Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

ingendesa

EL57A – SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA I

Pablo Medina Cofré

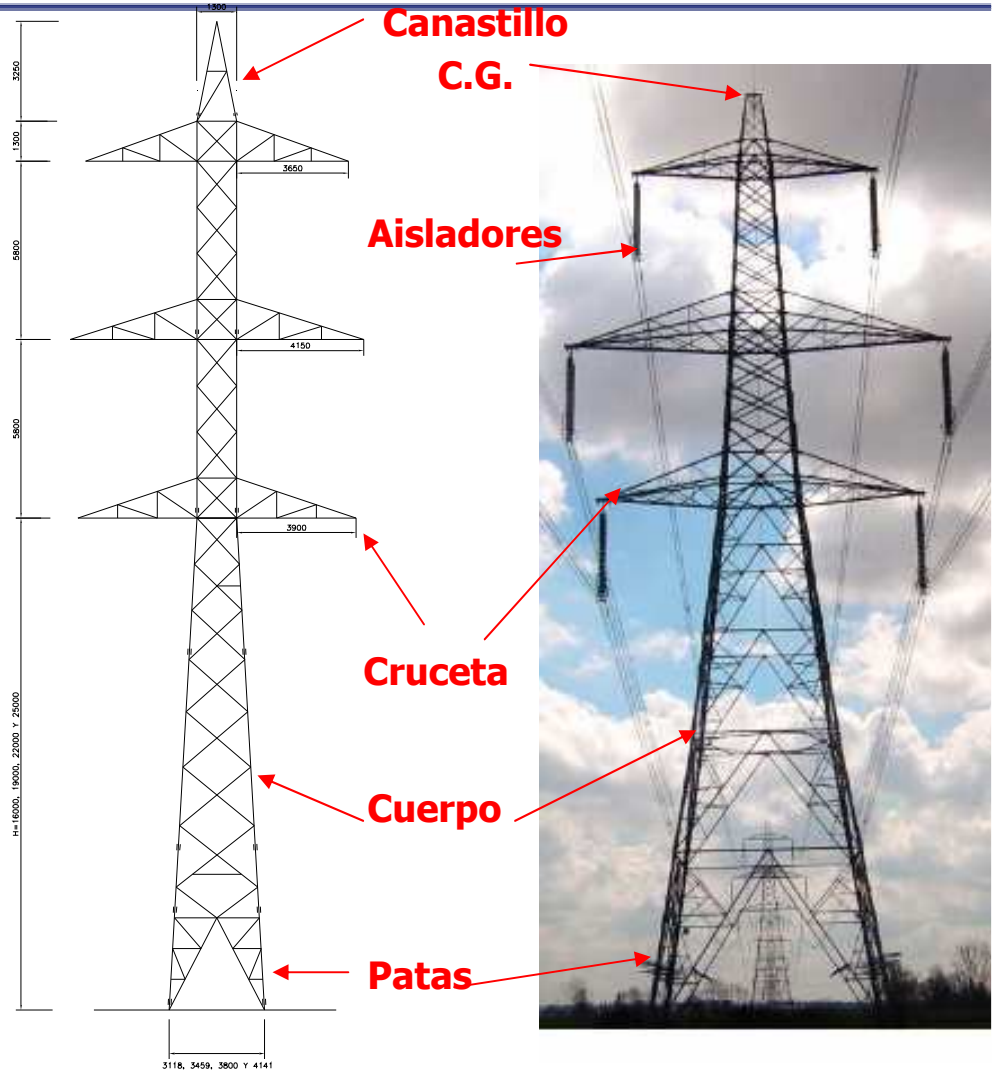
20-04-2010

Líneas de transmisión

- Permiten la propagación del campo electromagnético.
- En SEP, diremos que permiten la "transmisión de energía".
- Operan en diversas tensiones.
- Caso Chileno:
  - Hasta 500 kV en transmisión, y mayoritariamente en 220 [kV].
  - En distribución se tiene 13.2, 13.8 y 20 [kV] como tensiones representativas.
  - En Santiago, existe un "anillo" en 110 kV.
  - En el sur, existen líneas en 154 [kV]. No se desarrollan más proyectos de nuevas líneas en dicha tensión.

Proyecto de líneas

- Caso alta tensión (típicamente ≥ 110 [kv]).
- Diseño civil.
  - Especialidad de estructuras.
  - "Cargas" determinadas por especialidad eléctrica.
- Diseño eléctrico:
  - Verificación reglamento de corrientes fuertes.
  - Distancias mínimas f-t y f-f.
  - Determinación de aislación y cable de guardia.
  - Determinación de conductores de fase.



Proyecto de líneas.

- **Caso cables aislados. (típicamente en media y baja tensión, i.e, V≤25 [kV].**
- **Diseño civil:**
  - **Requerido en caso de banco de ductos en hormigón armado y canaletas.**
  - **En casos especiales, apoyo geotécnico y geológico.**
- **Diseño eléctrico.**
  - **Determinación de conductor y estudio de corrientes inducidas.**
  - **Diseño del tendido:**
    - **Banco de ductos.**
    - **Canaleta.**
    - **Directamente enterrados.**

Legend to the figure 3.

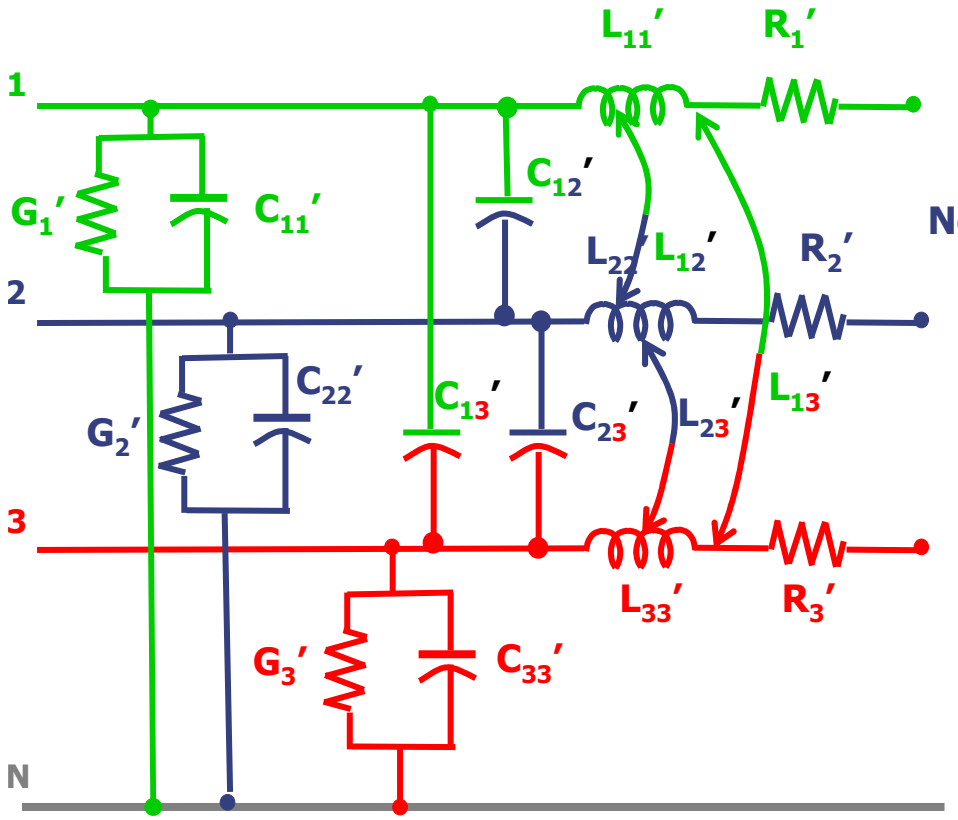
1 – Aluminium or copper conductor.
2 – Semi-conductive screen extruded on the phase conductor.
3 – XLPE insulation.
4 – Semi-conductive screen extruded on insulation.
5 – Wrapping of semi-conductive water swelling tape
6 – Metallic screen.
7 – Wrapping of non conductive water swelling tape
8 – Outer sheath: MDPE, LSF

Nerd-o-meter

- **¿Cuál es la potencia de un rayo?**
- **Hint: es la potencia necesaria para que funcione el "Capacitor de flujo".**

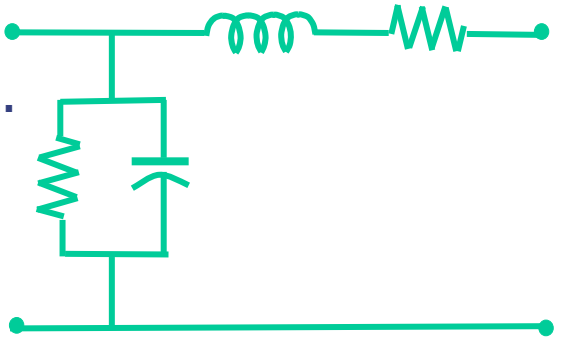
a) 1,11 GW
b) 1,21 GW
c) 1,31 GW

Electromagnéticamente hablando...



Modelo equivalente por unidad de longitud.

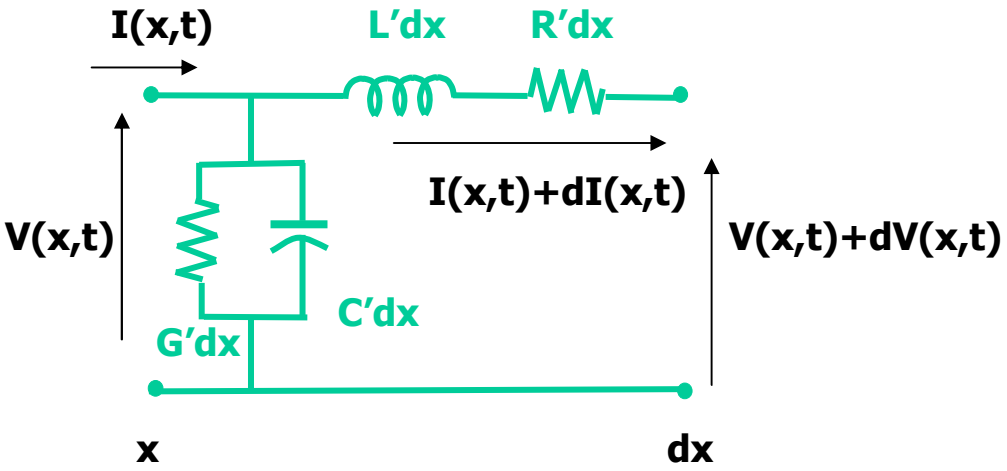
Nos gustaría llegar a ...



Modelo equivalente monofásico por unidad de longitud.

Modelo de línea de transmisión

- Supongamos que conocemos los parámetros y que tenemos un equivalente monofásico.
- La línea se modela a través de ecuaciones diferenciales y parámetros distribuidos.
- Ecs. Diferenciales se obtienen a partir de las leyes de voltaje y corriente aplicadas a la figura.



$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + R'I(x,t) + L'\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} + G'V(x,t) + C'\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = 0$$

Ecuación del telégrafo

F{}

$$\frac{\partial \dot{V}}{\partial x} + \underbrace{(R' + j\omega L')}_{\dot{Z}'}\dot{I} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{I}}{\partial x} + \underbrace{(G' + j\omega C')}_{\dot{Y}'}\dot{V} = 0$$

Modelo de línea de transmisión

- **Tomando derivada respecto de x en las ecuaciones anteriores, y combinando ambas expresiones, se llega a que los fasores voltaje y corriente deben resolver una ecuación de onda:**

$$\frac{\partial^2 \dot{V}(x)}{\partial x^2} - \dot{Z}\dot{Y} \cdot V(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \dot{I}(x)}{\partial x^2} - \dot{Z}\dot{Y} \cdot \dot{I}(x) = 0$$

$$\dot{Z}\dot{Y} = \gamma^2 = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')$$

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Constante de atenuación

Constante de fase

$$\dot{V}(x) = \dot{V}^+(x) + \dot{V}^-(x) = a \cdot e^{-\gamma x} + b \cdot e^{\gamma x}$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}^+(x) + \dot{I}^-(x) = \frac{1}{Z_c} a \cdot e^{-\gamma x} + -\frac{1}{Z_c} b \cdot e^{\gamma x}$$

$$\dot{Z}_c = \frac{\dot{V}^+(x)}{\dot{I}^+(x)} = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} \ [Ohm]$$

$$\frac{1}{\dot{Z}_c} = \dot{Y}_c$$

a y b se determinan a partir de C.B.

Parámetros ABCD

- **Las ecuaciones para V(x) e I(x) se puede escribir:**

$$\begin{bmatrix} \dot{V}(x) \\ \dot{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_c & -Y_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\gamma x} & 0 \\ 0 & e^{\gamma x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

- **En particular:**

ℓ s el largo de la línea

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{V}(0) \\ \dot{I}(0) \end{bmatrix}}_{V_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_c & -Y_c \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{b}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{V}(\ell) \\ \dot{I}(\ell) \end{bmatrix}}_{V_\ell} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_c & -Y_c \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\gamma \ell} & 0 \\ 0 & e^{\gamma \ell} \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{b}$$

$$V_0 = Yb \Rightarrow b = Y^{-1}V_0$$

$$V_\ell = YEY^{-1}V_0$$

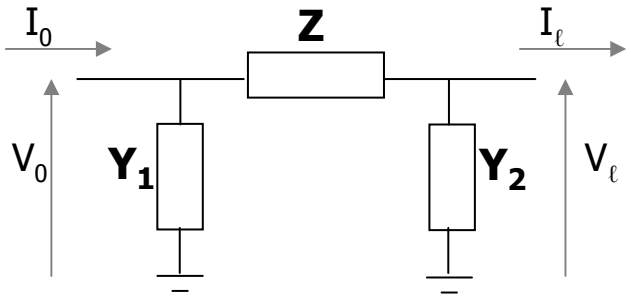
$$\begin{bmatrix} \dot{V}(\ell) \\ \dot{I}(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma \ell & -\dot{Z}_c \sinh \gamma \ell \\ -\dot{Y}_c \sinh \gamma \ell & \cosh \gamma \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}(0) \\ \dot{I}(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}(0) \\ \dot{I}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma \ell & \dot{Z}_c \sinh \gamma \ell \\ \dot{Y}_c \sinh \gamma \ell & \cosh \gamma \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}(\ell) \\ \dot{I}(\ell) \end{bmatrix}$$

Parámetros ABCD

Relación matriz ABCD y modelo pi

- **El caso general de un modelo pi:**

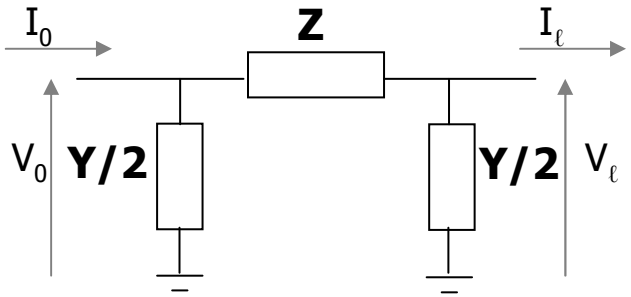


$A=1+Y_2Z$
$B=Z$
$C=Y_1+Y_2+ZY_1Y_2$
$D=1+Y_1Z$

- **En el caso de la línea con la línea A=D, luego $Y_1=Y_2=Y/2$:**

$$\frac{Y}{2}=\frac{1}{Z_c}\frac{\cosh\gamma\ell-1}{\sinh\gamma\ell}=\frac{1}{Z_c}\tanh\frac{\gamma\ell}{2}$$

$A=1+ZY/2$
$B=Z$
$C=Y(1+ZY/4)$
$D=A$



Aproximación de "línea corta"

- **En este caso, las funciones hiperbólicas se aproximan al valor de su argumento:**

$$\dot{Z} = \dot{Z}_c \sinh \gamma \ell \approx \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} \cdot \sqrt{Z'Y'}\ell = Z'\ell = \left(R' + j\omega L'\right)\ell$$

$$\frac{\dot{Y}}{2} = \frac{1}{\dot{Z}_c} \tanh \frac{\gamma \ell}{2} \approx \sqrt{\frac{Y'}{Z'}} \cdot \frac{\sqrt{Z'Y'}}{2} = \frac{Y'}{2} = \left(G' + j\omega C'\right)\ell$$

- **En el caso de líneas aéreas, la aproximación es válida para largos menores a 250 km.**
- **En el caso de líneas de cables aislados, la aproximación es válida para largos menores a 30 km.**

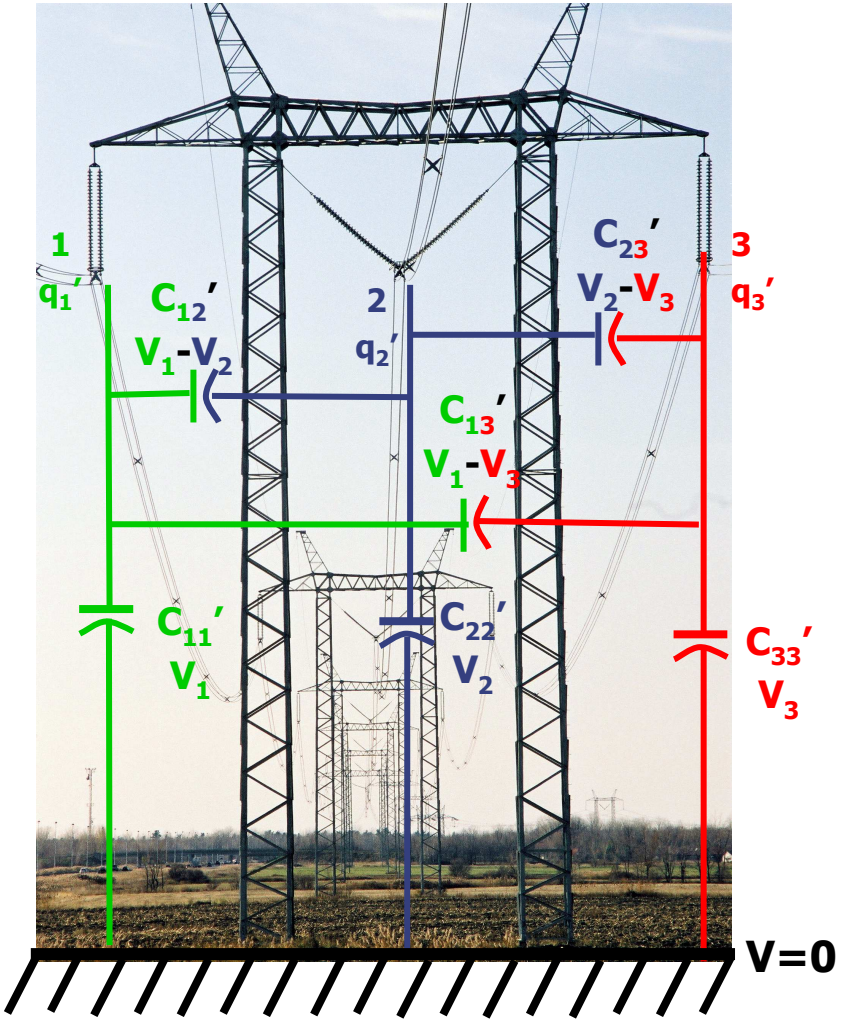
Capacitancia

- **Cada conductor de una línea de Tx se modela como una línea de carga [C/un. long.].**
- **Entre conductores y tierra existe una diferencia de potencial.**

$$\dot{q}_1' = C_{11}'\dot{V}_1 + C_{12}'\left(\dot{V}_1 - \dot{V}_2\right) + C_{13}'\left(\dot{V}_1 - \dot{V}_3\right)$$

$$\dot{q}_1' = \left(C_{11}' + C_{12}' + C_{13}'\right)\dot{V}_1 - C_{12}'\dot{V}_2 - C_{13}'\dot{V}_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1' \\ \dot{q}_2' \\ \vdots \\ \dot{q}_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} C_{1k}' & -C_{12}' & \cdots & -C_{1n}' \\ -C_{21}' & \sum_{k=1}^{n} C_{1k}' & \cdots & -C_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_{n1}' & -C_{n2}' & \cdots & \sum_{k=1}^{n} C_{1k}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_n \end{bmatrix}$$



$$[\dot{q}'] = [C'][\dot{V}]$$

Capacitancia

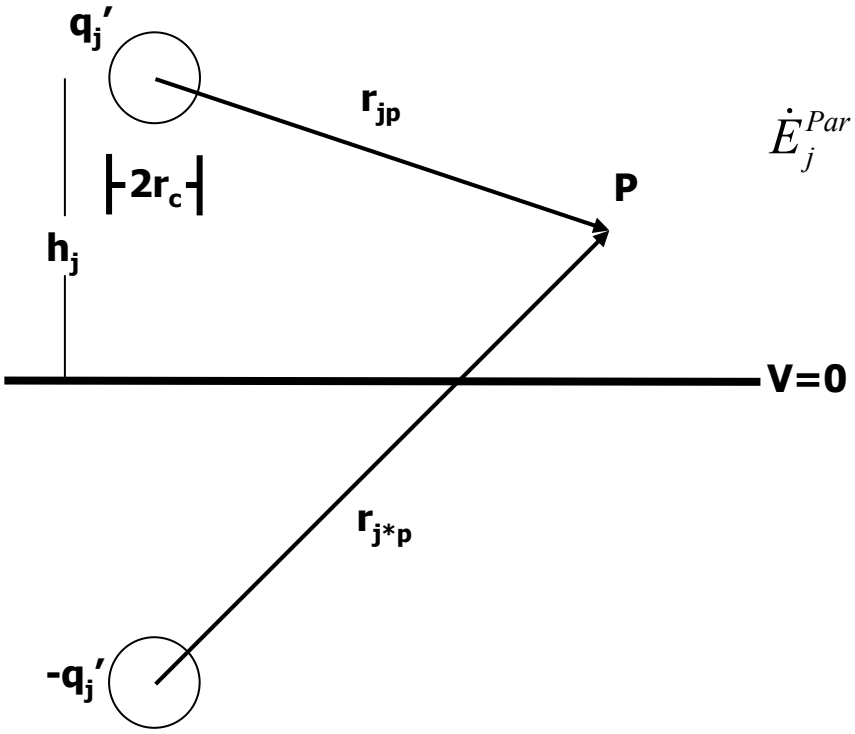
- Los elementos de C dependen de todo el conjunto de conductores, lo cual puede ser poco práctico.
- Analíticamente, lo que se calcula es la inversa de la matriz de capacitancia. Los elementos de esta matriz se llaman "coeficientes de potencial"

$$\left[\dot{V}\right] = \left[K'\right]\left[\dot{q}'\right]$$

- Para el cálculo de los coeficientes de potencial se utiliza el método de las imágenes, considerando que:
  - Suelo es conductor perfecto.
  - El campo de cada conductor es radial, i.e., el resto de los conductores no alterna la uniformidad de la carga en los conductores.
- Se calcula el campo eléctrico en el espacio, generado por un conductor y su imagen. El campo en el espacio generado por toda la línea, es la suma de las contribuciones de cada par "conductor-imagen".

Capacitancia

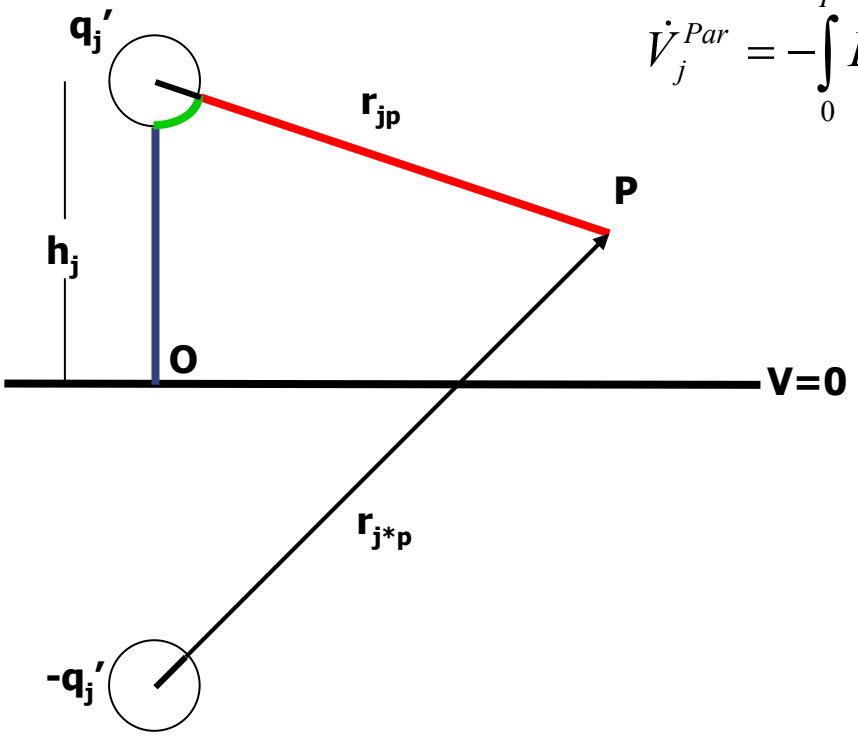
- **Campo producido por el par j-ésimo en el punto P.**



$$\dot{E}_j^{Par} = \dot{E}_j + \dot{E}_{j*} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\dot{q}_j'}{r_{jp}}\hat{r}_{jp} - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\dot{q}_j'}{r_{j*p}}\hat{r}_{j*p}$$

Capacitancia

- **El potencial generado por el par j-ésimo:**



$$\dot{V}_j^{Par} = -\int_0^P \dot{E}_j^{Par} \cdot d\vec{r} = -\int_0^P \dot{E}_j \cdot d\vec{r} - \int_0^P \dot{E}_{j*} \cdot d\vec{r}$$

$$-\int_0^P \dot{E}_j \cdot d\vec{r} = -\int \dot{E}_j \cdot d\vec{r} - \underbrace{\int \dot{E}_j \cdot d\vec{r}}_{\dot{E}_j \perp d\vec{r}} - \int \dot{E}_j \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{\dot{q}_j'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{h_j}{r_c} - \frac{\dot{q}_j'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_{jp}}{r_c}$$

$$= \frac{\dot{q}_j'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{h_j}{r_{jp}}$$

Se puede demostrar que: $\dot{V}_j^{Par} = \frac{\dot{q}_j'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_{j*p}}{r_{jp}}$

Capacitancia

- **El potencial del conductor k-ésimo respecto del suelo, debido a todas las cargas es:**

$$\dot{V}_k = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \, ' \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_{j*k}}{r_{jk}} = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \, ' K_{kj} \, '$$

- **r_{jk} y r_{j*k} corresponden a la distancia entre los centros del conductor k y el conductor j y su imagen.**
- **Si j=k, $r_{jk}=r_c$ y $r_{j*k}=2h_j$.**
- **En estas expresiones, se desprecia el radio de los conductores frente a las distancias entre conductores y sus respectivas imágenes.**

Capacitancia

- **Analicemos la fase 1 de una línea de simple circuito:**

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{2h_1}{r_c}\right)\dot{q}_1 + \ln\left(\frac{r_{2*1}}{r_{21}}\right)\dot{q}_2 + \ln\left(\frac{r_{3*1}}{r_{31}}\right)\dot{q}_3\right]$$

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(2h_1)\dot{q}_1 + \ln(r_{2*1})\dot{q}_2 + \ln(r_{3*1})\dot{q}_3 - \left(\ln(r_c)\dot{q}_1 + \ln(r_{21})\dot{q}_2 + \ln(r_{31})\dot{q}_3\right)\right]$$

- **Si los conductores son los vértices de un triángulo equilátero de lado D y además se considera un sistema trifásico balanceado:** $\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 = 0$

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(2h_1)\dot{q}_1 + \ln(r_{2*1})\dot{q}_2 + \ln(r_{3*1})\dot{q}_3 + \ln\left(\frac{D}{r_c}\right)\dot{q}_1\right]$$

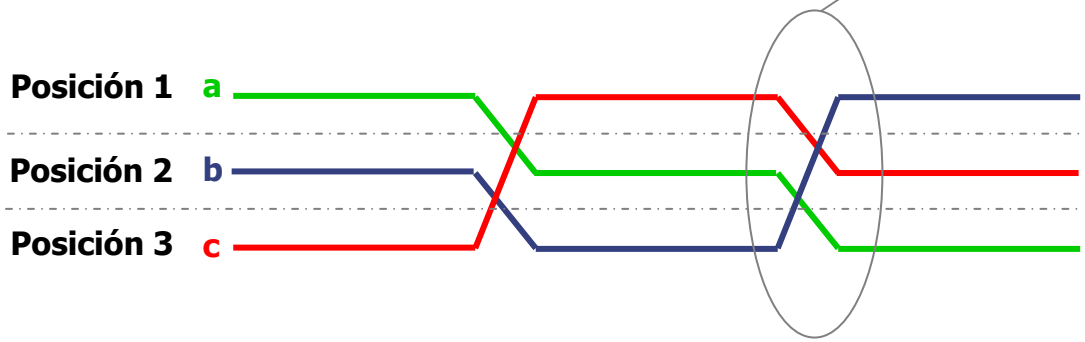
- **Si también consideramos que los conductores están muy alejados del suelo, es decir:** $r_{2*1} \approx r_{3*1} \approx 2h_1$

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D}{r_c}\right)\dot{q}_1 \Rightarrow C_1' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{r_c}\right)}$$

...Y por simetría se tiene lo mismo para las otras fases

Transposición de fases

- ¡La vida es triste Venancio!... existen pocas líneas en configuración triangular.
- Cada fase se tiene una capacitancia diferente, por lo que la línea introduce un desbalance en el sistema.
- Adicionalmente, el sistema no tendrá un equivalente monofásico.
- Solución: realizar una transposición de la línea.



Ver video

Transposición de fases

- **Para caracterizar a una fase, se toma un promedio de la tensión por unidad de longitud:**

$$\dot{V}_1^{Transpuesto} = \frac{\dot{V}_1^{Tramo1} + \dot{V}_1^{Tramo2} + \dot{V}_1^{Tramo3}}{3}$$

$$\dot{V}_1^{Transpuesto} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(\ln(2h_1)+\ln(2h_2)+\ln(2h_3)\right)}{3}\dot{q}_1 + \frac{\left(\ln(r_{2*1})+\ln(r_{3*2})+\ln(r_{3*1})\right)}{3}\dot{q}_2\right.$$

$$+\frac{\left(\ln(r_{3*1})+\ln(r_{2*1})+\ln(r_{3*2})\right)}{3}\dot{q}_3 - \ln(r_c)\dot{q}_1 - \frac{\left(\ln(r_{21})+\ln(r_{32})+\ln(r_{31})\right)}{3}\dot{q}_2$$

$$\left.+\frac{\left(\ln(r_{3*1})+\ln(r_{2*1})+\ln(r_{3*2})\right)}{3}\right]$$

Considerando: $-\dot{q}_1 = \dot{q}_2 + \dot{q}_3$

$$DMG = \sqrt[3]{r_{21}r_{32}r_{31}}$$

$$\dot{V}_1^{Transpuesto} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{DMG}{r_c}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt[3]{r_{2*1}r_{3*2}r_{3*1}}}{2\sqrt[3]{h_1h_2h_3}}\right)\right]\dot{q}_1$$

Transposición de fases

- **El último logaritmo natural da cuenta de la existencia de un plano de tierra.**
- **Si se considera que los conductores están alejados del suelo, se tiene que:**

$$r_{2*1} \approx r_{3*1} \approx r_{3*2} \approx 2h_1 \approx 2h_2 \approx 2h_3$$

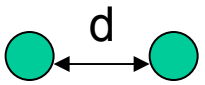
- **Finalmente:**

$$\dot{V}_1^{Transpuesto} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{DMG}{r_c}\right)\dot{q}_1 \Rightarrow C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{DMG}{r_c}\right)}$$

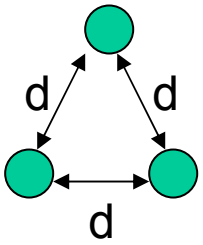
¡ Y lo anterior se tiene para todas las fases!

Múltiples conductores por fase

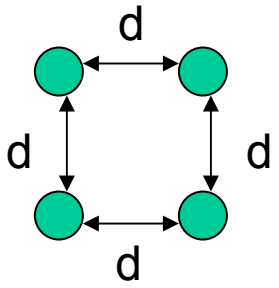
- **Conocido también como:**
  - **Conductores fasciculados.**
  - **Bundled conductors.**
- **Razones para su uso:**
  - **Minimización de "efecto corona", especialmente sobre 500 kV.**
  - **Límite térmico de conductores.**
- **Para efectos de cálculo, se trata como un único conductor con un "radio equivalente".**



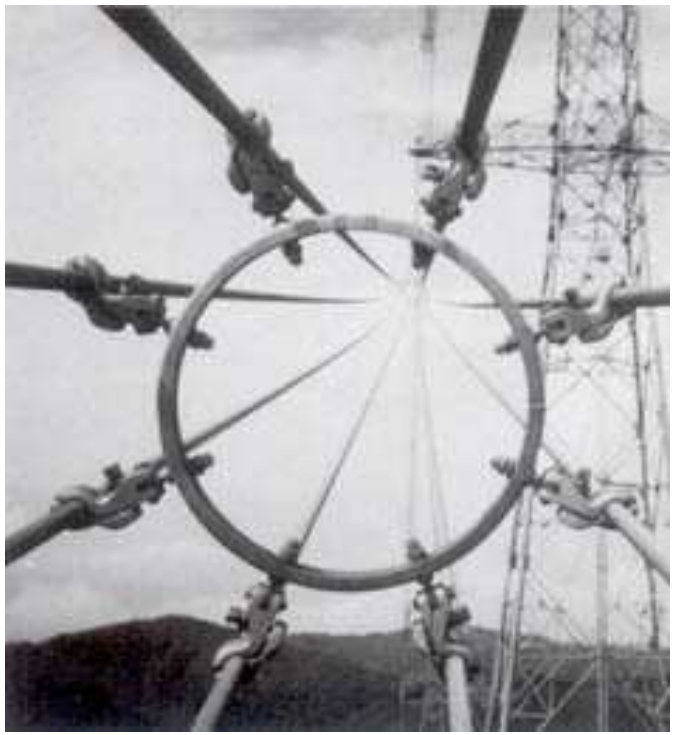
$$r_{eq} = \sqrt{r_c \cdot d}$$



$$r_{eq} = \sqrt[3]{r_c \cdot d^2}$$

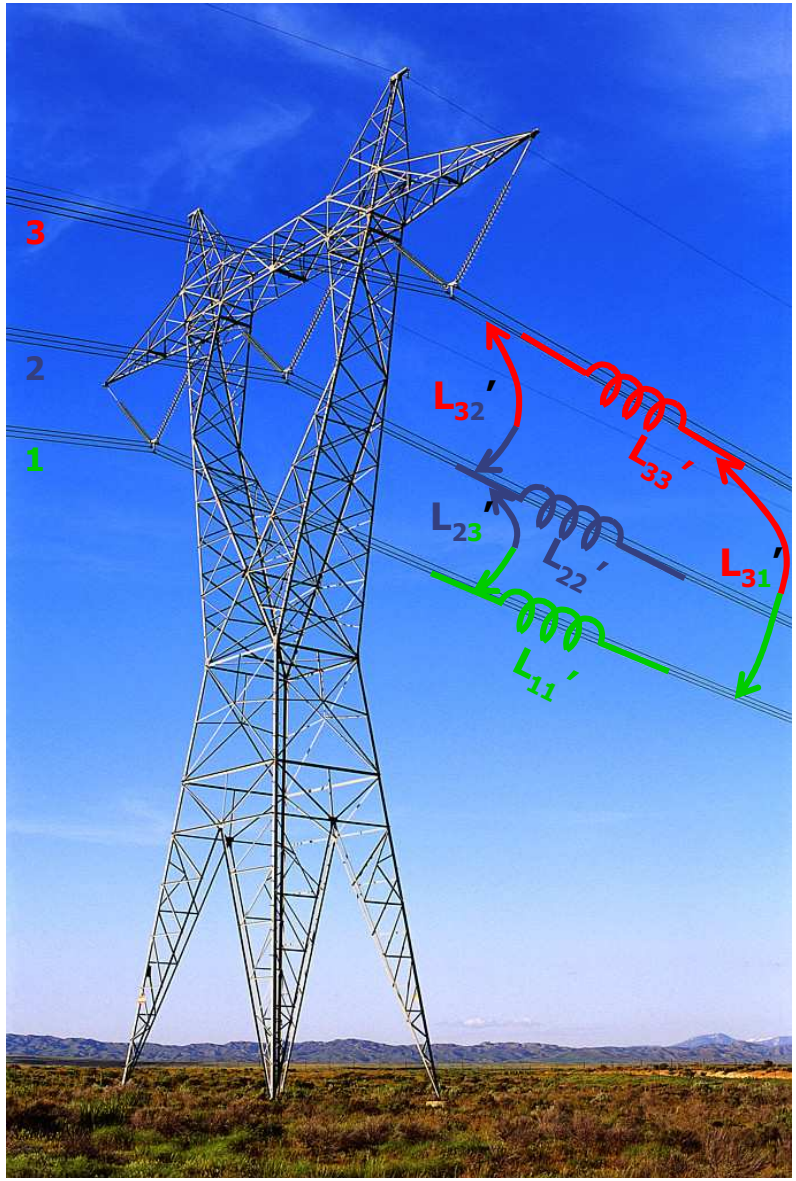


$$r_{eq} = 1,09\sqrt[4]{r_c \cdot d^3}$$



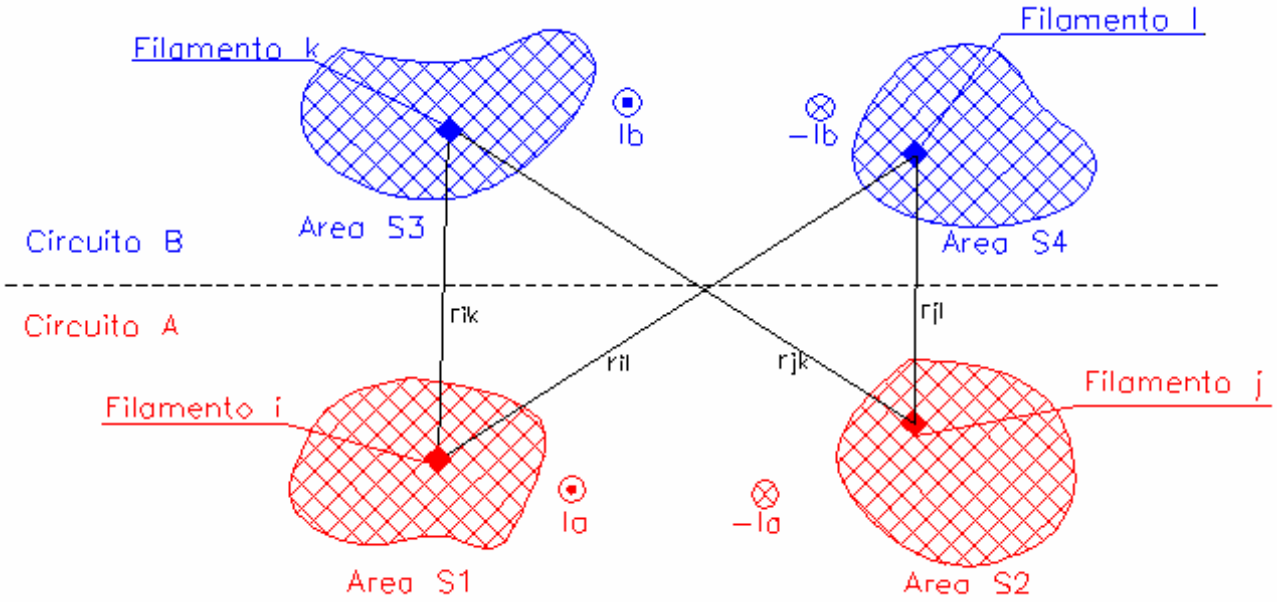
Inductancia

- Se debe calcular la caída de tensión en cada fase:
  - Debido a circulación de la corriente de la propia fase.
  - Debido a circulación de la corriente de las demás fases.
- La constante de proporcionalidad que relaciona corriente con caída de tensión se llama "Inductancia".
  - Inductancia propia.
  - Inductancia mutua.



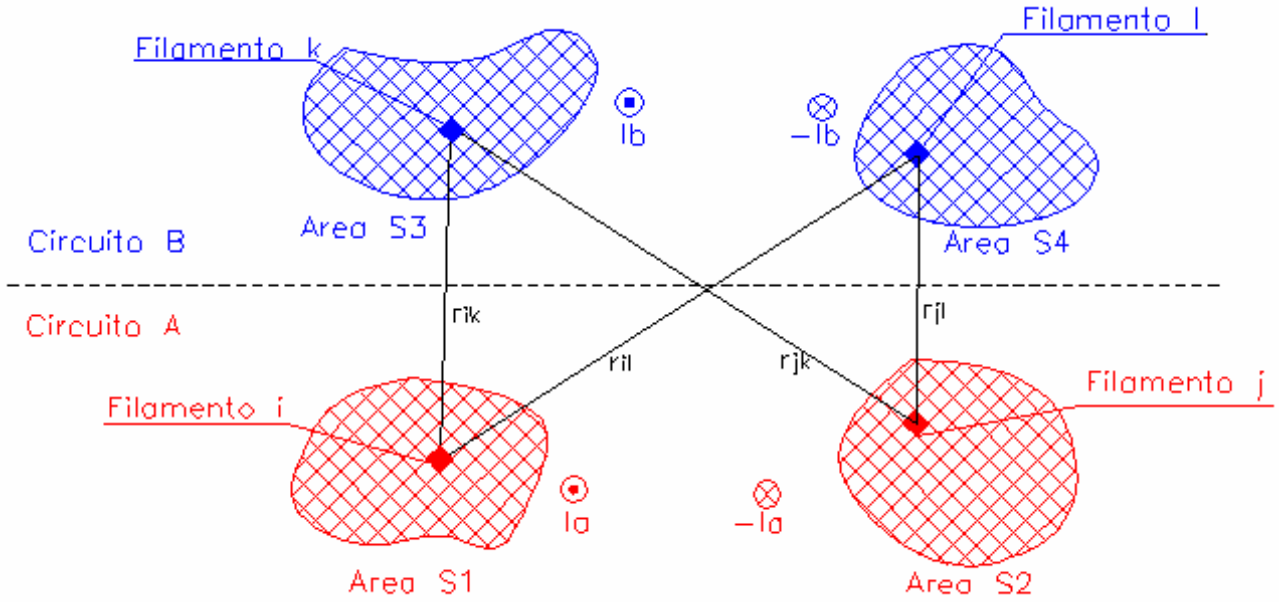
Inductancia mutua.

- **Se analiza el caso general para calcular la inductancia mutua entre dos circuitos.**
- **Por el circuito B circula una corriente Ib:**
  - **"Viene" por el conductor 3.**
  - **"Retorna" por el conductor 4.**
- **Por el circuito A circula una corriente Ia:**
  - **"Viene" por el conductor 1.**
  - **"Retorna" por el conductor 2.**



Inductancia mutua.

- **Se desprecia efecto pelicular, por lo que la corriente se distribuye uniformemente en la sección de cada conductor.**
- **Los conductores se dividen en "filamentos" de área "muy pequeña", por lo que la corriente que circula por ellos es $\Delta I = J \Delta s$.**
- **Densidad de corriente uniforme, implica que $J = I/S$, para cada conductor. Luego, $\Delta I = I \Delta S / S$.**
- **El "circuito cerrado" formado por los filamentos k y l del Circuito B, enlaza una porción del campo magnético producido por los filamentos i y j del Circuito B.**



Inductancia mutua

- **Los flujos enlazados son:**

$$\Delta\Phi_{kl,i} = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I_a \Delta S_1}{S_1}\int_{r_{ik}}^{r_{il}}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I_a \Delta S_1}{S_1}\left[\ln(r_{il}) - \ln(r_{ik})\right]$$

$$\Delta\Phi_{kl,j} = -\frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I_a \Delta S_1}{S_2}\int_{r_{jk}}^{r_{jl}}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I_a \Delta S_1}{S_2}\left[\ln(r_{jl}) - \ln(r_{jk})\right]$$

- **El flujo total enlazado por los filamentos l y k es la suma de todos los flujos producidos por el circuito a:**

$$(\Phi_{kl})_a = \sum_{i=1}^{n}\Delta\Phi_{kl,i} + \sum_{j=1}^{n}\Delta\Phi_{kl,j}$$

$$(\Phi_{kl})_a = \frac{\mu_o I_a}{2\pi}\left[\frac{1}{S_1}\sum_{i=1}^{n}\ln(r_{il})\Delta S_1 - \frac{1}{S_1}\sum_{i=1}^{n}\ln(r_{ik})\Delta S_1 + \frac{1}{S_2}\sum_{j=1}^{n}\ln(r_{jk})\Delta S_2 - \frac{1}{S_2}\sum_{j=1}^{n}\ln(r_{jl})\Delta S_2\right]$$

- **Haciendo tender n a infinito, los delta de superficie tenderán a cero, y por lo tanto:**

$$(\Phi_{kl})_a = \frac{\mu_o}{2\pi} I_a\left[\frac{1}{S_1}\int_{S_1}\ln(r_{il})dS_1 - \frac{1}{S_1}\int_{S_1}\ln(r_{ik})dS_1 - \frac{1}{S_2}\int_{S_2}\ln(r_{jl})dS_2 + \frac{1}{S_2}\int_{S_2}\ln(r_{jk})dS_2\right]$$

Inductancia mutua

- **Estamos en la búsqueda de una constante de proporcionalidad que indique cual es el flujo que enlaza el circuito b, generado por el circuito a.**
- **Problema: dependiendo de cómo se escojan los pares (k,l), se tendrán distintas expresiones para el flujo enlazado.**
- **Solución: tomar un promedio sobre los n^2 pares (k,l).**

$$\left(\bar{\Phi}_{kl}\right)_a = \frac{1}{n^2}\frac{\mu_o I_a}{2\pi}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{S_1}\int_{S_1}\ln\left(r_{il}\right)dS_1 - \frac{1}{S_1}\int_{S_1}\ln\left(r_{ik}\right)dS_1 - \frac{1}{S_2}\int_{S_2}\ln\left(r_{jl}\right)dS_2 + \frac{1}{S_2}\int_{S_2}\ln\left(r_{jk}\right)dS_2\right]$$

$$= \frac{\mu_o I_a}{2\pi}\left[\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{S_1}\int_{S_1}\ln\left(r_{il}\right)dS_1\right)\frac{1}{n} - \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{S_2}\int_{S_2}\ln\left(r_{jl}\right)dS_2\right)\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_2}\int_{S_2}\ln\left(r_{jk}\right)dS_2\right)^{1}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_1}\int_{S_1}\ln\left(r_{ik}\right)dS_1\right)\frac{1}{n}\right]$$

- **Nuevamente haciendo n tender a infinito, y aplicando la definición de inductancia:**

$$L_{ab} = \frac{\left(\bar{\Phi}_{kl}\right)_a}{I_a} = \frac{\mu_o}{2\pi}\left[\int_{S_4}\int_{S_1}\frac{\ln\left(r_{il}\right)}{S_1 S_4}dS_1 dS_4 - \int_{S_4}\int_{S_2}\frac{\ln\left(r_{jl}\right)}{S_2 S_4}dS_2 dS_4 + \int_{S_3}\int_{S_2}\frac{\ln\left(r_{jk}\right)}{S_2 S_3}dS_2 dS_3 - \int_{S_3}\int_{S_1}\frac{\ln\left(r_{ik}\right)}{S_1 S_3}dS_1 dS_3\right]$$

Inductancia mutua

- **Se define el concepto de "distancia media geométrica" entre un área i y un área j como:**

$$\ln g_{ij} = \frac{1}{S_i S_j} \int_{S_i} \int_{Sj} \ln(r_{ij}) dS_i dS_j \quad \Longrightarrow \quad L_{ab} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln\left(\frac{g_{14} g_{23}}{g_{24} g_{13}}\right)$$

- **Si los circuitos a y b comparten su retorno, i.e, los conductores 2 y 4 se superponen formando un conductor n:**

$$L_{ab} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln\left(\frac{g_{1n} g_{3n}}{g_{nn} g_{13}}\right) \quad \Longrightarrow \quad L_{12} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln\left(\frac{g_{1n} g_{2n}}{g_{nn} g_{12}}\right)$$

- **Si los radios de los conductores son iguales y son mucho menores a la distancia de separación:**

$$\ln g_{12} = \frac{1}{SS} \int_S \int_S \ln(r_{12}) dS_1 dS_2 \approx \frac{1}{SS} \int_S \int_S \ln(D_{12}) dS_1 dS_2 = \ln(D_{12}) \Rightarrow g_{12} \approx D_{12}$$

Inductancia propia

- La inductancia propia da cuenta del flujo enlazado y producido por el mismo circuito.
- Por lo tanto, se puede suponer que el circuito a se superpone al circuito, y luego aplicar la definición de inductancia mutua.

$$L_{11} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln\left(\frac{g_{1n}{}^2}{g_{nn} g_{11}} \right)$$

- El radio medio geométrico g_{aa} para un círculo de radio r_c es:

$$g_{11} = e^{-\frac{1}{4}} r_c$$

- Esta expresión se obtiene al aplicar la definición:

$$\ln g_{11} = \frac{1}{S_1 S_1} \int_{S_1} \int_{S_1} \ln\left(r_{ij}\right) dS_i dS_j$$

Inductancia

- **La caída de tensión en la fase a de un simple circuito es:**

$$v_1 = \sum_{k=1}^{3} \frac{d}{dt}\Phi_{1k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{d}{dt}\left(L_{1k} I_k\right) \Rightarrow \dot{V}_1 = j\omega \sum_{k=1}^{3} L_{1k}\dot{I}_k$$

$$\dot{V}_1 = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{g_{1n}{}^2}{g_{nn}g_{11}}\right)\dot{I}_1 + \ln\left(\frac{g_{1n}g_{2n}}{g_{nn}g_{12}}\right)\dot{I}_2 + \ln\left(\frac{g_{1n}g_{3n}}{g_{nn}g_{13}}\right)\dot{I}_3\right]$$

$$\dot{V}_1 = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{g_{1n}}{g_{nn}}\right)\sum_{k=1}^{3}\dot{I}_k + \sum_{k=1}^{3}\ln\left(g_{kn}\right)\dot{I}_k + \sum_{k=1}^{3}\ln\left(\frac{1}{g_{1k}}\right)\dot{I}_k\right]$$

- **Si el sistema es balanceado y el retorno común está muy lejos:**

$$\sum_{k=1}^{3}\dot{I}_k = 0, \quad g_{1n} \approx g_{2n} \approx g_{3n} \approx g_{fn} \Rightarrow \sum_{k=1}^{3}\ln\left(g_{kn}\right)\dot{I}_k \approx \ln\left(g_{fn}\right)\sum_{k=1}^{3}\dot{I}_k = 0$$

$$\dot{V}_1 = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{1}{e^{-1/4}r_c}\right)\dot{I}_1 + \ln\left(\frac{1}{D_{12}}\right)\dot{I}_2 + \ln\left(\frac{1}{D_{13}}\right)\dot{I}_3\right]$$

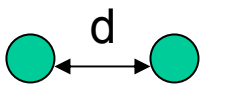
Inductancia

- **De la misma forma que se hizo para la capacitancia, se tendrá que para una línea triangular o con transposición:**

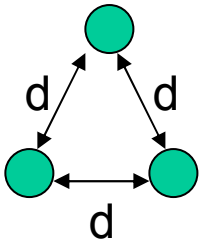
$$\dot{V}_1 = j\omega \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{DMG}{e^{-1/4} r_c}\right)}_{L_1'} \dot{I}_1 \underbrace{\Rightarrow}_{\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,[H/m]} L_1' = 2 \cdot 10^{-7} \ln\left(\frac{DMG}{r_{eq}}\right) \left[\frac{H}{m}\right]$$

¡ Y lo anterior se tiene para todas las fases!

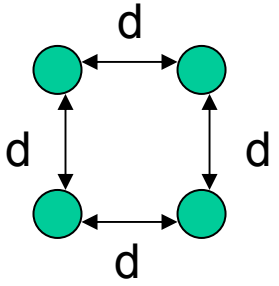
- **Y en el caso de tener conductores fasciculados:**



$$r_{eq} = \sqrt{e^{-1/4} r_c \cdot d}$$



$$r_{eq} = \sqrt[3]{e^{-1/4} r_c \cdot d^2}$$



$$r_{eq} = 1,09 \sqrt[4]{e^{-1/4} r_c \cdot d^3}$$

Carta de operación de una línea de transmisión

- **Conocido también como diagrama de círculo.**
- **Idea: Dadas las tensiones en los extremos transmisor y receptor, establecer el lugar geométrico de la potencia compleja en el extremo receptor:**

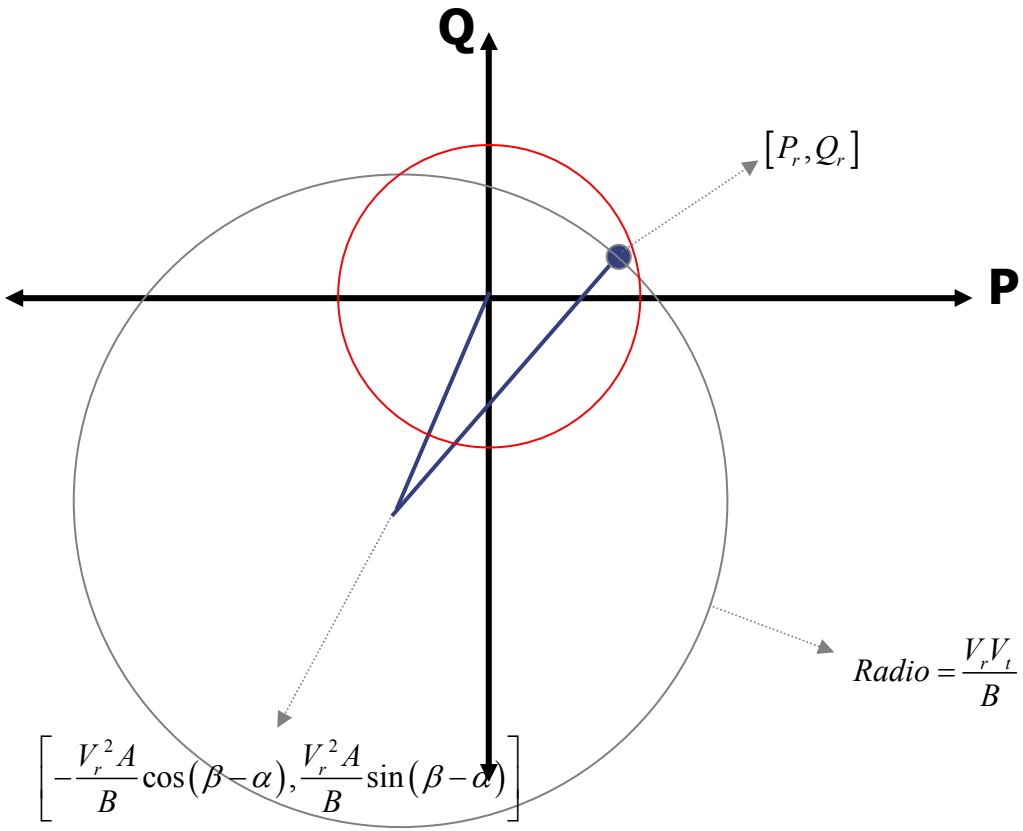
$$\dot{V}_t = \dot{A}\dot{V}_r + \dot{B}\dot{I}_r \Rightarrow \dot{I}_r^{\,*} = \frac{\dot{V}_t^{\,*} - \dot{A}^*\dot{V}_r^{\,*}}{\dot{B}^*} \qquad \dot{S}_r = \dot{V}_r\dot{I}_r^{\,*} = \frac{\dot{V}_r\dot{V}_t^{\,*}}{\dot{B}^*} - \frac{\dot{A}^*\left|\dot{V}_r\right|^2}{\dot{B}^*}$$

- **Si se considera que:**

$$\dot{V}_r = V_r\angle 0° \qquad \dot{A} = A\angle\alpha$$
$$\dot{V}_t = \angle\delta \qquad \dot{B} = B\angle\beta$$

$$P_r = \frac{V_r V_t}{B}\cos(\beta-\delta) - \frac{V_r^{\,2}A}{B}\cos(\beta-\alpha)$$
$$Q_r = \frac{V_r V_t}{B}\sin(\beta-\delta) - \frac{V_r^{\,2}A}{B}\sin(\beta-\alpha)$$

$$\left(P_r + \frac{V_r^{\,2}A}{B}\cos(\beta-\alpha)\right)^2 + \left(Q_r + \frac{V_r^{\,2}A}{B}\sin(\beta-\alpha)\right) = \left(\frac{V_r V_t}{B}\right)^2$$

Diagrama de círculo

- **Al igual que el generador, existe un límite térmico de la línea.**
- **Luego, la carta debe dar cuenta de ambos límites simultáneamente.**