# Auxiliar Unidad 5A:Oscilaciones

Daniela Opitz

12 de mayo de 2010

## 1. Ejercicios

### 1.1. Condiciones Iniciales

Considere la siguiente solucion para la posicion de una partcula en un oscilador armonico, $x(t) = Acos(wt - \phi_o)$.Si inicialmente la partícula se suelta desde $x_0$ con velocidad $v_0$. Demuestre que las constantes A y $\phi$, están determinadas por: $tan(\phi) = \frac{vo}{wx_0}$ y $A^2 = x_0^2 + (\frac{v_0}{w})^2$. En particular analice los casos en que $x_0 = 0$ y $v_0 \neq 0$ y $x_0 \neq 0$ y $v_0 = 0$.

Impongo las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 = Acos(-\phi) = Acos(\phi) \tag{1}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -wAsen(-\phi) = Awsen(\phi) \tag{2}$$

Luego (2)/(1)

$$\frac{wsen(\phi)}{cos(\phi)} = \frac{v_0}{x_0} \Longrightarrow \tag{3}$$

$$tan(\phi) = \frac{v_0}{wx_0} \tag{4}$$

Y elevando (1) y (2) al cuadrado y sumando se tiene:

$$A^2(sen^2(\phi) + cos^2(\phi)) = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2 \Longrightarrow A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2 \tag{5}$$

#### 1.1.1. Para $x_0 = 0$ y $v_0 \neq 0$

De (4) $\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$ y de (5)$\Rightarrow A = \frac{v_0}{w}$. Luego $x(t) = \frac{v_0}{w}cos(wt - \frac{\pi}{2})$

#### 1.1.2. Para $x_0 \neq 0$ y $v_0 = 0$

De (4) $\Rightarrow \phi = 0$ y de (5)$\Rightarrow A = x_0$. Luego $x(t) = x_0cos(wt)$

## 1.2. Ecuaciones de la forma: $\ddot{x} + xw^2 + b = 0$

Considere la eq. mov. del sistema $\ddot{x} + xw^2 + b = 0$, con $w$ y $b$ constantes conocidas. Demuestre que existe la sustitucion $x(t) = z(t) + c$ para la cual $\ddot{z}^2 + w^2 = 0$.Determine la constante c.

Sea:

$$x(t) = z(t) + c \tag{6}$$

$$\dot{x}(t) = \dot{z}(t) \tag{7}$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{z}(t) \tag{8}$$

Reemplazando lo anterior en $\ddot{x} + xw^2 + b = 0$, nos queda:

$$\ddot{z}(t) + w^2(z + c) + b = 0 \tag{9}$$

$$\ddot{z}(t) + w^2 z + \left[w^2 c + b\right] = 0 \tag{10}$$

Donde impongo que :

$$w^2 c + b = 0 \tag{11}$$

Lo que implica que:

$$c = \frac{-b}{w^2} \tag{12}$$

Ahora la solucion de $\ddot{z}^2 + w^2 = 0$ es de la forma:

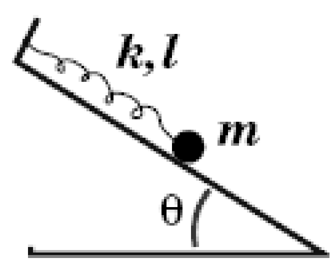
$$z(t) = Acos(wt + \phi) \tag{13}$$

Ahora volviendo a la variable x(t):

$$x(t) = Acos(wt + \phi) - \frac{b}{w^2} \tag{14}$$

## 1.3. Resorte en plano inclinado

El sistema de la figura consiste en un oscilador inclinado formado por un resorte ideal $(k, l_0)$con una carga de masa m en el extremo. El ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal es $\theta$.Determine la posición de equilibrio, la frecuencia de oscilación y la posición en función del tiempo.



Sumando todas las fuerzas que actuan en el eje x:

$$-k(x-l_0)+mgsin(\theta)=m\ddot{x} \tag{15}$$

Que arreglandola nos queda:

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x-\frac{k}{m}l_0-gsin(\theta)=0 \tag{16}$$

En el equilibrio, $\ddot{x}=0$, luego:

$$\frac{k}{m}x_{eq}-\frac{k}{m}l_0-gsin(\theta)=0 \tag{17}$$

$$x_{eq}=l_0+\frac{mg}{k}gsin(\theta) \tag{18}$$

Para encontrar la frecuencia de oscilacion basta identificar los terminos de la ecuacion (16), luego:

$$w^2=\frac{k}{m} \tag{19}$$

Para encontrar la posicion en el tiempo, notamos que la ecuacion (16) tiene la misma forma que $\ddot{x}+xw^2+b=0$, la ecuación que resolvimos en el problema 2 cuya solución era:

$$x(t)=Acos(wt+\phi)-\frac{b}{w^2} \tag{20}$$

Para este caso:

$$b=-\frac{k}{m}l_0-gsin(\theta) \tag{21}$$

Por lo tanto:

$$-\frac{b}{w^2}=l_0+\frac{mg}{k}sin(\theta) \tag{22}$$

Finalmente la solucion es:

$$x(t)=Acos(wt+\phi)+l_0+\frac{mg}{k}sin(\theta) \tag{23}$$