

## EL57A – Sistemas Eléctricos de Potencia

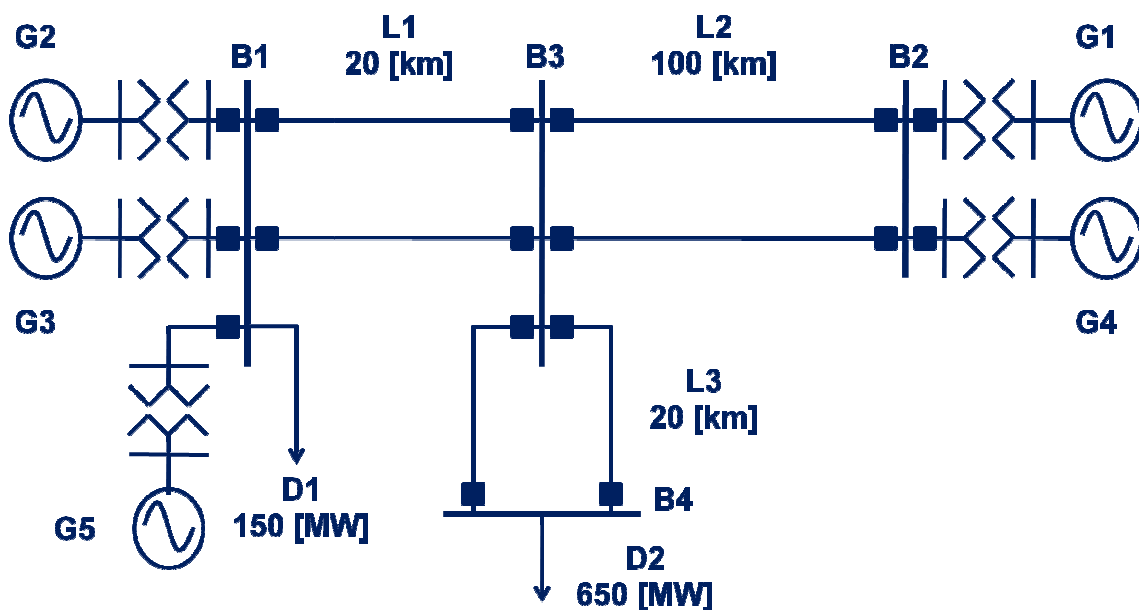
### Solución Auxiliar 8 – Despacho Económico

## Problema 1

El sistema en estudio de la figura 1 (de 220 [kV] nominales) está compuesto por 5 unidades generadoras cuyas características se entregan en la siguiente tabla:

| Central   | Tecnología | $P_{\text{MIN}}$ [MW] | $P_{\text{MAX}}$ [MW] |
|-----------|------------|-----------------------|-----------------------|
| <b>G1</b> | Embalse    | 0                     | 350                   |
| <b>G2</b> | Gas        | 100                   | 250                   |
| <b>G3</b> | Gas        | 80                    | 160                   |
| <b>G4</b> | Carbón     | 100                   | 280                   |
| <b>G5</b> | Eólica     | 0                     | 60                    |

### Tabla 1: Datos de las centrales generadoras



### Figura 1: SEP en estudio

La tensión en las barras de AT de los transformadores elevadores es de 230 [kV], y todas las líneas del sistema tienen una impedancia por circuito de  $0,06 + j0,38$  [ $\Omega/\text{km}$ ]. Los generadores operan todos con factor de potencia 0,85. Considere los transformadores ideales.

Las características de costos de las centrales son las siguientes:

- **G1, Embalse.**  $V$  es el volumen turbinado en una hora, medido en  $[m^3/h]$ .

$$\text{Costo de oportunidad del agua turbinada: } C(V) = 0,0075 \cdot V + 3,2 \cdot 10^{-9} \cdot V^2 \left[ \frac{US\$}{h} \right]$$

$$\text{Rendimiento del agua turbinada: } 0,9 \left[ \frac{MW}{m^3/s} \right]$$

- **G2, Térmica a gas.**  $P$  en  $[MW]$ .

$$\text{Costo declarado de operación con gas: } C^G(P) = 20 \cdot P + 0,055 \cdot P^2 \left[ \frac{US\$}{h} \right]$$

$$\text{Costo declarado de operación con diesel: } C^D(P) = 90 \cdot P + 0,060 \cdot P^2 \left[ \frac{US\$}{h} \right]$$

- **G3, Térmica a gas.**  $P$  en  $[MW]$ .

$$\text{Costo declarado de operación con gas: } C^G(P) = 25 \cdot P \left[ \frac{US\$}{h} \right]$$

- **G4, Térmica a carbón.**  $P$  en  $[MW]$ .  $H$  en  $[MBTU]$ .

$$\text{Consumo específico: } \frac{\partial H}{\partial P} = 0,006 \cdot P + 7,128 \left[ \frac{MBTU}{MWh} \right] \quad H(0) = 0$$

$$\text{Costo del carbón: } 4,6 \left[ \frac{US\$}{MBTU} \right]$$

- **G5, Eólica**

Se espera que para la hora del estudio pueda generar 15  $[MW]$ .

Para las partes b), c), d) y f) verifique las condiciones que permiten asegurar que la solución encontrada es óptima.

- Calcule los costos variables y costos incrementales de todas las centrales.
- Realice un despacho uninodal de las centrales, si G2 se encuentra operando con gas. Calcule el costo marginal del sistema.
- Debido a los recortes de gas, G2 se ve obligado a generar con diesel. Realice el despacho uninodal para este caso y calcule el costo marginal del sistema.
- Afortunadamente para el bolsillo de los consumidores se ha recuperado por completo el suministro de gas. Adicionalmente, las intensas lluvias han hecho que la central G1 opere con su embalse en vertimiento. Realice el despacho uninodal en estas condiciones y determine el costo marginal del sistema.
- Plantee el problema de despacho con pérdidas para G1 sin vertimiento y G2 operando con gas. Para ello, encuentre una expresión para las pérdidas en función de las generaciones de cada central y escriba el sistema de ecuaciones no lineales a resolver.
- El resultado del problema de despacho con pérdidas es  $P_1 = 130,1180 [MW]$ ,  $P_2 = 236,2309 [MW]$ ,  $P_3 = 160 [MW]$ ,  $P_4 = 280 [MW]$ ,  $P_5 = 15 [MW]$ . Encuentre el costo marginal del sistema.

**Parte a)**

Para la central G1:

$$V \left[ \frac{m^3}{h} \right] = \frac{V}{3600} \left[ \frac{m^3}{s} \right]$$
$$P[MW] = 0,9 \left[ \frac{MW}{m^3/s} \right] \cdot \frac{V}{3600} \left[ \frac{m^3}{s} \right] = \frac{V}{4000} [MW] \rightarrow V = 4000 \cdot P$$
$$C_1(P_1) = 0,0075 \cdot (4000P) + 3,2 \cdot 10^{-9} \cdot (4000P)^2$$
$$C_1(P_1) = 30 \cdot P_1 + 0,0512 \cdot P_1^2 [US\$/h]$$
$$C.Inc_1(P_1) = \frac{\partial C_1(P_1)}{\partial P_1} = 30 + 0,1024 \cdot P_1 [US\$/MWh]$$

Para la central G2:

$$C_{2Gas}(P_2) = 20 \cdot P_2 + 0,055 \cdot P_2^2 [US\$/h]$$
$$C.Inc_{2Gas}(P_2) = 20 + 0,11 \cdot P_2 [US\$/MWh]$$
$$C_{2Diesel}(P_2) = 90 \cdot P_2 + 0,06 \cdot P_2^2 [US\$/h]$$
$$C.Inc_{2Diesel}(P_2) = 90 + 0,12 \cdot P_2 [US\$/MWh]$$

Para la central G3:

$$C_3(P_3) = 25 \cdot P_3 [US\$/h]$$
$$C.Inc_3(P_3) = 25 [US\$/MWh]$$

Para la central G4:

$$\frac{\partial H}{\partial P_4} = 0,006 \cdot P_4 + 7,128 \quad \& \quad H(0) = 0$$
$$H(P_4) = 0,003 \cdot P_4^2 + 7,128 \cdot P_4 [MBTU/h]$$
$$C_4(P_4) = 4,6 \left[ \frac{US\$}{MBTU} \right] \cdot H(P_4) \left[ \frac{MBTU}{h} \right]$$
$$C_4(P_4) = 32,7888 \cdot P_4 + 0,0138 \cdot P_4^2 [US\$/h]$$
$$C.Inc_4(P_4) = 32,7888 + 0,0276 \cdot P_4 [US\$/MWh]$$

Para la central G5:

$$C_5(5) = 0 [US\$/h]$$
$$C.Inc_5(P_5) = 0 [US\$/MWh]$$

El costo de oportunidad del viento es nulo, por lo que G5 simplemente debe entregar toda la potencia que el viento le permita generar.

### Parte b)

Recordemos la solución del problema de optimización con costos cuadráticos y sin límites de generación.

$$C_i(P_i) = \alpha_i + \beta_i \cdot P_i + \gamma_i \cdot P_i^2$$

$$\lambda = \frac{P_D + \sum_{i=1}^{NG} \frac{\beta_i}{2\gamma_i}}{\sum_{i=1}^{NG} \frac{1}{2\gamma_i}} \quad (\#)$$

$$P_i = \frac{\lambda - \beta_i}{2\gamma_i} \quad (\#\#)$$

Analizando el problema, vemos que la central eólica tiene costos nulos, por lo que descontamos su generación de la demanda. Además, la central G3 tiene costos lineales. De las condiciones de KKT, si el costo marginal del sistema es mayor que el costo incremental de G3, esta se despachará en su máximo; si el costo marginal del sistema resulta menor que el costo incremental de G3, se despacha en su mínimo; y si el costo marginal del sistema es igual al costo incremental de G3, el despacho estará en el intervalo  $[P_{\min}, P_{\max}]$ . Como a priori no conocemos el costo marginal del sistema, supondremos que es mayor a 25 [US\$/MWh], despachando G3 a su máximo (lo descontamos de la demanda). De esta forma:

$$\begin{aligned} P_D &= 800 - 15 - 160 = 625 \text{ [MW]} \\ \lambda &= \frac{625 + \frac{30}{0,1024} + \frac{20}{0,11} + \frac{32,7888}{0,0276}}{\frac{1}{0,1024} + \frac{1}{0,11} + \frac{1}{0,0276}} = 41,9832 \text{ [US$/MWh]} \\ P_1 &= \frac{41,9832 - 30}{0,1024} = 117,02 \text{ [MW]} \\ P_2 &= \frac{41,9832 - 20}{0,11} = 199,85 \text{ [MW]} \\ P_4 &= \frac{41,9832 - 32,7888}{0,0276} = 333,13 \text{ [MW]} \end{aligned}$$

Cuando no se respeta algún límite de generación realizamos una nueva iteración del problema, suponiendo que la central con problemas opera en su límite. En este caso,  $P_4 = 280$  [MW], y el problema se resuelve para  $P_1$  y  $P_2$ .

$$\begin{aligned} P_D &= 800 - 15 - 160 - 280 = 345 \text{ [MW]} \\ \lambda &= \frac{345 + \frac{30}{0,1024} + \frac{20}{0,11}}{\frac{1}{0,1024} + \frac{1}{0,11}} = 43,4750 \text{ [US$/MWh]} \end{aligned}$$

$$P_1 = \frac{43,4750 - 30}{0,1024} = 131,59 [MW]$$

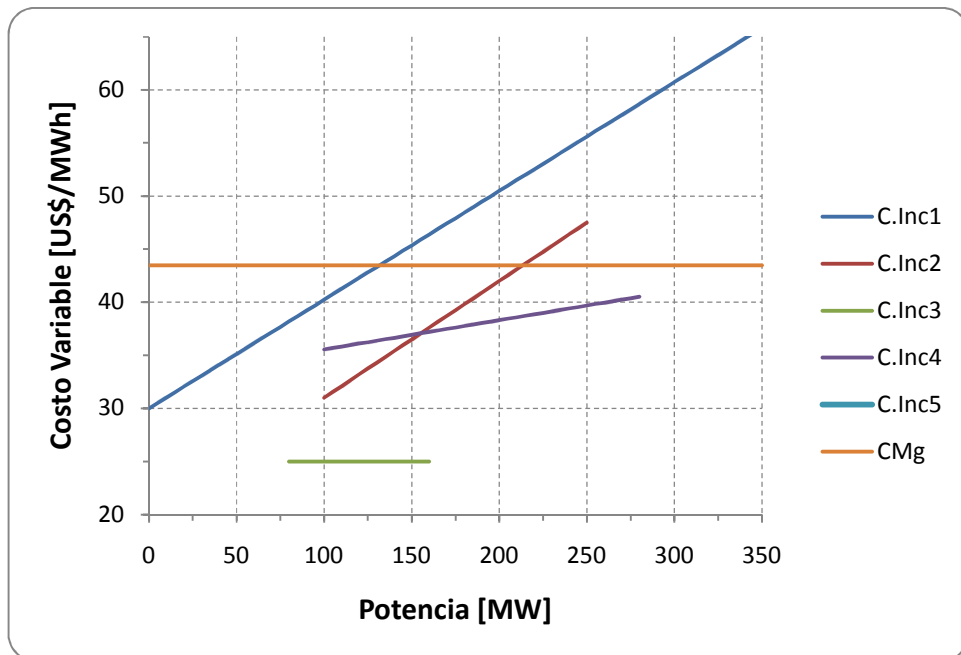
$$P_2 = \frac{43,4750 - 20}{0,11} = 213,41 [MW]$$

En este caso respetamos todos los límites de generación. La siguiente tabla resume los resultados del despacho y la verificación de las condiciones de KKT:

| Central | P [MW] | C.Inc(P) [US\$/MWh] | CMg nodo [US\$/MWh] | Solución | ¿cumple KKT?    |
|---------|--------|---------------------|---------------------|----------|-----------------|
| G1      | 131,59 | 43,4748             | 43,4750             | Interior | Sí, CMg = C.Inc |
| G2      | 213,41 | 43,4751             | 43,4750             | Interior | Sí, CMg = C.Inc |
| G3      | 160    | 25                  | 43,4750             | Máximo   | Sí, CMg > C.Inc |
| G4      | 280    | 40,5168             | 43,4750             | Máximo   | Sí, CMg > C.Inc |
| G5      | 15     | 0                   | 43,4750             | Máximo   | Sí, CMg > C.Inc |

Notar que el supuesto de CMg para despachar G3 fue acertado.

Se puede realizar una verificación gráfica, dibujando los costos incrementales de cada central y el costo marginal del sistema. El punto donde la recta (horizontal) del costo marginal corta la recta de costos incrementales corresponde a la potencia de dicha central. Si no se cortan, tenemos dos casos: si el CMg queda sobre la recta de costos incrementales, esa central se despacha a máximo; si el CMg queda por debajo, la central será despachada a mínimo.



### Parte c)

La central G2 pasa a operar con diesel, subiendo sus costos. Es de esperar que los costos del sistema completo suban, por lo cual resulta natural considerar que las centrales G3 y G4 sigan despachadas en su máximo. Del mismo modo, G5 sigue entregando 15 [MW].

$$\begin{aligned}P_D &= 800 - 15 - 160 - 280 = 345 \text{ [MW]} \\ \lambda &= \frac{345 + \frac{30}{0,1024} + \frac{90}{0,12}}{\frac{1}{0,1024} + \frac{1}{0,12}} = 76,6878 \text{ [US$/MWh]} \\ P_1 &= \frac{76,6878 - 30}{0,1024} = 455,94 \text{ [MW]} \\ P_2 &= \frac{76,6878 - 90}{0,12} = -110,94 \text{ [MW]}\end{aligned}$$

Claramente esta solución no es factible. Llevemos  $P_2$  a mínimo (notar que podríamos llevar  $P_1$  a máximo pero aún así no se respetaría la potencia mínima de G2).  $P_2 = 100$  [MW] y lo descontamos de la demanda.

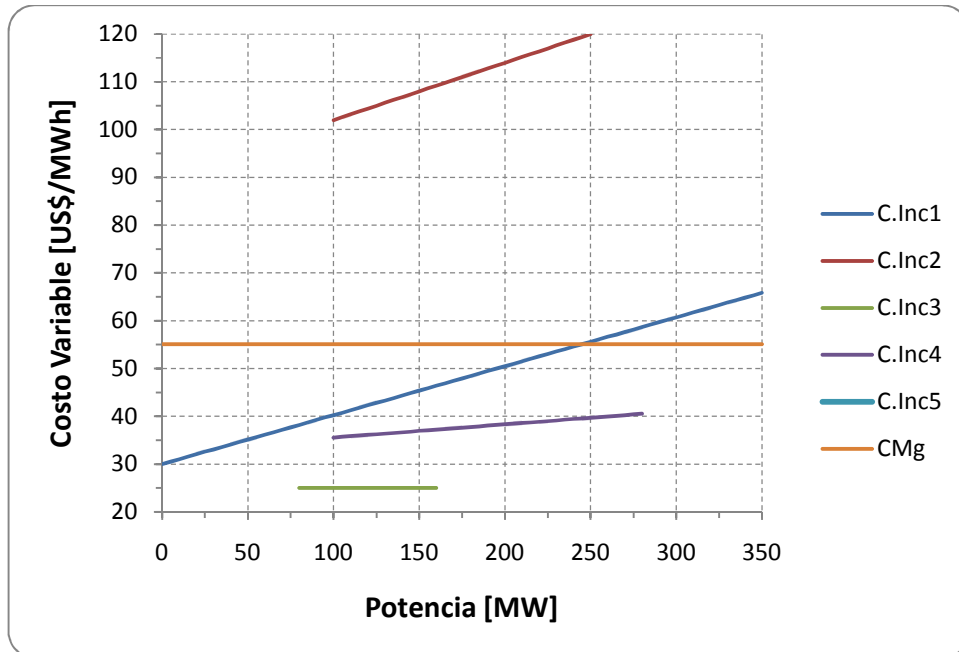
$$\begin{aligned}P_D &= 800 - 15 - 160 - 280 - 100 = 245 \text{ [MW]} \\ \lambda &= \frac{245 + \frac{30}{0,1024}}{\frac{1}{0,1024}} = 55,0880 \text{ [US$/MWh]} \\ P_1 &= \frac{55,0880 - 30}{0,1024} = 245 \text{ [MW]}\end{aligned}$$

Esta solución es factible, y los resultados los vemos en la tabla resumen:

| Central | P [MW] | C.Inc(P) [US\$/MWh] | CMg nodo [US\$/MWh] | Solución | ¿cumple KKT?    |
|---------|--------|---------------------|---------------------|----------|-----------------|
| G1      | 245    | 55,0880             | 55,0880             | Interior | Sí, CMg = C.Inc |
| G2      | 100    | 102                 | 55,0880             | Mínimo   | Sí, CMg < C.Inc |
| G3      | 160    | 25                  | 55,0880             | Máximo   | Sí, CMg > C.Inc |
| G4      | 280    | 40,5168             | 55,0880             | Máximo   | Sí, CMg > C.Inc |
| G5      | 15     | 0                   | 55,0880             | Máximo   | Sí, CMg > C.Inc |

Se observa el incremento de los costos marginales respecto a la parte b).

De manera gráfica:



#### Parte d)

Al operar en vertimiento, el agua debe “botarse” sin turbinarla, por lo tanto su costo de oportunidad se va a cero. De esta forma el embalse opera como si fuera una central de pasada (el agua que no se usa no puede ser guardada, ya que se ha sobrepasado el límite del embalse) y sus costos son nulos. Luego, G1 opera a máxima capacidad,  $P_1 = 350$  [MW] y lo descontamos de la demanda.

Ahora se espera que los costos bajen. Nuevamente debemos realizar una apuesta con G3, y supondremos que el costo marginal del sistema será superior a 25 [US\$/MWh], haciendo así  $P_3 = 160$  [MW].

$$P_D = 800 - 15 - 160 - 350 = 275 \text{ [MW]}$$

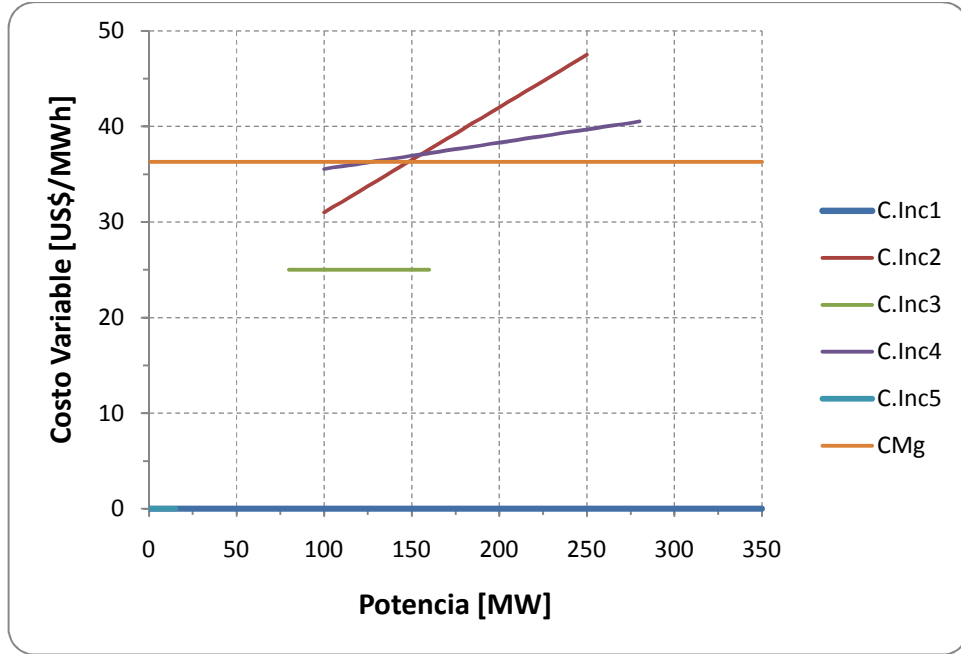
$$\lambda = \frac{275 + \frac{20}{0,11} + \frac{32,7888}{0,0276}}{\frac{1}{0,11} + \frac{1}{0,0276}} = 36,2912 \text{ [US$/MWh]}$$

$$P_2 = \frac{36,2912 - 20}{0,11} = 148,10 \text{ [MW]}$$

$$P_4 = \frac{36,2912 - 32,7888}{0,0276} = 126,90 \text{ [MW]}$$

Se observa la baja de precios respecto a la situación planteada en la parte b).

| Central | P [MW] | C.Inc(P) [US\$/MWh] | CMg nodo [US\$/MWh] | Solución | ¿cumple KKT?    |
|---------|--------|---------------------|---------------------|----------|-----------------|
| G1      | 350    | 0                   | 36,2912             | Máximo   | Sí, CMg > C.Inc |
| G2      | 148,10 | 36,2910             | 36,2912             | Interior | Sí, CMg = C.Inc |
| G3      | 160    | 25                  | 36,2912             | Máximo   | Sí, CMg > C.Inc |
| G4      | 126,90 | 36,2912             | 36,2912             | Interior | Sí, CMg = C.Inc |
| G5      | 15     | 0                   | 36,2912             | Máximo   | Sí, CMg > C.Inc |



### Parte e)

Denotemos por el momento las pérdidas del sistema como  $P_L(\vec{P})$ . Considerando que la generación debe suplir la demanda y las pérdidas, el problema a resolver (sin considerar límites de generación, ya que podemos iterar si alguna de estas restricciones no se cumple) será:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \left\{ C(\vec{P}) = \sum_{i=1}^{NG} C_i(P_i) \right\} \\ \text{s. a. } & P_D + P_L(\vec{P}) - \sum_{i=1}^{NG} P_i = 0 \end{aligned}$$

Se modelará las pérdidas de la forma  $3RI_L^2$ . Calculemos las resistencias por fase de cada una de las líneas de doble circuito:



$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot 20[km] \cdot 0,06[\Omega/km] = 0,6 [\Omega]$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot 100[km] \cdot 0,06[\Omega/km] = 3 [\Omega]$$

$$R_3 = \frac{1}{2} \cdot 20[km] \cdot 0,06[\Omega/km] = 0,6 [\Omega]$$

Ahora las corrientes por cada una de las líneas:

$$|I| = \frac{|S_{3F}|}{\sqrt{3} \cdot V_{ff}} = \frac{P_{3F}}{\sqrt{3} \cdot V_{ff} \cdot \cos\varphi}$$

$$I_1 [A] = \frac{(P_2 + P_3 + P_5 - 150)[MW]}{0,85 [MW/MVA] \cdot 0,23[MV]} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$I_2 [A] = \frac{(P_1 + P_4)[MW]}{0,85 [MW/MVA] \cdot 0,23[MV]} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$I_3 [A] = I_1[A] + I_2[A] = \frac{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - 150)[MW]}{0,85 [MW/MVA] \cdot 0,23[MV]} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Luego, las pérdidas en [MW] toman la forma:

$$P_L(\vec{P}) = 3R_1 I_1^2 + 3R_2 I_2^2 + 3R_3 I_3^2$$

$$P_L(\vec{P}) = \frac{\left[ 0,6 \cdot \left( \frac{(P_2 + P_3 + P_5 - 150)}{0,85 \cdot 0,23} \right)^2 + 3,0 \cdot \left( \frac{(P_1 + P_4)}{0,85 \cdot 0,23} \right)^2 + 0,6 \cdot \left( \frac{(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - 150)}{0,85 \cdot 0,23} \right)^2 \right]}{10^6}$$

$$P_L(\vec{P}) = \frac{0,6 \cdot (P_2 + P_3 + P_5 - 150)^2 + 3,0 \cdot (P_1 + P_4)^2 + 0,6 \cdot (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - 150)^2}{38220,25} [MW]$$

El Lagrangeano del problema toma la forma:

$$L(\vec{P}, \lambda) = \sum_{i=1}^{NG} C_i(P_i) + \lambda \cdot \left( P_D + P_L(\vec{P}) - \sum_{i=1}^{NG} P_i \right)$$

Y el sistema de ecuaciones no lineales a resolver será:

$$\frac{\partial L(\vec{P}, \lambda)}{\partial P_i} = \frac{\partial C_i(P_i)}{\partial P_i} - \lambda \cdot \left( 1 - \frac{\partial P_L(\vec{P})}{\partial P_i} \right) = 0 \quad \forall i = 1 \dots NG$$

$$\frac{\partial L(\vec{P}, \lambda)}{\partial \lambda} = P_D + P_L(\vec{P}) - \sum_{i=1}^{NG} P_i = 0$$

Como el problema con pérdidas no debe andar muy lejos de la solución sin pérdidas (parte b), supondremos  $P_3 = 160$  [MW],  $P_4 = 280$  [MW],  $P_5 = 15$  [MW]. Luego, las variables de optimización son  $P_1$  y  $P_2$ .

$$P_L(P_1, P_2) = \frac{0,6 \cdot (P_2 + 25)^2 + 3,0 \cdot (P_1 + 280)^2 + 0,6 \cdot (P_1 + P_2 + 305)^2}{38220,25} \text{ [MW]}$$

$$\frac{\partial C_1(P_1)}{\partial P_1} = 30 + 0,1024 \cdot P_1$$

$$\frac{\partial C_2(P_2)}{\partial P_2} = 20 + 0,11 \cdot P_2$$

$$\frac{\partial P_L(P_1, P_2)}{\partial P_1} = \frac{6 \cdot (P_1 + 280) + 1,2 \cdot (P_1 + P_2 + 305)}{38220,25} = \frac{7,2 \cdot P_1 + 1,2 \cdot P_2 + 2046}{38220,25}$$

$$\frac{\partial P_L(P_1, P_2)}{\partial P_2} = \frac{1,2 \cdot (P_2 + 25) + 1,2 \cdot (P_1 + P_2 + 305)}{38220,25} = \frac{1,2 \cdot P_1 + 2,4 \cdot P_2 + 396}{38220,25}$$

Entonces las ecuaciones del sistema no lineal son:

$$(1) \frac{\partial L(\vec{P}, \lambda)}{\partial P_1}: \quad 30 + 0,1024 \cdot P_1 = \lambda \cdot \left(1 - \frac{7,2 \cdot P_1 + 1,2 \cdot P_2 + 2046}{38220,25}\right)$$

$$(2) \frac{\partial L(\vec{P}, \lambda)}{\partial P_2}: \quad 20 + 0,11 \cdot P_2 = \lambda \cdot \left(1 - \frac{1,2 \cdot P_1 + 2,4 \cdot P_2 + 396}{38220,25}\right)$$

$$(3) \frac{\partial L(\vec{P}, \lambda)}{\partial \lambda}: \quad 345 + \frac{0,6 \cdot (P_2 + 25)^2 + 3,0 \cdot (P_1 + 280)^2 + 0,6 \cdot (P_1 + P_2 + 305)^2}{38220,25} = P_1 + P_2$$

Podemos proceder a su resolución mediante un método numérico como la “iteración en lambda”.

### **Parte f)**

Dada la solución del despacho:

| Central | P [MW]   | C.Inc(P) [US\$/MWh] | Solución |
|---------|----------|---------------------|----------|
| G1      | 130,1180 | 43,3241             | Interior |
| G2      | 236,2309 | 45,9854             | Interior |
| G3      | 160      | 25                  | Máximo   |
| G4      | 280      | 40,5168             | Máximo   |
| G5      | 15       | 0                   | Máximo   |

Utilizamos las condiciones de KKT para el problema de optimización con pérdidas:

$$\frac{\partial C_i(P_i)}{\partial P_i} \cdot F_{Pi} = \lambda \quad P_{iMIN} \leq P_i \leq P_{iMAX}$$

$$\frac{\partial C_i(P_i)}{\partial P_i} \cdot F_{Pi} \leq \lambda \quad P_i = P_{iMAX}$$

$$\frac{\partial C_i(P_i)}{\partial P_i} \cdot F_{Pi} \geq \lambda \quad P_i = P_{iMIN}$$

Donde  $F_{Pi}$  es el factor de penalización asociado al generador  $i$ :

$$F_{Pi} = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}}$$

$$\frac{\partial P_L(P_1, P_2)}{\partial P_1} = \frac{7,2 \cdot P_1 + 1,2 \cdot P_2 + 2046}{38220,25} = 0,085461 \rightarrow F_{P1} = 1,093447$$

$$\frac{\partial P_L(P_1, P_2)}{\partial P_2} = \frac{1,2 \cdot P_1 + 2,4 \cdot P_2 + 396}{38220,25} = 0,029280 \rightarrow F_{P2} = 1,030163$$

Encontramos  $\lambda$  ya sea de la condición para G1 o para G2:

$$\lambda = \frac{\partial C_1(P_1)}{\partial P_1} \cdot F_{P1} = 43,3241 \cdot 1,093447 = 47,3726 \text{ [US\$/MWh]}$$

$$\lambda = \frac{\partial C_2(P_2)}{\partial P_2} \cdot F_{P2} = 45,9854 \cdot 1,030163 = 47,3725 \text{ [US\$/MWh]}$$