

Producto vectorial

1

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = & (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} \\ & (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} \\ & (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} \end{aligned}$$

Algunas propiedades:

$$1. \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$2. (\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

$$3. \frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d}{dt}\vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d}{dt}\vec{B}$$

$$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

1. Encuentre un vector unitario $\hat{A}$ que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = 2\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$ $\vec{v} = \hat{x} - \hat{y} + \hat{z}$
 ¿Cuántos vectores unitarios existen con esa propiedad?

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \hat{x}(1-1) - \hat{y}(2-(-1)) + \hat{z}(-2-1) \\ \vec{u} \times \vec{v} &= -3\hat{y} - 3\hat{z} \end{aligned}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = 9 + 9 = 2 \cdot 9$$

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{-3(\hat{y} + \hat{z})}{3\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{-1}{\sqrt{2}}(\hat{y} + \hat{z})}}$$

Si tomamos el vector en el sentido opuesto también se cumple la "perpendicularidad".

¿Cuántos vectores unitarios cumplen esa propiedad? : 2

2. Sea $\vec{A} = \hat{x} + 3\hat{z} - 2\hat{y}$. Encuentre un vector en el plano $\hat{x}, \hat{y}$ que sea perpendicular a $\vec{A}$.

Solución : Para que un vector pertenezca al plano $\hat{x}, \hat{y}$ debe ser $\perp$ a $\hat{z}$, luego $\vec{A} \times \hat{z}$ es un vector que cumple lo pedido.

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{x}(-2) - \hat{y} \cdot 1 + \hat{z} \cdot 0$$

$$\underline{\underline{-2\hat{x} - \hat{y}}}$$

Momento angular

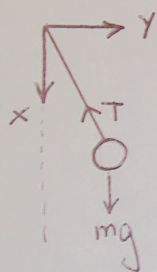
3

$$\frac{\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}}{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0} \quad \vec{L} = \underbrace{m\dot{\vec{r}} \times \vec{v}}_0 + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Ejemplo:

Consideremos un péndulo simple de masa m , que cuelga de una cuerda ideal de largo R .



$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times r\dot{\theta}\hat{\theta} = mR^2\dot{\theta}\hat{z}$$

$$\vec{L} = mR^2\ddot{\theta}\hat{z} \quad (\text{ya que el radio no varía})$$

Por otro lado el torque sobre la masa m es:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times (m\vec{g} + \vec{T}) = \vec{r} \times m\vec{g} + \vec{r} \times \vec{T}$$

Pero $\vec{T}$ es paralelo al vector posición, luego $\vec{r} \times \vec{T} = 0$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} = (R\cos\theta\hat{x} + R\sin\theta\hat{y}) \times mg\hat{x}$$

$$\vec{\tau} = -R\sin\theta \cdot mg\hat{z}$$

$$\vec{L} = \vec{\tau} \quad mR^2\alpha\hat{z} = -R\sin\theta mg\hat{z}$$

$$\left| \alpha = -\frac{g}{R}\sin\theta \right|$$

El torque total con respecto al origen es

$$Mg x \hat{y} + mg \frac{L}{2} \sin \alpha \hat{y} - F_p L \cos \alpha \hat{y} = \vec{0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{El torque} \\ \text{neto debe} \\ \text{ser nulo} \end{array} \right.$$

$$F_p = \frac{g \left(Mx + m \frac{L}{2} \sin \alpha \right)}{L \cos \alpha}$$

La fuerza de roce debe ser (pues $f_r = F_p$)

$$f_r = \frac{g (2Mx + mL \sin \alpha)}{2L \cos \alpha}$$

El valor máximo de la fuerza de roce se obtiene cuando la persona sube hasta la parte más alta de la escalera ($x = L \sin \alpha$)

$$f_r = g \left(M + \frac{m}{2} \right) \tan \alpha$$

La fuerza de roce f_r debe ser menor que el máximo posible, que es $\mu_e F_N$, o sea, se debe cumplir la relación

$$g \left(M + \frac{m}{2} \right) \tan \alpha \leq \mu_e F_N = \mu_e (M + m) g$$

De aquí se deduce que el menor valor posible que puede tener μ_e para que la escalera no resbale es $\mu_e^{\min} = \frac{2M + m}{2(M + m)} \tan \alpha$

Centro de masa

5

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$M = \sum_i m_i$$

Para un sistema de partículas se tiene

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}$$

$\vec{F}_i$ = Suma de fuerzas sobre i .

$\vec{F}_{ij}$ = Fuerza que ejerce la partícula j sobre i

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}}_0$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$M \left(\frac{\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i}{M} \right) = \sum_i \vec{F}_i$$

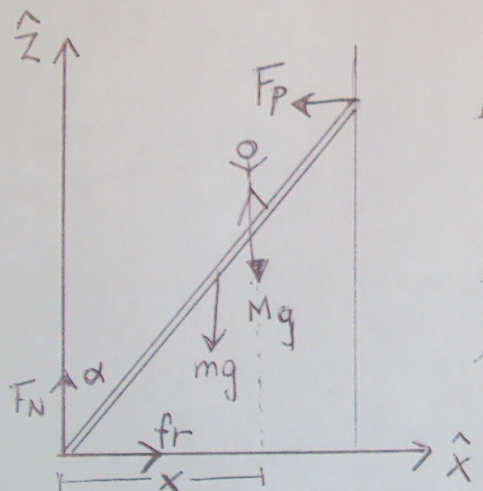
$$\frac{\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i}{M} = \ddot{\vec{r}}_{cm}$$

$$\boxed{M \ddot{\vec{r}}_{cm} = \vec{F}_{TOTAL}}$$

Problema

6

Una escalera de masa m y largo L , se encuentra apoyada contra una pared lisa (o sea no hay roce entre la escalera y la pared), formando un ángulo α con ella. Una persona de masa M se encuentra sobre la escalera. ¿Cuál es el mínimo coeficiente de roce estático que debe existir entre el suelo y la escalera, para que la escalera no resbale, independientemente de la altura a la que se encuentra la persona?



x es la distancia horizontal entre el origen y la persona.

Las fuerzas que actúan sobre el sistema.

- i) El peso de la escalera
- ii) El peso de la persona
- iii) La normal de la pared sobre la escalera
- iv) La normal del suelo sobre la escalera
- v) El roce del suelo sobre la escalera

$$-mg\hat{z} - Mg\hat{z} - F_p\hat{x} + F_N\hat{z} + f_r\hat{x} = \vec{0}$$

$$F_N = (m+M)g$$

$$f_r = F_p$$

El sistema está en equilibrio