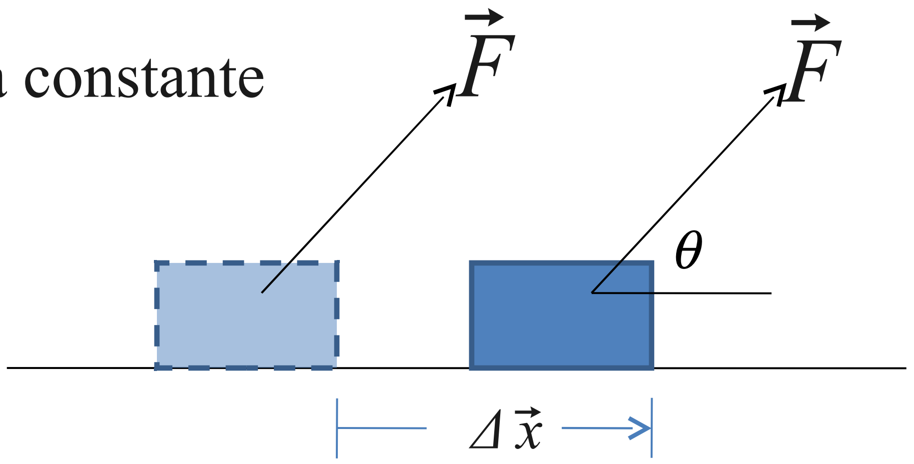
Sólidos rígidos: energía de rotación

Trabajo de una fuerza: Si la fuerza constante

es paralela al desplazamiento $\Delta \vec{x}$

Entonces el trabajo W será:

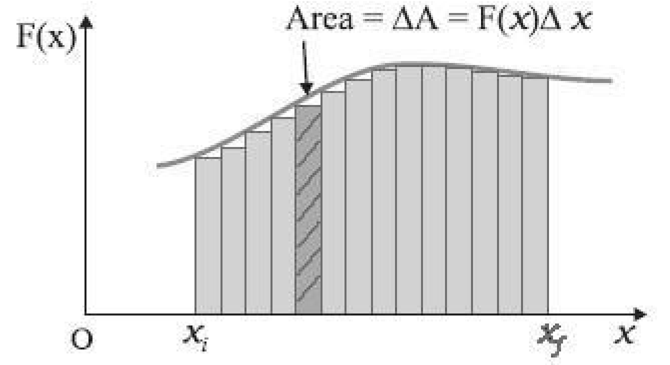


W=F· Δx

Más generalmente, en caso de no ser paralelas:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \Delta x \cos(\theta)$$

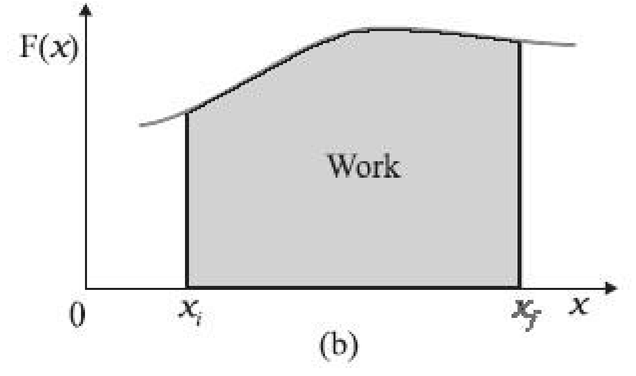
- Si la fuerza no es constante o si el desplazamiento cambia de dirección:



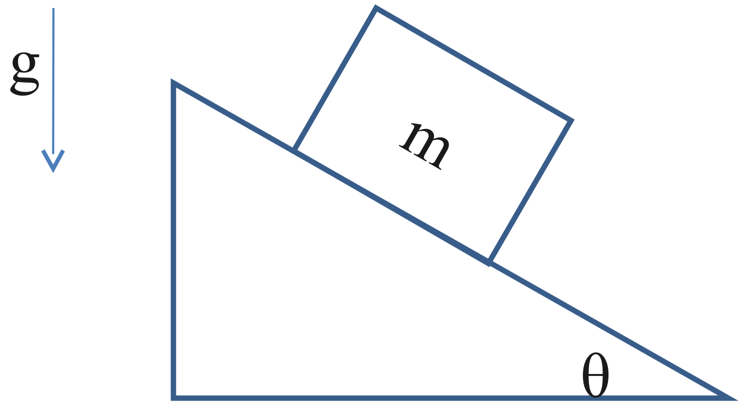
$$dW = \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

En el caso unidimensional

$$\Delta W = \int_a^b F(x)\,dx$$

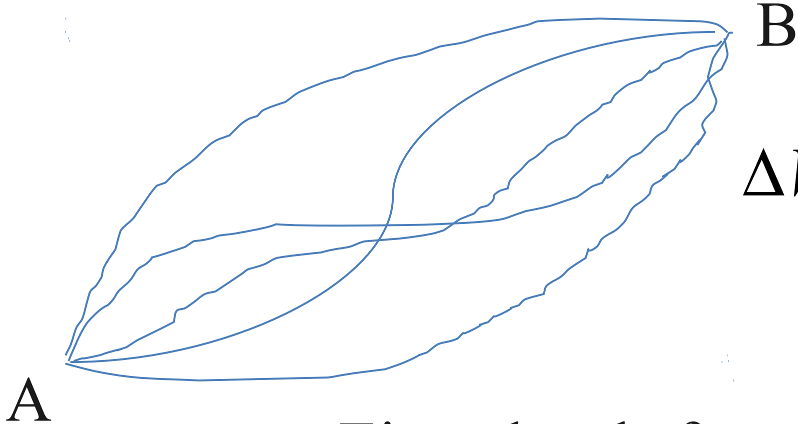


Ejemplo: trabajo hecho por la gravedad en un plano inclinado



¿Cómo es si el bloque se mueve hacia arriba o hacia abajo?

Fuerzas conservativas: el trabajo realizado al ir de un punto al otro depende sólo del punto inicial y final, y no de la trayectoria.



ΔW_{AB} Es independiente de la trayectoria

Ejemplos de fuerzas conservativas: gravitacional
Elástica, electrostática, etc

Se define la energía potencial U tal que:

$$-\Delta U_{AB} = \Delta W_{AB}$$

$$\rightarrow \Delta W_{AB} + \Delta U_{AB} = 0$$

Luego, si decimos que el cambio en la energía cinética es igual al trabajo:

$$\Delta K = \Delta W$$

$$\rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

$$\Delta(K + U) = 0$$

$$E = K + U$$

$$\Delta E = 0$$

¿De donde viene lo anterior?

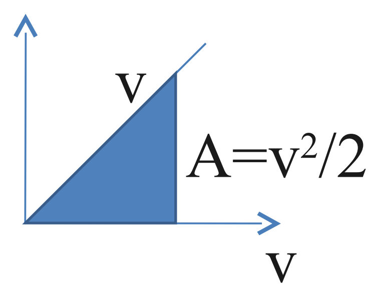
$$dW = Fdx$$

$$dW = m\ddot{x}dx = m\frac{d\dot{x}}{dt}dx = md\dot{x}\frac{dx}{dt}$$

$$dW = md\dot{x}\dot{x} = m\dot{x}d\dot{x}$$

$$\Delta W = \int m\dot{x}d\dot{x} = \int mvdv = m\int vdv$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K$$



Ejemplo: Un objeto se suelta desde una altura H, ¿A qué velocidad impacta contra el suelo?

Solución: Despreciando el roce con el aire, podemos aplicar la conservación de energía mecánica entre el instante inicial (objeto se suelta desde el reposo) y final (objeto impacta el suelo):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg0$$

de donde obtenemos directamente

$$v_f = (2gH)^{\frac{1}{2}}$$

Revisar resorte.

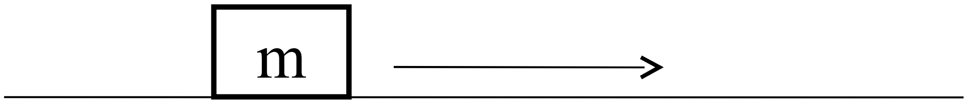
Si existe una fuerza no conservativa

$$\rightarrow \Delta E \neq 0$$

$$\Delta E = W_{fuerza\ roce}$$

$$\Delta E = \sum W_{fuerza\ roce}$$

Ejemplo: un cuerpo es lanzado una con una velocidad inicial v_o en una superficie horizontal en la cual siente una fuerza de roce proporcional a la reacción normal N y al coeficiente de roce dinámico μ. Calcule la distancia que recorrerá el cuerpo antes de detenerse.



En un sólido rígido

Si no hay fuerzas de roce:

$$\Delta E = \Delta(\sum_i K_i + U_i) = 0$$

Energía cinética de rotación:
Ya vimos

$$K = \sum K_n = \sum \left(\frac{1}{2} m_n v_n^2\right) = \frac{1}{2} \sum (m_n \rho_n^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

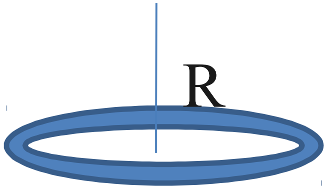
Energía potencial gravitatoria

$$\sum_n U_{gn} = \sum_n g m_n y_n = M Y_{CM}\, g$$

Momento de inercia

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

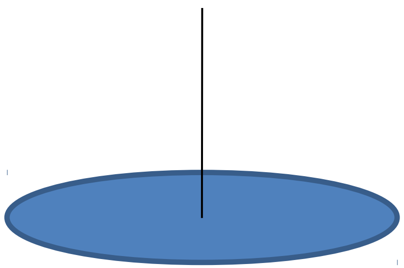
Ejemplo: circunferencia



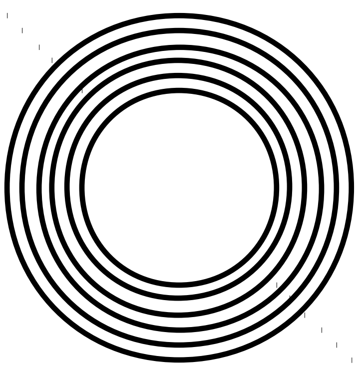
$$I = \sum_i m_i r_i^2 = R^2 \sum_i m_i = MR^2$$

Cuando el objeto es continuo

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i \Rightarrow \int r^2 dm$$



Ejemplo: disco

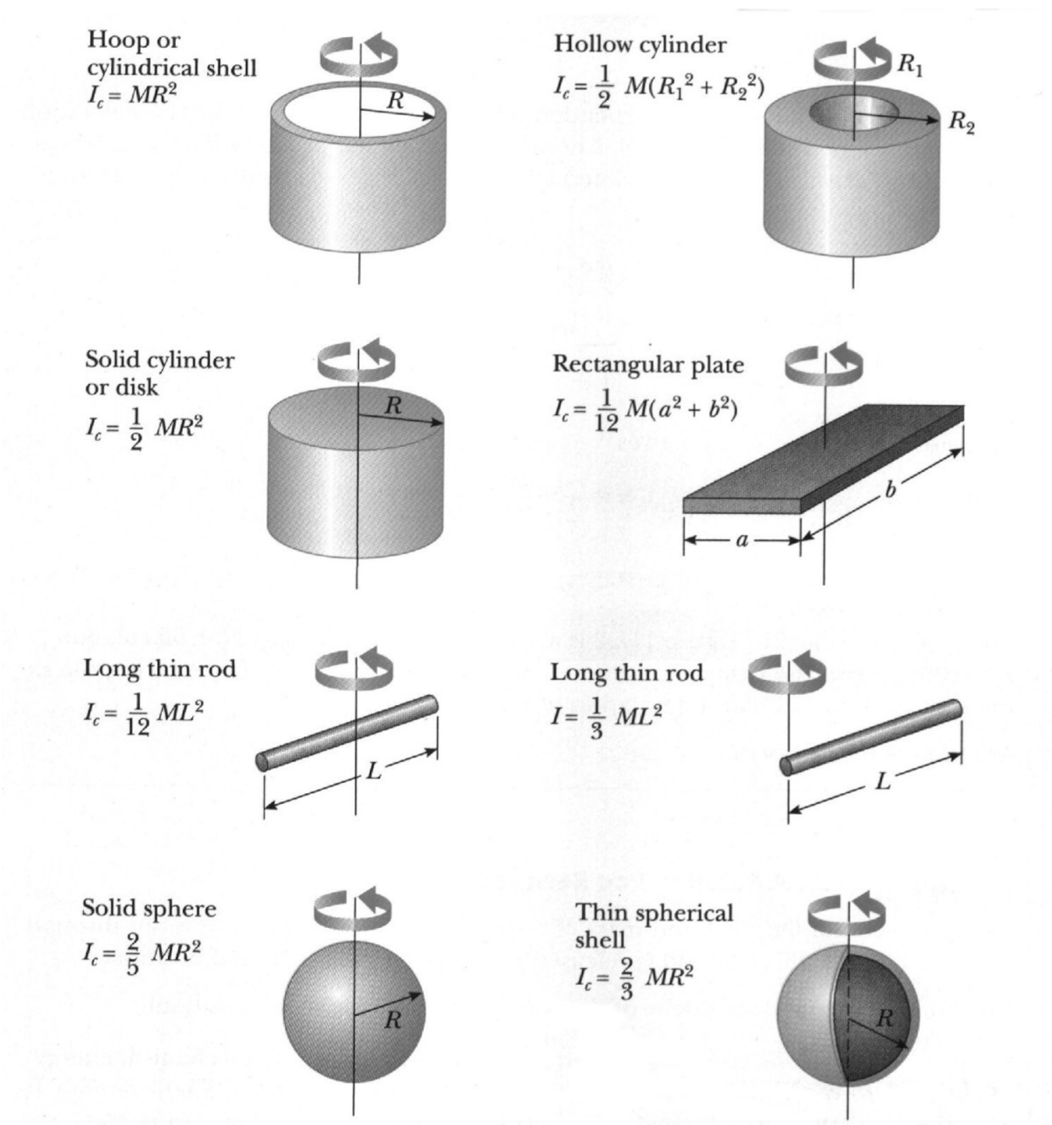


$$dm = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$I = \int_0^R r^2 \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 \cdot dr = \sigma 2\pi \frac{R^4}{4}$$

$$I = \sigma \pi R^2 \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} MR^2$$

Del mismo modo, se pueden calcular:



En general:
$I = \gamma ML^2$

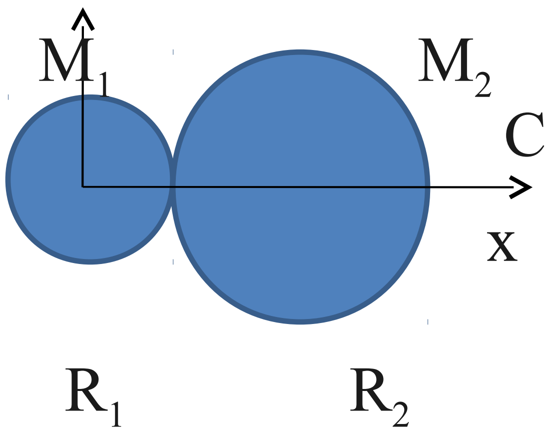
Centro de masa de un cuerpo rígido

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$

Si hay más de un cuerpo, a saber A y B:

$$\vec{R} = \frac{M_A\vec{R}_A + M_B\vec{R}_B}{M_A + M_B}$$

Ejemplo:

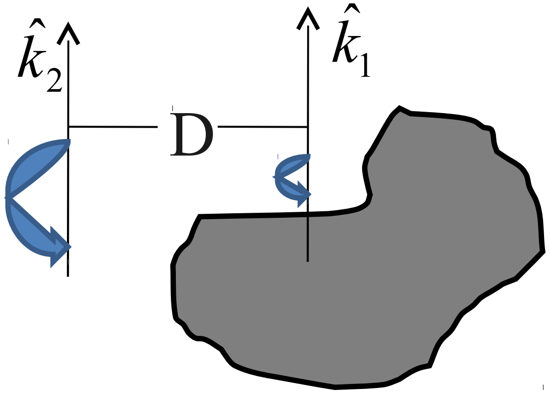


con $M_1 / R_1^2 = M_2 / R_2^2$

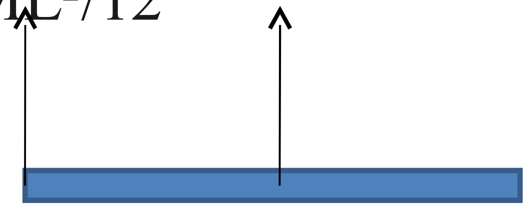
Calcule el centro de masa

Teorema de los ejes paralelos

$$I_2 = I_1 + MD^2$$



Ejemplo: barra que gira por un extremo. $I_{cm} = ML^2/12$



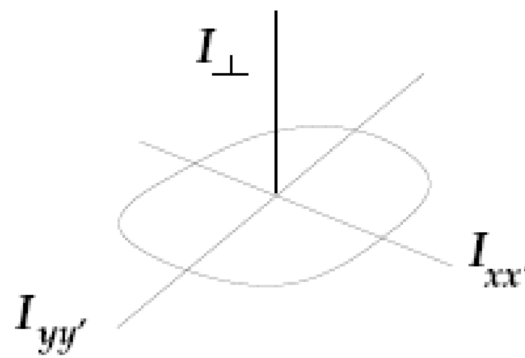
$$I_2 = I_{cm} + M(L/2)^2$$

$$I_2 = ML^2/12 + M(L/2)^2 = ML^2/3$$

Teorema de los ejes perpendiculares

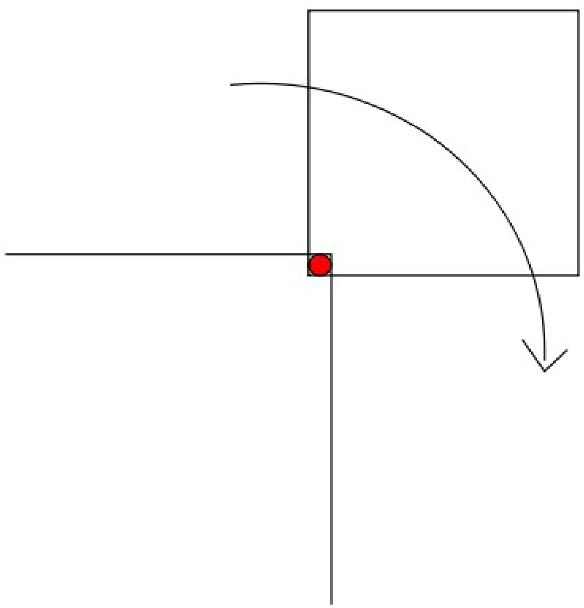
- Viene de escribir el momento de inercia en coordenadas cartesianas:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) = I_{yy} + I_{xx}$$



Ejemplo: calcule el momento de inercia de un aro con respecto a un diámetro

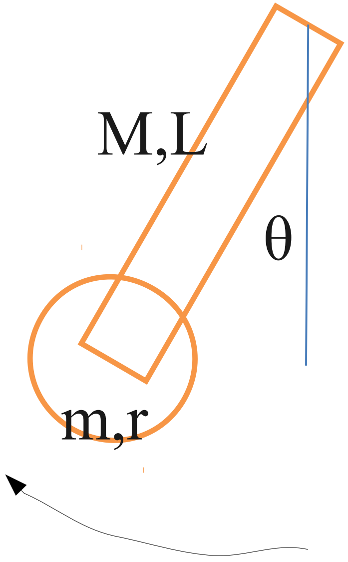
Abordemos un ejemplo simple. Una placa cuadrada de lados de longitud a está pivoteada en una de sus esquinas mediante un eje perpendicular al su plano. Inicialmente la placa se suelta del reposo como se indica en la figura de más abajo. Queremos saber su velocidad angular una vez que a girado en 90 grados.



Ej: energía cinética y potencial en sistema complejo

$$I = \frac{ML^2}{3} + \frac{mR^2}{2} + mL^2$$

$$K = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2$$



$$r_{cm} = \frac{\frac{ML}{2} + mL}{M + m}$$

$$E = K + U$$

$$U = (M + m) \cdot g \cdot r_{cm} (1 - \cos\theta)$$

$$U = (\frac{ML}{2} + mL) \cdot g \cdot (1 - \cos\theta)$$

Tarea:

- Plazo máximo de entrega martes 21 de septiembre a las 10AM la secretaria académica de física (o en el buzón de la misma secretaria) primer piso del edificio de fisica.
- Una cuerda es enrollada a una polea de masa m y radio r. El extremo libre de la cuerda es conectado a un bloque de masa M. El bloque comienza a deslizar desde el reposo y desliza hacia abajo por un plano inclinado que tiene un angulo alpha con la horizontal. El coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado es mu. Determinar:
- (a) La velocidad del bloque como función del desplazamiento del bloque sobre el plano inclinado.
- (b) La magnitud de la aceleración del bloque.
- (c) El tiempo que tarda el bloque en hacer que la polea de dos vueltas.