_h} + \frac{Q_c}{T_c} = -\frac{Q_h}{T_h} + \frac{Q_h}{T_h} = 0$$

La variación de entropía del universo es cero, como era de esperar.

Obsérvese que hemos ignorado cualquier cambio de entropía asociado a la energía transferida en forma de trabajo desde la máquina de Carnot a su medio. Si este trabajo se emplea en elevar un peso, o realizar algún otro proceso ordenado, entonces no hay cambio de entropía. Sin embargo, si este trabajo se utiliza para empujar un bloque de un lado a otro de la superficie de una mesa en la que hay rozamiento, entonces existe un aumento adicional de entropía asociado a este trabajo.

### EJEMPLO 19.10 | Cambios de entropía en un ciclo de Carnot

Durante cada ciclo, una máquina de Carnot extrae 100 J de energía de un foco a 400 K, realiza un trabajo y elimina calor en otro foco a 300 K. Calcular la variación de entropía de cada foco en cada ciclo y demostrar que la variación de entropía del universo es cero en el caso de este proceso reversible.

**Planteamiento del problema** Como la máquina trabaja según ciclos, su variación de entropía es cero. Por lo tanto calcularemos la variación de entropía de cada foco y las sumaremos para obtener el cambio de entropía del universo.

1. El cambio de entropía del universo es igual a la suma de los cambios de entropía de los focos:

$$\Delta S_u = \Delta S_{400} + \Delta S_{300}$$

2. Calcular el cambio de entropía del foco caliente:

$$\Delta S_{400} = -\frac{Q_h}{T_h} = -\frac{100 \text{ J}}{400 \text{ K}} = \boxed{-0,250 \text{ J/K}}$$

3. El cambio de entropía del foco frío es  $Q_c$  dividido por  $T_c$ , donde  $Q_c = Q_h - W$ :

$$\Delta S_{300} = \frac{Q_c}{T_c} = \frac{Q_h - W}{T_c}$$

4. Utilizaremos  $W = \varepsilon_c Q_h$  (ecuación 19.2) para relacionar  $W$  con  $Q_h$ . El rendimiento es el de Carnot (ecuación 19.6):

$$W = \varepsilon_c Q_h, \text{ donde } \varepsilon = \varepsilon_c = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

de modo que

$$W = \left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right) Q_h$$

5. Calcular el cambio de entropía del foco frío:

$$\begin{aligned} \Delta S_{300} &= \frac{Q_h - W}{T_c} = \frac{Q_h - Q_h \left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right)}{T_c} = \frac{Q_h}{T_h} \\ &= \frac{100 \text{ J}}{400 \text{ K}} = \boxed{0,250 \text{ J/K}} \end{aligned}$$

6. Aplicar estos resultados en el paso 1 para determinar el cambio de entropía del universo:

$$\begin{aligned} \Delta S_u &= \Delta S_{400} + \Delta S_{300} \\ \Delta S_u &= -0,250 \text{ J/K} + 0,250 \text{ J/K} = \boxed{0} \end{aligned}$$

**Observaciones** Supongamos una máquina ordinaria, no reversible, que absorbe 100 J por ciclo del foco caliente. Como su rendimiento debe ser menor que el de una máquina de Carnot, realizaría menos trabajo y cedería más calor al foco frío. El cambio de entropía del foco frío sería mayor que la disminución de entropía del foco caliente, y el cambio de entropía del universo sería positivo.

### EJEMPLO 19.11 | El diagrama ST

Como la entropía es una función de estado, los procesos termodinámicos pueden representarse en diagramas  $ST$ ,  $SV$  o  $SP$ , en lugar de los diagramas  $PV$  que hemos utilizado hasta ahora. Hacer un esquema del ciclo de Carnot en un diagrama  $ST$ .

**Planteamiento del problema** El ciclo de Carnot consta de una expansión reversible isoterma, una expansión adiabática reversible, una compresión reversible isoterma y una compresión adiabática reversible. Durante los procesos isotermos, el calor se absorbe o cede a temperatura constante, de modo que  $S$  aumenta o disminuye a  $T$  constante. Durante los procesos adiabáticos, la temperatura cambia, pero como  $\Delta Q_{\text{rev}} = 0$ ,  $S$  es constante.

1. Durante la expansión isoterma (1-2 en la figura 19.11a), el calor se absorbe reversiblemente, de modo que  $S$  crece a  $T$  constante:
2. Durante la expansión adiabática reversible (2-3 en la figura 19.11b), la temperatura disminuye, mientras que  $S$  es constante:
3. Durante la compresión isoterma (3-4 en la figura 19.11c), el calor se cede reversiblemente y  $S$  decrece a  $T$  constante:
4. Durante la compresión adiabática reversible (4-1 en la figura 19.11d), la temperatura crece, mientras que  $S$  es constante:

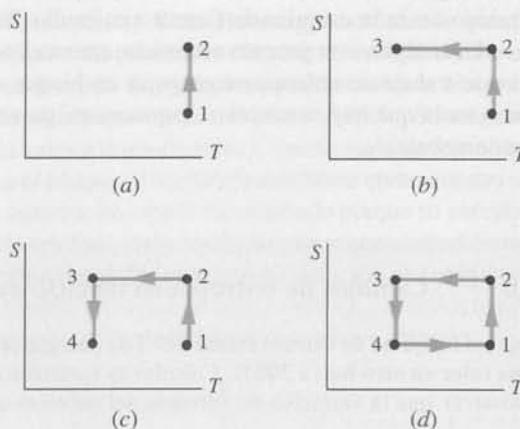


Figura 19.11

**Observaciones** El ciclo de Carnot es un rectángulo cuando se representa en un diagrama  $ST$ .

## 19.8 Entropía y energía utilizable

Cuando tiene lugar un proceso irreversible, la energía se conserva, pero parte de la energía se “desperdicia”, en el sentido de que no es útil para realizar trabajo. Consideremos un bloque de masa  $m$  que cae al suelo. Como se ha visto en la sección 19.7, la variación de entropía del universo originada por este proceso es  $mgh/T$ . Cuando el bloque estaba a una altura  $h$ , se podría haber utilizado su energía potencial  $mgh$  para realizar trabajo útil. Después de la colisión inelástica del bloque con el suelo, esta energía deja de ser utilizable porque se ha transformado en energía interna desordenada del bloque y su medio. La energía que ha dejado de ser útil es igual a  $mgh = T \Delta S_u$ . Este resultado es general:

En un proceso irreversible, una cantidad de energía igual a  $T \Delta S_u$  resulta inútil para la realización de trabajo, en donde  $T$  es la temperatura del foco más frío disponible.

Por sencillez, llamaremos a la energía que resulta inútil para producir trabajo, “trabajo perdido”:

$$W_{\text{perdido}} = T \Delta S_u \quad (19.22)$$

### EJEMPLO 19.12 | La caja deslizante reexaminada

Supongamos que la caja estudiada en las figuras 19.9a y b tiene una masa de 2,4 kg y se desliza con una velocidad  $v = 3$  m/s antes de chocar contra la pared fija y detenerse. La temperatura  $T$  del bloque, mesa y alrededores es 293 K y no cambia apreciablemente cuando el bloque se detiene. Determinar la variación de entropía del universo.

**Planteamiento del problema** La energía mecánica inicial del bloque,  $\frac{1}{2}Mv^2$ , se convierte en energía interna del sistema caja-pared-medio exterior. El cambio de entropía es equivalente a lo que ocurriría si el calor  $Q = \frac{1}{2}Mv^2$  se cediera reversiblemente al sistema.

La variación de entropía del universo es  $Q/T$ :

$$\Delta S_u = \frac{Q}{T} = \frac{\frac{1}{2}Mv^2}{T} = \frac{\frac{1}{2}(2,4 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2}{293 \text{ K}} = \boxed{0,0369 \text{ J/K}}$$

**Observación** La energía se conserva, pero la energía  $T \Delta S_u = \frac{1}{2}Mv^2$  deja de ser utilizable para realizar trabajo.

En la expansión libre estudiada anteriormente también se perdió la capacidad de realizar trabajo. En este caso la variación de entropía del universo era  $nR \ln (V_2/V_1)$ , de modo que el trabajo perdido era  $nRT \ln (V_2/V_1)$ . Este valor es la cantidad de trabajo que se podría haber realizado si el gas se hubiese expandido cuasiestáticamente e isotérmicamente desde  $V_1$  hasta  $V_2$ , según indica la ecuación 19.17.

Cuando el calor pasa por conducción de un foco caliente a un foco frío, la variación de entropía del universo viene dada por la ecuación 19.21 y el trabajo perdido es

$$W_{\text{perdido}} = T_c \Delta S_u = T_c \left( \frac{Q}{T_c} - \frac{Q}{T_h} \right) = Q \left( 1 - \frac{T_c}{T_h} \right)$$

Podemos ver que este trabajo es precisamente el que podría haberse realizado mediante una máquina de Carnot que operase entre dos focos, absorbiendo calor  $Q$  del foco frío y realizando un trabajo  $W = \epsilon_C Q$ , en donde  $\epsilon_C = 1 - T_c/T_h$ .

## 19.9 Entropía y probabilidad

La entropía, que es una medida del desorden de un sistema, está relacionada con la probabilidad. Esencialmente un estado de orden elevado tiene una probabilidad pequeña, mientras que un estado de orden bajo, tiene una probabilidad alta. Así pues, en un proceso irreversible, el universo se desplaza de un estado de baja probabilidad a otro de probabilidad elevada.

Consideremos una expansión libre en la que un gas se expande desde un volumen inicial  $V_1$  a un volumen final  $V_2 = 2V_1$ . La variación de entropía del universo para este proceso viene dada por la ecuación 19.19:

$$\Delta S_u = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln 2$$

¿Por qué es irreversible este proceso? ¿Por qué no puede comprimirse el gas por sí mismo volviendo a su volumen original? Como en ello no intervendría ningún cambio de energía, una compresión no violaría el primer principio de la termodinámica. La razón consiste simplemente en que dicha compresión resulta extremadamente *improbable*. Para comprobar esto, empezamos suponiendo que el gas está compuesto solamente por 10 moléculas y que, inicialmente, estas moléculas ocupan el volumen total del recipiente. La probabilidad de que una de ellas se encuentre en la mitad izquierda del recinto en un momento determinado es  $\frac{1}{2}$ . La probabilidad de que dos moléculas concretas estén ambas a la vez en la mitad izquierda es  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . (Se trata de la misma probabilidad de que una moneda, lanzada al aire, salga *cara* dos veces sucesivas.) La probabilidad de que tres moléculas particulares se hallen en la mitad izquierda es  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ . La probabilidad de que la totalidad de las 10 moléculas se encuentren a la izquierda es  $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$ . Es decir, existe una posibilidad frente a 1024 de que las moléculas se encuentren todas ellas en la mitad izquierda del recipiente en un momento dado.

Aunque esta probabilidad es muy pequeña, no sería demasiado sorprendente ver que esto ocurriera alguna vez. Por ejemplo, si examinamos el gas una vez por segundo, se podría esperar que se viese esta situación una vez cada 1024 segundos, aproximadamente una vez cada 17 minutos. Si empezásemos el experimento con las 10 moléculas distribuidas al azar y luego nos las encontrásemos todas en la mitad izquierda del volumen original, la entropía del universo habría disminuido en  $nR \ln 2$ . Sin embargo, esta disminución es extraordinariamente pequeña, puesto que el número de moles correspondiente a 10 moléculas es únicamente del orden de  $10^{-23}$ . Aún así, violaría el enunciado de la entropía del segundo principio de la termodinámica, que afirma que la entropía del universo nunca disminuye en cualquier proceso que se realice. Por lo tanto, si deseamos aplicar el segundo principio a sistemas microscópicos, tales como un pequeño número de moléculas, debemos considerarle más bien como un postulado de *probabilidad*.

Podemos relacionar la probabilidad de que un gas se comprima a sí mismo espontáneamente hacia un volumen más pequeño con la variación de su entropía. Si el volumen original es  $V_1$ , la probabilidad  $p$  de hallar  $N$  moléculas en un volumen menor  $V_2$  es

$$p = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N$$

Tomando logaritmos naturales de ambos miembros de esta ecuación, se tiene

$$\ln p = N \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nN_A \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (19.23)$$

en donde  $n$  es el número de moles y  $N_A$  el número Avogadro. La variación de entropía del gas es

$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (19.24)$$

Comparando las ecuaciones 19.23 y 19.24 vemos que

$$\Delta S = \frac{R}{N_A} \ln p = k \ln p \quad (19.25)$$

siendo  $k$  la constante de Boltzmann.

Puede resultar preocupante descubrir que los procesos irreversibles, como la compresión espontánea de un gas o la conducción espontánea de calor de un cuerpo frío a otro caliente, son únicamente improbables y no imposibles, puesto que, como acabamos de ver, si consideramos un sistema formado por un número muy pequeño de moléculas, existe una probabilidad razonable de que se produzca un proceso de este tipo. Sin embargo, *la propia termodinámica es únicamente aplicable a sistemas macroscópicos*, es decir, a sistemas con un número de moléculas grande. Consideremos, por ejemplo, lo que ocurriría si intentásemos medir la presión de un gas formado sólo por 10 moléculas. La presión variaría caprichosamente dependiendo de que cero, una, dos, o más moléculas estuviesen chocando contra la pared del recipiente en el instante de efectuar la medida. Las variables macroscópicas de presión y temperatura no son aplicables a un sistema microscópico de sólo 10 moléculas.

Según se vaya incrementando el número de moléculas del sistema, la probabilidad de que se produzca un proceso irreversible disminuye rapidísimamente. Por ejemplo, si tenemos 50 moléculas en un recipiente, la probabilidad de que todas ellas se concentren en la mitad izquierda del mismo es  $(\frac{1}{2})^{50} \approx 10^{-15}$ . Es decir, si examinásemos el gas una vez por segundo, podríamos esperar ver las 50 moléculas en dicha mitad alrededor de una vez cada  $10^{15}$  segundos, o sea, ¡una vez cada 36 millones de años! En el caso de 1 mol =  $6 \times 10^{23}$  moléculas, la probabilidad de que todas ellas se encuentren en la mitad izquierda del volumen es extremadamente pequeña, tan pequeña que es esencialmente nula. Así pues, en el caso de sistemas macroscópicos, la probabilidad de que el resultado de un proceso sea una disminución de la entropía del universo, es tan extremadamente pequeña, que la diferencia entre improbable e imposible queda totalmente difuminada.

## Resumen

El segundo principio de la termodinámica es una ley fundamental de la naturaleza.

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### 1. Rendimiento de una máquina térmica

Si una máquina térmica extrae calor  $Q_h$  de un foco caliente, realiza un trabajo  $W$  y cede calor  $Q_c$  a un foco frío el rendimiento es

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \quad (19.2)$$

---

2. Coeficiente de eficiencia de un refrigerador  $\eta = \frac{Q_c}{W}$  (19.3)

---

3. Coeficiente de eficiencia de una bomba de calor  $\eta_{BC} = \frac{Q_h}{W}$

---

4. Enunciados equivalentes del segundo principio de la termodinámica

Enunciado de Kelvin	Ningún sistema puede extraer energía en forma de calor de un solo foco y convertirla completamente en trabajo sin que se produzcan cambios en el sistema o en el medio.
Enunciado de la máquina térmica	Es imposible que una máquina térmica que trabaja cíclicamente extraiga calor de un foco y lo transforme completamente en trabajo sin que se produzca <i>ningún otro efecto</i> .
Enunciado de Clausius	Es imposible un proceso cuyo único resultado final sea transferir energía en forma de calor de un objeto frío a otro más caliente.
Enunciado del refrigerador	Es imposible para un refrigerador, que opera cíclicamente, producir <i>sólo el efecto</i> de extraer calor de un cuerpo frío y devolver la misma cantidad de calor a otro caliente.
Enunciado de la entropía	La entropía del universo (sistema más medio) nunca puede decrecer.

---

5. Condiciones de un proceso reversible

1. La energía mecánica no se transforma en calor por rozamiento, fuerzas viscosas u otras fuerzas disipativas.
  2. La transferencia de energía en forma de calor sólo puede tener lugar entre objetos a la misma temperatura (o a temperaturas infinitesimalmente próximas).
  3. El proceso debe ser cuasiestático, de modo que el sistema siempre esté en equilibrio (o infinitesimalmente próximo al estado de equilibrio).
- 

6. Máquina de Carnot

Una máquina de Carnot es una máquina reversible que opera entre dos focos, siguiendo un ciclo formado por

Ciclo de Carnot

1. Una expansión isoterma cuasiestática que absorbe calor a la temperatura  $T_h$ .
2. Una expansión adiabática cuasiestática.
3. Una compresión isoterma cuasiestática que cede calor a la temperatura  $T_c$ .
4. Una compresión adiabática cuasiestática que lleva el sistema al estado original.

Rendimiento de Carnot

$$\varepsilon_C = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (19.6)$$


---

7. Temperatura termodinámica

El cociente entre las temperaturas termodinámicas de dos focos viene definido por el cociente entre los calores cedido y absorbido por una máquina de Carnot entre dichos focos:

$$\frac{T_c}{T_h} = \frac{Q_c}{Q_h} \quad (19.7)$$


---

8. Entropía

La entropía es una medida del desorden de un sistema. La diferencia de entropía entre dos estados próximos viene dada por

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} \quad (19.12)$$

en donde  $dQ_{rev}$  es el calor cedido al sistema en un proceso reversible que conecte dichos estados. La variación de entropía de un sistema puede ser positiva o negativa.

Entropía y pérdida de la capacidad de realizar trabajo

Durante un proceso irreversible, la entropía del universo  $S_u$  aumenta y una cierta cantidad de energía

$$W_{perdido} = T \Delta S_u \quad (19.22)$$

resulta inutilizable para realizar trabajo.

Entropía y probabilidad

La entropía está relacionada con la probabilidad. Un sistema altamente ordenado tiene baja probabilidad y baja entropía. Un sistema aislado evoluciona hacia un estado de alta probabilidad, orden bajo y elevada entropía.

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.
- iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.
- iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

### Problemas conceptuales

- 1 ● ¿Cómo afecta a su rendimiento el rozamiento cinético en una máquina?
- 2 ● SSM Explicar por qué con sólo abrir el refrigerador no podemos refrescar nuestra cocina en un día caluroso. ¿Por qué se refresca una habitación cuando ponemos en marcha el acondicionador de aire y no cuando abrimos la puerta del refrigerador?
- 3 ● ¿Por qué las centrales de potencia se diseñan de modo que la temperatura del vapor de agua utilizado sea la máxima posible?
- 4 ●● En un día húmedo, el vapor de agua se condensa sobre una superficie fría. Durante la condensación, la entropía del agua (a) crece, (b) permanece constante, (c) disminuye, (d) puede disminuir o permanecer invariable.
- 5 ● SSM En un proceso adiabático reversible (a) la energía interna del sistema permanece constante; (b) el sistema no realiza trabajo; (c) la entropía del sistema permanece constante; (d) la temperatura del sistema permanece constante.
- 6 ●● Verdadero o falso:
  - (a) El trabajo no puede convertirse totalmente en calor.
  - (b) El calor no puede convertirse totalmente en trabajo.
  - (c) Todas las máquinas térmicas tienen el mismo rendimiento.
  - (d) Es imposible transferir una determinada cantidad de calor de un foco frío a un foco caliente.
  - (e) El coeficiente de eficiencia de un refrigerador no puede ser mayor que 1.
  - (f) Todas las máquinas de Carnot son reversibles.
  - (g) La entropía de un sistema nunca puede decrecer.
  - (h) La entropía del universo nunca puede decrecer.

7 ●● Un gas ideal efectúa un proceso reversible desde un estado inicial,  $P_i, V_i, T_i$  a un estado final  $P_f, V_f, T_f$ . Dos trayectorias posibles son (A) una expansión isotérmica, seguida de una compresión adiabática y (B) una compresión adiabática, seguida de una expansión isotérmica. Para estas dos trayectorias, (a)  $\Delta U_A > \Delta U_B$ , (b)  $\Delta S_A > \Delta S_B$ , (c)  $\Delta S_A < \Delta S_B$ , (d) ninguna de las anteriores es una respuesta correcta.

8 ●● SSM La figura 19.12 muestra un ciclo termodinámico en un diagrama  $ST$ . Identificar este ciclo y representarlo en un diagrama  $PV$

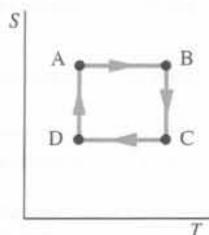


Figura 19.12 Problemas 8 y 68

9 ●● La figura 19.13 muestra un ciclo termodinámico en un diagrama  $SV$ . Identificar el tipo de máquina representado por este diagrama.

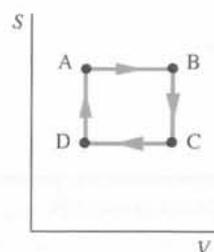


Figura 19.13 Problema 9

- 10 ●● Representar un diagrama  $ST$  del ciclo de Otto.
- 11 ●● Representar un diagrama  $SV$  del ciclo de Carnot.
- 12 ●● Representar un diagrama  $SV$  del ciclo de Otto.
- 13 ●● La figura 19.14 muestra un ciclo termodinámico un diagrama  $SP$ . Representar el ciclo en un diagrama  $PV$

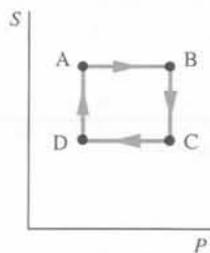


Figura 19.14 Problema 13

14 ● SSM ¿Qué es lo que produce un mayor aumento en el rendimiento de una máquina de Carnot, un incremento de 5 K en la temperatura del foco caliente o una disminución de 5 K en la temperatura del foco frío?

### Estimaciones y aproximaciones

- 15 ●● Hacer una estimación del rendimiento de un motor de automóvil con una razón de compresión de 8:1. Suponer que el motor efectúa un ciclo de Otto y que  $\gamma = 1.4$ .
- 16 ●● SSM (a) Dar un valor del coeficiente de eficiencia más alto posible de un típico refrigerador doméstico. (b) Si el refrigerador necesita para su funcionamiento una potencia eléctrica de 600 W, evaluar la tasa a la que se está extrayendo calor en el refrigerador.

**17** ●● La temperatura del Sol es de unos 5400 K, la temperatura media de la Tierra de aproximadamente 290 K y la constante solar (la intensidad de luz solar que llega a la órbita terrestre) es de alrededor de 1,3 kW/m<sup>2</sup>. (a) Calcular la potencia total de la luz solar que llega a la Tierra. (b) Calcular la tasa neta del aumento de entropía que experimenta nuestro planeta por el flujo incidente de radiación solar. (c) Calcular la tasa neta de disminución de la entropía del Sol debida al flujo saliente de energía solar que golpea la Tierra.

**18** ●● (a) Haciendo uso de la información dada en el problema 17 y conocida la distancia de la Tierra al Sol ( $1,5 \times 10^{11}$  m), calcular la potencia total que el Sol irradia al espacio. (b) Existen unas  $10^{11}$  estrellas como el Sol en la Vía Láctea, que es nuestra galaxia, y  $10^{11}$  galaxias en el universo. Utilizar esta información para hacer una evaluación de la tasa de incremento de la entropía del universo, suponiendo que su temperatura media es de 2,73 K.

**19** ●● Un cuerpo humano típico produce alrededor de 100 W de calor. Evaluar el aumento de entropía del universo producido por un solo cuerpo humano en el transcurso de un día de primavera con temperaturas de 70 °F durante el día y 55 °F durante la noche.

**20** ●●● SSM ¿Cuánto habríamos de esperar, por término medio, hasta que todas las moléculas de aire de una habitación se precipitaran sobre una de sus dos mitades? (Como decía un amigo mío, "no contenga la respiración...") Supóngase que las moléculas de aire están dentro de una caja de 1 m × 1 m × 1 m y que reorganizan sus posiciones 100 veces por segundo. Calcular el tiempo medio que tardarían todas las moléculas en ocupar sólo una mitad de la caja si en ella hay (a) 10 moléculas, (b) 100 moléculas, (c) 1000 moléculas y (d) 1 mol de moléculas. (e) Los vacíos más altos producidos hasta la fecha corresponden a presiones de unos  $10^{-12}$  tor. Si una cámara de vacío típica tiene una capacidad de 1 litro, ¿cuánto tendrá que esperar un físico antes de que todas las moléculas del gas de la cámara de vacío ocupen sólo una de sus mitades? Compárese ese tiempo con la edad del universo, que es de unos  $10^{10}$  años.

### Máquinas térmicas y refrigeradores

**21** ● SOLVE Una máquina con el 20 por ciento de rendimiento realiza un trabajo de 100 J en cada ciclo. (a) ¿Cuánto calor absorbe en cada ciclo? (b) ¿Cuánto calor devuelve en cada ciclo?

**22** ● SOLVE Una máquina absorbe 400 J de calor y realiza un trabajo de 120 J en cada ciclo. (a) ¿Cuál es el rendimiento? (b) ¿Cuánto calor se cede en cada ciclo?

**23** ● SOLVE Una máquina absorbe 100 J y cede 60 J en cada ciclo. (a) ¿Cuál es el rendimiento? (b) Si recorre un ciclo en 0,5 s, ¿cuál es la potencia de la máquina en vatios?

**24** ● SSM SOLVE Un refrigerador absorbe 5 kJ de energía de un foco frío y cede 8 kJ a un foco caliente. (a) ¿Cuál es el coeficiente de eficiencia del refrigerador? (b) El refrigerador es reversible y funciona como una máquina térmica entre los mismos dos focos. ¿Cuál es el rendimiento?

**25** ●● Una máquina tiene una sustancia de trabajo formada por 1 mol de un gas ideal de  $C_v = \frac{3}{2}R$  y  $C_p = \frac{5}{2}R$ . El ciclo empieza a  $P_1 = 1$  atm y  $V_1 = 24,6$  L. El gas se calienta a volumen constante hasta  $P_2 = 2$  atm. Luego se expande a presión constante hasta  $V_2 = 49,2$  L. Durante estas dos etapas absorbe calor. Entonces el gas se enfría a volumen constante hasta que su presión vuelve a ser de 1 atm. Luego se comprime a presión constante hasta que alcanza de nuevo su estado original. Durante las dos últimas etapas se cede calor. Todas las etapas son reversibles y cuasiestáticas. (a) Dibujar un diagrama PV del ciclo. Calcular el trabajo realizado, el calor añadido y la variación de energía interna para cada etapa del ciclo. (b) Calcular el rendimiento del ciclo.

**26** ●● Una máquina que utiliza 1 mol de un gas ideal diatómico, efectúa un ciclo que consta de tres etapas: (1) una expansión adiabática desde una presión inicial de 2,64 atm y un volumen de 10 L hasta una presión final de 1 atm y un volumen de 20 L, (2) una compresión a presión constante hasta su volumen original de 10 L, y (3) un calentamiento a volumen constante hasta su presión original de 2,64 atm. Calcular el rendimiento del ciclo.

**27** ●● SOLVE Una máquina que utiliza 1 mol de un gas ideal inicialmente a  $V_1 = 24,6$  L y  $T = 400$  K funciona en un ciclo que consiste en 4 etapas: (1) expansión isotérmica a  $T = 400$  K hasta dos veces su volumen, (2) enfriamiento a volumen constante hasta  $T = 300$  K, (3) compresión isotérmica hasta su volumen original, y (4) calentamiento a volumen constante hasta su temperatura original de 400 K. Supóngase que  $C_v = 21$  J/K. Dibujar el ciclo en un diagrama PV y calcular su rendimiento.

**28** ●● SSM Un mol de un gas ideal monoatómico con un volumen inicial  $V_1 = 25$  L sigue el ciclo indicado en la figura 19.15. Todos los procesos son cuasiestáticos. Hallar (a) la temperatura de cada estado del ciclo, (b) el flujo de calor de cada parte del ciclo y (c) su rendimiento.

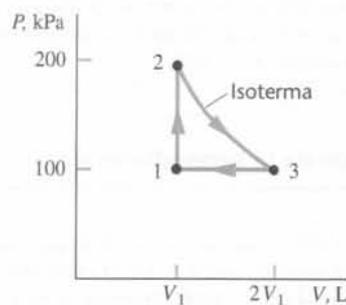


Figura 19.15 Problema 28

**29** ●● Un gas ideal ( $\gamma = 1,4$ ) sigue el ciclo indicado en la figura 19.16. La temperatura del estado 1 es 200 K. Hallar (a) las temperaturas de los otros tres estados del ciclo y (b) su rendimiento.

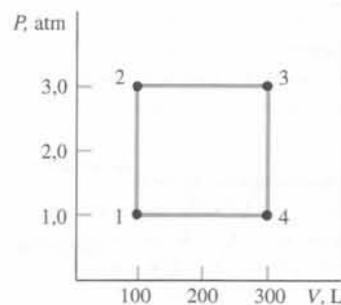


Figura 19.16 Problema 29

**30** ●●● El ciclo diesel indicado en la figura 19.17 es una aproximación al comportamiento de un motor diesel. El proceso ab es una compresión adiabática, el proceso bc es una expansión a presión constante, el proceso cd es una expansión adiabática y el proceso da es un enfriamiento a volumen constante. Hallar el rendimiento de este ciclo en función de los volúmenes  $V_a$ ,  $V_b$ ,  $V_c$  y  $V_d$ .

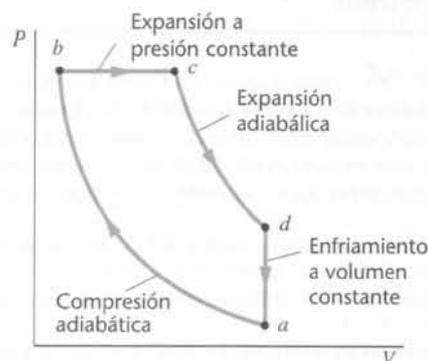


Figura 19.17 Ciclo diesel correspondiente al problema 30.

**31** ●● **SSM** “Hasta donde alcanza nuestro conocimiento, la Naturaleza no ha desarrollado nunca una máquina térmica” —Steven Vogel, *Life's Devices*, Princeton University Press (1988). (a) Calcular el rendimiento de una máquina térmica que opera entre la temperatura corporal (98,6 °F) y una temperatura al aire libre típica (70 °F), y comparar el resultado con el rendimiento del cuerpo humano para convertir energía química en trabajo (aproximadamente el 20%). ¿Supone ello una contradicción del segundo principio de la termodinámica? (b) A partir del resultado de (a) y un conocimiento general de las condiciones que han de darse para que existan animales de sangre caliente, explicar por qué estos animales no han desarrollado máquinas térmicas para suministrar su energía interna.

**32** ●●● La ecuación de estado de Clausius es  $P(V - bn) = nRT$ , siendo  $b$  una constante. Demostrar que el rendimiento de un ciclo de Carnot es el mismo para un gas que obedezca esta ecuación que para uno que obedezca la ecuación de estado de los gases ideales,  $PV = nRT$ .

## Segundo principio de la termodinámica

**33** ●● Un cierto refrigerador extrae 500 J de calor de un foco frío y elimina 800 J en un foco caliente. Suponer que el enunciado de la máquina térmica del segundo principio de la termodinámica es falso y demostrar cómo puede violarse el enunciado del refrigerador de este principio si se combina una máquina perfecta que trabaje con este refrigerador.

**34** ●● **SSM** Si dos curvas adiabáticas se cortasen en un diagrama  $PV$ , se podría completar un ciclo mediante un proceso isoterma entre ambas curvas adiabáticas, como se ve en la figura 19.18. Demostrar que este ciclo violaría el segundo principio de la termodinámica.

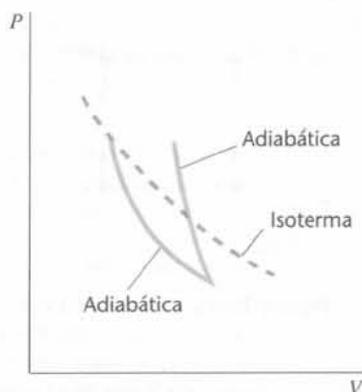


Figura 19.18 Problema 34

## Máquinas de Carnot

**35** ● **RESOLVER** Una máquina de Carnot funciona entre dos focos térmicos a temperaturas  $T_h = 300$  K y  $T_c = 200$  K. (a) ¿Cuál es su rendimiento? (b) Si en cada ciclo absorbe 100 J del foco caliente, ¿cuánto trabajo produce? (c) ¿Cuánto calor cede en cada ciclo? (d) ¿Cuál es el coeficiente de eficiencia de esta máquina cuando funciona como refrigerador entre los mismos focos?

**36** ● **RESOLVER** Un motor extrae 250 J de un foco a 300 K y elimina 200 J en otro foco a 200 K. (a) ¿Cuál es su rendimiento? (b) ¿Qué cantidad de trabajo podría haberse obtenido si el motor hubiese sido reversible?

**37** ●● Una máquina reversible que funciona entre dos focos a temperaturas  $T_h$  y  $T_c$  tiene un rendimiento del 30 por ciento. Cuando opera como una máquina térmica cede 140 J de calor al foco frío. Una segunda máquina que

funciona entre los dos mismos focos también cede 140 J al foco frío. Demuéstrese que si la segunda máquina tiene un rendimiento mayor del 30 por ciento, las dos máquinas funcionando juntas violarían el enunciado de la máquina térmica del segundo principio de la termodinámica.

**38** ●● Una máquina reversible opera entre dos focos a temperaturas  $T_h$  y  $T_c$  y tiene un rendimiento del 20 por ciento. Cuando funciona como máquina térmica realiza 100 J de trabajo en cada ciclo. Una segunda máquina que funciona entre los dos mismos focos realiza también un trabajo de 100 J en cada ciclo. Demuéstrese que si el rendimiento de la segunda máquina fuese mayor del 20 por ciento, las dos máquinas funcionando juntas violarían el enunciado del refrigerador del segundo principio.

**39** ●● **SSM** Una máquina de Carnot funciona entre dos focos térmicos como refrigerador. Realiza 50 J de trabajo tomando 100 J del foco frío y cediendo 150 J al foco caliente durante cada ciclo. El coeficiente de eficiencia es  $\eta = Q_c/W = (100 \text{ J})/(50 \text{ J}) = 2$ . (a) ¿Cuál es el rendimiento de una máquina de Carnot cuando funciona como máquina térmica entre los dos mismos focos? (b) Demuéstrese que ninguna otra máquina que funciona como refrigerador entre estos focos puede tener un coeficiente de eficiencia mayor que 2.

**40** ●● **RESOLVER** Una máquina de Carnot opera entre dos focos térmicos a temperaturas  $T_h = 300$  K y  $T_c = 77$  K. (a) ¿Cuál es su rendimiento? (b) Si absorbe 100 J del foco caliente durante cada ciclo, ¿cuánto trabajo realiza? (c) ¿Cuánto calor cede durante cada ciclo? (d) ¿Cuál es el coeficiente de eficiencia de la máquina cuando funciona como refrigerador entre estos dos focos?

**41** ●● En el ciclo que se muestra en la figura 19.19, 1 mol de un gas ideal ( $\gamma = 1,4$ ) se encuentra inicialmente a 1 atm y 0 °C. El gas se calienta a volumen constante hasta  $T_2 = 150$  °C y luego se expande adiabáticamente hasta que su presión vuelve a ser de 1 atm. Luego se comprime a presión constante hasta su estado original. Calcular (a) la temperatura  $T_3$  después de la expansión adiabática, (b) el calor absorbido o cedido por el sistema durante cada proceso, (c) el rendimiento de este ciclo y (d) el rendimiento de un ciclo de Carnot que opere entre las temperaturas extremas del ciclo.

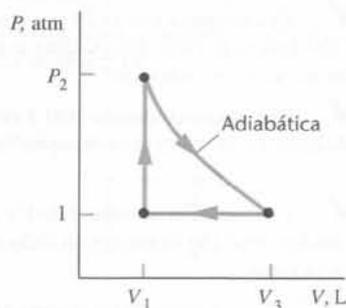


Figura 19.19 Problema 41

**42** ●● **RESOLVER** Una máquina de vapor toma vapor sobrecalentado a 270 °C y descarga de su cilindro vapor condensado a 50 °C. Su rendimiento es del 30 por ciento. (a) Compárese este rendimiento con el mejor rendimiento posible para estas temperaturas. (b) Si la potencia de salida útil del motor es de 200 kW, ¿cuánto calor cede la máquina a los alrededores en una hora?

## \*Bombas de calor

**43** ● **SSM** **RESOLVER** Una bomba de calor suministra 20 kW para calentar una casa. La temperatura exterior es de  $-10$  °C y la interior de la fuente de aire caliente para el ventilador de calefacción es 40 °C. (a) ¿Cuál es el coeficiente de eficiencia de una bomba de calor de Carnot que funciona entre estas temperaturas? (b) ¿Cuál debe ser la potencia mínima del motor que se necesita para hacer funcionar la bomba? (c) Si el rendimiento de la bomba de calor es del 60 por ciento, ¿cuál deberá ser la mínima potencia del motor?

- 44 ● **RESOLVER** Un refrigerador consume 370 W. (a) ¿Cuál es la máxima cantidad de calor que puede eliminar en 1 min si la temperatura interior del mismo es 0 °C y elimina calor hacia una habitación a 20 °C? (b) Si el coeficiente de eficiencia del refrigerador es el 70 por ciento del correspondiente a una bomba de calor ideal, ¿cuánto calor podrá eliminar en un minuto?
- 45 ● Repetir el problema 44 para una temperatura ambiente de 35 °C.

## Cambios de entropía

- 46 ● ¿Cuál es la variación de entropía experimentada por 1 mol de agua a 0 °C cuando se congela?
- 47 ●● Estudiar la congelación de 50 g de agua colocados en el congelador de un refrigerador. Suponer que las paredes del congelador se mantienen a -10°C. El agua, inicialmente líquida a 0 °C, se congela en hielo y se enfría hasta -10 °C. Demostrar que aun cuando la entropía del hielo disminuye, la entropía neta del universo aumenta.
- 48 ● **RESOLVER** Dos moles de un gas ideal a  $T = 400$  K se expansionan cuasiestática e isotérmicamente desde un volumen inicial de 40 L hasta un volumen final de 80 L. (a) ¿Cuál es la variación de entropía del gas? (b) ¿Cuál es la variación de entropía del universo para este proceso?
- 49 ● El gas del problema 48 pasa del mismo estado inicial ( $T = 400$  K,  $V_1 = 40$  L) al mismo estado final ( $T = 400$  K,  $V_2 = 80$  L) por un proceso no-cuasiestático. (a) ¿Cuál es la variación de entropía del gas? (b) ¿Qué se puede decir de la variación de entropía del universo?
- 50 ● Calcular la variación de entropía de 1,0 kg de agua a 100 °C cuando se transforma en vapor a 100 °C y a la presión de 1 atm.
- 51 ● **RESOLVER** Calcular la variación de entropía de 1,0 kg de hielo cuando se transforma en agua a 0 °C y a una presión de 1 atm.
- 52 ●● Un sistema absorbe 200 J de calor reversiblemente de un foco a 300 K y cede 100 J reversiblemente a un foco a 200 K al desplazarse del estado A al B. Durante este proceso el sistema realiza un trabajo de 50 J. (a) ¿Cuál es la variación de energía interna del sistema? (b) ¿Cuál es la variación de entropía del sistema? (c) ¿Cuál es la variación de entropía del universo? (d) Si el sistema evolucionara del estado A al B según un proceso no reversible, ¿cuál sería la respuesta a las preguntas (a), (b) y (c)?

53 ●● **SSM** **RESOLVER** Un sistema absorbe 300 J de un foco a 300 K y 200 J de un foco a 400 K. Vuelve a su estado original realizando un trabajo de 100 J y cediendo 400 J a un foco a la temperatura  $T$ . (a) ¿Cuál es la variación de entropía del sistema para el ciclo completo? (b) Si el ciclo es reversible, ¿cuánto vale la temperatura  $T$ ?

54 ●● **RESOLVER** Dos moles de un gas ideal que se encuentra originalmente a  $T = 400$  K y  $V = 40$  L experimentan una expansión libre hasta dos veces su volumen inicial. ¿Cuál es (a) la variación de entropía del gas y (b) la variación de entropía del universo?

55 ●● Un bloque de 200 kg de hielo a 0 °C se introduce en un lago. La temperatura del lago es algo mayor de 0 °C y el hielo se funde. (a) ¿Cuál es la variación de entropía del hielo? (b) ¿Cuál es la variación de entropía del lago? (c) ¿Cuál es la variación de entropía del universo (lago más hielo)?

56 ●● Un trozo de 100 g de hielo a 0 °C se ha colocado en un recipiente aislado junto con 100 g de agua a 100 °C. (a) Cuando se ha llegado al equilibrio térmico, ¿cuál es la temperatura final del agua? No tener en cuenta la capacidad calorífica del recipiente. (b) Calcular la variación de entropía del universo para este proceso.

57 ●● **SSM** Se introduce un bloque de 1 kg de cobre a 100 °C en el interior de un calorímetro de capacidad calorífica despreciable que contiene 4 L de agua a 0 °C. Calcular la variación de entropía ( $\bar{\Delta}$ ) del bloque de cobre, (b) del agua, y (c) del universo.

58 ●● Calcular la variación de entropía del universo si se deja caer un trozo de 2 kg de plomo a 100 °C en un lago a 10 °C.

59 ●● **RESOLVER** Un coche de 1500 kg que se encuentra viajando a 100 km/h choca contra una pared de cemento. Calcular la variación de entropía del universo si la temperatura del aire es de 20 °C.

60 ●● **SSM** Una caja se divide en dos mitades idénticas por medio de un tabique impermeable. En un lado hay 1 mol de gas ideal A y en el otro, 1 mol de gas ideal B (que es diferente del A). (a) Calcular la variación de entropía cuando el tabique se elimina y los dos gases se mezclan. (b) Si repetimos el proceso con el mismo tipo de gas en cada lado, ¿cambiaría la entropía cuando se elimina el tabique? Dar una explicación. (Meditar cuidadosamente esta pregunta).

## Entropía y trabajo perdido

61 ●● **SSM** **RESOLVER** Si se transportan 500 J desde un foco a 400 K hasta otro a 300 K, (a) ¿cuál es la variación de entropía del universo? y (b) ¿qué cantidad de calor de estos 500 J se hubieran convertido en trabajo mediante una máquina térmica que operara entre ambos focos?

62 ●● Un mol de un gas ideal sufre en primer lugar una expansión libre desde  $V_1 = 12,3$  L y  $T_1 = 300$  K a  $V_2 = 24,6$  L y  $T_2 = 300$  K. Luego se comprime isotérmica y cuasiestáticamente, volviendo a su estado original. (a) ¿Cuál es la variación de entropía del universo en el ciclo completo? (b) ¿Cuánto trabajo se desperdicia en este ciclo? (c) Demostrar que este trabajo perdido es  $T \Delta S_u$ .

## Problemas generales

63 ● **RESOLVER** Una máquina con una producción de 200 W tiene un rendimiento del 30 por ciento. Trabaja a 10 ciclos/s. (a) ¿Cuánto trabajo se realiza en cada ciclo? (b) ¿Cuánto calor se absorbe y cuánto se elimina en cada ciclo?

64 ● **RESOLVER** En cada ciclo, una máquina absorbe 150 J de un foco a 100 °C y cede 125 J a un foco a 20 °C. (a) ¿Cuál es el rendimiento de esta máquina? (b) ¿Qué relación existe entre este rendimiento y el de una máquina de Carnot que funcionara entre los mismos focos? (Este cociente se denomina *rendimiento del segundo principio*.)

65 ● En cada ciclo, una máquina absorbe 200 kJ de calor de un foco caliente a 500 K y elimina calor en un foco frío a 200 K. Su rendimiento es el 85% del de una máquina de Carnot que opera entre los mismos focos. (a) ¿Cuál es el rendimiento de esta máquina? (b) ¿Cuánto trabajo realiza en cada ciclo? (c) ¿Cuánto calor se elimina en cada ciclo?

66 ●● La central nuclear de Calvin Cliffs, situada en Hobbes River, produce 1 GW de potencia. En esta central circula sodio líquido entre el núcleo del reactor y un intercambiador de calor localizado en el vapor sobrecalentado que impulsa la turbina. El calor se cede al sodio líquido del núcleo y se extrae del sodio líquido (para cederlo al vapor sobrecalentado) en el intercambiador de calor. La temperatura del vapor sobrecalentado es de 500 K. El calor de desecho se vierte en el río que pasa por allí a una temperatura de 25 °C. (a) ¿Cuál es el máximo rendimiento que puede alcanzar esta central? (b) ¿Cuánto calor de desecho se vierte cada segundo en el río? (c) ¿Cuánto calor debe producirse para suministrar 1 GW de potencia? (d) Suponer que para preservar la única fauna del río se han aprobado nuevas (y más duras) leyes medioambientales. Por este motivo, la central no está autorizada a calentar el río por encima de 0,5 °C. ¿Cuál es la tasa mínima de flujo (en litro/segundo) que debe tener el río Hobbes?

67 ● **RESOLVER** Para mantener la temperatura de 20 °C dentro de una casa, el consumo de potencia de los calentadores eléctricos es de 30 kW por día cuando la temperatura exterior es de -7 °C. ¿Cuál es la variación de entropía por unidad de tiempo experimentada por el universo, motivada por este proceso de calefacción?

68 ●● El sistema representado en la figura 19.12 (problema 8) corresponde a 1 mol de un gas ideal monoatómico. Las temperaturas de los puntos A y B son 300 y 750 K, respectivamente. ¿Cuál es el rendimiento termodinámico del proceso cíclico ABCDA?

69 ●● (a) ¿Qué proceso es menos útil: (1) un bloque que se mueve con 500 J de energía cinética y se detiene por rozamiento cuando la temperatura atmosférica es de 300 K o (2) 1 kJ de calor transmitido por conducción desde un foco a 400 K hasta otro a 300 K? *Sugerencia: ¿Qué parte de 1 kJ de calor podrían convertirse en trabajo en una situación ideal?* (b) Calcular la variación de entropía del universo en cada caso.

70 ●● Se dispone de gas helio ( $\gamma = 1,67$ ) a una presión inicial de 16 atm, un volumen de 1 L y una temperatura de 600 K. Se expande isotérmicamente hasta que su volumen es de 4 L y luego se comprime a presión constante hasta que su volumen y temperatura son tales que una compresión adiabática devuelve el gas a su estado original. (a) Dibujar el ciclo en un diagrama PV. (b) Calcular el volumen y la temperatura después de la compresión isobárica. (c) Calcular el trabajo realizado durante cada ciclo. (d) Determinar el rendimiento del ciclo.

71 ●● SSM Una máquina térmica que realiza trabajo para hinchar un globo a una presión de 1 atm extrae 4 kJ de un foco caliente a 120 °C. El volumen del globo aumenta en 4 L, y el calor es cedido a un foco frío a la temperatura  $T_c$ . Si el rendimiento de la máquina térmica es del 50 por ciento del correspondiente a un ciclo de Carnot que funcionase entre los mismos focos, calcular la temperatura  $T_c$ .

72 ●● Demostrar que el coeficiente de eficiencia de un refrigerador de Carnot que trabaje entre dos focos a temperaturas  $T_h$  y  $T_c$  está relacionado con el rendimiento de una máquina de Carnot mediante  $\eta = T_c / (\varepsilon_c T_h)$ .

73 ●● **RESOLVI** Un congelador tiene una temperatura  $T_c = -23$  °C. El aire de la cocina tiene una temperatura  $T_h = +27$  °C. Como el aislamiento térmico no es perfecto, cierta cantidad de calor fluye al congelador, equivalente a una potencia de 50 W. Determinar la potencia del motor necesaria para mantener la temperatura del congelador.

74 ●● Dos moles de un gas diatómico describen el ciclo ABCA que se muestra en el diagrama PV de la figura 19.20. En A la presión es de 5 atm y la temperatura 600 K. El volumen en B es doble que en A. El segmento BC es una expansión adiabática y el segmento CA una compresión isoterma. (a) ¿Cuál es el volumen del gas en A? (b) ¿Cuáles son el volumen y la temperatura del gas en B? (c) ¿Cuál es la temperatura del gas en C? (d) ¿Cuál es el volumen del gas en C? (e) ¿Cuánto trabajo realiza el gas en cada una de las tres etapas del ciclo? (f) ¿Cuánto calor absorbe el gas en cada etapa del ciclo? (g) ¿Cuál es el rendimiento termodinámico de este ciclo?

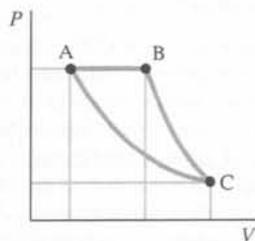


Figura 19.20 Problemas 74 y 76

75 ●● Dos moles de un gas diatómico describen el ciclo ABCDA que se muestra en el diagrama PV de la figura 19.21. El segmento AB representa una expansión isotérmica, el segmento BC una expansión adiabática. En A la presión es de 5 atm y la temperatura de 600 K. El volumen en B es doble que en A. La presión en D es de 1 atm. (a) ¿Cuál es la presión en B? (b) ¿Cuál es la temperatura en C? (c) Determinar el trabajo realizado por el gas en un ciclo y el rendimiento termodinámico de este ciclo.

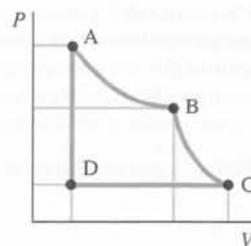


Figura 19.21 Problemas 75 y 77

76 ●● Repetir el problema 74 para un gas monoatómico.

77 ●● Repetir el problema 75 para un gas monoatómico.

78 ●● Comparar el rendimiento de una máquina de Otto con el de una máquina de Carnot que opera entre las mismas temperaturas máxima y mínima.

79 ●●● SSM Utilizando la ecuación correspondiente a la variación de entropía de un gas ideal cuando cambian el volumen y la temperatura, y  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ , demostrar explícitamente que la variación de entropía es nula para una expansión adiabática y cuasiestática desde el estado  $(V_1, T_1)$  al  $(V_2, T_2)$ .

80 ●●● (a) Demostrar que si no fuese cierto el enunciado del refrigerador del segundo principio de la termodinámica, la entropía del universo podría disminuir. (b) Demostrar que si no fuese cierto el enunciado de la máquina térmica, también podría disminuir la entropía del universo. (c) Un enunciado alternativo del segundo principio es que la entropía del universo no puede disminuir. Demostrar que este enunciado es equivalente a los dos enunciados mencionados anteriormente.

81 ●●● Supongamos que se conectan en "serie" dos máquinas térmicas de forma que el calor eliminado por la primera se utiliza como alimentación de la segunda, como se indica en la figura 19.22. Los rendimientos de las máquinas son  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , respectivamente. Demostrar que el rendimiento neto de la combinación viene dado por

$$\varepsilon_{\text{neto}} = \varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_1)\varepsilon_2$$

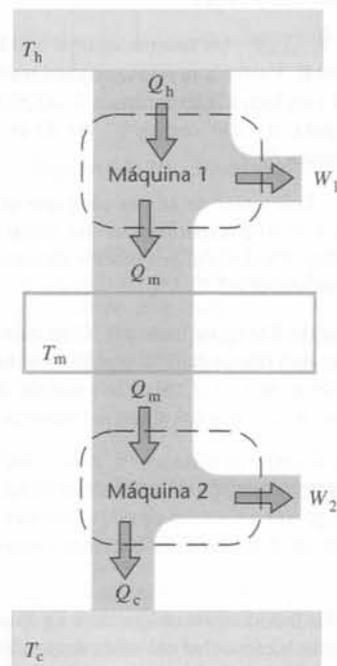


Figura 19.22 Problemas 81 y 82

**82 ●●● 5SM** Supongamos que cada una de las máquinas de la figura 19.22 es una máquina térmica ideal reversible. La máquina 1 funciona entre las temperaturas  $T_h$  y  $T_m$  y la 2 entre  $T_m$  y  $T_c$ , siendo  $T_h > T_m > T_c$ . Demostrar que

$$\epsilon_{\text{neto}} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

Esto significa que dos máquinas térmicas reversibles en "serie" son equivalentes a una sola máquina reversible que funcione entre el foco más caliente y el más frío.

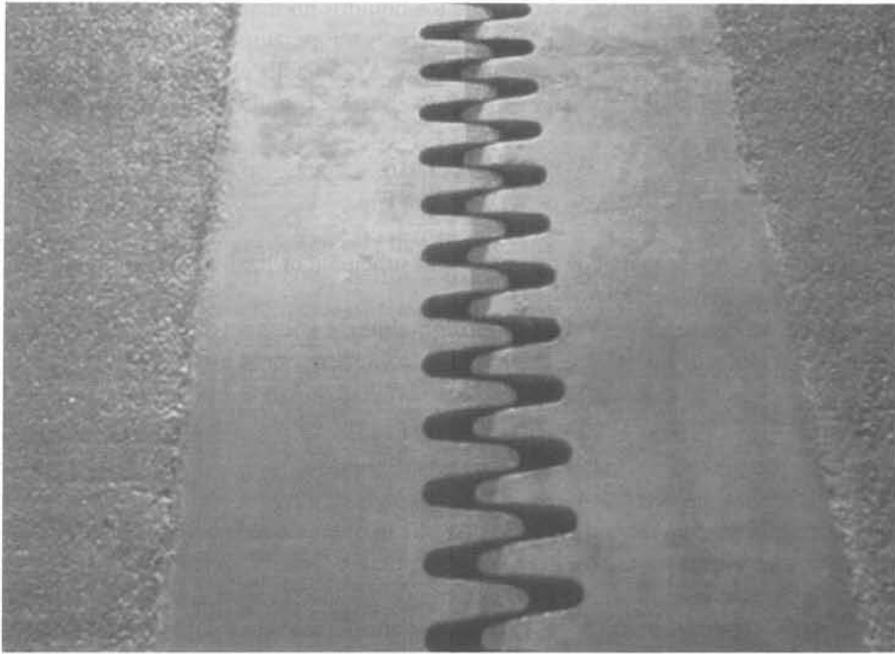
**83 ●●●** Bertrand Russell dijo una vez que si a un millón de monos les hubiesen dado un millón de máquinas de escribir sobre las que teclear al azar durante un millón de años, esos simios habrían escrito todas las obras de Shakespeare. Limitémonos al siguiente fragmento de este autor (*Julio César* III:ii)

*¡Amigos romanos, compatriotas, prestadme atención!  
¡Vengo a inhumar a César, no a ensalzarle!  
¡El mal que hacen los hombres perdura sobre su memoria!  
¡Frecuentemente el bien queda sepultado con sus huesos!"  
¡Sea así con César!  
El noble Bruto os ha dicho que César era ambicioso.  
Si lo fue, era la suya una falta grave,  
y gravemente la ha pagado ...*

¡Incluso este pequeño fragmento necesitaría mucho más de un millón de años para ser escrito! En términos aproximados determinar en qué factor se equivocó Russell. Hacer las suposiciones razonables que uno desee. (Se puede incluso imponer que los monos son inmortales).

# PROPIEDADES Y PROCESOS TÉRMICOS

## \*Capítulo 20



Las juntas de dilatación como la que se muestra son elementos esenciales de los puentes de acero al permitir la dilatación y contracción del puente por los cambios de temperatura sin que aparezcan tensiones en la estructura de acero.

¿Qué le podría ocurrir a este puente si no tuviese juntas de dilatación? (Véase el ejemplo 20.1.)

Cuando un cuerpo absorbe energía térmica (calor) pueden ocurrir diversos cambios en sus propiedades físicas. Por ejemplo, su temperatura puede aumentar, al mismo tiempo que se expande o se contrae, o bien, el cuerpo se puede licuar o vaporizar, y durante ese proceso su temperatura permanece constante.

En este capítulo analizaremos algunas de las propiedades térmicas de la materia y algunos procesos importantes que implican la energía térmica.

- 20.1 Dilatación térmica
- 20.2 Ecuación de van der Waals e isothermas líquido-vapor
- 20.3 Diagramas de fase
- 20.4 Transferencia de energía térmica

## 20.1 Dilatación térmica

Cuando aumenta la temperatura de un cuerpo, normalmente éste se dilata. (Téngase en cuenta que en una carretera de hormigón, las juntas de dilatación aparecen cada 10 ó 15 m, lo que facilita que la carretera se dilate sin deformarse.) Consideremos una varilla larga de longitud  $L$  a una temperatura  $T$ . Cuando la temperatura varía en  $\Delta T$ , el cambio de longitud  $\Delta L$  es proporcional a  $\Delta T$  y a la longitud inicial  $L$ :

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T \quad (20.1)$$

en donde  $\alpha$  se denomina **coeficiente de dilatación lineal** y es igual al cociente entre la variación relativa de longitud y la variación de temperatura:

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta T} \quad (20.2)$$

Sus unidades son el recíproco del grado Celsius ( $1/^\circ\text{C}$ ) o el recíproco del kelvin ( $1/\text{K}$ ). El coeficiente de dilatación lineal de los sólidos o de los líquidos normalmente no varía apenas con la presión, pero puede variar significativamente con la temperatura. La ecuación 20.2 da el valor medio de  $\alpha$  en todo el intervalo de temperaturas  $\Delta T$ . Se halla el coeficiente de dilatación lineal a una temperatura determinada  $T$  tomando el límite cuando  $\Delta T$  tiende a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta L/L}{\Delta T} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \quad (20.3)$$

En la mayoría de los casos se consigue una exactitud suficiente utilizando el valor medio en un intervalo amplio de temperatura.

Análogamente, se define el **coeficiente de dilatación de volumen**  $\beta$  como el cociente entre la variación relativa de volumen y la variación de temperatura (a presión constante):

$$\beta = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta V/V}{\Delta T} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \quad (20.4)$$

Del mismo modo que  $\alpha$ , el coeficiente  $\beta$  no varía ordinariamente con la presión si se trata de sólidos o líquidos, pero puede variar con la temperatura. En la tabla 20.1 se dan los valores medios de  $\alpha$  y  $\beta$  para diversas sustancias.

Para un material determinado  $\beta = 3\alpha$ . En efecto, consideremos una caja de dimensiones  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ . Su volumen a una temperatura  $T$  es

$$V = L_1 L_2 L_3$$

La variación del volumen respecto a la temperatura es

$$\frac{dV}{dT} = L_1 L_2 \frac{dL_3}{dT} + L_1 L_3 \frac{dL_2}{dT} + L_2 L_3 \frac{dL_1}{dT}$$

Dividiendo cada miembro de la ecuación por el volumen, se tiene

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = \frac{1}{L_3} \frac{dL_3}{dT} + \frac{1}{L_2} \frac{dL_2}{dT} + \frac{1}{L_1} \frac{dL_1}{dT}$$

Como cada término del segundo miembro es igual a  $\alpha$ , tendremos

$$\beta = 3\alpha \quad (20.5)$$

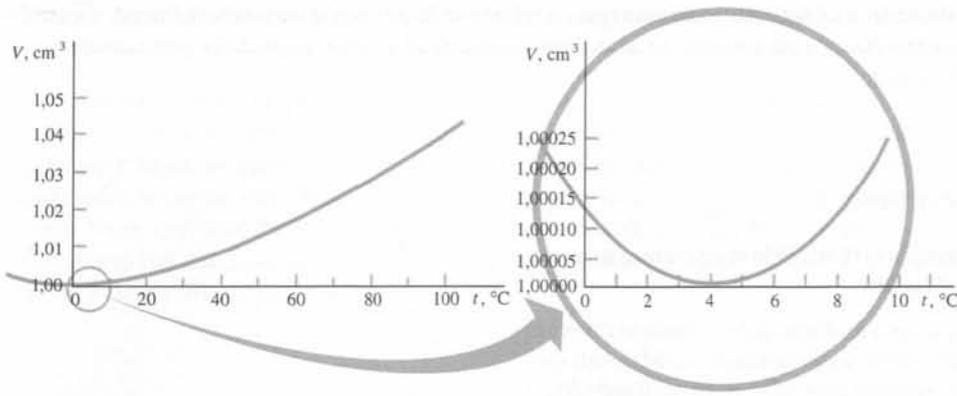
De igual modo, el coeficiente de dilatación superficial es igual al doble del coeficiente lineal.

El incremento de tamaño de cualquier parte de un cuerpo para un cambio determinado de la temperatura es proporcional al tamaño original de dicha parte. Así, si aumentamos la temperatura de una regla de acero, por ejemplo, el efecto será semejante al de un aumento fotográfico (muy pequeño). Las líneas que estaban previamente distantes por igual seguirán estando igualmente espaciadas, pero los espacios serán ligeramente mayores. **Si la regla tiene en ella un orificio de 1 cm de diámetro, pongamos entre las líneas correspondientes a 3 cm y 4 cm, el orificio se hará mayor, precisamente como se ha hecho la distancia entre las líneas de 3 y 4 cm.**

Aunque la mayor parte de los materiales se dilatan cuando se calientan, el comportamiento del agua a las temperaturas comprendidas entre 0 y 4 °C es una excepción importante. En la figura 20.1 se muestra el volumen ocupado por 1 g de agua en función de la temperatura. El

TABLA 20.1 Valores aproximados de los coeficientes de dilatación térmica para varias sustancias

10 <sup>-2</sup>	Aire	3,67 × 10 <sup>-3</sup>	} $\beta, \text{K}^{-1}$
	Acetona	1,5 × 10 <sup>-3</sup>	
10 <sup>-3</sup>	Alcohol	1,1 × 10 <sup>-3</sup>	
	Agua (20 °C)	0,207 × 10 <sup>-3</sup>	}
10 <sup>-4</sup>	Mercurio	0,18 × 10 <sup>-3</sup>	
	Hielo	51 × 10 <sup>-6</sup>	} $\alpha, \text{K}^{-1}$
	Aluminio	24 × 10 <sup>-6</sup>	
	Latón	19 × 10 <sup>-6</sup>	
	Cobre	17 × 10 <sup>-6</sup>	
10 <sup>-5</sup>	Acero	11 × 10 <sup>-6</sup>	
	Vidrio (ordinario)	9 × 10 <sup>-6</sup>	
	Grafito	7,9 × 10 <sup>-6</sup>	
	Vidrio (Pyrex)	3,2 × 10 <sup>-6</sup>	
10 <sup>-6</sup>	Diamante	1,2 × 10 <sup>-6</sup>	
	Invar	1 × 10 <sup>-6</sup>	
10 <sup>-7</sup>			



**Figura 20.1** Volumen de un gramo de agua a la presión atmosférica en función de la temperatura. El volumen mínimo se encuentra a 4 °C y corresponde a la máxima densidad. A temperaturas por debajo de 0 °C, la curva representada es la del agua sobreenfriada. (Agua sobreenfriada es el agua que se enfría por debajo del punto de congelación normal sin que solidifique.)

volumen es mínimo, y por lo tanto la densidad es máxima, a 4 °C. Por lo tanto, cuando se calienta agua que está por debajo de los 4 °C, se contrae en lugar de dilatarse y viceversa. Esta propiedad tiene importantes consecuencias ecológicas en los lagos. A temperaturas superiores a los 4 °C, cuando se produce un enfriamiento de las aguas del lago, el agua fría es más densa y se hunde hacia el fondo del lago; pero para temperaturas inferiores a 4 °C el agua fría es menos densa y asciende a la superficie. Como consecuencia de ello el hielo se forma primero en la superficie del lago y, como el hielo es menos denso que el agua, permanece en la superficie, actuando como un aislante térmico para el agua que se encuentra por debajo. Si el agua helada redujera su volumen cuando se congela, como lo hacen la mayoría de las sustancias, el hielo se hundiría hacia el fondo, dando lugar a que nuevas corrientes de agua pudiesen helarse en la superficie. De esta manera los lagos quedarían helados por completo, desde el fondo hasta la superficie, los peces morirían y, en general, la vida acuática sería imposible en estas condiciones.

### EJEMPLO 20.1 | Dilatación de un puente

Un puente de acero tiene 1000 m de longitud. ¿Qué longitud se dilatará cuando la temperatura aumente de 0 a 30 °C?

**Planteamiento del problema** Utilizando el valor  $\alpha = 11 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  de la tabla 20.1, se calcula  $\Delta L$  a partir de la ecuación 20.1.

El cambio de longitud para una variación de  $30 \text{ C}^\circ = 30 \text{ K}$  de temperatura es el producto de  $\alpha$ ,  $L$  y  $\Delta T$ :

$$\Delta L = \alpha L \Delta T = (11 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1})(1000 \text{ m})(30 \text{ K}) = 0,33 \text{ m} = 33 \text{ cm}$$

**Observación** Las juntas de dilatación que se incluyen en los puentes tienen por objeto evitar las enormes tensiones que se producirían sin ellas. Tensiones excesivas originadas por aumentos de temperatura pueden ocasionar deformaciones en el puente.

Podemos calcular las tensiones que se producirían en un puente de acero, sin juntas de dilatación, utilizando el módulo de Young (ecuación 12.1):

$$Y = \frac{\text{tensión}}{\text{deformación}} = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

Por lo tanto,

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L} = Y \alpha \Delta T$$

Para  $\Delta T = 30 \text{ K}$ ,  $\Delta L/L = 0,33 \text{ m}/1000 \text{ m}$ , como vimos en el ejemplo 20.1. Utilizando  $Y = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  (tabla 12.1), resulta

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L} = (2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2) \frac{0,33 \text{ m}}{1000 \text{ m}} = 6,6 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

Esta tensión es aproximadamente igual a un tercio de la tensión de rotura del acero sometido a compresión. Una tensión de este orden curvaría el puente y quedaría permanentemente deformado.

### EJEMPLO 20.2 | Un vaso completamente lleno

Un frasco de vidrio de 1 L se llena hasta el borde con agua a 10 °C. Si la temperatura aumenta hasta 30 °C, ¿qué cantidad de agua se derramará del frasco?

**Planteamiento del problema** El frasco de vidrio y el agua se dilatan ambos cuando se calientan, pero la dilatación del agua es superior a la del frasco y por lo tanto se derrama cierta cantidad. Esta cantidad puede determinarse calculando las variaciones de volumen para  $\Delta T = 20$  K, utilizando  $\Delta V_a = \beta_a V \Delta T$  con  $\beta_a = 0,207 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  para el agua (véase la tabla 20.1) y  $\Delta V_v = \beta_v V \Delta T = 3\alpha V \Delta T$  con  $\alpha = 9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  para el vidrio. La diferencia entre estos dos volúmenes es el volumen de agua derramada.

1. El volumen de agua derramada,  $\Delta V_d$  es la diferencia entre los cambios de volumen del agua y del vidrio: 
$$\Delta V_d = \Delta V_a - \Delta V_v$$
2. Determinar el incremento de volumen del agua: 
$$\Delta V_a = \beta_a V \Delta T$$
3. Determinar el incremento de volumen del frasco de vidrio: 
$$\Delta V_v = \beta_v V \Delta T = 3\alpha_v V \Delta T$$
4. Por diferencia se obtiene la cantidad de agua derramada: 
$$\begin{aligned} \Delta V_d &= \Delta V_a - \Delta V_v = \beta_a V \Delta T - \beta_v V \Delta T \\ &= (\beta_a - \beta_v) V \Delta T = (\beta_a - 3\alpha_v) V \Delta T \\ &= [0,207 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1} - 3(9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1})](1 \text{ l})(20 \text{ K}) \\ &= 3,6 \times 10^{-3} \text{ l} = \boxed{3,6 \text{ mL}} \end{aligned}$$

### EJEMPLO 20.3 | Rotura del cobre

Se calienta una barra de cobre a 300 °C y se la sujeta fuertemente entre dos puntos fijos de forma que no pueda contraerse ni dilatarse. Si la tensión de rotura límite del cobre es de 230 MN/m<sup>2</sup>, ¿cuál será la temperatura a la que se romperá la barra si se somete a un enfriamiento?

**Planteamiento del problema** Cuando la barra se enfría, la variación de longitud  $\Delta L$  que tendría lugar si pudiera contraerse es compensada por un alargamiento igual producido por la tensión de tracción de la barra. Esta tensión  $F/A$  está relacionada con el alargamiento  $\Delta L$  por medio de  $Y = (F/A)/(\Delta L/L)$ , en donde el módulo de Young del cobre es  $Y = 110 \text{ GN/m}^2$  (tabla 12.1). El máximo alargamiento permisible tiene lugar cuando  $F/A$  vale 230 MN/m<sup>2</sup>. Así determinamos el cambio de temperatura que produciría esta contracción máxima.

1. Calcular la variación de longitud  $\Delta L_1$  que se produciría si la barra no estuviera empotrada y se enfriara  $\Delta T$ : 
$$\Delta L_1 = \alpha L \Delta T$$
2. Una tensión de tracción  $F/A$  alarga la barra en  $\Delta L_2$ , en donde: 
$$Y = \frac{F/A}{\Delta L_2/L}, \text{ de modo que } \Delta L_2 = L \frac{F/A}{Y}$$
3. Sustituir los resultados de los pasos 1 y 2 en  $\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$  y despejar  $\Delta T$ : 
$$\begin{aligned} \Delta L_1 + \Delta L_2 &= 0 \\ \alpha L \Delta T + L \frac{F/A}{Y} &= 0 \end{aligned}$$
 de donde 
$$\begin{aligned} \Delta T &= -\frac{F/A}{\alpha Y} \\ &= -\frac{230 \times 10^6 \text{ N/m}^2}{(17 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1})(110 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} \\ &= -123 \text{ K} = -123 \text{ C}^\circ \end{aligned}$$
4. Sumar este resultado a la temperatura original para determinar la temperatura final a la cual se rompe la barra: 
$$T_f = T_i + \Delta T = 300 \text{ C}^\circ - 123 \text{ C}^\circ = \boxed{177 \text{ C}^\circ}$$

## 20.2 Ecuación de van der Waals e isothermas líquido-vapor

Aunque la mayoría de los gases se comportan como un gas ideal a las presiones ordinarias, su comportamiento se desvía del ideal a presiones suficientemente altas o temperaturas suficientemente bajas, es decir, cuando la densidad del gas es elevada y las moléculas, por término medio, no están muy alejadas. Existe una ecuación de estado denominada ecuación de van der Waals que describe el comportamiento de muchos gases reales en un amplio margen de presiones con más exactitud que la ecuación de estado del gas ideal ( $PV = nRT$ ). La **ecuación de van der Waals** para  $n$  moles de gas es

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT \quad (20.6)$$

ECUACIÓN DE ESTADO DE VAN DER WAALS

En esta ecuación aparece la constante  $b$  porque las moléculas del gas no son partículas puntuales sino que tienen tamaño finito; por consiguiente, se reduce el volumen libre disponible para que se muevan las moléculas. El valor de  $b$  es el volumen de un mol de moléculas del gas. El término  $an^2/V^2$  se debe a la atracción que las moléculas del gas ejercen entre sí. Cuando una molécula se acerca a la pared del recipiente, se ve frenada por la atracción de las moléculas que la rodean con una fuerza que es proporcional a su densidad  $n/V$ . Como el número de moléculas que chocan contra la pared en un tiempo determinado es también proporcional a la densidad de las moléculas, la disminución de la presión debida a la atracción de las moléculas es proporcional al cuadrado de la densidad y, por lo tanto, a  $n^2/V^2$ . La constante  $a$  depende del tipo de gas y es pequeña en el caso de los gases inertes que poseen una pequeña interacción química. Los términos  $bn$  y  $an^2/V^2$  son ambos despreciables cuando el volumen  $V$  es grande, es decir, a densidades bajas. Así pues, en estos casos, la ecuación de van der Waals tiende a la ley de los gases ideales, mientras que a densidades altas proporciona una descripción mucho mejor del comportamiento de los gases reales.

En la figura 20.2 se muestran las curvas isothermas en un gráfico de  $P$  en función de  $V$  para una sustancia real a varias temperaturas. Fuera de la región en que coexisten líquido y vapor, estas curvas se describen muy bien por la ecuación de van der Waals y pueden utilizarse para determinar las constantes  $a$  y  $b$ . Por ejemplo, los valores de estas constantes que dan el mejor ajuste a las curvas experimentales para el nitrógeno son  $a = 0,14 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6/\text{mol}^2$  y  $b = 39,1 \text{ mL/mol}$ . Este volumen de 39,1 mL por mol es aproximadamente el 0,2 por ciento del volumen de 22,4 L que ocupa 1 mol de nitrógeno en condiciones estándar. Como la masa molar del nitrógeno es 28 g/mol, si 1 mol de moléculas de nitrógeno estuviese empaquetado en un volumen de 39,1 mL, su densidad sería

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{28 \text{ g}}{39,1 \text{ mL}} = 0,72 \text{ g/mL} = 0,72 \text{ kg/L}$$

valor comparable a la densidad del nitrógeno líquido, que es 0,80 kg/L.

El valor de la constante  $b$  puede utilizarse para hacer una estimación del tamaño de la molécula. Como el volumen de 1 mol ( $N_A$  moléculas) de nitrógeno es 39,1 cm<sup>3</sup>, el volumen de una sola molécula es

$$V = \frac{b}{N_A} = \frac{39,1 \text{ cm}^3/\text{mol}}{6,02 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}} = 6,50 \times 10^{-23} \text{ cm}^3/\text{molécula}$$

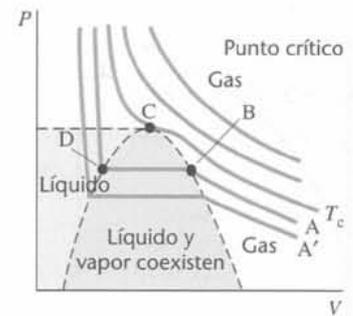
Si suponemos que cada molécula ocupa un cubo de arista  $d$ , se tiene

$$d^3 = 6,50 \times 10^{-23} \text{ cm}^3$$

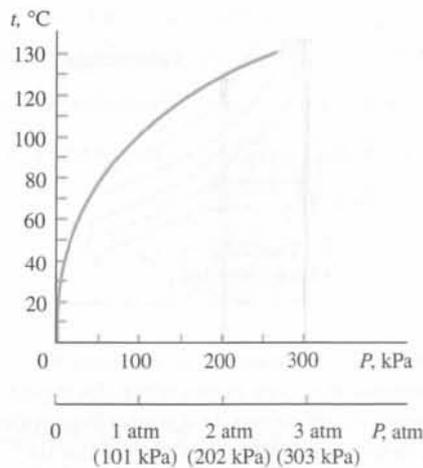
o bien

$$d = 4,0 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

que es un valor estimado razonable para el “diámetro” de una molécula de nitrógeno.



**Figura 20.2** Isothermas en un diagrama  $PV$  correspondientes a una sustancia real. En el caso de temperaturas por encima de la temperatura crítica  $T_c$ , la sustancia permanece gaseosa a todas las presiones. Fuera de la región donde líquido y vapor coexisten, estas curvas quedan bien descritas mediante la ecuación de van der Waals. La presión correspondiente a las partes horizontales de las curvas en la región sombreada es la presión de vapor, que es aquella en que el vapor y el líquido están en equilibrio. A la izquierda de la región sombreada y para temperaturas por debajo de la crítica, la sustancia es un líquido y es casi incompresible.



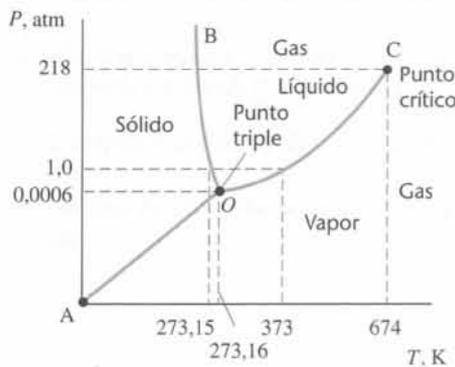
**Figura 20.3** Presión de vapor del agua en función de la temperatura.

A temperaturas por debajo de  $T_c$ , la ecuación de van der Waals describe aquellas porciones de las isothermas que son exteriores a la región sombreada de la figura 20.2, pero no las porciones interiores a la misma. Supongamos que tenemos un gas a una temperatura inferior a  $T_c$  que inicialmente tiene una presión baja y un volumen grande. Manteniendo la temperatura constante (isoterma A en la figura) empezamos a comprimir el gas. Al principio la presión va creciendo, pero cuando alcanzamos el punto B sobre la línea a trazos, la presión deja de aumentar y el gas empieza a condensarse a presión constante. A lo largo de la línea horizontal BD de la figura, el gas y el líquido están en equilibrio. Si continuamos comprimiendo el gas, cada vez se condensa más gas hasta que se alcanza el punto D sobre la línea a trazos, en donde tenemos sólo líquido. Luego, si intentamos comprimir aún más la sustancia, la presión aumenta rápidamente, porque un líquido es casi incompresible.

Consideremos ahora que introducimos un líquido, por ejemplo agua, en un recinto donde previamente se ha hecho el vacío y luego se cierra. Cuando parte del agua se evapora, las moléculas de vapor de agua llenan el espacio vacío del recinto. Algunas de estas moléculas chocan contra la superficie del líquido y de nuevo toman la forma líquida en un proceso llamado condensación. Inicialmente la velocidad de evaporación es mayor que la de condensación, pero finalmente se alcanza un equilibrio. La presión a la que un líquido se encuentra en equilibrio con su propio vapor a una determinada temperatura, se denomina **presión de vapor**. Cuando existe este equilibrio y se calienta ligeramente el recipiente, el líquido hierve, se evapora una parte mayor de éste y se acaba restableciendo de nuevo el equilibrio, esta vez a una presión de vapor más alta. Podemos ver en la figura 20.2 que la presión de vapor de un gas depende de su temperatura. Si hubiésemos empezado a comprimir el gas a una temperatura inferior, como la correspondiente a la isoterma A' de la misma figura, la presión de vapor también hubiese sido menor y correspondería a la línea horizontal de presión constante que indica A'. La temperatura de una sustancia cuya presión de vapor es igual a 1 atm, es el **punto de ebullición normal** de dicha sustancia. Por ejemplo, la presión de vapor del agua es 1 atm a la temperatura de 373 K = 100 °C, de modo que esta temperatura es el punto de ebullición normal del agua. En altitudes elevadas, como en la cima de una montaña, la presión es inferior a 1 atm y entonces el agua hierve a una temperatura menor que 373 K. La figura 20.3 muestra las presiones de vapor del agua a varias temperaturas.

A temperaturas por encima de la temperatura crítica  $T_c$ , los gases no condensan, sea cualquiera la presión a que se encuentren sometidos. La temperatura crítica para el vapor de agua es 647 K = 374 °C. El punto en el que la isoterma crítica corta la curva a trazos en la figura 20.2 (punto C) se denomina el **punto crítico**.

## 20.3 Diagramas de fase



**Figura 20.4** Diagrama de fases correspondiente al agua. Las escalas de presión y de temperatura no son lineales sino que se han reducido para mostrar todos los puntos interesantes. La curva OC es la curva de presión de vapor en función de la temperatura. La curva OB es la de fusión y la OA, la de sublimación.

En la figura 20.4 se representa la presión en función de la temperatura a volumen constante en el caso del agua. Dicha representación se denomina un **diagrama de fases**. La parte del diagrama comprendida entre los puntos O y C muestra la presión del vapor en función de la temperatura. Al continuar calentando el recipiente, disminuye la densidad del líquido y aumenta la del vapor. En el punto C del diagrama ambas densidades son iguales. El punto C es el **punto crítico**. En este punto y por encima de él no existe distinción entre el líquido y el gas. En la tabla 20.2 se dan las temperaturas críticas de diversas sustancias. A temperaturas mayores que la crítica, un gas no se licúa por mucho que se aumente la presión.

Si ahora enfriamos nuestro recipiente, parte del vapor condensa en líquido recorriendo en sentido inverso la curva OC hasta que la sustancia alcanza el punto O de la figura 20.4. En este punto el líquido empieza a solidificar. El punto O es el **punto triple** en el que pueden coexistir en equilibrio las fases sólida, líquida y de vapor de una sustancia. Cada sustancia tiene un punto triple único, con una temperatura y presión específicas. La temperatura del punto triple del agua es 273,16 K = 0,01 °C y la presión del punto triple vale 4,58 mmHg.

El líquido no puede existir a temperaturas y presiones por debajo del punto triple. La curva OA del diagrama de fases de la figura 20.4 es el lugar geométrico de las presiones y temperaturas en donde coexisten en equilibrio el sólido y el vapor. El paso directo de sólido a vapor se denomina **sublimación**. Se puede observar este fenómeno si se colocan cubos de hielo en el congelador de una nevera (especialmente si es del tipo que elimina automática-

mente la escarcha que se forma). Los cubos de hielo desaparecen finalmente debido a la sublimación. Como la presión atmosférica está muy por encima de la presión del punto triple del agua, nunca se establece el equilibrio entre el hielo y el vapor de agua. La temperatura y presión del punto triple del dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) son 216,55 K y 3880 mmHg, lo cual significa que el  $\text{CO}_2$  líquido sólo puede existir a presiones por encima de 3880 mmHg = 5,1 atm. Por lo tanto, a las presiones ordinarias, el dióxido de carbono líquido no puede existir a ninguna temperatura. Cuando el dióxido de carbono sólido “funde”, se sublima directamente a  $\text{CO}_2$  gaseoso sin pasar por la fase líquida; de aquí el nombre de “hielo seco”.

La curva  $OB$  en la figura 20.4 es la curva de fusión que separa la fase sólida y líquida. En el caso de una sustancia como el agua cuya temperatura de fusión disminuye al aumentar la presión, la curva  $OB$  se dirige hacia la izquierda a partir del punto triple, como se ve en esta figura. En casi todas las demás sustancias la temperatura de fusión aumenta cuando crece la presión. En estos casos, la línea  $OB$  se curva hacia la derecha desde el punto triple.

Para que una molécula escape de la superficie de un líquido, es decir, se evapore, se necesita energía para romper los enlaces moleculares de la superficie del líquido. Por lo tanto, la vaporización es un proceso en el que se enfría el líquido que queda atrás. Si se hace hervir agua de la forma usual, calentándola, el efecto de enfriamiento mantiene constante la temperatura del líquido en su punto de ebullición. Esta es la razón por la que puede utilizarse el punto de ebullición de una sustancia para calibrar termómetros. Sin embargo, también puede hacerse hervir el agua, sin añadirle calor, extrayendo el aire que hay encima, haciendo descender así la presión aplicada. La energía necesaria para la vaporización se extrae, entonces, del propio líquido que queda detrás. Como resultado, el líquido se irá enfriando, incluso hasta el punto en que llegará a formarse hielo en la parte superior del agua hirviendo.

## 20.4 Transferencia de energía térmica

Existen tres formas diferentes de transmisión de la energía térmica de un lugar a otro: conducción, convección y radiación.

En la **conducción**, la energía se transmite en forma de calor como consecuencia de las interacciones entre átomos o moléculas, aunque no exista un transporte de los propios átomos o moléculas. Por ejemplo, si se calienta uno de los extremos de una barra sólida, los átomos de la red cristalina del extremo calentado vibran con mayor energía que los del extremo frío y, debido a la interacción de estos átomos con sus átomos vecinos, esta energía se transporta a lo largo de la barra.<sup>1</sup>

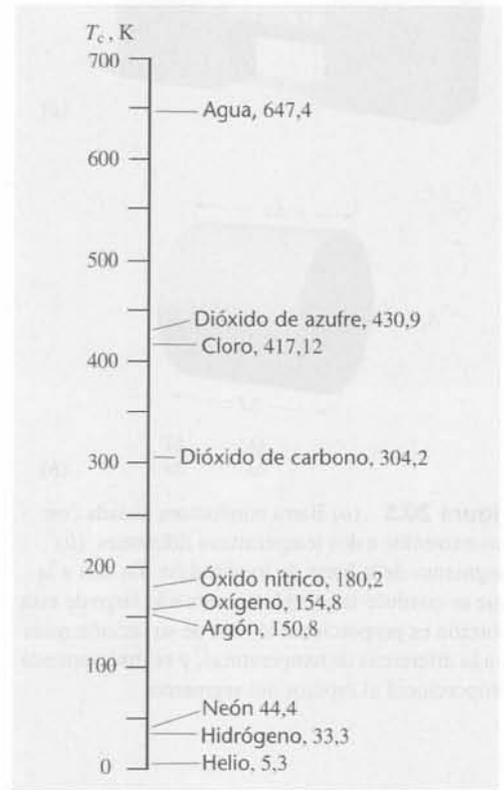
En la **convección**, el calor se transfiere mediante un transporte directo de masa. Por ejemplo, el aire caliente próximo al suelo se expande, su densidad disminuye, y la fuerza ascensional que actúa sobre él debida al medio que lo rodea hace que suba. Por lo tanto, la energía térmica del aire caliente se transporta hacia arriba junto con la masa de aire caliente.

En la **radiación**, la energía térmica se transporta a través del espacio en forma de ondas electromagnéticas que se mueven a la velocidad de la luz. La radiación térmica, las ondas luminosas, las ondas de radio, las ondas de televisión y los rayos X son todas ellas formas de radiación electromagnética y difieren entre sí únicamente por sus longitudes de onda o frecuencias.

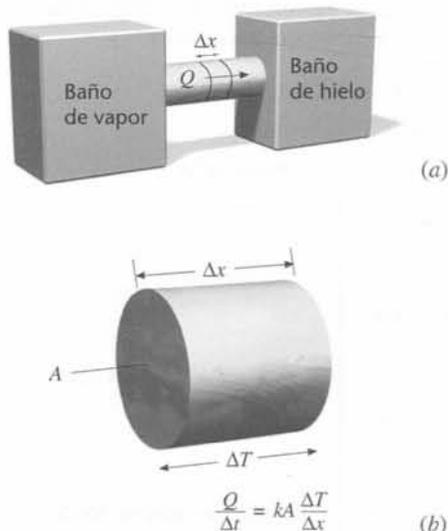
En todos los mecanismos de transmisión de calor, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura que existe entre el cuerpo y el medio que le rodea. Este hecho se conoce con el nombre de **ley del enfriamiento de Newton**.

En muchas situaciones reales, los tres mecanismos de transferencia del calor se presentan simultáneamente, aunque alguno de ellos puede ser más dominante que los otros. Por ejemplo, las estufas ordinarias transfieren calor por radiación y por convección. Si el elemento calefactor es cuarzo, el principal mecanismo de transferencia del calor es la radiación. Si el elemento calefactor es un metal (que no irradia tan eficazmente como el cuarzo), el principal mecanismo de transferencia del calor es la convección y el aire calentado se eleva para ser reemplazado por aire más frío. Con frecuencia, estos calentadores incluyen un ventilador para acelerar el proceso de convección.

TABLA 20.2 Temperaturas críticas  $T_c$  para diversas sustancias



<sup>1</sup> Si el sólido es un metal, el transporte de energía térmica es facilitado por los electrones libres que se mueven a lo largo del mismo.



**Figura 20.5** (a) Barra conductora aislada con sus extremos a dos temperaturas diferentes. (b) Segmento de la barra de longitud  $\Delta x$ . La tasa a la que se conduce la energía térmica a lo largo de esta porción es proporcional al área de su sección recta y a la diferencia de temperaturas, y es inversamente proporcional al espesor del segmento.

## Conducción

En la figura 20.5a se muestra una barra sólida de sección transversal  $A$ . Si mantenemos uno de los extremos de la barra a una temperatura elevada y el otro extremo a una temperatura baja, la energía térmica se conduce de forma continua a lo largo de la barra desde el extremo caliente al extremo más frío. En el estado estacionario, la temperatura varía linealmente desde el extremo caliente al extremo frío. La tasa de variación de la temperatura  $\Delta T/\Delta x$  a lo largo de la barra recibe el nombre de **gradiente de temperatura**.

Sea  $\Delta T$  la diferencia de temperatura entre los extremos de un pequeño segmento de longitud  $\Delta x$  (figura 20.5b). Si llamamos  $Q$  a la cantidad de calor que se transmite por conducción a lo largo de dicha porción en un cierto intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la tasa de conducción de calor  $Q/\Delta t$  se denomina **corriente térmica**  $I$ . Experimentalmente se encuentra que la corriente térmica es proporcional al gradiente de temperatura y al área de la sección recta  $A$ :

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (20.7)$$

DEFINICIÓN—CORRIENTE TÉRMICA

La constante de proporcionalidad  $k$ , llamada *coeficiente de conductividad térmica* o simplemente *conductividad térmica*, depende de la composición de la barra.<sup>1</sup> En unidades del SI, la corriente térmica se expresa en vatios (julios por segundo) y la conductividad térmica tiene unidades de  $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ .<sup>2</sup> En los EE.UU. la corriente térmica se expresa usualmente en Btu por hora, el área en pies cuadrados, la longitud (o el espesor) en pulgadas y la temperatura en grados Fahrenheit. La conductividad térmica se expresa entonces en  $\text{Btu}\cdot\text{pulg}/(\text{h}\cdot\text{pie}\cdot\text{F}^\circ)$ . La tabla 20.3 da las conductividades térmicas de diversos materiales.

De la ecuación 20.7 resulta para la diferencia de temperaturas

$$\Delta T = I \frac{\Delta x}{kA} \quad (20.8)$$

es decir,

$$\Delta T = IR \quad (20.9)$$

CAMBIO DE TEMPERATURA EN FUNCIÓN DE LA CORRIENTE TÉRMICA

en donde  $\Delta x/kA$  es la **resistencia térmica**  $R$ :

$$R = \frac{\Delta x}{kA} \quad (20.10)$$

DEFINICIÓN—RESISTENCIA TÉRMICA

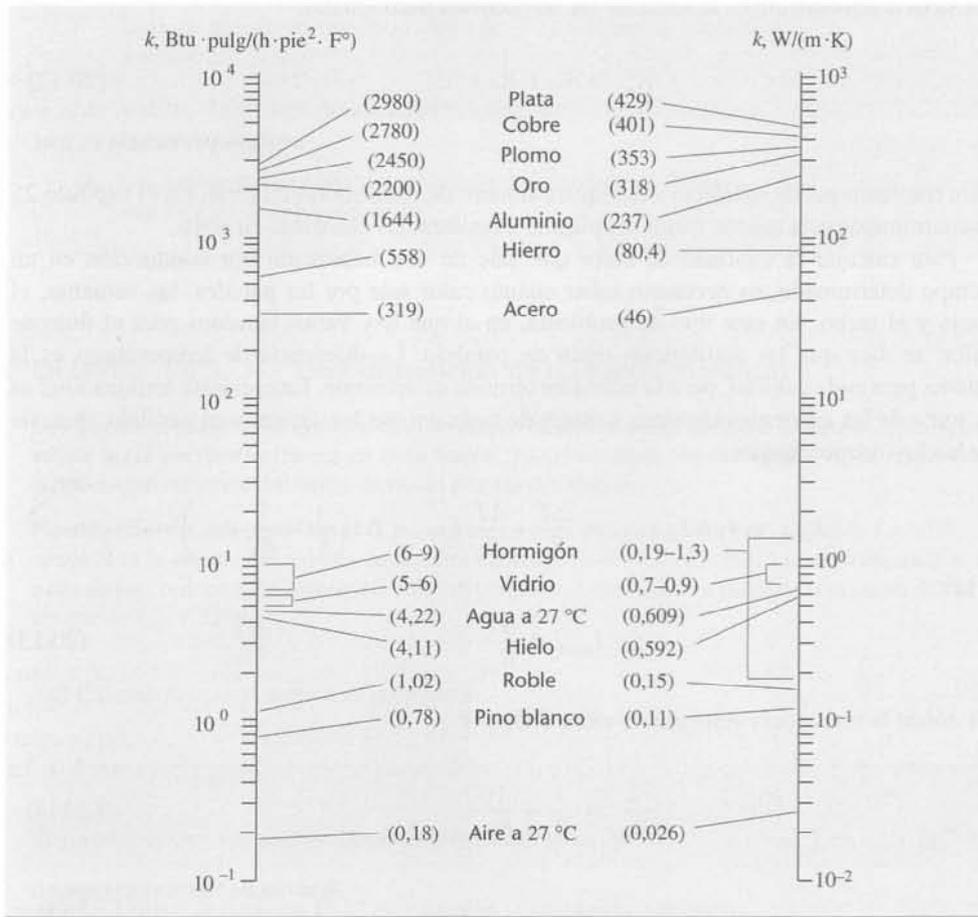
**Ejercicio** Calcular la resistencia térmica de una chapa de aluminio de área  $15 \text{ cm}^2$  y espesor  $2 \text{ cm}$ . (*Respuesta*  $0,0563 \text{ K/W} = 56,3 \text{ mK/W}$ .)

**Ejercicio** ¿Qué espesor de plata se necesitaría para que su resistencia térmica fuera equivalente a la de un espesor de  $1 \text{ cm}$  de aire de igual sección recta? (*Respuesta*  $\Delta x = (1 \text{ cm})(429)/(0,026) = 16\,500 \text{ cm} = 165 \text{ m}$ .)

<sup>1</sup> No confundir la conductividad térmica con la constante de Boltzmann, que también se designa con la letra  $k$ .

<sup>2</sup> En algunas tablas, la energía térmica se expresa en calorías o kilocalorías y el espesor del conductor en centímetros.

TABLA 20.3 Conductividades térmicas  $k$  para diversos materiales



En muchos problemas prácticos interesa el flujo de calor que se propaga a través de dos o más conductores (o aislantes) colocados en serie. Por ejemplo, supongamos que queremos conocer el efecto que se produce si se introduce un material aislante de un cierto espesor y conductividad térmica en el espacio comprendido entre dos paneles de yeso. En la figura 20.6 se muestran dos planchas de igual área transversal pero de diferente material y diferente espesor. Llamamos  $T_1$  a la temperatura en el lado caliente,  $T_2$  a la temperatura de la interfaz entre las planchas, y  $T_3$  la temperatura en el lado frío. En condiciones de flujo de calor estacionario, la corriente térmica  $T$  que atravesase cada plancha debe ser la misma. Esto es una consecuencia del principio de conservación de la energía; para un flujo estacionario, el ritmo con el que la energía entra en una región debe ser igual al ritmo de salida.

Si llamamos  $R_1$  y  $R_2$  a las resistencias térmicas de las dos planchas, según la ecuación 20.9 para cada plancha se cumple

$$T_1 - T_2 = IR_1$$

y

$$T_2 - T_3 = IR_2$$

Sumando ambas expresiones

$$\Delta T = T_1 - T_3 = I(R_1 + R_2) = IR_{eq}$$

o sea

$$I = \frac{\Delta T}{R_{eq}} \tag{20.11}$$

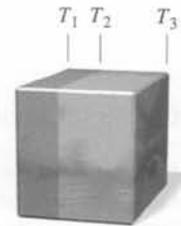


Figura 20.6 Dos láminas térmicas conductoras de materiales diferentes puestas en serie. La resistencia térmica equivalente de las láminas en serie es la suma de sus resistencias térmicas individuales. La corriente térmica es la misma a través de ambas láminas.

en donde  $R_{eq}$  es la **resistencia equivalente**. Así, para las resistencias térmicas en serie, la resistencia equivalente es la suma de las resistencias individuales:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots \quad (20.12)$$

RESISTENCIAS TÉRMICAS EN SERIE

Este resultado puede aplicarse a cualquier número de resistencias en serie. En el capítulo 25 encontraremos esta misma fórmula aplicada a resistencias eléctricas en serie.

Para calcular la cantidad de calor que sale de una habitación por conducción en un tiempo determinado, es necesario saber cuánto calor sale por las paredes, las ventanas, el suelo y el techo. En este tipo de problema, en el que hay varios caminos para el flujo de calor, se dice que las resistencias están en paralelo. La diferencia de temperaturas es la misma para cada camino, pero la corriente térmica es diferente. La corriente térmica total es la suma de las corrientes térmicas a través de cada uno de los caminos en paralelo, que son de hecho independientes:

$$I_{total} = I_1 + I_2 + \dots = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2} + \dots = \Delta T \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \right)$$

o sea

$$I_{total} = \frac{\Delta T}{R_{eq}} \quad (20.13)$$

en donde la resistencia equivalente viene dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \quad (20.14)$$

RESISTENCIAS TÉRMICAS EN PARALELO

Encontraremos esta ecuación de nuevo en el capítulo 25 cuando estudiemos la conducción eléctrica a través de resistencias en paralelo. Obsérvese que tanto para resistencias en serie (ecuación 20.11) como para resistencias en paralelo (ecuación 20.13)  $I$  es proporcional a  $\Delta T$ , en concordancia con la ley del enfriamiento de Newton.



Este termograma de una casa muestra que la energía térmica está siendo irradiada al medio exterior.

### EJEMPLO 20.4 | Corriente térmica entre dos barras metálicas

Dos barras metálicas aisladas, cada una de longitud 5 cm y sección transversal rectangular de lados 2 cm y 3 cm, están encajadas entre dos paredes, una mantenida a 100 °C y la otra a 0 °C (figura 20.7). Las barras son de plomo y plata. Determinar (a) la corriente térmica total a través de las barras y (b) la temperatura en la interfaz.

**Planteamiento del problema** Las barras son resistencias térmicas en serie. (a) Hallar la corriente térmica total a partir de  $I = R_{eq}/\Delta T$ , en donde la resistencia equivalente  $R_{eq}$  es la suma de las resistencias individuales. Utilizando la ecuación 20.10 y las conductividades térmicas dadas en la tabla 20.3, se pueden determinar las resistencias individuales. (b) Determinar la temperatura de la interfaz aplicando  $\Delta T = IR_i$  a la primera barra solamente y deduciendo  $\Delta T$  en función del valor de  $I$  obtenido en (a).

*Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo*

#### Pasos

- (a) 1. Expresar la resistencia equivalente térmica en función de las resistencias térmicas de las dos barras.
2. Utilizando la ecuación 20.10, expresar cada resistencia en función de las conductividades térmicas individuales y los parámetros geométricos:
3. Usar la ecuación 20.13 para hallar la corriente térmica.

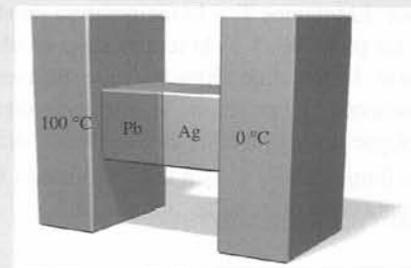
#### Respuestas

$$R_{eq} = R_{pb} + R_{Ag}$$

$$R_{pb} = \frac{\Delta x_{pb}}{k_{pb} A_{pb}}, R_{Ag} = \frac{\Delta x_{Ag}}{k_{Ag} A_{Ag}}$$

$$I = \Delta T / R_{eq} = \boxed{232 \text{ W}}$$

### ¡INTÉNTELO USTED MISMO!



**Figura 20.7** Dos bloques conductores de calor de materiales diferentes dispuestos en paralelo.

- (b) 1. Calcular la diferencia de temperatura entre los extremos de la barra de plomo utilizando la corriente y la resistencia térmica determinada en (a).
2. Utilizar el resultado del paso anterior para determinar la temperatura en la interfaz.
3. Comprobar la respuesta determinando la diferencia de temperatura a través de la barra de plata.

$$\Delta T_{\text{Pb}} = IR_{\text{Pb}} = 54,9 \text{ K} = 54,9 \text{ C}^\circ$$

$$T_{\text{if}} = 100 \text{ C}^\circ - \Delta T_{\text{Pb}} = 45,1 \text{ C}^\circ$$

$$\Delta T_{\text{Ag}} = IR_{\text{Ag}} = 45,1 \text{ C}^\circ$$

### EJEMPLO 20.5 | Otra disposición de las barras metálicas

Las barras metálicas del ejemplo 20.4 se disponen ahora como muestra la figura 20.8. Determinar (a) la corriente térmica en cada barra, (b) la corriente térmica total y (c) la resistencia térmica equivalente del sistema formado por las dos barras.

**Planteamiento del problema** La corriente en cada barra se determina utilizando  $I = \Delta T/R$ , en donde  $R$  es la resistencia térmica de la barra deducida en el ejemplo 20.4. La corriente total es la suma de las corrientes. La resistencia equivalente puede determinarse a partir de la ecuación 20.14 o a partir de  $I_{\text{total}} = \Delta T/R_{\text{eq}}$ .

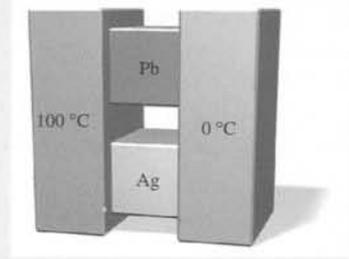


Figura 20.8

- (a) Calcular la energía térmica de cada barra:

$$I_{\text{Pb}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{Pb}}} = \frac{100 \text{ K}}{0,236 \text{ K/W}} = 424 \text{ W}$$

$$I_{\text{Ag}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{Ag}}} = \frac{100 \text{ K}}{0,194 \text{ K/W}} = 515 \text{ W}$$

- (b) Sumar estos resultados para deducir la corriente total:

$$I_{\text{total}} = I_{\text{Pb}} + I_{\text{Ag}} = 424 \text{ W} + 515 \text{ W} = 939 \text{ W}$$

- (c) 1. Utilizar la ecuación 20.14 para calcular la resistencia equivalente de las dos barras en paralelo:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_{\text{Pb}}} + \frac{1}{R_{\text{Ag}}} = \frac{1}{0,236 \text{ W}} + \frac{1}{0,194 \text{ W}}, \text{ de este modo}$$

$$R_{\text{eq}} = 0,107 \text{ K/W}$$

2. Comprobar el resultado, utilizando  $I_{\text{total}} = \Delta T/R_{\text{eq}}$ :

$$I_{\text{total}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{eq}}}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{\Delta T}{I_{\text{total}}} = \frac{100 \text{ K}}{938 \text{ W}} = 0,107 \text{ K/W}$$

**Observación** La resistencia equivalente es menor que cualquiera de las resistencias individuales. Este es el caso de las resistencias en paralelo.

En la industria relacionada con la construcción, la resistencia térmica por pie cuadrado de sección transversal de un material recibe el nombre de **factor R**, al que designaremos por  $R_f$ . Consideremos una lámina de 32 pie<sup>2</sup> de material aislante de espesor  $\Delta x$  y factor  $R_f = 7,2$ . Es decir, cada pie cuadrado (figura 20.9) presenta una resistencia térmica de 7,2 F<sup>o</sup>/(Btu/h). Los 32 pies cuadrados están en paralelo, de modo que la resistencia neta  $R_{\text{neta}}$  se calcula utilizando la ecuación 20.14 para dar

$$\frac{1}{R_{\text{neta}}} = \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_f} + \dots = \frac{32}{R_f}, \text{ de donde } R_{\text{total}} = \frac{R_f}{32}$$

Así, la resistencia térmica total  $R$  expresada en F<sup>o</sup>/(Btu/h) es igual al factor  $R$  dividido por el área  $A$  dada en pies cuadrados. Esto es

$$R_{\text{neta}} = \frac{R_f}{A}$$



Figura 20.9 Para un espesor de 1 pulgada de este material,  $R_f = 7,2$ .

TABLA 20.4 Factores  $R$ ,  $\Delta x/k$  para diferentes materiales de construcción

Material	Espesor, pulg.	$R$ , h·pie <sup>2</sup> ·F°/Btu
Construcción con planchas		
Yeso o planchas de yeso	0,375	0,32
Contrachapado (Douglas)	0,5	0,62
Contrachapado o paneles de madera	0,75	0,93
Conglomerado, densidad media	1,0	1,06
Materiales de acabado de suelo		
Alfombra y materiales de fibra	1,0	2,08
Azulejo		0,5
Madera (noble)	0,75	0,68
Aislamiento del tejado	1,0	2,8
Tejado		
Asfalto en rollos para terrazas		0,15
Tejas planas de asfalto		0,44
Ventanas		
Panel simple		0,9
Panel doble		1,8

Como la resistencia total  $R_{\text{total}}$  está relacionada con la conductividad por medio de  $R_{\text{neta}} = \Delta x/(kA)$  (ecuación 20.10), se puede expresar el factor  $R$  mediante

$$R_f = R_{\text{neta}}A = \frac{\Delta x}{k} \quad (20.15)$$

DEFINICIÓN—FACTOR  $R$ 

donde  $\Delta x$  es el espesor expresado en pulgadas y  $k$  es la conductividad en Btu·pulg/(h·pie<sup>2</sup>·F°). La tabla 20.4 recoge factores  $R$  para distintos materiales. En función del factor  $R$ , la ecuación 20.9 para la corriente térmica es

$$\Delta T = IR_{\text{neta}} = \frac{I}{A} R_f \quad (20.16)$$

Para planchas de material aislante de igual área en serie,  $R_f$  se reemplaza por el factor  $R$  equivalente,  $R_{f,\text{eq}}$

$$R_{f,\text{eq}} = R_{f1} + R_{f2} + \dots$$

Si las planchas están situadas en paralelo, se calcula la corriente térmica a través de cada plancha y se suman para obtener la corriente total.

### EJEMPLO 20.6 | Pérdida de calor a través de un tejado

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

Estamos ayudando a la familia de un amigo a poner nuevos módulos de asfalto en el tejado de su cabaña de invierno. El tejado, de 60 pie × 20 pie, está hecho de tableros de pino cubiertos con tejas planas de asfalto. Hay sitio para 2 pulgadas de aislamiento y la familia se está preguntando qué diferencia habría en la factura de energía si instalaran el aislamiento de dos pulgadas. Sabiendo que estamos estudiando física nos piden nuestra opinión.

**Planteamiento del problema** Para valorar la situación, hemos de calcular el factor  $R$  de cada capa del tejado. Como las capas están en serie, el factor  $R$  equivalente es precisamente la suma de dos factores  $R$  individuales. El objetivo es calcular el factor  $R$  equivalente del tejado con y sin aislamiento. Los factores  $R$  de las tejas de asfalto y del aislamiento del tejado se pueden encontrar en la tabla 20.4. El factor  $R$  del tablón de pino se calcula a partir de su conductividad térmica, que aparece en la tabla 20.3. Nótese que las tejas se colocan solapadas, de modo que en el tejado hay dos capas de asfalto.

- El factor  $R$  equivalente es la suma de los factores  $R$  individuales:  $R_{f,eq} = R_{f,pino} + R_{f,asf} + R_{f,ais}$
- El factor  $R$  de la doble capa de tejas es el doble del factor  $R$  de una capa:  $R_{f,asf} = 2(0,44 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu}) = 0,88 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu}$
- El factor  $R$  para el aislamiento del techo de 2 pulgadas es el doble del de 1 pulgada:  $R_{f,ais} = 2(2,8 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu}) = 5,6 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu}$
- El factor  $R$  para la madera de pino de 1 pulgada de espesor se obtiene a partir de la conductividad:  $R_{f,p} = \frac{\Delta x_p}{k_p} = \frac{1 \text{ pulg}}{0,78 \text{ Btu} \cdot \text{pulg}/(\text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ)} = 1,28 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu}$
- El factor  $R$  equivalente sin aislamiento es:  $R'_{f,eq} = R_{f,pino} + R_{f,asf} = 1,28 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu} + 0,88 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu} = 2,16 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu}$
- El factor  $R$  equivalente con aislamiento es:  $R_{f,eq} = R_{f,pino} + R_{f,asf} + R_{f,ais} = R'_{f,eq} + R_{f,ais} = 2,16 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu} + 5,6 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu} = 7,76 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu}$
- Una comparación de los dos factores  $R$  equivalentes es su cociente:  $\frac{R'_{f,eq}}{R_{f,eq}} = \frac{2,16}{7,76} = 0,28$
- Al añadir el aislamiento, la tasa de pérdida de calor se reduce en un 78%. ¿Es el 78% de una pérdida de calor grande o pequeño? Utilizando la ecuación 20.16 calculamos la corriente térmica  $I$  a través de todo el tejado:  $\Delta T = IR_{neta} = \frac{I}{A} R_f$   
 $I' = \frac{A}{R'_{f,eq}} \Delta T = \frac{(60 \text{ pie})(20 \text{ pie})}{2,16 \text{ h} \cdot \text{pie}^2 \cdot \text{F}^\circ/\text{Btu}} \Delta T = [556(\text{Btu/h})/\text{F}^\circ] \Delta T$   
 $I' = [556(\text{Btu/h})/\text{F}^\circ] \Delta T = [556(\text{Btu/h})/\text{F}^\circ](40 \text{ }^\circ\text{F}) = 22\,200 \text{ Btu/h}$   
y  
 $I = 0,28I' = 0,28(22\,200 \text{ Btu/h}) = 6\,200 \text{ Btu/h}$   
de manera que la reducción debida al aislamiento es  
 $I - I' = 22\,200 \text{ Btu/h} - 6\,200 \text{ Btu/h} = 16\,000 \text{ Btu/h}$
- Hacer una estimación de lo que se ahorraría si se colocasen las 2 pulgadas de aislamiento: 

Para una evaluación del coste ver las observaciones que se dan a continuación.

**Observaciones** La instalación de 2 pulgadas de aislamiento reduce las pérdidas de calor a través del tejado en 22 200 Btu/h. La cabaña se calienta con propano y el contenido energético del propano es de 92 000 Btu/gal. Aislando el tejado el consumo se reduce en aproximadamente 6 galones de propano en cada 24 horas de uso. Como el propano cuesta unos 1,40\$/gal, el ahorro por día se eleva a 8,40\$, o sea 252\$ por mes. La familia de nuestro amigo está impresionada por el ahorro potencial (y por la utilidad de nuestros conocimientos de física) y está decidida a instalar las 2 pulgadas de aislamiento.

**Ejercicio** ¿Cuánto ahorro adicional podrá obtenerse añadiendo más aislamiento al tejado? (Respuesta El máximo ahorro adicional es de 6200 Btu/h, lo que corresponde a 68\$ por mes.)

**Observaciones** Esta valoración de los costes no incluye el precio de comprar e instalar el aislante.

La conductividad térmica del aire es muy pequeña en comparación con las de los materiales sólidos, de modo que el aire es un aislante muy bueno. Sin embargo, cuando existe un espacio con aire relativamente grande —como sucede, por ejemplo, entre los dos cristales de una doble ventana, si no está bien proyectada— el rendimiento aislante del aire se ve muy reducido debido a la convección. Siempre que existe una diferencia de temperatura entre las

diferentes partes de un espacio lleno de aire, las corrientes de convección actúan rápidamente para igualar las temperaturas, de modo que la conductividad efectiva se ve muy aumentada. En el caso de ventanas de doble panel, el espaciado óptimo debe tener de 1 a 2 cm. Espaciados con aire de mayor amplitud reducen en la práctica la resistencia térmica de una ventana de doble panel debido a la convección.

Las propiedades aislantes del aire se pueden aplicar con éxito si se logra atrapar al aire en pequeños paquetes de aire separados entre sí de forma que la convección no pueda tener lugar. Esta es la razón de las excelentes propiedades aislantes del plumón de ganso y del Styrofoam.

Si se toca la parte interior de la superficie del cristal de una ventana cuando hace frío en el exterior, se observa que la superficie se encuentra considerablemente más fría que el interior de la habitación. La resistencia térmica de una ventana se debe principalmente a la existencia de finas capas de aire aislante, que se adhieren a ambos lados de la superficie del cristal. El espesor del cristal no influye prácticamente en el valor de la resistencia térmica total. Una típica película de aire contribuye con un factor  $R$  de aproximadamente 0,45 por cada superficie; por lo tanto, el factor  $R$  de una ventana de  $N$  hojas es aproximadamente igual a  $0,9 N$ . Cuando la velocidad del viento es grande, la capa de aire exterior disminuye considerablemente, por lo que el factor  $R$  para la ventana se hace más pequeño.

### Convección

La convección es el transporte de energía térmica que se verifica simultáneamente con el transporte del propio medio. Es el responsable de las grandes corrientes oceánicas, así como de la circulación global de la atmósfera. En el caso más simple, la convección surge cuando un fluido (gas o líquido) se calienta por debajo. El fluido al calentarse se expande y se eleva, mientras que el fluido más frío se hunde. La descripción matemática de la convección es muy compleja, ya que el flujo depende de la diferencia de temperatura en las distintas partes del fluido y esta diferencia de temperatura viene afectada por el propio flujo.

Aproximadamente, el calor transmitido por convección desde un cuerpo a sus alrededores es proporcional al área del cuerpo y a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el fluido en el que se encuentre inmerso. Es posible escribir una ecuación para la energía térmica transportada por convección y definir un coeficiente de convección, pero el análisis de los problemas concretos reales es muy difícil y no es objeto de este libro.

### Radiación

Todos los cuerpos emiten y absorben radiación electromagnética. Cuando un cuerpo está en equilibrio térmico con su medio, emite y absorbe energía al mismo ritmo. La energía térmica irradiada por un cuerpo por unidad de tiempo es proporcional al área del cuerpo y a la cuarta potencia de su temperatura absoluta. Este resultado, obtenido empíricamente por Josef Stefan en 1879 y deducido teóricamente por Ludwig Boltzmann unos cinco años después, se denomina **ley de Stefan-Boltzmann** y se expresa en la forma:

$$P_r = e\sigma AT^4 \quad (20.17)$$

LEY DE STEFAN-BOLTZMANN

en donde  $P_r$  es la potencia radiada en vatios,  $A$  el área,  $e$  es la llamada **emisividad** del cuerpo y  $\sigma$  una constante universal que recibe el nombre de constante de Stefan-Boltzmann, cuyo valor es

$$\sigma = 5,6703 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4 \quad (20.18)$$

La emisividad  $e$  es una fracción que varía de 0 a 1 y que depende de la composición de la superficie del objeto.

Cuando la radiación incide sobre un objeto opaco, parte de la radiación se refleja y parte se absorbe. Los objetos de colores claros reflejan la mayor parte de la radiación visible,

mientras que los objetos oscuros absorben su mayor parte. El ritmo con que absorbe radiación un cuerpo viene dado por

$$P_a = e\sigma AT_0^4 \quad (20.19)$$

en donde  $T_0$  es la temperatura de la fuente de radiación.

Si un cuerpo emite más radiación que la que absorbe, se enfría, mientras que el medio que le rodea se calienta al absorber la radiación procedente del mismo. Si el cuerpo absorbe más energía que la que emite, el cuerpo se calienta, mientras que el medio se enfría. Podemos expresar la potencia neta radiada por un cuerpo a la temperatura  $T$  situado en un medio de temperatura  $T_0$  como

$$P_{\text{neto}} = e\sigma A(T^4 - T_0^4) \quad (20.20)$$

Cuando un cuerpo está en equilibrio con su medio,  $T = T_0$  y emite y absorbe radiación al mismo ritmo.

Un cuerpo que absorbe toda la radiación que incide sobre él posee una emisividad igual a 1 y recibe el nombre de **cuerpo negro**. Un cuerpo negro también es un radiador ideal. El concepto de cuerpo negro ideal es importante, puesto que las características de la radiación emitida por tal cuerpo pueden calcularse teóricamente. Un material como el terciopelo negro posee unas propiedades próximas a las del cuerpo negro ideal, pero la mejor forma práctica de obtener un cuerpo negro ideal es practicar un pequeño orificio que conduzca a una cavidad (figura 20.10), por ejemplo, el orificio de una cerradura de una puerta cerrada. La radiación que incide sobre el orificio posee una pequeña probabilidad de ser reflejada de nuevo al exterior antes de ser absorbida por las paredes de la cavidad. De esta manera, la radiación emitida a través del orificio es característica de la temperatura de las paredes de la cavidad.

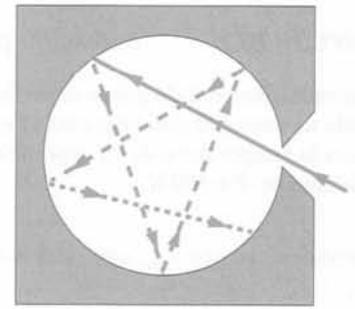
La mayor parte de la radiación emitida por un cuerpo a temperaturas por debajo de unos 600 °C está concentrada en longitudes de onda mucho más largas que las de la luz visible.<sup>1</sup> A medida que aumenta la temperatura del cuerpo, crece la cantidad de energía que emite y se extiende a frecuencias cada vez mayores (y longitudes de onda cada vez más cortas). Aproximadamente entre 600 y 700 °C existe suficiente energía en el espectro visible para que un cuerpo brille con un color rojo oscuro; a temperaturas más elevadas el cuerpo adquiere una tonalidad roja brillante o incluso un color "blanco". En la figura 20.11 se muestra la potencia radiada por un cuerpo negro en función de la longitud de onda para diferentes temperaturas. La longitud de onda para la cual la potencia es un máximo varía inversamente con la temperatura. Este resultado se conoce con el nombre de ley del desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T} \quad (20.21)$$

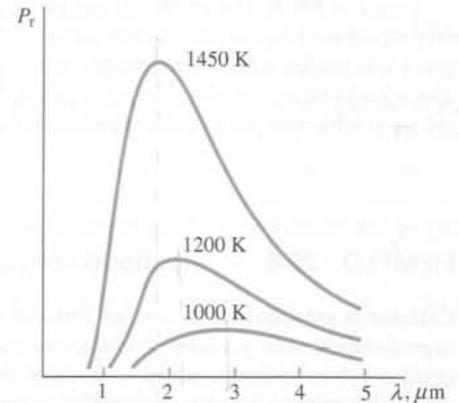
LEY DEL DESPLAZAMIENTO DE WIEN

Esta ley se utiliza para determinar las temperaturas de las estrellas a partir de los análisis de su radiación. Puede utilizarse también para representar las variaciones de temperatura en diferentes regiones de la superficie de un objeto, lo que constituye una termografía. Las termografías pueden emplearse para detectar el cáncer porque los tejidos cancerosos tienen una temperatura ligeramente superior a los tejidos sanos de su alrededor.

Las curvas de distribución espectral del cuerpo negro indicadas en la figura 20.11 desempeñaron un papel importante en la historia de la física. Las discrepancias existentes entre los cálculos teóricos de estas curvas experimentales utilizando la termodinámica clásica y las medidas experimentales de las mismas, fueron las que condujeron a Max Planck a desarrollar las primeras ideas acerca de la cuantización de la energía en 1897.



**Figura 20.10** Un pequeño orificio en una cavidad constituye la mejor aproximación a un cuerpo negro ideal. La radiación que entra en la misma tiene una probabilidad muy pequeña de salir de la cavidad antes de ser absorbida por completo. La radiación emitida a través del orificio (no mostrada en la figura) es, por lo tanto, característica de la temperatura de las paredes de la cavidad.



**Figura 20.11** Potencia radiada en función de la longitud de onda correspondiente a la radiación emitida por un cuerpo negro. La longitud de onda de la potencia máxima varía inversamente con la temperatura absoluta del cuerpo negro.



Termografía utilizada para detectar un tumor canceroso.

<sup>1</sup> Cuando estudiemos la luz, veremos que la luz visible es radiación electromagnética con longitudes de onda comprendidas entre 400 y 700 nm.

**EJEMPLO 20.7** | Radiación procedente del sol

(a) La radiación emitida por la superficie del Sol presenta su máxima potencia a una longitud de onda de unos 500 nm. Suponiendo que el Sol sea un emisor de radiación del cuerpo negro, ¿cuál es la temperatura de su superficie? (b) Calcular  $\lambda_{\text{máx}}$  de un cuerpo negro a la temperatura ambiente,  $T = 300 \text{ K}$ .

(a) Podemos calcular  $\lambda_{\text{máx}}$  utilizando la ley del desplazamiento de Wien:  $\lambda_{\text{máx}} = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T}$

de donde

$$T = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{\lambda_{\text{máx}}} = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{500 \text{ nm}} = 5800 \text{ K}$$

(b) Aplicar la ley del desplazamiento de Wien para  $T = 300 \text{ K}$ :

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{300 \text{ K}} = 9,66 \times 10^{-6} \text{ m} = 9,66 \text{ } \mu\text{m}$$

**Observaciones** La longitud de onda del pico del espectro solar cae dentro del espectro visible. El espectro radiante del cuerpo negro describe muy bien la radiación solar; de hecho, el Sol es un buen ejemplo de cuerpo negro.

Para  $T = 300 \text{ K}$ , el espectro del cuerpo negro tiene el pico en el infrarrojo, a longitudes de onda muy superiores a las que son visibles para el ojo humano. Hay superficies que no son negras a nuestros ojos y que pueden actuar como cuerpos negros para la radiación y absorción del infrarrojo. Así, se ha determinado experimentalmente que la piel de los seres humanos de todas las razas es negra para la radiación infrarroja; por lo tanto, la emisividad de la piel es 1,00 para su propio proceso de radiación.

**EJEMPLO 20.8** | Radiación procedente del cuerpo humano**¡INTÉNTELO USTED MISMO!**

Calcular la pérdida neta de energía radiante de una persona desnuda en una habitación a  $20^\circ\text{C}$  suponiendo que la persona se comporta como un cuerpo negro, con una superficie de área igual a  $1,4 \text{ m}^2$  y temperatura superficial de  $33^\circ\text{C} = 306 \text{ K}$ . (La temperatura superficial del cuerpo humano es ligeramente inferior que su temperatura interna,  $37^\circ\text{C}$ , debido a la resistencia térmica de la piel.)

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

**Pasos**

Utilizar  $P_{\text{neto}} = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$  con  $e = 1$ ,  $T = 306 \text{ K}$  y  $T_0 = 293 \text{ K}$ .

**Respuesta**

$$P_{\text{neto}} = 111 \text{ W}$$



**Observaciones** Esta gran pérdida de energía es aproximadamente igual al ritmo metabólico basal de 120 W. El hombre se protege de esta gran pérdida de energía mediante el uso de ropas, que, debido a su baja conductividad térmica, poseen una temperatura exterior mucho más baja que la piel, y por lo tanto las pérdidas térmicas por radiación son mucho menores.

Cuando la temperatura  $T$  de un cuerpo no difiere demasiado de la de su medio,  $T_0$ , el cuerpo radiante obedece la ley del enfriamiento de Newton. Esto puede deducirse escribiendo la ecuación 20.20 en la forma

$$\begin{aligned} P_{\text{neto}} &= e\sigma A(T^4 - T_0^4) = e\sigma A(T^2 + T_0^2)(T^2 - T_0^2) \\ &= e\sigma A(T^2 + T_0^2)(T + T_0)(T - T_0) \end{aligned}$$

Cuando la diferencia  $T - T_0$  es pequeña, puede reemplazarse  $T_0$  por  $T$  en las sumas con un cambio pequeño en el resultado. Así resulta

$$P_{\text{neto}} = e\sigma A(T^4 - T_0^4) \approx e\sigma A(T^2 + T^2)(T + T)(T - T_0) = 4e\sigma AT^3\Delta T$$

La potencia neta irradiada es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura, de acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton. Este resultado también puede obtenerse utilizando la aproximación diferencial,

$$\Delta P_r \approx \left. \frac{dP_r}{dT} \right|_{T=T_0} (T - T_0)$$

en donde  $P_r = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$ . Para una pequeña diferencia de temperaturas  $T - T_0$  se tiene

$$\Delta P_r \approx e\sigma A \left. 4T^3 \right|_{T=T_0} (T - T_0) = 4e\sigma AT_0^3 \Delta T$$

## Resumen

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### 1. Dilatación térmica

Coefficiente de dilatación lineal

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta T} \quad (20.2)$$

Coefficiente de dilatación cúbica

$$\beta = \frac{\Delta V/V}{\Delta T} = 3\alpha \quad (20.4), (20.5)$$

#### 2. Ecuación de estado de van der Waals

La ecuación de estado de van der Waals describe el comportamiento de los gases reales en un amplio intervalo de temperaturas y presiones, teniendo en cuenta el espacio ocupado por las propias moléculas del gas y la atracción intermolecular:

$$\left( P + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - bn) = nRT \quad (20.6)$$

#### 3. Presión de vapor

La presión de vapor es la presión a la cual las fases líquida y gaseosa de una sustancia están en equilibrio a una temperatura dada. El líquido hierve a esa temperatura para la cual la presión externa es igual a la presión de vapor.

#### 4. Punto triple

El punto triple define la única temperatura y presión a la cual las fases gas, líquido y sólido de una sustancia pueden coexistir en equilibrio. A temperaturas y presiones por debajo del punto triple, la fase líquida de una sustancia no puede existir.

#### 5. Transferencia de calor

Ley del enfriamiento de Newton

Los tres mecanismos de transferencia de la energía térmica son conducción, convección y radiación.

En todos los mecanismos de transferencia de calor, si la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio es pequeña, la velocidad de enfriamiento del cuerpo es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperaturas.

#### 6. Conducción térmica

Corriente térmica

La tasa de transporte de calor por conducción viene dada por

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (20.7)$$

en donde  $I$  es la corriente térmica,  $k$  el coeficiente de conductividad térmica y  $\Delta T/\Delta x$  el gradiente de temperatura.

Resistencia térmica

$$\Delta T = IR \quad (20.9)$$

en donde  $R$  es la resistencia térmica:

$$R = \frac{\Delta x}{kA} \quad (20.10)$$

Resistencia equivalente:

Serie  $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots$  (20.12)

Paralelo  $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$  (20.14)

Factor  $R$  El factor  $R$  es la resistencia térmica expresada en  $\text{pulg} \cdot \text{pie}^2 \cdot ^\circ\text{F}/(\text{Btu}/\text{h})$  de un pie cuadrado de un bloque de material

$$R_f = R_{\text{neto}}A = \frac{\Delta x}{k} \quad (20.15)$$

## 7. Radiación térmica

Potencia radiante  $P_r = e\sigma AT^4$  (20.17)

en donde  $\sigma = 5,6703 \times 10^{-8} \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4$  es la constante de Stefan–Boltzmann y  $e$  la emisividad, un número entre 0 y 1 que depende de la composición de la superficie del cuerpo. Los materiales que son buenos absorbentes también son buenos radiadores de calor.

Potencia radiante neta de un cuerpo a temperatura  $T$  hacia su medio a temperatura  $T_0$   $P_{\text{neto}} = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$  (20.20)

Cuerpo negro Un cuerpo negro posee una emisividad igual a 1. Es un radiador perfecto y absorbe toda la radiación que incide sobre él.

Ley de Wien El espectro de potencia de energía electromagnética irradiada por un cuerpo negro tiene un máximo a una longitud de onda,  $\lambda_{\text{máx}}$ , que varía inversamente con la temperatura absoluta del cuerpo:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T} \quad (20.21)$$

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

 Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

 Estos problemas del servicio “Checkpoint” son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

### Problemas conceptuales

1 ● SSM ¿Por qué el nivel del mercurio comienza decreciendo ligeramente cuando un termómetro se introduce en agua caliente?

2 ● Una lámina grande de metal tiene un orificio recortado en su centro. Al calentar la lámina, el área del orificio (a) no cambia, (b) siempre crece, (c) siempre disminuye, (d) crece si el orificio no está en el centro exacto de la lámina, (e) decrece sólo si el orificio está en el centro exacto de la lámina.

3 ● Los alpinistas dicen que no pueden cocer un huevo duro en lo alto del Monte Rainier. Esto es cierto porque (a) el aire está demasiado frío para

hervir el agua, (b) la presión del aire es demasiado baja para que se encienda el hornillo, (c) el agua hirviendo no tiene la suficiente temperatura para que se endurezca el huevo, (d) el contenido de oxígeno del aire es demasiado bajo, (e) los huevos siempre se rompen en sus envases.

4 ● ¿Qué gases de la tabla 20.2 no pueden licuarse incrementando la presión a  $20^\circ\text{C}$ ?

5 ●● SSM El diagrama de fases de la figura 20.12 puede ser utilizado para obtener información sobre cómo cambian los puntos de ebullición y de fusión del agua con la altitud. (a) Explicar cómo puede obtenerse esta información. (b) ¿Cómo puede influir esta información en los procedimientos culinarios en las montañas?

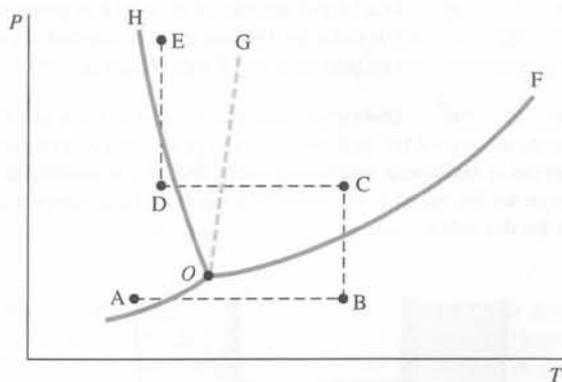


Figura 20.12 Problema 5

6 ● Si la temperatura absoluta de un cuerpo se triplica, la energía térmica que se irradia por unidad de tiempo (a) se triplica, (b) se incrementa en un factor 9, (c) se incrementa en un factor 27, (d) se incrementa en un factor 81, (e) depende de que la temperatura absoluta esté por encima o por debajo de cero.

7 ● SSM En una habitación fría, un metal o una repisa de mármol parecen mucho más fríos al tacto que una superficie de madera, a pesar de que se encuentran a igual temperatura. ¿Por qué?

8 ● Verdadero o falso:

- (a) Durante un cambio de fase la temperatura de una sustancia permanece constante.  
 (b) La conducción de energía térmica por unidad de tiempo es proporcional al gradiente de temperatura.  
 (c) La energía radiante emitida por un cuerpo por unidad de tiempo es proporcional al cuadrado de su temperatura absoluta.  
 (d) Todos los materiales se dilatan por la acción del calor.  
 (e) La presión de vapor de un líquido depende de la temperatura.

9 ● La Tierra pierde calor por (a) conducción, (b) convección, (c) radiación, (d) ninguno de los mecanismos anteriores.

10 ● ¿Cuáles son los mecanismos de transmisión del calor más importantes en el efecto de calefacción del fuego en una chimenea?

11 ● ¿Qué mecanismo de transmisión del calor es más importante en la transmisión de energía del Sol a la Tierra?

12 ● Explicar por qué bajando la temperatura de una casa por la noche durante el invierno se puede ahorrar en los costes de calefacción. ¿Por qué el coste del combustible consumido para volver a calentar la casa por la mañana no iguala al ahorro obtenido al enfriarla?

13 ● Dos cilindros de materiales distintos A y B tienen iguales longitudes; sus diámetros se encuentran en la relación  $d_A = 2d_B$ . Cuando se mantiene la misma diferencia de temperatura entre los extremos de los cilindros, ambos conducen el mismo calor por unidad de tiempo. Sus conductividades térmicas se encuentran en la relación: (a)  $k_A = k_B/4$ , (b)  $k_A = k_B/2$ , (c)  $k_A = k_B$ , (d)  $k_A = 2k_B$ , (e)  $k_A = 4k_B$ .

14 ● La luz infrarroja se la conoce a veces como "ondas térmicas". Explicar por qué esta luz recibe este nombre y por qué este nombre es incorrecto.

15 ● SSM En la nomenclatura artística se presenta a menudo el azul como un color "frío", mientras que del rojo se dice "cálido". Sin embargo, en física el rojo se considera que es un color más "frío" que el azul. Explicar por qué.

## Estimaciones y aproximaciones

16 ● El helio líquido se almacena en recipientes dotados de un "superaislamiento" de 7 cm de espesor formado por un gran número de capas que consisten en láminas muy delgadas de *mylar* aluminizado. La velocidad de evaporación del líquido en un recipiente de 200 L es aproximadamente de 0,7 L por día. Suponer que el recipiente es esférico y la temperatura externa de 20 °C. El peso específico del helio líquido es 0,125 y su calor latente de vaporización, 21 kJ/kg. Hacer una estimación de la conductividad térmica del "superaislamiento".

17 ● Hacer una estimación de la conductividad térmica de la piel si el cuerpo de un hombre adulto tiene unos 1,8 m<sup>2</sup> de área y genera alrededor de 130 W de calor en reposo. Utilizar una temperatura interna de 37 °C y una temperatura externa de la piel de 33 °C. Suponer que la piel tiene un espesor medio de 1 mm.

18 ● SSM Hacer una evaluación de la emisividad efectiva de la Tierra a partir de la siguiente información: la constante solar (la intensidad de radiación incidente sobre la Tierra procedente del Sol) es 1370 W/m<sup>2</sup>, el 70% de esta luz es absorbida por la Tierra y la temperatura media de nuestro planeta es 288 K. (Suponer que el área efectiva que está absorbiendo la luz es  $\pi R^2$ , donde  $R$  es el radio de la Tierra, mientras que el área de emisión del cuerpo negro es  $4\pi R^2$ ).

19 ● Los agujeros negros en órbita alrededor de una estrella estándar se detectan desde la Tierra debido al calentamiento por rozamiento del gas que se precipita dentro del agujero negro, el cual puede alcanzar temperaturas por encima de 10<sup>6</sup> K. Suponiendo que ese gas puede asimilarse a un cuerpo negro, hacer una estimación de  $\lambda_{\text{máx}}$  para utilizarla en la detección astronómica de un agujero negro. (Observación: Esta longitud de onda corresponde a la región de los rayos X del espectro electromagnético.)

## Dilatación térmica

20 ● **ISOLVE** Una regla de acero tiene una longitud de 30 cm a 20 °C. ¿Cuál es su longitud a 100 °C?

21 ● (a) Definir un coeficiente de dilatación superficial. (b) Calcularlo para un cuadrado y para un círculo y demostrar que es igual a dos veces el coeficiente de dilatación lineal.

22 ● **ISOLVE** La densidad del aluminio es 2,70 × 10<sup>3</sup> kg/m<sup>3</sup> a 0 °C. ¿Cuál es la densidad del aluminio a 200 °C?

23 ● **ISOLVE** Una abrazadera de cobre debe ajustar fuertemente alrededor de un eje de acero cuyo diámetro es 6,0000 cm a 20 °C. El diámetro interior de la abrazadera de cobre a esa temperatura es de 5,9800 cm. ¿A qué temperatura debe calentarse la abrazadera para que ajuste perfectamente sobre el eje de acero, suponiendo que éste permanece a 20 °C?

24 ● SSM **ISOLVE** Repetir el problema 23 para el caso en que la temperatura de ambos, el eje de acero y la abrazadera de cobre, se elevan simultáneamente.

25 ● Un recipiente se llena hasta el borde con 1,4 L de mercurio a 20 °C. Cuando la temperatura del recipiente y del mercurio se eleva a 60 °C, se derraman 7,5 mL de mercurio por el borde del recipiente. Determinar el coeficiente de dilatación lineal del recipiente.

26 ● **ISOLVE** En una lámina de aluminio se taladra un orificio con una broca de taladro cuyo diámetro a 20 °C es 6,245 cm. Durante la perforación, la temperatura de la broca y de la lámina de aluminio se eleva a 168 °C. ¿Cuál es el diámetro del orificio en la placa de aluminio cuando se enfría a la temperatura ambiente?

27 ● SSM Se encarga a un equipo nuevo de trabajadores la colocación de 1 km de carril en una vía férrea. Al finalizar la tarea, la temperatura es de 20 °C y regresan a la ciudad a tomar un refresco. Al cabo de una hora o dos,

uno de los operarios más antiguos observa que la temperatura ha subido a  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  y dice: "Supongo que habréis dejado algunos huecos en la vía para permitir la dilatación." Por la expresión de sus caras comprende que no han hecho esta previsión y regresan rápidamente al lugar del trabajo. La vía se ha pandeado en forma de triángulo isósceles. ¿Qué altura tiene el triángulo?

**28** ●● **¡SOLVE!** Un coche tiene un depósito de gasolina de acero y 60 L de capacidad lleno hasta su totalidad cuando la temperatura vale  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . El coeficiente de dilatación de volumen de la gasolina es  $\beta = 0,900 \times 10^{-3}\text{ K}^{-1}$ . Teniendo en cuenta la dilatación del acero, ¿cuánta gasolina se derramará si se aparc el coche al sol y su temperatura se eleva hasta  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

**29** ●● Un termómetro tiene un depósito de vidrio ordinario y un tubo delgado de vidrio lleno con 1 mL de mercurio. Una variación de temperatura de  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$  cambia el nivel del mercurio en el tubo delgado en 3,0 mm. Determinar el diámetro interior del tubo de vidrio delgado.

**30** ●● **¡SOLVE!** Un termómetro de mercurio está formado por un tubo capilar de 0,4 mm de diámetro conectado a un depósito de vidrio. El nivel del mercurio se eleva 7,5 cm cuando la temperatura del termómetro se eleva de  $35$  a  $43\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Determinar el volumen del depósito del termómetro.

**31** ●●● Un reloj de péndulo está calibrado a una temperatura de  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . (a) En un día caluroso, cuando la temperatura es  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ¿el reloj adelanta o retrasa? (b) ¿En cuánto se adelanta o retrasa en un periodo de 24 horas? Suponer que el péndulo es una varilla delgada de latón con una masa grande unida a su extremo.

**32** ●●● **¡SOLVE!** Un tubo de acero tiene un diámetro exterior de 3,000 cm a la temperatura ambiente ( $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), y un tubo de latón a la misma temperatura tiene un diámetro interior de 2,997 cm. ¿A qué temperatura deberán calentarse los extremos de ambos tubos si el tubo de acero debe insertarse dentro del tubo de latón?

**33** ●●● **SSM** ¿Cuál es la tensión de tracción de la abrazadera de cobre del problema 23 cuando su temperatura vuelve a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

**39** ●● **¡SOLVE!** Una lámina aislante de  $20 \times 30$  pies posee un factor  $R$  igual a 11. ¿Qué cantidad de calor (en Btu por hora) se conduce a través del aislante si la temperatura en un lado es de  $68\text{ }^{\circ}\text{F}$  y en el otro de  $30\text{ }^{\circ}\text{F}$ ?

**40** ●● **¡SOLVE!** Dos cubos metálicos de aristas 3 cm, uno de cobre (Cu) y otro de aluminio (Al), se disponen como se muestra en la figura 20.13. Determinar (a) la resistencia térmica de cada cubo, (b) la resistencia térmica del sistema de los dos cubos, (c) la corriente térmica  $I$  y (d) la temperatura en la interfaz de los dos cubos.

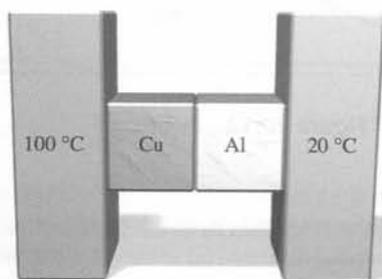


Figura 20.13 Problema 40

**41** ●● Los cubos del problema 40 se disponen ahora en paralelo, como indica la figura 20.14. Determinar (a) la corriente térmica que circula por cada cubo de un extremo al otro, (b) la corriente térmica total y (c) la resistencia térmica equivalente del sistema de los dos cubos.

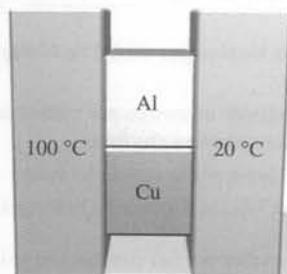


Figura 20.14 Problema 41

**42** ●● **SSM** El coste del aire acondicionado de una casa es proporcional a la tasa a la que fluye el calor de la casa e inversamente proporcional al coeficiente de eficiencia del acondicionador. Designamos por  $\Delta T$  la diferencia de temperatura entre la casa y el medio exterior. Suponiendo que la tasa a la que fluye el calor de la casa es proporcional a  $\Delta T$  y que el acondicionador de aire funciona como una máquina ideal, demostrar que el coste del aire acondicionado es proporcional a  $(\Delta T)^2$ .

**43** ●●● Una corteza esférica de conductividad térmica  $k$  tiene un radio interior  $r_1$  y un radio exterior  $r_2$  (figura 20.15). La parte interior de la corteza se mantiene a la temperatura  $T_1$  y la exterior a la temperatura  $T_2$ . Demostrar que la corriente térmica a través de la corteza viene dada por la expresión:

$$I = \frac{4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1} (T_2 - T_1) \quad (20.22)$$

Considerar un elemento esférico de la corteza de radio  $r$  y espesor  $dr$ . (a) ¿Por qué la corriente térmica a través de cada uno de tales elementos debe ser la misma? (b) Expresar la corriente térmica  $I$  a través de este elemento de corteza en función del área  $A = 4\pi r^2$ , el espesor  $dr$  y la diferencia de temperatura  $dT$  entre el exterior y el interior al mismo. (c) Despejar  $dT$  en función de  $dr$  e integrar de  $r = r_1$  a  $r = r_2$ . (d) Demostrar que cuando  $r_1$  y  $r_2$  son mucho mayores que  $r_2 - r_1$ , la ecuación 20.22 se convierte en la 20.7.

## Ecuación de van der Waals, isothermas líquido-vapor y diagramas de fase

**34** ●● **¡SOLVE!** (a) Calcular el volumen de 1 mol de vapor a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  y 1 atm de presión suponiendo que se comporta como un gas ideal. (b) Calcular la temperatura a la que el vapor ocupará el volumen obtenido en (a) si el vapor obedece la ecuación de van der Waals, siendo  $a = 0,55\text{ Pa} \cdot \text{m}^6/\text{mol}^2$  y  $b = 30\text{ cm}^3/\text{mol}$ .

**35** ●● De la figura 20.3, determinar (a) la temperatura a la cual hierve el agua en lo alto de un monte si la presión atmosférica es de 70 kPa, (b) la temperatura a la que hervirá el agua en un recipiente donde la presión se ha reducido a 0,5 atm y (c) la presión a la cual hervirá el agua a  $115\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

**36** ●● **SSM** Las constantes de van der Waals para el helio son  $a = 0,03412\text{ L}^2 \cdot \text{atm}/\text{mol}^2$  y  $b = 0,0237\text{ L}/\text{mol}$ . Utilizar estos datos para hallar el volumen en centímetros cúbicos ocupado por un átomo de helio y hacer una estimación del radio del átomo.

**37** ●●● (a) En el caso de un gas de van der Waals demostrar que la temperatura crítica es  $8a/27Rb$  y la presión crítica es  $a/27b^2$ . (b) Expresar la ecuación de van der Waals en función de las variables reducidas  $V_r = V/V_c$ ,  $P_r = P/P_c$ , y  $T_r = T/T_c$ .

## Conducción térmica

**38** ●● **¡SOLVE!** Una barra de cobre de 2 m de longitud posee una sección transversal circular de 1 cm de radio. Uno de sus extremos se mantiene a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  y el otro a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , y su superficie se aísla de modo que las pérdidas de calor a lo largo de la misma sean despreciables. Calcular (a) la resistencia térmica de la barra, (b) la corriente térmica o flujo de energía  $I$ , (c) el gradiente de temperatura  $\Delta T/\Delta x$  y (d) la temperatura a 25 cm del extremo caliente.

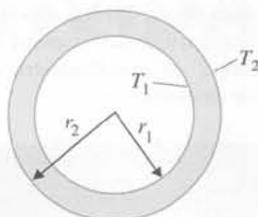


Figura 20.15 Problema 43

**44** ●● **SSM** **I SOLVE** Desde un generador de vapor debe transmitirse calor al agua hirviendo a un ritmo de 3 GW. El agua hirviendo circula a través de tuberías de cobre de paredes de 4,0 mm de espesor y de área superficial igual a 0,12 m<sup>2</sup> por metro de longitud de tubería. Calcular la longitud total de la tubería (realmente se disponen muchas tuberías en paralelo) que debe atravesar el horno si la temperatura del vapor es de 225 °C y la temperatura en el exterior de la tubería es de 600 °C.

**45** ●●● Una tubería de vapor de longitud  $L$  se aísla con una capa de material de conductividad térmica  $k$ . Hallar la tasa de transferencia de calor si la temperatura en el exterior del aislamiento es  $T_1$ , la del interior es  $T_2$ , el radio exterior del aislamiento es  $r_1$  y el radio interior es  $r_2$ .

## Radiación

**46** ● **SSM** **I SOLVE** Calcular  $\lambda_{\text{máx}}$  para un cuerpo humano que emita calor radiante como un cuerpo negro, suponiendo que la superficie de la piel está a la temperatura de 33 °C.

**47** ● **I SOLVE** Los cables de calefacción de una estufa eléctrica de 1 kW se encuentran al rojo vivo a una temperatura de 900 °C. Suponiendo que el 100% del calor emitido es debido a la radiación y que los cables actúan como radiadores ideales (cuerpo negro), ¿cuál es el área efectiva de la superficie radiante? (Suponer que la temperatura ambiente es de 20 °C.)

**48** ●● **I SOLVE** Se cuelga una esfera de cobre ennegrecido de 4,0 cm de diámetro dentro de un recipiente sometido al vacío en donde la temperatura de las paredes es de 20 °C. Si la esfera se encuentra inicialmente a la temperatura de 0 °C, calcular la variación de temperatura con el tiempo si se supone que el único proceso de transmisión del calor que tiene lugar es el de radiación.

**49** ●● **I SOLVE** La temperatura superficial del filamento de una lámpara incandescente es de 1300 °C. ¿Cuál será su temperatura si se duplica la potencia eléctrica suministrada? *Sugerencia: Demostrar que puede desprejarse la temperatura del medio exterior.*

**50** ●● Se dispone de helio líquido almacenado a su temperatura de ebullición (4,2 K) en un recipiente esférico; este recipiente está separado de una capa aislante que se mantiene a la temperatura del nitrógeno líquido (77 K) mediante un espacio sometido al vacío. Si el diámetro del recipiente es de 30 cm y se encuentra ennegrecido por su parte exterior de manera que se comporta como un cuerpo negro, ¿cuánto helio se evaporará por hora?

## Problemas generales

**51** ● **SSM** **I SOLVE** Se coloca una cinta de acero alrededor del ecuador terrestre cuando su temperatura media es 0 °C. ¿Cuál será la holgura entre la cinta y el suelo (suponiéndolo uniforme) si la temperatura se eleva a 30 °C? (Desprejarse la dilatación terrestre.)

**52** ●● Demostrar que la variación de densidad experimentada por un material isotrópico debida a un incremento de temperatura  $\Delta T$  viene dada por  $\Delta\rho = -\beta\rho\Delta T$ .

**53** ●● **I SOLVE** La constante solar es la potencia por unidad de superficie que se recibe desde el Sol en la Tierra sobre una superficie perpendicular a los rayos solares a la distancia media Sol-Tierra. Su valor en el límite superior de la atmósfera terrestre es aproximadamente de 1,35 kW/m<sup>2</sup>. Calcular la temperatura efectiva de la superficie del Sol si éste irradia como si se tratase de un cuerpo negro. (El radio del Sol es  $6,96 \times 10^8$  m).

**54** ●● **I SOLVE** Para determinar el valor  $R$  de un material aislante que viene en láminas de 0,5 pulg. de espesor, construimos con él una caja cúbica de 12 pulg. de lado y situamos un termómetro y un calentador de 100 W en su interior. Una vez alcanzado el equilibrio, la temperatura interior de la caja es de 90 °C cuando la temperatura exterior es de 20 °C. Determinar el valor  $R$  de este material.

**55** ●● Una lámina de cobre de 2 cm de espesor se presiona contra una lámina de aluminio. ¿Cuál debería ser el espesor de la lámina de aluminio para que la temperatura de la interfaz cobre-aluminio fuese  $(T_1 + T_2)/2$ , siendo  $T_1$  y  $T_2$  las temperaturas de las interfaces cobre-aire y aluminio-aire respectivamente?

**56** ●● A una temperatura de 20 °C, una barra de acero de 2,2 cm de radio y 60 cm de longitud está encajada horizontal y perpendicularmente a dos paredes verticales de hormigón. Con un soplete se eleva la temperatura de la misma a 60 °C. Hallar la fuerza ejercida por la barra sobre cada pared.

**57** ●● (a) A partir de la definición de  $\beta$ , coeficiente de dilatación de volumen (a presión constante), demostrar que  $\beta = 1/T$  en el caso de un gas ideal. (b) El valor determinado experimentalmente para  $\beta$  del gas N<sub>2</sub> es 0,003673 K<sup>-1</sup> a 0 °C. Comparar este valor con el teórico  $\beta = 1/T$ , suponiendo que el N<sub>2</sub> es un gas ideal.

**58** ●● Una forma de construir un dispositivo con dos puntos cuya separación permanezca invariable a pesar de las variaciones de temperatura es atornillar juntos un extremo de dos barras con diferentes coeficientes de dilatación lineal, como se indica en la figura 20.16. (a) Demostrar que la distancia  $L$  no cambia con la temperatura si las longitudes  $L_A$  y  $L_B$  se eligen de modo que  $L_A/L_B = \alpha_B/\alpha_A$ . (b) Si el material B es acero y el material A es latón, y  $L_A = 250$  cm a 0 °C, ¿cuál es el valor de  $L$ ?

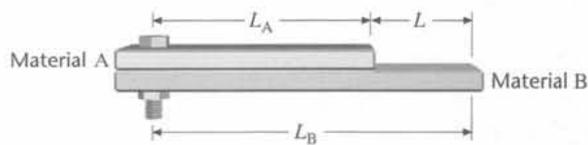


Figura 20.16 Problema 58

**59** ●● Por término medio, la temperatura de la corteza terrestre se incrementa 1,0 °C por cada 30 m de profundidad. La conductividad térmica media de la corteza terrestre es 0,74 J/m · s · K. ¿Cuál es la pérdida de calor que experimenta la Tierra cada segundo debida a la conducción desde su núcleo? Comparar esta pérdida de calor con la potencia media recibida del Sol. (La constante solar es aproximadamente 1,35 kW/m<sup>2</sup>).

**60** ●● **I SOLVE** Una olla cuyo fondo es de cobre y que contiene 0,8 L de agua hirviendo se seca en 10 minutos. Suponiendo que todo el calor se transmite a través del fondo plano de cobre de 15 cm de diámetro y 3,0 mm de espesor, calcular la temperatura en la parte exterior del fondo de cobre cuando todavía queda algo de agua en la olla.

**61** ●● **SSM** Un tanque de agua caliente de forma cilíndrica tiene un diámetro interior de 0,55 m y una altura interior de 1,2 m. El tanque está rodeado por una capa aislante de 5 cm de espesor de lana de vidrio cuya conductividad térmica es 0,035 W/m · K. Las paredes metálicas interior y exterior del tanque tienen conductividades térmicas muy superiores a la de la lana de vidrio. ¿Qué potencia debe suministrarse al tanque para mantener la temperatura del agua a 75 °C cuando la temperatura externa es de 1 °C?

**62** ●●● El diámetro de una barra viene dado por  $d = d_0(1 + \alpha x)$ , en donde  $\alpha$  es una constante y  $x$  la distancia a un extremo. Si la conductividad térmica del material es  $k$ , ¿cuál es la resistencia térmica de la barra si su longitud es  $L$ ?

**63 ●●●** Un disco sólido de radio  $r$  y masa  $m$  está girando en un espacio sin rozamiento con velocidad angular  $\omega_1$  a la temperatura  $T_1$ . La temperatura del disco cambia entonces a  $T_2$ . Expresar la velocidad angular  $\omega_2$ , la energía cinética de rotación  $E_2$  y el momento angular  $L_2$  en función de sus valores respectivos a la temperatura  $T_1$  y el coeficiente de dilatación lineal  $\alpha$  del disco.

**64 ●●●** Utilizando los resultados del problema 18, escribir un programa de hoja de cálculo para hacer una gráfica de la temperatura de la Tierra en función de la emisividad. ¿Cuánto ha de variar la emisividad para que la temperatura media se eleve 1 K? Esto se podría considerar como un modelo del efecto del aumento de concentraciones de gases como el metano y el  $\text{CO}_2$  en la atmósfera terrestre (efecto invernadero).

**65 ●●●** Un pequeño estanque tiene una capa de hielo de 1 cm de espesor flotando sobre él. (a) Si la temperatura del aire es  $-10^\circ\text{C}$ , hallar la velocidad en centímetros por hora con que aumenta el espesor del hielo por su parte inferior. La densidad del hielo es  $0,917\text{ g/cm}^3$ . (b) ¿Cuánto tiempo tardará en formarse una capa de hielo de 20 cm de espesor?

**66 ●●● SSM** Dos recipientes de cobre de 200 g de masa, que contienen cada uno de ellos 0,7 L de agua, se conectan entre sí mediante una barra de cobre de 10 cm de largo y una sección recta de  $1,5\text{ cm}^2$  de área. Inicialmente el primer recipiente está a  $T_0 = 60^\circ\text{C}$ . El segundo está lleno de una mezcla de hielo y agua, de forma que su temperatura se mantiene a  $0^\circ\text{C}$ . (Suponer que la capacidad calorífica de la barra es despreciable.) (a) Demostrar que la temperatura  $T$  del primer recipiente varía con el tiempo  $t$  de acuerdo con

$$T = t_0 e^{-t/RC}$$

en donde  $T$  es la temperatura en grados Celsius,  $R$  es la resistencia térmica de la barra y  $C$  es la capacidad calorífica total del recipiente más el agua. (b) Calcular  $R$ ,  $C$  y la “constante de tiempo”  $RC$ . (c) Demostrar que la cantidad total de calor  $Q$  conducida al cabo de un tiempo  $t$  es

$$Q = CT_0(1 - e^{-t/RC})$$

(d) Utilizando una hoja de cálculo representar gráficamente  $T(t)$  y  $Q(t)$ ; a partir de la gráfica, hallar el tiempo que tarda en reducirse la temperatura del primer recipiente a  $30^\circ\text{C}$ .

**67 ●●●** Un cubo de cobre ennegrecido de 1 cm de arista se calienta a una temperatura de  $300^\circ\text{C}$  y a continuación se coloca en una cámara de vacío cuyas paredes están a una temperatura de  $0^\circ\text{C}$ . En la cámara de vacío el cubo se enfría emitiendo radiación. (a) Demostrar que la temperatura absoluta del cubo obedece la ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{e\sigma A}{C}(T^4 - T_0^4)$$

en la que  $C$  es la capacidad calorífica del cubo,  $A$  es el área de su superficie,  $e$  la emisividad y  $T_0$  la temperatura de la cámara de vacío. (b) Utilizando el método de Euler, resolver numéricamente la ecuación diferencial para obtener  $T(t)$  y representarla gráficamente. Suponer  $e = 1$ . (El método de Euler se trata en la sección 4 del capítulo 5). ¿Cuánto tardaría el cubo en enfriarse hasta una temperatura de  $15^\circ\text{C}$ ?



STS 109-335-020 (1—12 DE MARZO DE 2002)—El astronauta Scott D. Altman, comandante de la misión STS 109, duerme en la cabina de vuelo del transbordador espacial Columbia. La velocidad orbital del transbordador es de unos 7,7 km/s, lo que representa una pequeña fracción de la velocidad de la luz,  $c = 3 \times 10^5$  km/s.

Si un astronauta en una nave espacial que viaja a una velocidad de  $0,6c$  respecto a la Tierra duerme una siesta de una hora, ¿dura también una hora dicha siesta para un observador terrestre? (Véase el ejemplo R.1.)

- R.1 El principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz
- R.2 Barras en movimiento
- R.3 Relojes en movimiento
- R.4 Más sobre barras en movimiento
- R.5 Relojes lejanos y simultaneidad
- R.6 Aplicación de las reglas
- R.7 Momento, masa y energía relativistas

La teoría de la relatividad consta de dos teorías bien diferenciadas: la de la relatividad especial y la de la relatividad general. La teoría especial, desarrollada por Einstein y otros autores en 1905, se ocupa de la comparación de medidas hechas desde distintos sistemas de referencia inerciales que se mueven con velocidades constantes los unos respecto a los otros. Sus consecuencias, que pueden deducirse con un mínimo de matemáticas, son aplicables a una gran variedad de situaciones que se dan tanto en física como en ingeniería. Por otro lado, la teoría general, desarrollada también por Einstein y otros hacia 1916, se ocupa de sistemas de referencia acelerados y de la gravitación. Una comprensión completa de la teoría general requiere matemáticas complicadas y sus aplicaciones aparecen sobre todo dentro del área de la gravitación.

En este capítulo nos centramos en la teoría especial de la relatividad (llamada también *relatividad especial o restringida*). A principios del siglo XX, la teoría especial de la relatividad fue acogida por algunos con entusiasmo, pero para otros muchos era aceptada a regañadientes o rechazada por alocada. Actualmente, no sólo es ampliamente aceptada, sino que se la considera como una ventana que nos permite ver el funcionamiento de la naturaleza. Veremos cómo dicha teoría desafía nuestra experiencia cotidiana acerca del tiempo y las distancias cuando describamos la ralentización de los relojes en movimiento, el acortamiento de las barras móviles, la relatividad de la simultaneidad de sucesos alejados y la relatividad del momento y la energía.

## R.1 El principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz

El principio de relatividad puede enunciarse así:

Es imposible diseñar un experimento que establezca si uno se halla en reposo o en movimiento uniforme.

POSTULADO I, EL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

Movimiento uniforme es el que se realiza a velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial. Por ejemplo, supongamos que estamos sentados en un avión que viaja a velocidad uniforme y muy elevada respecto a la superficie terrestre. Si soltamos un tenedor, éste caerá hacia el suelo del avión de manera exactamente igual a como lo haría si el avión se encontrara aparcado en la pista. Cuando el avión está volando, podemos considerar que nosotros mismos y el avión estamos conjuntamente en reposo y que es la superficie de la Tierra que tenemos debajo la que se mueve. No hay nada que permita discernir si somos nosotros y el avión los que nos movemos y la superficie terrestre está en reposo, o viceversa.

Todo sistema de referencia en el que una partícula sobre la que no actúa fuerza alguna se mueve con velocidad constante es, por definición, un sistema de referencia inercial.<sup>1</sup> La superficie de la Tierra es un sistema de referencia inercial en buena aproximación. El avión también lo es, siempre y cuando viaje a velocidad constante respecto a la superficie terrestre. Mientras permanezcamos sentados (o quietos y en pie) en el avión, tanto podemos considerar que somos nosotros mismos y el avión los que estamos en reposo y la superficie terrestre se mueve, como que nos movemos nosotros y el avión y que la superficie terrestre está en reposo.

Durante el siglo XIX se aceptaba ampliamente que existía un sistema de referencia privilegiado que podía considerarse en reposo. Se pensaba que este sistema de referencia era el del *éter*, el medio que rellenaba todo el espacio y a través del cual se suponía que se propagaba la luz. (Se creía entonces que las ondas luminosas necesitaban de un medio a través del cual propagarse, tal y como hoy creemos que pasa con el sonido, que requiere del aire o de otro medio material para su propagación.) El *éter* se consideraba el sistema de referencia privilegiado, “en reposo”.

En 1887 Albert Michelson y Edward Morley realizaron una serie de medidas cuidadosamente diseñadas para determinar la velocidad orbital de la Tierra respecto al *éter*. Se consideraba que estas medidas eran muy difíciles dado que la velocidad orbital de la Tierra es inferior a una diezmilésima parte de la velocidad de la luz en el vacío. Con gran sorpresa para la inmensa mayoría, las medidas siempre indicaban que la velocidad relativa entre Tierra y *éter* era nula. Albert Einstein aportó entonces una teoría consistente con estas medidas. Se explicaban admitiendo que la luz era capaz de propagarse en el espacio vacío y que el *éter* era un concepto innecesario y que no existía. Además, Einstein postuló:

La velocidad de la luz es independiente de la velocidad del foco que la emite.

POSTULADO II

Por *velocidad de la luz* entendemos la velocidad con la que la luz se propaga a través del espacio vacío.

Una consecuencia del Postulado II y del principio de relatividad es que todos los observadores inerciales miden el mismo valor para la velocidad de la luz. (Un observador inercial es aquél que permanece en reposo en un sistema de referencia inercial.) Para comprobar que todos los observadores inerciales determinan el mismo valor de la velocidad de la luz, consideremos los observadores inerciales A y B, que se mueven uno con relación al otro. El principio de relatividad afirma que es imposible diseñar un experimento para establecer si un observador inercial está en reposo o moviéndose uniformemente. Si los observadores A y B midieran valores distintos para la velocidad de la luz, dichos observadores A y B no podrían entonces considerarse ambos en reposo —una conclusión que contradice claramente el princi-

<sup>1</sup> En los capítulos 2 y 4 se amplía el estudio de sistemas de referencia.

pio de relatividad. Así pues, una consecuencia conjunta del principio de relatividad y del Postulado II (que la velocidad de la luz es independiente de la velocidad del foco) es la **constancia de la velocidad de la luz**:

La velocidad de la luz  $c$  es la misma en cualquier sistema de referencia inercial.

#### CONSTANCIA DE LA VELOCIDAD DE LA LUZ

Además, cualquier móvil (y no sólo la luz) que viaje a velocidad  $c$  respecto a un sistema de referencia inercial, viaja también a la misma velocidad  $c$  respecto a cualquier otro sistema de referencia inercial.

Supongamos que estamos en el patio de nuestra casa y que Luis viaja en una nave espacial que se aleja de nosotros a la mitad de la velocidad de la luz ( $0,5c$ ). Enfocamos una lámpara, que emite flashes de luz, en la dirección de Luis y la encendemos. La luz sale de la lámpara, viajando a velocidad  $c$  (relativa a la lámpara), y pasa cerca de Alicia, que se encuentra en la azotea de la casa de al lado. Alicia mide la velocidad de estos flashes de luz y determina el valor  $c$ . Al cabo de unos minutos la luz alcanza a Luis y su nave. Al igual que Alicia, Luis mide también la velocidad de los flashes de luz y determina el mismo valor  $c$ . Esto le sorprende, porque Luis esperaba que la luz que viajaba tras él lo hacía, no a velocidad  $c$ , sino más bien a  $0,5c$  (después de todo, Luis se mueve a velocidad  $0,5c$  respecto al foco luminoso, la lámpara de flashes que tenemos en el patio). Al igual que muchos, Luis considera antiintuitiva esta constancia de la velocidad de la luz. Esto le crea un dilema. ¿Ha de confiar en sus aparatos de medida o ha de confiar en su intuición? Resulta que es la intuición de Luis, y no sus instrumentos, lo que habrá que reajustar. Luis debe cambiar tanto sus conceptos de espacio como de tiempo.

Supongamos que en lugar de apuntar con un haz de luz lo hacemos en la misma dirección con un emisor de partículas que viajan, unas tras otras, a altísima velocidad, entendiéndose como tal una velocidad muy cercana a la de la luz  $c$ . (Una partícula como un electrón o un protón no puede viajar a la velocidad de la luz, pero puede hacerlo a velocidades extremadamente cercanas a ésta.) Si Alicia mide que las partículas que pasan por su lado viajan a la velocidad de  $0,9999c$  (relativa a ella), ¿qué velocidad medirá Luis para las partículas que pasan junto a él? La intuición de Luis le dice que, dado que él se aleja del foco emisor de partículas, éstas pasarán por su lado más lentamente, a una velocidad de  $0,4999c$ . Pero no es así. Cuando Luis mide la velocidad de las partículas encuentra un valor muy cercano a  $0,9999c$ . (De hecho, encuentra  $0,9997c$ .)<sup>1</sup>

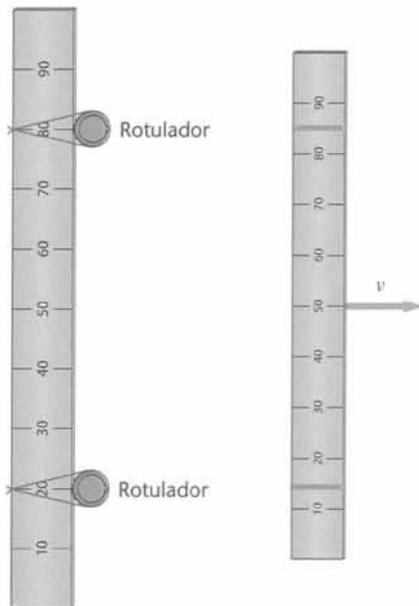
Solemos pensar que las distancias entre ciudades son invariables. Pero esto tampoco es así. Según cierto mapa de carreteras, entre Baltimore y Philadelphia hay 160 km. Sin embargo, si viajáramos de Baltimore a Philadelphia a una velocidad cercana a la velocidad de la luz, la distancia entre estas dos ciudades sería más corta de lo que es si viajamos a 100 km/h. Para quien conduzca a 100 km/h, la distancia entre Baltimore y Philadelphia es muy cercana a 160 km. Pero para alguien que viajara a una velocidad de  $0,866c$  (relativa a la superficie terrestre), la distancia sería de sólo 80 km, y para quien viajara a  $0,9999c$ , la distancia sería solamente de 2,2 km.

La máxima velocidad respecto a la Tierra que ha alcanzado jamás un ser humano (se alcanzó durante la misión Apollo a la Luna) es solamente de unos  $10 \text{ km/s} = 3,3 \times 10^{-5} c$ . Frente a la velocidad de la luz, esta velocidad es tan pequeña que para alguien que viaje a esa velocidad de Baltimore a Philadelphia, la distancia entre estas ciudades se acortaría en menos del diámetro de un cabello humano. En las tres secciones siguientes se exponen los razonamientos que nos llevan a estas conclusiones.

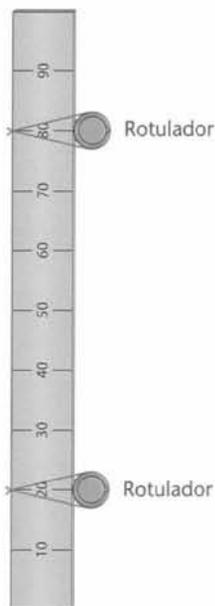
## R.2 Barras en movimiento

Vamos a comprobar que si una barra se mueve en la dirección perpendicular a su propia longitud, esta longitud no cambia. Lo hacemos mostrando que cualquier aumento o disminución de la longitud contradice el principio de relatividad. Puede parecer intrascendente

<sup>1</sup> La velocidad relativa en relatividad especial se estudia en el capítulo 37.



**Figura R.1** Si la regla en movimiento se acortara, los rotuladores fijados a la regla A trazarían señales como éstas sobre la regla B al pasar junto a ella.



**Figura R.2** Si la distancia entre señales fuera mayor que la distancia entre rotuladores, esto demostraría que, cuando se hicieron las señales, la regla B era más corta que la regla A.

comprobar que una barra no cambia su longitud. Lo hacemos, sin embargo, porque una de las consecuencias inmediatas de ello será que los relojes en movimiento ralentizan su marcha y atrasan respecto a un reloj inmóvil.

Supongamos que disponemos de dos reglas idénticas de un metro, regla A y regla B. Comprobamos que las reglas son idénticas colocándolas una junto a otra en un sistema de referencia en que ambas estén en reposo y las examinamos visualmente. Damos después la regla B a Berta que se la lleva en su nave espacial. Durante el viaje, Berta se asegura de mantener su regla B formando un ángulo recto con la velocidad que tiene la nave respecto a la Tierra. ¿Es la regla B más corta que la A que se ha quedado atrás, en la Tierra, junto a nosotros?

Para responder a esta pregunta vamos a realizar mentalmente un experimento. Fijamos dos rotuladores a la regla A, uno en la marca de los 20 cm y el otro en la de los 80 cm. Entonces, Berta ejecuta una pasada rasante con su nave manteniendo su regla B asomada a una ventanilla y formando un ángulo recto con la velocidad de la nave. Durante esta pasada, sostenemos nuestra regla A manteniéndola paralela a la regla B. Cuando las dos reglas se cruzan quedan trazadas dos señales en la regla B (figura R.1). Berta aterriza con su regla B, las dos reglas se vuelven a colocar una al lado de la otra (figura R.2) y se compara la distancia entre las dos señales de la regla B con la distancia entre los dos rotuladores fijados a la regla A. Supongamos que una regla que se mueve perpendicularmente a su dirección fuera más corta que una regla idéntica en reposo. En este caso, la distancia entre rotuladores sería inferior a la distancia entre señales (figura R.2) —una evidencia clara de que durante el vuelo la regla móvil (regla B) era más corta que la regla en reposo. Sin embargo, de acuerdo con el principio de relatividad, es igualmente válido pensar que era la regla B la que estaba en reposo y la regla A la que se movía. Desde este punto de vista, la anterior comparación (figura R.2) demostraría que la regla en movimiento (ahora, la regla A) era más larga que la que quedó en reposo. Por lo tanto, nuestra suposición de que una regla que se mueve perpendicularmente a su longitud es más corta que otra regla idéntica en reposo, lleva a una contradicción y debe ser rechazada. La suposición de que una regla que se mueve perpendicularmente a su longitud es más larga que otra regla idéntica en reposo lleva también a contradicción, como veríamos usando un razonamiento análogo. Concluimos, por lo tanto, que:

Una regla que se mueve con velocidad perpendicular a la propia regla tiene la misma longitud que otra regla idéntica en reposo.

Esta conclusión se ha alcanzado sin hacer referencia alguna al material con el que se construyó la regla. La conclusión, por lo tanto, no refleja una propiedad de las reglas. Refleja, en cambio, una propiedad del espacio.

El sistema de referencia en el que la regla está en reposo se llama **sistema propio o sistema en reposo** y la longitud de la regla en su sistema propio se denomina **longitud propia o longitud en reposo**.

### R.3 Relojes en movimiento

Los relojes sirven para medir tiempos. En este apartado vamos a demostrar que los relojes en movimiento se atrasan, de manera que si una nave espacial muy rápida pasa frente a nosotros, observaremos que todos los relojes de la nave avanzan más lentamente que nuestros propios relojes. Sin embargo, la gente de la nave puede considerar libremente que son ellos quienes están en reposo y nosotros quienes nos movemos, y observarían que son nuestros relojes los que avanzan más lentamente que los suyos. Examinemos cómo estas dos observaciones son consistentes con la constancia de la velocidad de la luz y el principio de relatividad.

Construimos un reloj, llamémosle *reloj de luz*, usando una barra de longitud propia  $L_0$  y dos espejos (figura R.3). Los dos espejos están frente a frente y un flash de luz va y viene reflejándose en ellos. Cada vez que el flash se refleja en un espejo, digamos el superior, consideramos que el reloj hace “tic”, y al regresar y reflejarse en el inferior hace “tac”, completando así un “tictac”. Entre dos tac y tac sucesivos el flash de luz viaja una distancia  $2L_0$  en

el sistema de referencia propio del reloj. Por lo tanto, el tiempo entre tac y tac  $T_0$  está relacionado con  $L_0$  por

$$2L_0 = cT_0 \tag{R.1}$$

Consideramos a continuación el tiempo  $T$  entre tac y tac del mismo reloj de luz, pero esta vez lo observamos desde un sistema de referencia en el que el reloj se mueve con velocidad  $v$  perpendicular a la barra (figura R.4). En este sistema de referencia, entre tac y tac el reloj recorre una distancia  $vT$  y el flash de luz lo hace una distancia  $cT$ . La distancia que recorre el flash de luz al viajar desde el espejo inferior al superior es  $\sqrt{L_0^2 + (\frac{1}{2}vT)^2}$ . Y es también la misma distancia que recorre desde el espejo superior al inferior. Por lo tanto,

$$2\sqrt{L_0^2 + (\frac{1}{2}vT)^2} = cT \tag{R.2}$$

(Obsérvese que hemos usado el mismo símbolo  $c$  para la velocidad de la luz en las ecuaciones R.1 y R.2.) Despejando  $L_0$  en la ecuación R.1 y sustituyendo el resultado en la ecuación R.2 obtenemos

$$\sqrt{(\frac{1}{2}cT_0)^2 + (\frac{1}{2}vT)^2} = \frac{1}{2}cT$$

Despejando  $T$  nos da

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \tag{R.3}$$

DILATACIÓN DEL TIEMPO

De acuerdo con esta ecuación R.3, el tiempo entre tac y tac en el sistema de referencia en el cual el reloj se mueve con velocidad  $v$  es mayor que el tiempo entre tac y tac en el sistema de referencia propio del reloj.

Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Atrasan también otros relojes al moverse con velocidad  $v$  de acuerdo con la ecuación R.3 o es esta ecuación válida sólo para relojes de luz? Para responder esta pregunta fijamos un reloj convencional (con un mecanismo convencional de relojería) al espejo inferior del reloj de luz (figura R.5). El reloj convencional carece de manecilla horaria y de minuterero. En lugar de la manecilla que señala los segundos, el segundero, tiene un disco opaco con una estrecha rendija a lo largo de un radio que va girando y marca así el paso del tiempo. La esfera del reloj dispone de 60 señales (llamémos-

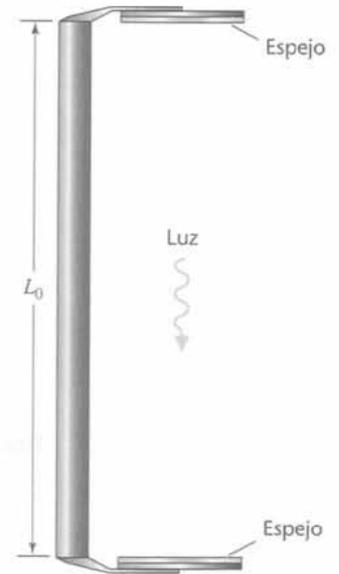


Figura R.3 El reloj de luz completa un tictac cada vez que el flash se refleja en el espejo inferior.

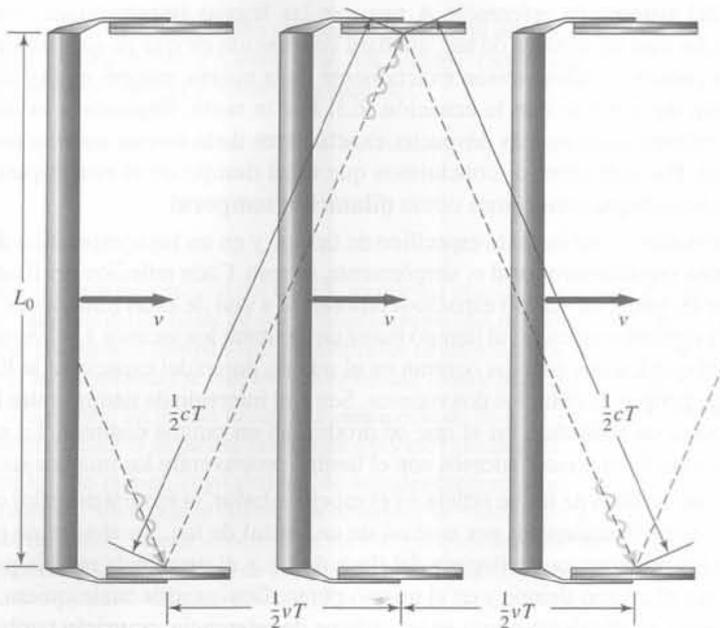


Figura R.4

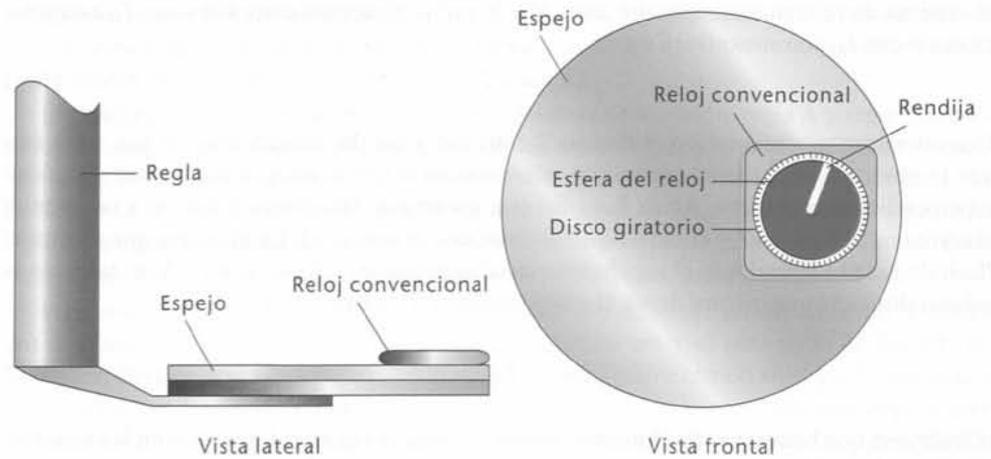


Figura R.5

las señales de tac) distribuidas uniformemente a lo largo de su perímetro, una para cada segundo. El reloj hace tac cada vez que la rendija pasa por encima de una señal de tac. Ajustamos la longitud  $L_0$  de la barra del reloj de luz de tal manera que el intervalo de tiempo entre tac y tac de ambos relojes sea el mismo en el sistema de referencia propio de los relojes. A continuación, sincronizamos los relojes de modo que cada tac del reloj de luz se produzca simultáneamente con el tac del reloj convencional. Finalmente, nos preguntamos: "Si el tac de un reloj y el del otro ocurren simultáneamente en el sistema de referencia propio de los relojes, ¿ocurrirán simultáneamente también en un sistema de referencia en el que los relojes se muevan a velocidad  $v$ ?"

La respuesta es afirmativa. Para comprender el porqué, consideremos el experimento siguiente. En el sistema de referencia de los relojes, hagamos que el intervalo entre tac y tac de ambos relojes sea de un segundo. Coloquemos una película sensible a la luz en la esfera del reloj convencional, detrás del disco opaco giratorio. Cada vez que el flash de luz sea reflejado por el espejo inferior, queda impresionada la estrecha franja de la película fotosensible que se encuentra justo debajo de la rendija. Estas franjas impresionadas apuntarán radialmente a cada una de las señales de tac, como muestra la figura R.6, y todos los observadores deberán estar de acuerdo con lo que así queda permanentemente registrado.

En el sistema de referencia A, en el que ambos relojes se mueven, el flash de luz impresiona la película fotosensible que hay detrás de la rendija cada vez que dicho flash es reflejado por el espejo inferior. Puesto que el reloj de luz está en movimiento, el intervalo de tiempo entre reflexiones es superior a 1 s, de acuerdo con la ecuación R.3. Cuando una observadora del sistema de referencia A vea que las franjas impresionadas en la película quedan alineadas con las señales de tac, quedará convencida de que en su sistema de referencia los relojes convencionales atrasan exactamente de la misma manera en que atrasa el reloj de luz, es decir, de acuerdo con la ecuación R.3. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que todos los relojes avanzan más despacio, exactamente de la misma manera en que lo hace un reloj de luz. Por este motivo, concluimos que es el tiempo en sí el que pasa más lentamente, un fenómeno que conocemos como **dilatación temporal**.

A algo que ocurre en un instante específico de tiempo y en un lugar específico del espacio lo llamamos **suceso espacio-temporal** o, simplemente, **suceso**. Cada reflexión del flash de luz en el espejo inferior es, pues, un suceso espacio-temporal. Si a una de estas reflexiones la llamamos suceso 1 y a la siguiente suceso 2, al tiempo transcurrido entre los sucesos 1 y 2 en un sistema de referencia en el que los dos sucesos ocurran en el mismo punto del espacio se le llamará **intervalo de tiempo propio**  $T_0$  entre los dos sucesos. Sea  $T$  el intervalo de tiempo entre los dos sucesos en un sistema de referencia en el que se produzcan en puntos distintos. La ecuación R.3 relaciona el tiempo  $T$  entre estos sucesos con el tiempo propio entre los mismos sucesos.

Cada vez que un flash de luz se refleja en el espejo inferior, la rendija del reloj convencional (el segundero) pasa directamente por encima de una señal de tac. En el sistema propio de los dos relojes, estos dos sucesos (la llegada del flash de luz y el paso de la rendija por encima de la señal) ocurren al mismo tiempo y en el mismo punto. Dos sucesos cualesquiera, que ocurren al mismo tiempo y en el mismo punto en un sistema de referencia, ocurrirán también al mismo tiempo y en el mismo punto en todos los sistema de referencia. Esto se debe a que estos suce-

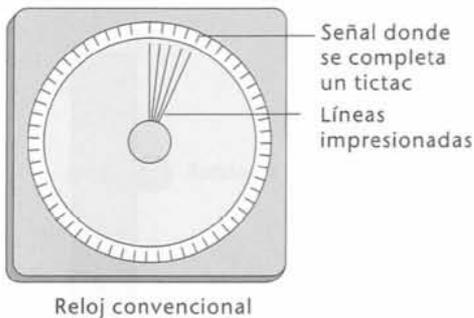


Figura R.6

Los relojes pueden tener consecuencias duraderas, como impresionar franjas en películas fotosensibles que se alinean con las señales de tac de la esfera del reloj. No podemos tener las franjas alineadas con las señales en un sistema de referencia y no alineadas en otro sistema de referencia. Después de todo, sólo hay una esfera y un conjunto de señales. Esta conclusión puede generalizarse en un principio, el **principio de invariancia de coincidencias**:

Si dos sucesos ocurren en el mismo instante y en el mismo punto en un sistema de referencia, también ocurren en el mismo instante y en el mismo punto en cualquier otro sistema de referencia.

#### PRINCIPIO DE INVARIANCI DE COINCIDENCIAS

Podemos visualizar mejor este principio considerando dos automóviles pasando por un cruce al mismo tiempo. Los dos sucesos son: (1) el automóvil A pasa por el cruce y (2) el automóvil B pasa por el cruce. Si estos dos sucesos ocurren simultáneamente en un sistema de referencia, deben también hacerlo simultáneamente en cualquier otro sistema de referencia. O queda abollado un parachoques, o no lo queda. Es decir, si los automóviles chocan, es indiscutible que se encontraban en el cruce al mismo tiempo. Las evidencias que quedan indican que los observadores de cualquier sistema de referencia deben estar de acuerdo en este hecho. Llamamos **coincidencia espacio-temporal** a todo par de sucesos que ocurran en el mismo instante y en el mismo punto del espacio.

### EJEMPLO R.1 | La siesta de los astronautas

Los astronautas de una nave espacial que viaja a  $v = 0,6c$  respecto a la Tierra cortan la comunicación con el centro de control espacial diciéndoles que van a dormir una siesta de 1 h y volverán a llamar después. ¿Cuánto durará esta siesta para los observadores de la Tierra?

**Planteamiento del problema** El reloj S de la nave marca  $t_0$  cuando empieza la siesta (una coincidencia espacio-temporal) y marca  $t_0 + 1$  h cuando termina (otra coincidencia espacio-temporal). Los observadores que están en la nave están de acuerdo en que la siesta ha durado 1 h, ya que el reloj S está en reposo y no atrasa. En el sistema de referencia de la nave los dos sucesos (el inicio y el final de la siesta) tienen lugar en el mismo punto y, por ello, el intervalo de tiempo entre los sucesos es también su intervalo de tiempo propio. Los observadores terrestres están de acuerdo en que el reloj S de la nave marca  $t_0$  cuando empieza la siesta y marca  $t_0 + 1$  h cuando termina. Sin embargo, también están de acuerdo en que la siesta ha durado más de 1 h, porque este reloj S se mueve a velocidad  $v$  y, por lo tanto, atrasa. En el sistema de referencia de la Tierra la nave se mueve y por ello la siesta empieza y termina en puntos distintos del espacio. Por lo tanto, en el sistema de referencia de la Tierra, el intervalo de tiempo entre los sucesos no es su intervalo de tiempo propio.

1. El suceso 1 es el inicio de la siesta y el suceso 2 su fin. El reloj S de la nave indica que ha pasado 1 h entre estos dos sucesos. Determinar el intervalo de tiempo propio  $T_0$  entre estos sucesos:

$$T_0 = 1 \text{ h}$$

2. Encontrar el intervalo temporal  $T$  entre los sucesos 1 y 2 para los observadores terrestres:

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = 1 \text{ h} / \sqrt{1 - (0,6c)^2/c^2} \\ &= \frac{1 \text{ h}}{\sqrt{1 - 0,36}} = \frac{1 \text{ h}}{\sqrt{0,64}} = \frac{1 \text{ h}}{0,8} = \boxed{1,25 \text{ h}} \end{aligned}$$

**Observación** Puede prescindirse del reloj S, ya que los propios astronautas pueden servir también como relojes. Hay que darse cuenta de que el tiempo propio que pasa entre el inicio y el fin de la siesta es 1 h y que, por lo tanto, el tiempo  $T$  que pasa entre los mismos sucesos en un sistema de referencia en el que el reloj (los astronautas) se mueven con velocidad  $v$  viene dado por la ecuación R.3.

**Ejercicio** Los piones<sup>1</sup> en reposo tienen una vida media de 26 ns ( $1 \text{ ns} = 1 \times 10^{-9} \text{ s}$ ). ¿Cuál sería la vida media si se midiera la de piones que viajan a  $0,995c$ ? (Respuesta 260 ns.)

**Ejercicio** Un haz de piones, cuyo periodo de semidesintegración es de 18 ns (véase el ejercicio anterior y el capítulo 40, donde se definen los conceptos de vida media y periodo de semidesintegración) pasa por un punto  $P$  a una velocidad de  $0,995c$ . ¿A qué distancia más allá de  $P$  consigue llegar dicho haz antes de que sólo la mitad de los piones sigan en él? (Respuesta 54 m.)

### ¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

<sup>1</sup> Un pión (abreviatura de mesón pi) es una partícula subatómica

## R.4 Más sobre barras en movimiento

En la sección R.2 se comparaba la longitud de una barra en reposo con la de otra barra idéntica que se movía perpendicularmente a sí misma. El resultado era que ambas longitudes debían ser iguales. Pero el procedimiento usado para realizar dicha comparación sólo funciona si la velocidad de la barra es perpendicular a su propia longitud. Aplicaremos ahora un procedimiento distinto para comparar la longitud de una barra en reposo con la que tiene al moverse con una velocidad paralela a su propia longitud.

La figura R.7 muestra un reloj de luz en su sistema de referencia propio. Este reloj completa un tictac cada vez que el flash de luz se refleja en el espejo de la izquierda. En su sistema de referencia propio, la longitud del reloj es  $L_0$  y el intervalo entre un tac y el siguiente es  $T_0 = 2L_0/c$  (ecuación R.1). Para determinar la longitud del reloj en un sistema de referencia en el que se mueve hacia la derecha con velocidad  $v$ , consideramos esta secuencia de tres sucesos:

- Suceso 0 El flash de luz se refleja en el espejo de la izquierda, tac.
- Suceso 1 El flash de luz se refleja en el espejo de la derecha, tic.
- Suceso 2 El flash de luz se refleja en el espejo de la izquierda, tac.

En la figura R.7 se muestran las posiciones del reloj en los tres instantes de tiempo correspondientes a los tres sucesos y en el sistema de referencia en el que el reloj se mueve con velocidad  $v$  hacia la derecha. (Para poder visualizarlo sin solapamiento, el reloj se ha dibujado más abajo para los instantes posteriores.) En este sistema de referencia, los sucesos 0, 1 y 2 ocurren en los instantes  $t'_0$ ,  $t'_1$  y  $t'_2$ , respectivamente. Entre los sucesos 0 y 1, el reloj se mueve una distancia  $v(t'_1 - t'_0)$  y el flash de luz una distancia  $c(t'_1 - t'_0)$ . Por lo tanto,

$$c(t'_1 - t'_0) = L + v(t'_1 - t'_0) \tag{R.4}$$

Entre los sucesos 0 y 2, el reloj se mueve una distancia  $v(t'_2 - t'_0)$  y el flash de luz una distancia  $c(t'_2 - t'_0)$ . Por lo tanto,

$$c(t'_2 - t'_0) = L - v(t'_2 - t'_0) \tag{R.5}$$

Despejando  $t'_1$  en la ecuación R.4, sustituyendo este resultado en la ecuación R.5 y despejando  $t'_2 - t'_0$  se obtiene

$$t'_2 - t'_0 = \frac{2L/c}{1 - (v^2/c^2)} \tag{R.6}$$

El intervalo temporal  $t'_2 - t'_0$  está relacionado con el intervalo temporal  $t_2 - t_0$  entre los sucesos 1 y 2 (ecuación R.3) por

$$t'_2 - t'_0 = \frac{t_2 - t_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \tag{R.7}$$



Figura R.7

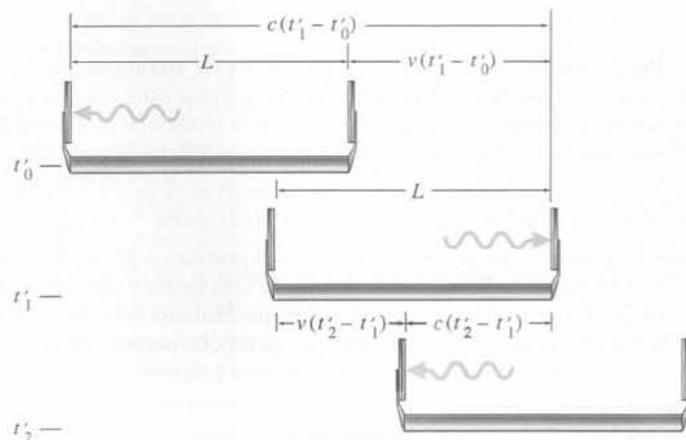


Figura R.8 La figura muestra, en tres instantes sucesivos, un reloj de luz que se mueve hacia la derecha con velocidad  $v$ .

en donde  $t_2 - t_0 = 2L_0/c$  (ecuación R.1). Sustituyendo  $t_2 - t_0$  por  $2L_0/c$  da

$$t'_2 - t'_0 = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (\text{R.8})$$

Igualando los términos de la derecha de las ecuaciones R.6 y R.8 y despejando  $L$ , obtenemos

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} \quad (\text{R.9})$$

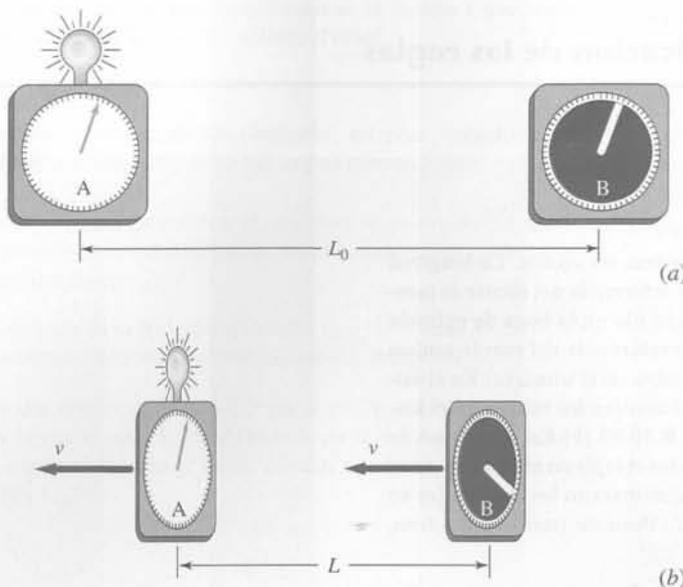
#### CONTRACCIÓN DE LONGITUDES

Se ha llegado a este resultado sin hacer referencia alguna a las propiedades de la barra. Así pues, la ecuación R.9 refleja la naturaleza del espacio y del tiempo, y no la naturaleza de las barras.

## R.5 Relojes lejanos y simultaneidad

Hemos establecido tres normas de utilidad: (1) que la longitud de una barra que se mueve perpendicularmente a sí misma coincide con su longitud en reposo; (2) que el tiempo  $T$  entre tac y tac de un reloj en movimiento es mayor que el tiempo  $T_0$  entre tac y tac del mismo reloj visto por un observador que se mueve con él, a saber,  $T = T_0/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ ; y (3) que la longitud  $L$  de una barra que se mueve paralelamente a sí misma es menor que su longitud en reposo  $L_0$ , a saber,  $L = L_0\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ . Pero para poder analizar los sucesos desde la perspectiva de observadores en sistemas de referencia que se mueven a diferentes velocidades, necesitamos una relación más, la que se refiere a lo que marcan relojes ubicados en distintos puntos del espacio.

Los relojes A y B (figura R.9a) se hallan ambos en reposo en un sistema de referencia. En este sistema de referencia, la distancia entre relojes es  $L_0$ . Para sincronizar estos relojes disponemos de una lámpara de flashes en el reloj A y una película fotosensible en el B. Programamos el reloj A para que emita un flash cuando su segundero pase por el cero. Igual que en el caso del reloj convencional de la sección R.3, el segundero del reloj B es una rendija estrecha y radial practicada en un disco opaco y giratorio. Detrás del mismo hay la película fotosensible. Al llegar el flash al reloj B, se impresiona la estrecha área de la película que está detrás de la rendija. Queda así registrado de manera duradera lo que marca el reloj B cuando le llega el flash. Llamemos  $t_1$  a este instante de tiempo. En el sistema en reposo de ambos relojes, la luz tarda un tiempo  $L_0/c$  en propagarse desde el reloj A al B, por lo tanto, cuando la luz llega al reloj B, el reloj A marca  $L_0/c$  y el reloj B marca  $t_1$ . Para sincronizar los dos relojes, atrasamos el reloj A en  $\Delta t = t_1 - L_0/c$ .



**Figura R.9** (a) Sincronización de dos relojes en el sistema de referencia en que se hallan en reposo. (b) ¿Están los relojes también sincronizados en un sistema de referencia en el que se mueven con velocidad  $v$  paralela a la línea que los une?

Una vez que tenemos los relojes sincronizados en su sistema en reposo (sistema 1), vamos a averiguar si también están sincronizados en un sistema de referencia (sistema 2) en el que los relojes se mueven con velocidad  $v$  paralela a la línea que les une, como se muestra en la figura (R.9b). Reprogramamos el reloj A para que emita un flash al marcar cero. Estos dos sucesos (el reloj A marca cero y se dispara el flash) son coincidencias espacio-temporales y sabemos, pues, que ocurren simultáneamente en cualquier sistema de referencia. También son coincidencias espacio-temporales la llegada de la luz al reloj B y que este reloj marque  $L_0/c$ , con lo que estos sucesos serán simultáneos en cualquier sistema de referencia.

En el sistema 2, la distancia  $L$  entre los relojes viene dada por

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)},$$

y el reloj B se dirige hacia el flash. En este sistema, la luz que va del reloj A al B recorre una distancia  $L - vt$ , en donde  $t$  es el tiempo que tarda en recorrerla. El tiempo  $t$ , la distancia  $L$  y la velocidad  $v$  están relacionados por

$$ct = L - vt$$

Despejando el tiempo, se obtiene  $t = L/(c + v)$ .

Los relojes móviles van más despacio, por lo tanto, el tiempo que éstos indican que ha pasado no es  $L/(c + v)$  sino

$$\frac{L}{c + v} \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = \frac{L_0}{c + v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{L_0}{c + v} \frac{(c + v)(c - v)}{c^2} = \frac{L_0}{c} - \frac{vL_0}{c^2}$$

Así pues, cuando la luz llega al reloj B, éste marca  $L_0/c$  y el reloj A marca  $L_0/c - vL_0/c^2$ . Por lo tanto, en el sistema 2 el reloj B va adelantado respecto al reloj A en  $vL_0/c^2$ :

Si dos relojes se han sincronizado en su sistema en reposo, en un sistema en el que se mueven con velocidad  $v$  paralela a la línea que los une, el reloj trasero va adelantado en un tiempo  $vL_0/c^2$  respecto al reloj que va por delante.

RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD

En este caso,  $L_0$  es la distancia entre relojes en su sistema en reposo. También es verdad que si dos relojes se han sincronizado en su sistema en reposo, están igualmente sincronizados en cualquier sistema que se mueva con velocidad  $v$  perpendicular a la línea que los une. (Por la simple razón de que no puede establecerse un criterio para decidir qué reloj va por delante.)

## R.6 Aplicación de las reglas

### EJEMPLO R.2 | Un tren en un túnel

Un tren ultrarrápido está a punto de entrar en un túnel que atraviesa un monte. La longitud propia del túnel es de 1,2 km. La longitud del tren en el sistema de referencia del monte es también de 1,2 km pero su longitud propia es de 2,0 km. El reloj A está fijo en la boca de entrada del túnel y el reloj B lo está en la boca de salida. En el sistema de referencia del monte ambos relojes marcan las cero horas cuando la parte delantera del tren entra en el túnel. (a) En el sistema de referencia del monte, ¿a qué velocidad viaja el tren y qué marcan los relojes en el instante en el que la parte delantera del tren sale del túnel (figura R.10a)? (b) En el sistema de referencia del tren, ¿cuál es la longitud del túnel, qué marcan los dos relojes en el instante en el que la parte delantera del tren entra en el túnel (figura R.10b) y qué marcan los dos relojes en el instante en el que la parte delantera del tren sale del túnel? (c) Para un pasajero del tren, ¿cuánto tarda la parte delantera del tren en recorrer el túnel?

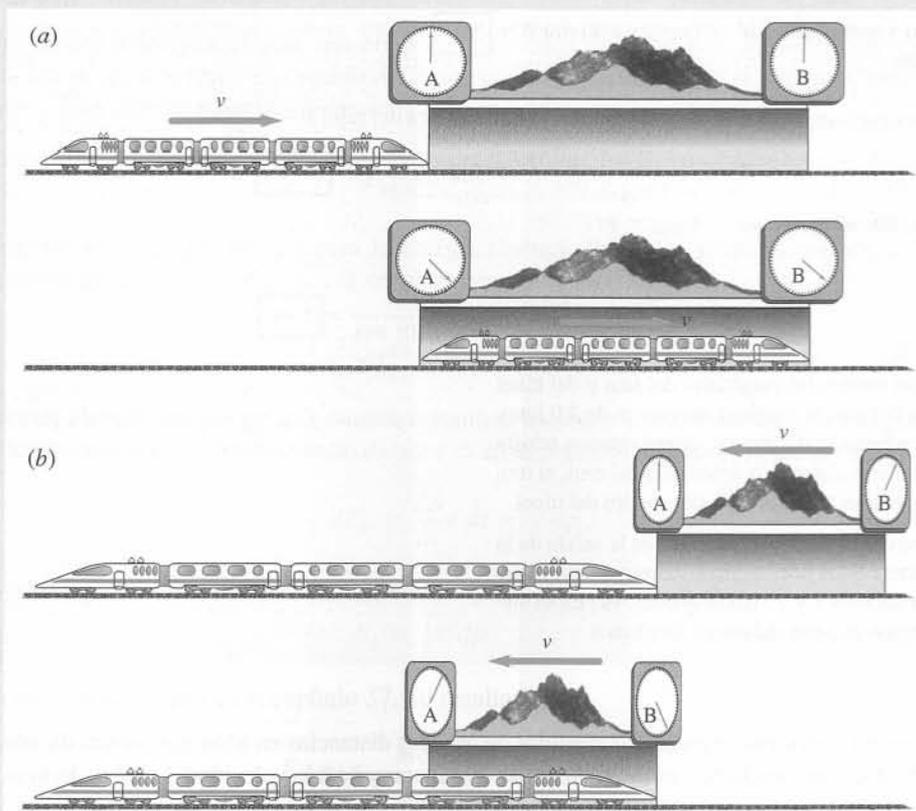


Figura R.10

**Planteamiento del problema** La velocidad y la longitud del tren están relacionadas por la fórmula de la contracción de las longitudes. Algunas de las lecturas de los relojes desde ambos sistemas de referencia pueden igualarse, ya que son pares de sucesos que forman coincidencias espacio-temporales. Las otras lecturas pueden relacionarse a través de la relatividad de la simultaneidad.

- (a) 1. Usando la fórmula de la contracción de las longitudes, despejamos la velocidad del tren:

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

$$1,2 \text{ km} = 2,0 \text{ km} \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

por lo tanto

$$v = 0,8c = 0,8(3,00 \times 10^8 \text{ m/s}) = \boxed{2,4 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

2. La longitud del túnel es su longitud propia y los relojes, inmóviles, no atrasan. Ambos relojes marcan el tiempo  $t$  que tarda la parte delantera del tren en recorrer el túnel:

$$L_{\text{túnel},0} = vt$$

por lo tanto

$$t = \frac{L_{\text{túnel},0}}{v} = \frac{1,2 \times 10^3}{2,4 \times 10^8 \text{ m/s}} = 5 \times 10^{-6} \text{ s} = 5 \mu\text{s}$$

3. Los dos relojes están sincronizados, así pues, cuando la parte delantera del tren sale del túnel ambos marcan  $5 \mu\text{s}$ :

$$\text{Lectura del reloj A} = \text{Lectura del reloj B} = \boxed{5 \mu\text{s}}$$

- (b) 1. En este sistema de referencia, el monte se mueve a  $0,8c$ . Usando la fórmula de la contracción de las longitudes, despejamos la longitud del túnel:

$$\begin{aligned} L_{\text{túnel}} &= L_{\text{túnel},0} \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = 1,2 \text{ km} \sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}} \\ &= 1,2 \text{ km} \sqrt{1 - 0,8^2} = \boxed{0,72 \text{ km} = 720 \text{ m}} \end{aligned}$$

2. La entrada de la parte delantera del tren en el túnel y que el reloj A marque cero son coincidencias espacio-temporales:

$$\boxed{\text{El reloj A marca cero}}$$

3. Los dos relojes, con el reloj B por detrás, se mueven hacia el tren, por lo que el reloj B irá adelantado en  $vL_0/c^2$  respecto al reloj A. Al entrar el tren en el túnel, el reloj A marca cero y el reloj B marca  $vL_0/c^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{vL_{\text{túnel},0}}{c^2} &= \frac{0,8cL_{\text{túnel},0}}{c^2} = \frac{0,8L_{\text{túnel},0}}{c} \\ &= \frac{0,8(1,2 \times 10^3 \text{ m})}{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3,2 \mu\text{s} \end{aligned}$$

$$\text{Lectura del reloj B} = \boxed{3,2 \mu\text{s}}$$

4. La salida del túnel de la parte delantera del tren y que el reloj B marque  $5\mu\text{s}$  son coincidencias espacio-temporales:

$$\text{Lectura del reloj B} = \boxed{5\mu\text{s}}$$

5. El reloj B va por detrás, por lo que el reloj A marcará un tiempo inferior en  $vL_0/c^2$  al que marque el reloj B:

$$\begin{aligned}\text{Lectura del reloj A} &= \text{Lectura del reloj B} - \frac{vL_{\text{túnel},0}}{c^2} \\ &= 5\mu\text{s} - 3,2\mu\text{s} = \boxed{2,6\mu\text{s}}\end{aligned}$$

- (c) Para un observador en el sistema de referencia del tren, el monte se desplaza a  $0,8c$  y la longitud del túnel es de 720 m:

$$L_{\text{túnel}} = vt$$

por lo tanto

$$t = \frac{L_{\text{túnel}}}{v} = \frac{L_{\text{túnel}}}{0,8c} = \frac{720\text{ m}}{2,4 \times 10^8\text{ m/s}} = \boxed{3\mu\text{s}}$$



**Observaciones** En el sistema de referencia del monte, las longitudes del tren y del túnel son ambas de 1,2 km. En el sistema de referencia del tren, la longitud del tren es de 2,0 km y la longitud del túnel de 720 m. En el sistema de referencia del monte, cuando ambos relojes marcan  $5\mu\text{s}$  el tren se halla por completo dentro del túnel. En el sistema de referencia del tren, el tren es más largo que el túnel y, por lo tanto, en ningún instante el tren está por completo dentro del túnel.

**Ejercicio** El suceso 1 es la entrada de la cabecera del tren en el túnel y el suceso 2 es la salida de la cabecera del tren del túnel. (a) ¿En qué sistema de referencia estos dos sucesos ocurren en el mismo sitio? (b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo propio entre los sucesos 1 y 2? (Respuestas (a) En el sistema de referencia del tren, ya que ambos sucesos ocurren en su parte delantera. (b)  $3\mu\text{s}$ .)



### EXPLORANDO

Se encontrarán archivos PDF de dos ejemplos prácticos acerca de la paradoja de los gemelos en [www.whfreeman.com/tipler5e](http://www.whfreeman.com/tipler5e).

A menudo conviene expresar las medidas de grandes distancias en años-luz, siendo un año-luz la distancia recorrida por un móvil al viajar durante un año a la velocidad de la luz. Esto es,

$$1 \text{ año-luz} = 1 c \cdot \text{año}$$

en donde  $1 c \cdot \text{año} = c$  (1 año). Esta notación es particularmente útil cuando las distancias deban dividirse por velocidades. Por ejemplo, el tiempo  $T$  que una partícula que viaja a  $v = 0,1c$  tarda en recorrer una distancia de  $L = 25$  años-luz es

$$T = \frac{L}{v} = \frac{25c \cdot \text{año}}{0,1c} = 250 \text{ años}$$

pudiéndose eliminar  $c$ .

**Ejercicio** En el sistema de referencia de la Tierra, la luz necesita 8 minutos para llegar desde el Sol a la Tierra, por lo que la distancia entre Tierra y Sol es de 8 min-luz. ¿Cuántos minutos tardará una partícula que viaja a  $v = 0,1c$  en ir desde el Sol a la Tierra? (Respuesta  $(8c \cdot \text{min})/(0,1c) = (0,8 \text{ min})/0,1 = 8 \text{ min}$ .)

## R.7 Momento, masa y energía relativistas

### Momento y masa

Al igual que en física clásica, el momento y la energía también se conservan en relatividad especial. Sin embargo, hay diferencias que cabe tener en cuenta. El momento de una partícula que se mueve a velocidad  $v$  viene dado por

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (\text{R.10})$$

MOMENTO RELATIVISTA

en donde  $m$  es la masa de la partícula. A veces, la ecuación R.10 se escribe  $p = m_r v$ ; se llama masa relativista a  $m_r = m/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ . En el sistema de referencia donde la partícula está en reposo,  $v = 0$  y la masa relativista es igual a  $m$ . (Esta masa  $m$  es llamada a veces masa en reposo para distinguirla de la masa relativista.) Masa y momento relativistas se estudiarán más ampliamente en el capítulo 37.

## Energía

En mecánica relativista, al igual que en mecánica clásica, la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual al ritmo de cambio del momento de la partícula con el tiempo. Concretamente y para movimientos unidimensionales, tenemos

$$F_{\text{neta}} = \frac{dp}{dt} \quad (\text{R.11})$$

Queremos hallar una expresión para la energía cinética. Para ello, multiplicaremos ambos miembros de la ecuación R.11 por el desplazamiento  $ds$ . Nos da

$$F_{\text{neta}} ds = \frac{dp}{dt} ds \quad (\text{R.12})$$

en donde identificamos el primer miembro como el trabajo y el segundo como el cambio en la energía cinética  $dE_c$ . Sustituyendo  $ds$  por  $v dt$  en el segundo miembro, llegamos a

$$dE_c = \frac{dp}{dt} v dt = v dp$$

Integrando ambos miembros, obtenemos

$$E_c = \int v dp \quad (\text{R.13})$$

Esta integral se calcula en el capítulo 37. Su resultado es

$$E_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - mc^2 \quad (\text{R.14})$$

Definiendo la **energía relativista total**  $E$  mediante  $\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$  se llega a

$$E = E_c + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (\text{R.15})$$

en donde  $mc^2$ , llamada **energía en reposo**  $E_0$ , es la energía que la partícula posee cuando está en reposo.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación R.10 por  $c$  y dividiendo después la ecuación resultante por la ecuación R.15, obtenemos

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E} \quad (\text{R.16})$$

que puede ser útil al intentar despejar la velocidad  $v$ . Eliminando  $v$  entre las ecuaciones R.10 y R.16 y despejando  $E^2$  (véase el problema R.41) resulta

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (\text{R.17})$$

Esta relación entre masa  $m$  y energía  $E$  se estudiará en la sección 3 del capítulo 7.

## Resumen

### TEMA

### OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

#### 1. Postulados de la relatividad especial

Postulado I: Principio de relatividad

Es imposible diseñar un experimento que establezca si uno está en reposo o moviéndose uniformemente, entendiéndose que moverse uniformemente significa moverse a velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial.

Postulado II

La velocidad de la luz es independiente de la velocidad de su foco emisor.

Constancia de la velocidad de la luz

Como consecuencia, la velocidad de la luz es la misma respecto a cualquier sistema de referencia inercial.

## 2. Barras en movimiento

La longitud de una barra que se mueve perpendicularmente a sí misma es igual a su longitud propia.

La longitud  $L$  de una barra que se mueve paralelamente a sí misma con velocidad  $v$  es más corta que su longitud propia  $L_0$  de acuerdo con la ecuación

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} \quad (\text{R.9})$$

## 3. Relojes en movimiento

Dilatación temporal

El tiempo  $T$  que tarda en completar un tictac un reloj que se mueve a velocidad  $v$  es más largo que el tiempo propio  $T_0$  que tarda en completarlo el mismo reloj de acuerdo con

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (\text{R.3})$$

Relatividad de la simultaneidad

Si sincronizamos dos relojes en su sistema en reposo, en un sistema en el que se mueven con velocidad  $v$  paralela a la línea que une ambos relojes, el reloj de atrás va adelantado en  $vL_0/c^2$  respecto al reloj delantero, siendo  $L_0$  la distancia entre relojes en su sistema en reposo.

Si dos relojes están sincronizados en su sistema en reposo, lo están también en otro sistema en el que se mueven a velocidad  $v$  perpendicular a la línea que une los relojes.

## 4. Coincidencias espacio-temporales

Si dos sucesos ocurren en el mismo instante y en el mismo sitio en un sistema de referencia, también ocurren los dos en el mismo instante y en el mismo sitio en cualquier sistema de referencia.

## 5. Momento, masa y energía

Momento

El momento de una partícula viene dado por

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (\text{R.10})$$

Masa y energía

La energía relativista total de una partícula es igual a su energía en reposo más su energía cinética,

$$E = E_c + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (\text{R.15})$$

donde  $mc^2$  es la energía en reposo  $E_0$ .

Momento y energía

$$\frac{m}{c} = \frac{pc}{E} \quad \text{y} \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad (\text{R.16, R.17})$$

## Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

**SSM** La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

**iSOLVE** Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

**iSOLVE** ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

*En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.*

### Problemas conceptuales

**1** ● Se encuentra Ud. parado en una esquina frente a la cual pasa un amigo en automóvil. Tanto Ud. como su amigo llevan relojes de pulsera. Los dos anotan en qué instantes el automóvil pasa por dos cruces distintos y de ahí deducen los intervalos de tiempo que hay entre estos dos sucesos. ¿Quién de los dos ha determinado el intervalo de tiempo propio?

**2** ● **SSM** Si el suceso A ocurre antes que el suceso B en un sistema de referencia, ¿es posible que exista un sistema de referencia en el que el suceso B ocurra antes que el A?

**3** ● Dos sucesos son simultáneos en un sistema en el que además ocurren en el mismo punto del espacio. ¿Son simultáneos en cualquier sistema de referencia?

**4** ●● Dos observadores inerciales se hallan en movimiento relativo. ¿En qué circunstancias podrán estar de acuerdo sobre la simultaneidad de dos sucesos distintos?

- 5 ● La energía total de una partícula de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $v \ll c$  vale, aproximadamente, (a)  $mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ , (b)  $mv^2$ , (c)  $cmv$ , (d)  $\frac{1}{2}mc^2$ , (e)  $cmv$ .
- 6 ● SSM Verdadero o falso:
- (a) La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia.
  - (b) El tiempo propio es el intervalo de tiempo más corto entre dos sucesos.
  - (c) Podemos determinar un movimiento absoluto por medio de la contracción de longitudes.
  - (d) El año-luz es una unidad de distancia.
  - (e) Para que dos sucesos puedan ser una coincidencia espacio-temporal, deben ocurrir en el mismo sitio.
  - (f) Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema de referencia, no pueden ser simultáneos en ningún otro sistema de referencia.

### Aproximaciones y estimaciones

- 7 ●● Los satélites usados en el Sistema de Posicionamiento Global (GPS) llevan a bordo relojes extremadamente precisos. De hecho, el sistema de posicionamiento es tan preciso que hay que tener en cuenta la dilatación temporal relativista de estos relojes respecto a los de los observadores terrestres. Dar una estimación del factor de dilatación temporal de los relojes de los satélites respecto a los terrestres si se toma 26000 km como radio medio de las órbitas de los satélites GPS.
- 8 ●● Suele afirmarse que hacer ejercicio montando en bicicleta alargará nuestras vidas. Desde el punto de vista de la relatividad, esto es ciertamente verdad. Dar una estimación del factor en que se nos alargará la vida por dilatación relativista del tiempo si montar en bici es parte regular de nuestros ejercicios. Hacer las suposiciones razonables que sea necesario, especificándolas, obviamente, en la respuesta.

9 ●● SSM **ISOLVE** En 1975, un avión que llevaba un reloj atómico a bordo voló durante 15 h en un trayecto de ida y vuelta a 140 m/s como parte de un experimento de dilatación temporal. El tiempo de este reloj se comparó con el de otro reloj atómico que había permanecido en tierra. ¿Qué retraso acumuló el reloj volador respecto al reloj que quedó en tierra? (Ignórese la rotación diurna de la Tierra.)

### Contracción de longitudes y dilatación de tiempos

- 10 ● **ISOLVE** La vida media propia de una partícula subnucleares llamadas piones es de  $2,6 \times 10^{-8}$  s. Un haz de piones va a velocidad  $0,85c$  respecto a un laboratorio. (a) ¿Cuál sería la vida media que mediríamos desde el laboratorio? (b) ¿A qué distancia llegarán, en promedio, antes de desintegrarse? (c) ¿Cuál sería la respuesta al apartado (b) si ignoráramos la dilatación temporal?
- 11 ● **ISOLVE** (a) En el sistema de referencia del pión del problema 10, ¿qué distancia recorre el laboratorio durante una típica vida media de  $2,6 \times 10^{-8}$  s? (b) ¿Cuánto vale esta distancia en el sistema del laboratorio?
- 12 ● SSM **ISOLVE** La vida media propia de una partícula subnuclear llamada muón es de  $2 \mu\text{s}$ . Los muones de un haz se mueven a una velocidad de  $0,999c$  respecto a un laboratorio. (a) ¿Cuál sería la vida media que mediríamos desde el laboratorio? (b) ¿A qué distancia llegarán, en promedio, antes de desintegrarse?
- 13 ● **ISOLVE** (a) En el sistema de referencia del muón del problema 12, ¿qué distancia recorre el laboratorio durante una típica vida media de  $2 \mu\text{s}$ ? (b) ¿Cuánto vale esta distancia en el sistema del laboratorio?
- 14 ● Ha sido Ud. destinado a regular el tráfico en una remota región del espacio. Hacia el final de una jornada tranquila, pasa una nave espacial y mide Ud. su longitud mediante un aparato láser que le indica 85 m. Abre rápidamente su catálogo e identifica la nave como una CCCNX-22, que tiene una longitud propia de 100 m. En su parte telefónico, ¿qué velocidad deberá atribuir a esta nave?

- 15 ● SSM Una nave espacial viaja desde la Tierra hacia una estrella que está a 95 años-luz a la velocidad de  $2,2 \times 10^8$  m/s. ¿Cuánto tarda en alcanzarla (a) si lo medimos desde la Tierra y (b) si lo mide un pasajero de la nave?

- 16 ● La vida media de un haz de partículas subnucleares llamadas piones que se mueven a gran velocidad es de  $7,5 \times 10^{-8}$  s. Su vida media cuando están en reposo es de  $2,6 \times 10^{-8}$  s. ¿A qué velocidad se mueven los piones del haz?
- 17 ● Una regla de un metro se mueve respecto a Ud. con una velocidad de  $0,8c$  paralela a la propia regla. (a) Si mide Ud. su longitud, ¿qué valor hallará? (b) ¿Cuánto tiempo tarda la regla en pasar frente a Ud.?
- 18 ● El periodo de semidesintegración de unas partículas subnucleares cargadas llamadas piones en su sistema en reposo es de  $1,8 \times 10^{-8}$  s (esto es, en el sistema en reposo de los piones, si hay  $N$  piones a  $t = 0$ , quedarán solamente  $N/2$  piones a  $t = 1,8 \times 10^{-8}$  s). Un acelerador produce piones que salen a una velocidad de  $0,998c$ . ¿A qué distancia del acelerador llegarán estas partículas antes de que se hayan desintegrado la mitad de ellas?

- 19 ●● **ISOLVE** Su amigo, que tiene la misma edad que Ud., viaja hacia la estrella Alfa Centauri, que se encuentra a 4 años-luz, y regresa inmediatamente. Le dice que su viaje ha durado 6 años. ¿A qué velocidad ha viajado?
- 20 ●● SSM Dos naves espaciales se cruzan en direcciones opuestas. Una pasajera de la nave A, que sabe que su nave mide 100 m de largo, observa que la nave B se mueve a una velocidad de  $0,2c$  relativa a A y que la longitud de B es de 36 m. ¿Cuáles son las longitudes de las dos naves medidas por los pasajeros de la nave B?
- 21 ●● Los reactores supersónicos alcanzan velocidades máximas cercanas a  $3 \times 10^{-6}c$ . (a) ¿En qué porcentaje se contrae la longitud de un reactor que se mueve a esta velocidad? (b) Si para Ud. (en tierra) pasa 1 año =  $3,15 \times 10^7$  s, ¿cuánto se habrá atrasado el reloj del piloto respecto al suyo? (Ignórese la rotación de la Tierra.)

### Relatividad de la simultaneidad

Los problemas que van del 22 al 26 se refieren a la siguiente situación: María trabaja en una gran plataforma espacial. Sitúa el reloj A en el punto A y el reloj B en el punto B, que dista 100 minutos-luz de A (figura R.11). También sitúa un emisor de flashes en el punto medio entre A y B. Jamal, que trabaja en otra plataforma, está junto al reloj C. Cada uno de estos relojes está parado marcando cero, pero se pondrá inmediatamente en marcha al llegarle el flash. La plataforma de María se mueve con velocidad  $0,6c$  respecto a la de Jamal. Con el paso de la plataforma de María, el reloj B, luego el emisor de flashes y, finalmente, el reloj A pasan justo por encima del reloj C, del que se alejarán definitivamente. El emisor de flashes se dispara justo al pasar al lado del reloj C, que se pone inmediatamente en marcha a partir de cero.

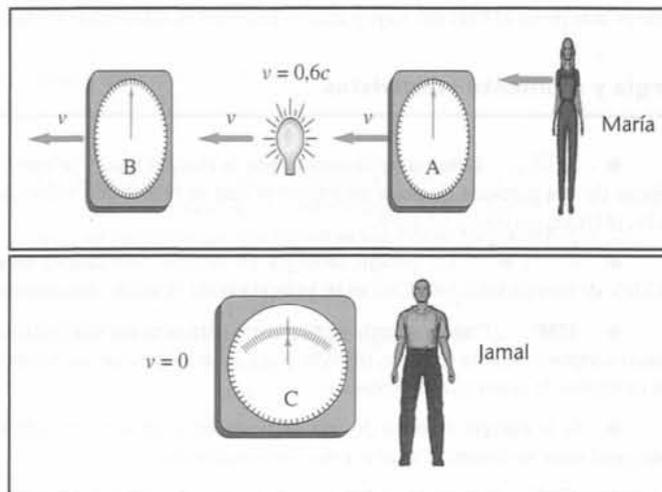


Figura R.11

- 22 ● SSM Según Jamal, (a) ¿qué distancia hay entre el emisor de flashes y el reloj A?, (b) ¿qué distancia recorre el flash hasta alcanzar el reloj A? y (c) ¿qué distancia recorre el reloj A mientras el flash se dirige hacia dicho reloj?

23 ●● Según Jamal, ¿cuánto tiempo tarda el flash en llegar hasta el reloj A, y qué marca el reloj C cuando el flash llega al reloj A?

24 ●● Compruébese que cuando el flash alcanza al reloj B, el cual se aleja del reloj C a  $0,6c$  de velocidad, este reloj C marca 100 min.

25 ●● Según Jamal, entre la llegada del flash al reloj A y la llegada al reloj B de los problemas 23 y 24, el reloj C pasa de marcar 25 min a marcar 100 min. Siempre según Jamal, ¿cuánto tiempo habrá pasado en el reloj A durante este intervalo de 75 min?

26 ●● SSM El tiempo que ha pasado en el reloj A del problema 25 indica la distancia a la que el reloj B va por delante del reloj A según Jamal. Comparar este resultado con  $vL_0/c^2$ , donde  $v = 0,6c$ .

27 ●● En el sistema de referencia inercial  $S$ , el suceso B ocurre  $2 \mu\text{s}$  después y a  $1,5 \text{ km}$  de distancia del suceso A. ¿A qué velocidad, paralela a la línea que une ambos sucesos, debe moverse un observador para que dichos sucesos ocurran simultáneamente? Para un observador suficientemente veloz, ¿podría el suceso B ocurrir antes que el suceso A?

28 ●● A lo largo de una gran plataforma plana se ha trazado un eje  $OX$ . Un petardo explota en el punto  $x_1 = 480 \text{ m}$  de dicho eje y un segundo petardo explota  $5 \mu\text{s}$  más tarde en el punto  $x_2 = 1200 \text{ m}$  del mismo eje. En el sistema de referencia de un tren que viaja a lo largo del eje  $OX$  con una velocidad  $v$  relativa a la plataforma, estas dos explosiones ocurren en el mismo punto del espacio. ¿Qué intervalo de tiempo separa dichas explosiones en el sistema de referencia del tren?

29 ● **¡SOLVE!** Gianni y Beatrix son dos hermanos gemelos que forman un dúo de jazz tocando el trombón y el saxofón. A sus 30 años, Beatrix recibe una propuesta irresistible para ir a tocar a una estrella a 15 años-luz de distancia. Para celebrarlo, compra un nuevo vehículo para este viaje, un coupé espacial *deluxe* que puede ir a  $0,999c$ . Cada gemelo se compromete a seguir ensayando diligentemente para poder seguir tocando juntos al volver. Sin embargo, Beatrix tiene tanto éxito en su gira que la prolonga hasta un total de 10 años antes de iniciar su regreso al lado de Gianni. Una vez se han reunido, (a) ¿cuántos años ha ensayado Beatrix?; (b) ¿cuántos años ha ensayado Gianni?

30 ●● SSM Al y Bert son hermanos gemelos. El primero viaja a  $0,6c$  hasta Alfa Centauri (que está a 4 años-luz de la Tierra, medidos desde el sistema de referencia de la Tierra) y regresa inmediatamente. Cada gemelo envía al otro una señal de luz cada  $0,01$  años, medidos en el propio sistema de referencia. (a) ¿Con qué frecuencia recibe Bert las señales de Al mientras éste se aleja? (b) ¿Cuántas señales recibe Bert con esta frecuencia? (c) ¿Cuántas señales recibe Bert en total antes del regreso de Al? (d) ¿Con qué frecuencia recibe Al las señales de Bert mientras se están distanciando? (e) ¿Cuántas señales con esta frecuencia recibe Al? (f) ¿Cuántas señales recibe Al en total? (g) ¿Qué gemelo es más joven al final del viaje y cuál es entonces su diferencia en edad?

## Energía y momento relativistas

31 ● **¡SOLVE!** Determinar la razón entre la energía total y la energía en reposo de una partícula de masa en reposo  $m$  que se mueve con velocidad (a)  $0,1c$ , (b)  $0,5c$ , (c)  $0,8c$  y (d)  $0,99c$ .

32 ● **¡SOLVE!** Un protón (energía en reposo,  $938 \text{ MeV}$ ) tiene  $1400 \text{ MeV}$  de energía total. (a) ¿Cuál es su velocidad? (b) ¿Cuál es su momento?

33 ● SSM ¿Cuánta energía se requeriría para acelerar una partícula de masa en reposo  $m$  hasta (a)  $0,5c$ , (b)  $0,9c$  y (c)  $0,99c$ ? Expresar las respuestas en múltiplos de la energía en reposo.

34 ● Si la energía cinética de una partícula es igual a su energía en reposo, ¿qué error se comete al usar  $p = mv$  como momento?

35 ● ¿Cuál es la energía total de un protón cuyo momento es  $3mc$ ?

36 ●● SSM Usando una hoja de cálculo o una calculadora de gráficos, representar gráficamente la energía cinética de una partícula de masa  $m = 100 \text{ MeV}/c^2$  para velocidades  $v$  de  $0$  a  $c$ . Representar también  $\frac{1}{2}mv^2$  y comparar las dos curvas. Usando estas gráficas, dar una estimación de la velocidad a partir de la cual la segunda expresión ya no es una buena aproximación a la ener-

gía cinética. Sugerimos que la energía se exprese en MeV y la velocidad en la forma adimensional  $v/c$ .

37 ●● Deducir la ecuación  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  (ecuación R.17) eliminando  $v$  de las ecuaciones R.10 y R.16.

38 ●● Usar el desarrollo del binomio y la ecuación R.17 para mostrar que cuando  $pc \ll mc^2$ , la energía total viene dada aproximadamente por  $E \approx mc^2 + p^2/(2m)$ .

39 ●● (a) Mostrar que la velocidad  $v$  de una partícula de masa  $m$  y energía total  $E$  es

$$\frac{v}{c} = \left[ 1 - \frac{(mc^2)^2}{E^2} \right]^{1/2}$$

y que, cuando la energía es mucho mayor que  $mc^2$ , es válida la aproximación

$$\frac{v}{c} \approx 1 - \frac{(mc^2)^2}{2E^2}.$$

Hallar la velocidad de un electrón de energía cinética (b)  $0,51 \text{ MeV}$  y (c)  $10 \text{ MeV}$ .

40 ●● SSM La energía en reposo de un protón es de unos  $938 \text{ MeV}$ . Si su energía es también de  $938 \text{ MeV}$ , determinar (a) su momento y (b) su velocidad.

41 ●● ¿Qué error porcentual se comete al usar  $\frac{1}{2}mv^2$  como energía cinética de una partícula si su velocidad es (a)  $0,1c$  y (b)  $0,9c$ ?

## Problemas generales

42 ● Una nave espacial sale de la Tierra hacia Alfa Centauri, que dista 4 años-luz en el sistema de referencia de la Tierra. La nave viaja a  $0,75c$ . ¿Cuánto tarda en llegar ahí según (a) un observador de la Tierra y (b) un pasajero de la nave?

43 ● La energía total de una partícula es tres veces mayor que su energía en reposo. (a) Hallar  $v/c$  de dicha partícula. (b) Mostrar que su momento viene dado por  $p = \sqrt{8}mc$ .

44 ●● **¡SOLVE!** Una partícula subnuclear llamada muón tiene una vida media de  $2 \mu\text{s}$  en su sistema de referencia en reposo. Si se mide que la vida media de unos muones que salen de un reactor nuclear es de  $46 \mu\text{s}$ , ¿a qué velocidad viajan?

45 ●● SSM La masa en reposo del neutrino (una partícula "fantasma" de la física) se sabe que es muy pequeña pero no se ha medido todavía. En la explosión de una estrella supernova, se producen a la vez luz y neutrinos ultraenergéticos. Con ello, es posible medir la masa del neutrino a través de la diferencia entre los tiempos de llegada de la luz y de los neutrinos a la Tierra. Si la explosión se produce a  $100000$  años-luz de la Tierra y la energía de los neutrinos es de  $100 \text{ MeV}$ , calcular la masa en reposo de dichos neutrinos para que su llegada a la Tierra se produzca más tarde que la de la luz en (a)  $1 \text{ min}$ , (b)  $1 \text{ s}$  y (c)  $0,01 \text{ s}$ .

46 ● **¡SOLVE!** ¿A qué velocidad paralela a su longitud y relativa a Ud. debe pasar una regla de un metro para que al medir Ud. su longitud encuentre  $50 \text{ cm}$ ?

47 ●●● SSM Rafael y Javier intentan colocar una escalera de 15 pies de longitud en un cobertizo con sendas puertas en sus extremos a 10 pies de distancia. Recordando sus clases de física, Rafael propone abrir la puerta delantera y que Javier, cargado con la escalera, corra hacia la puerta a gran velocidad para que la longitud de la escalera se contraiga hasta caber dentro del cobertizo. En el instante en que la parte posterior de la escalera cruce la puerta, Rafael la cerrará inmediatamente. (a) ¿A qué velocidad mínima debe correr Javier con la escalera para que ésta quepa por completo en el cobertizo? Expresarla como una fracción de la velocidad de la luz. (b) Al correr hacia el cobertizo a  $0,866c$ , Javier se da cuenta de que, en su propio sistema de referencia, es el cobertizo y no la escalera el que se ha acortado. ¿Cuál es la longitud del cobertizo en este sistema de referencia? (c) En el sistema de referencia de la escalera, ¿existe algún instante en que los extremos de la escalera estén simultáneamente dentro del cobertizo? Averiguarlo desde el punto de vista de la simultaneidad relativista.

## Constantes físicas<sup>a</sup>

Constante de masa atómica	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}\text{C})$	1 u = 1,660 538 73(13) × 10 <sup>-27</sup> kg
Número de Avogadro	$N_A$	6,022 141 99(47) × 10 <sup>23</sup> partículas/mol
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	1,380 6503(24) × 10 <sup>-23</sup> J/K
Magnetón de Bohr	$m_B = e\hbar/(2m_e)$	9,274 008 99(37) × 10 <sup>-24</sup> J/T 5,788 381 759(43) × 10 <sup>-5</sup> eV/T
Constante de Coulomb	$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$	8,987 551 788... × 10 <sup>9</sup> N · m <sup>2</sup> /C <sup>2</sup>
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = h/(m_e c)$	2,426 310 215(18) × 10 <sup>-12</sup> m
Carga fundamental	$e$	1,602 1764 62(63) × 10 <sup>-19</sup> C
Constante de los gases	$R$	8,314 472(15) J/(mol · K) 1,987 2065(36) cal/(mol · K) 8,205 746(15) × 10 <sup>-2</sup> atm · L/(mol · K)
Constante de la gravitación	$G$	6,673(10) × 10 <sup>-11</sup> N · m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
Masa del electrón	$m_e$	9,109 381 88 (72) × 10 <sup>-31</sup> kg 0,510 998 902(21) MeV/c <sup>2</sup>
Masa del protón	$m_p$	1,672 621 58(13) × 10 <sup>-27</sup> kg 938,271 998(38) MeV/c <sup>2</sup>
Masa del neutrón	$m_n$	1,674 927 16(13) × 10 <sup>-27</sup> kg 939,565 330(38) MeV/c <sup>2</sup>
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0$	8,854 187 817... × 10 <sup>-12</sup> C <sup>2</sup> /(N · m <sup>2</sup> )
Permeabilidad del espacio libre	$\mu_0$	4π × 10 <sup>-7</sup> N/A <sup>2</sup>
Constante de Planck	$h$	6,626 068 76(52) × 10 <sup>-34</sup> J · s 4,135 667 27(16) × 10 <sup>-15</sup> eV · s
	$\hbar = h/(2\pi)$	1,054 571 596(82) × 10 <sup>-34</sup> J · s 6,582 118 89(26) × 10 <sup>-16</sup> eV · s
Velocidad de la luz	$c$	2,997 924 58 × 10 <sup>8</sup> m/s
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	5,670 400(40) × 10 <sup>-8</sup> W/(m <sup>2</sup> · K <sup>4</sup> )

<sup>a</sup>Los valores de estas y otras constantes pueden obtenerse de la dirección de Internet <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>. Los números entre paréntesis representan los errores en las dos últimas cifras. (Por ejemplo, 2,044 43(13) significa 2,044 43 ± 0,00013.) Los valores sin números entre paréntesis son exactos incluyendo aquellos con puntos suspensivos (como el valor de π que es exactamente 3,1415...)

## Derivadas e integrales definidas

$\frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax$	$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$	$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$	En las seis integrales, $a$ es una constante positiva.
$\frac{d}{dx} \cos ax = -a \sin ax$	$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{4}{a^2}$	
$\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}$	$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{2}{a}$	$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$	

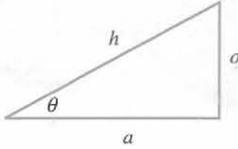
## Productos vectoriales

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{n} \quad (\mathbf{n} \text{ obtenido mediante la regla de la mano derecha})$$

## Geometría y trigonometría

$C = \pi d = 2\pi r$	definición de $\pi$
$A = \pi r^2$	área de un círculo
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	volumen de una esfera
$A = dV/dr = 4\pi r^2$	área de la superficie esférica
$V = A_{\text{base}}L = \pi r^2L$	volumen de un cilindro
$A = dV/dr = 2\pi rL$	área de la superficie cilíndrica

$$o = h \operatorname{sen} \theta$$
$$a = h \operatorname{cos} \theta$$



$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \operatorname{cos} B \pm \operatorname{cos} A \operatorname{sen} B$$

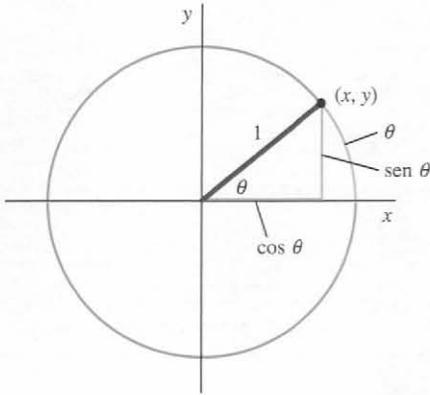
$$\operatorname{cos}(A \pm B) = \operatorname{cos} A \operatorname{cos} B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} (A \pm B) \right] \operatorname{cos} \left[ \frac{1}{2} (A \mp B) \right]$$

$$\operatorname{sen} \theta \equiv y$$

$$\operatorname{cos} \theta \equiv x$$

$$\operatorname{tg} \theta \equiv \frac{y}{x}$$



Si  $|\theta| \ll 1$ , entonces

$$\operatorname{cos} \theta \approx 1 \text{ y } \operatorname{tg} \theta \approx \operatorname{sen} \theta \approx \theta \quad (\theta \text{ en radianes})$$

### La ecuación de segundo grado

$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0, \text{ entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Desarrollo del binomio

$$\text{Si } |x| < 1, \text{ entonces } (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\text{Si } |x| \ll 1, \text{ entonces } (1+x)^n \approx 1 + nx$$

$$\text{Si } |\Delta x| \text{ es pequeño, entonces } \Delta F \approx \frac{dF}{dx} \Delta x$$