Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

ingendesa

EL57A – SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA I

Pablo Medina Cofré

24-08-2010

Herramientas matemáticas.

- En general, en ingeniería podemos separar el estudio de los fenómenos en:
  - Régimen permanente.
  - Transitorios.

- Un buen conocimiento del régimen permanente es necesario, ya que la mayor parte del tiempo los sistemas operan ahí.

- Herramientas de cálculo simples, que permitan aprovechar el hecho de que d/dt=0 o que se tienen "sistemas harmónicos", son muy necesarias.

El root mean square.

- **Para una función f(t) en el intervalo [to,to+T], se define el valor medio cuadrático (RMS) como:**

$$\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[f(t)\right]^2 dt}$$

- **Para una función sinusoidal de amplitud A y período T=1/(2πf)**

$$\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2\pi f}}\int_0^{\frac{1}{2\pi f}} A^2\cos^2(2\pi ft)\,dt} = \boxed{\frac{A}{\sqrt{2}}}$$

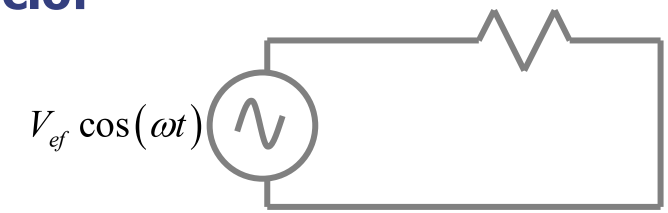
$$\cos^2(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}sen(2u)$$

- **En electricidad, a la amplitud se le llama "valor efectivo". Luego:**

$$\boxed{V_{RMS} = \frac{V_{ef}}{\sqrt{2}}}$$

El root mean square.

- **Si se calcula la energía disipada por la resistencia del circuito en un ciclo:**



$$i(t)=\frac{V_{ef}\cos(\omega t)}{R}\Rightarrow p(t)=v(t)i(t)=\frac{V_{ef}^{\;2}\cos^2(\omega t)}{R}$$

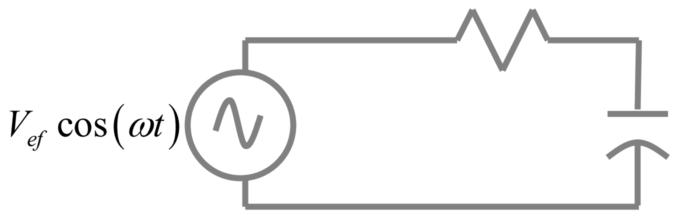
$$E(t)=\int_0^{1/2\pi f} p(t)\,dt=\frac{1}{R}\int_0^{1/2\pi f} V_{ef}^{\;2}\cos^2(\omega t)\,dt=\frac{1}{R}\cdot\frac{V_{ef}^{\;2}}{2}=\boxed{\frac{V_{RMS}^{\;2}}{R}}$$

$$V_{RMS}=V_{ef}/\sqrt{2}$$

- **El V_{RMS} de la fuente alterna es el voltaje de una fuente continua que entrega la misma energía a la resistencia durante un ciclo.**

Transformada fasorial.

- **Motivación: calcular la tensión del condensador:**



$$\cos(\omega t+\varphi)=\cos(\omega t)\cos(\varphi)-\sin(\omega t)\sin(\varphi)\quad / L$$

$$L\{\cos(\omega t+\varphi)\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}\cos(\varphi)-\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\sin(\varphi)$$

$$\sqrt{2}V_{RMS}\cos(\omega t+\varphi)=RC\frac{d}{dt}v_c(t)+v_c(t)$$

$$\sqrt{2}V_{ef}\left[\frac{s\cos(\varphi)}{s^2+\omega^2}-\frac{\omega\sin(\varphi)}{s^2+\omega^2}\right]=(sRC+1)V_c(s)-RCv_c(0)$$

$$V_c(s)=\frac{\sqrt{2}V_{ef}}{RC}\cdot\frac{1}{\left(s+1/RC\right)}\left[\frac{s\cos(\varphi)}{(s^2+\omega^2)}-\frac{\omega\sin(\varphi)}{(s^2+\omega^2)}\right]+\frac{v_c(0)}{\left(s+1/RC\right)}$$

Transformada fasorial.

$$V_c(s) = \frac{\sqrt{2}V_{ef}}{RC} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \left[\frac{s\cos(\varphi)}{\left(s^2+\omega^2\right)} - \frac{\omega \sin(\varphi)}{\left(s^2+\omega^2\right)} \right] + \frac{v_c(0)}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

- En sistemas de potencia, interesa mucho saber el comportamiento en régimen permanente sinusoidal.
  - En el caso del condensador, si t es "grande", el término en verde (respuesta a entrada cero) desaparece.
  - El término en rojo, en el dominio del tiempo, tiene una componente transiente y otra harmónica.
- Por lo tanto, sería conveniente contar con una herramienta que permita calcular la respuesta de régimen permanente, despreciando los términos transitorios.

Transformada fasorial.

$$v(t) = V_{ef}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}V_{RMS}\left[\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\right]\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}V_{RMS}e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi}\right\}$$

$$\boxed{F\{v(t)\} = F\{V_{ef}\cos(\omega t + \varphi)\} = V_{RMS}e^{j\varphi}e^{j\omega t} = \dot{V}e^{j\omega t}}$$

- **En una ecuación diferencial, si la función "forzante" es de frecuencia angular ω, las soluciones de estado estable también.**
- **La transformada fasorial de una función (o fasor) es única para todo t. También se puede ver que es lineal.**
- **El factor $e^{j\omega t}$ está siempre presente, razón por la cual suele omitirse. Lo mismo ocurre con el factor raíz de dos.**

Transformada fasorial.

- Transformada de la derivada:

$$F\left\{\frac{d}{dt}\sqrt{2}V_{ef}\cos\left(\omega t+\varphi\right)\right\}=F\left\{-\omega\sqrt{2}V_{ef}\sin\left(\omega t+\varphi\right)\right\}$$

$$sen\left(\omega t+\varphi\right)=-\cos\left(\omega t+\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$=\omega V_{RMS}e^{j\varphi}e^{j\omega t}e^{j\frac{\pi}{2}}=j\omega V_{RMS}e^{j\varphi}e^{j\omega t}$$

$$\boxed{=j\omega F\left\{v\left(t\right)\right\}=j\omega\dot{V}}$$

- La derivada "giró" al fasor en 90° y lo multiplicó por ω.
- En términos prácticos, el operador derivada se reemplaza por el operador jω.
- Se propone demostrar que:

$$F\left\{\int_0^t\sqrt{2}V_{ef}\cos\left(\omega t+\varphi\right)\right\}=\frac{1}{j\omega}\dot{V}$$

Transformada fasorial.

- **Volviendo a nuestro ejemplo:**

$$\sqrt{2}V_{ef}\cos(\omega t+\varphi)=RC\frac{d}{dt}v_c(t)+v_c(t)$$

$$V_{RMS}e^{j\varphi}=j(\omega RC)F\{v_c(t)\}+F\{v_c(t)\}$$

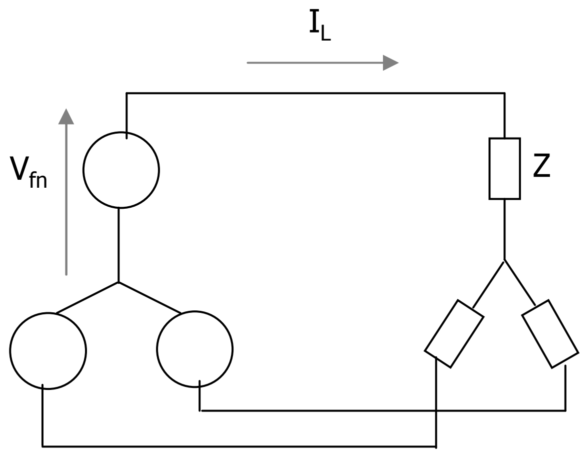
$$\dot{V}_c(1+j\omega RC)=V_{RMS}e^{j\varphi}$$

$$\dot{V}_c=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}V_{RMS}e^{j\left(\varphi+\tan^{-1}(\omega RC)\right)}$$

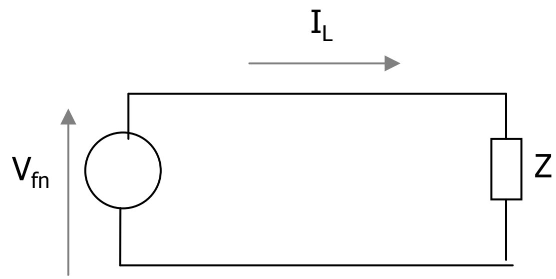
$$\boxed{v_c(t)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sqrt{2}V_{ef}\cos\left(\varphi+\tan^{-1}(\omega RC)\right)}$$

Cálculo en p.u.

- **Esta materia se estudió en los cursos anteriores.**
- **Sin embargo, el trabajo en este curso se hace con esta metodología, razón por la cual se analizará al menos el uso de "base trifásica".**



- **Motivación: Analizar el circuito de la figura:**



$$\left.\begin{aligned} V_{b_{ff}} &= \sqrt{3} V_{b_{fn}} \\ S_{b_{3\phi}} &= 3 S_{b_{1\phi}} \end{aligned}\right\}$$

$$S_{b_{3\phi}} = \sqrt{3} V_{b_{ff}} I_{b_L} \Rightarrow I_{b_L} = \frac{S_{b_{3\phi}}}{\sqrt{3} V_{b_{ff}}}$$

$$Z_{b1\phi} = \frac{\left(V_{b_{fn}}\right)^2}{S_{b_{1\phi}}} = \frac{\left(\frac{V_{b_{ff}}}{\sqrt{3}}\right)^2}{S_{b_{1\phi}}} = \frac{V_{b_{ff}}^{\ 2}}{S_{b_{3\phi}}}$$

$$V_{fn}\left[V\right] = Z\left[Ohm\right] I_L\left[A\right]$$

$$\Downarrow$$

$$V_{ff}\left[p.u.\right] = Z\left[p.u.\right] I\left[p.u.\right]$$

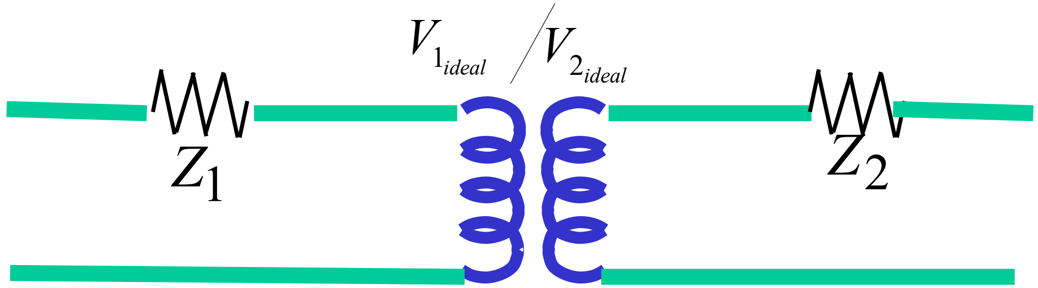
Cálculo en p.u.

- Definiendo dos cantidades bases, se tienen las restantes.
- En el curso, V y S serán las bases principales.
- El cálculo en p.u. se utiliza porque:
  - Evita complicaciones con las unidades
  - Permite la rápida detección de errores (ej.: en los SEP's, las tensiones son valores cercanos a uno).
  - El trabajo en sistemas con diferentes niveles de tensión se simplifica … no es necesario incorporar "transformadores ideales" a la representación.
- Para que el método "funcione", la base trifásica de potencia debe ser común para todo el sistema.

Cálculo en p.u.

$$\dot V_1 = \dot Z_1 \dot I_1 + V_{1_{ideal}}$$

$$\dot V_2 = -\dot Z_1 \dot I_2 + V_{2_{ideal}}$$



$$\dot V_1 = \dot Z_1 \dot I_1 + \frac{V_{1_{ideal}}}{V_{2_{ideal}}}\dot V_2 + \frac{V_{1_{ideal}}}{V_{2_{ideal}}}\dot Z_2 \dot I_2$$

$$V_{1_{ideal}} \dot I_1^{*} = V_{2_{ideal}} \dot I_2^{*}$$

$$\dot V_1 = \dot I_1 \left[\dot Z_1 + \left(\frac{V_{1_{ideal}}}{V_{2_{ideal}}} \right)^2 \dot Z_2 \right] + \frac{V_{1_{ideal}}}{V_{2_{ideal}}}\dot V_2$$

$$\frac{\dot V_{1fn}}{V_{b1}} = \frac{\dot I_1}{\sqrt{3} I_{b1}} \frac{\dot Z_1^{tot}}{\frac{V_{b1}}{\underbrace{\sqrt{3} I_{b1}}_{S_{b3\phi}}}} + \frac{V_{1_{ideal}}}{V_{2_{ideal}}} \frac{\dot V_{2fn}}{V_{b2}} \frac{V_{b2}}{V_{b1}}$$

Si se eligen los voltajes bases de ambos sectores iguales a la relación de vueltas, ¡todo se simplifica!

$$\dot V_{1ff}[p.u.] = \dot I_1 [p.u.] \dot Z_1^{tot}[p.u.] + \dot V_{2ff}[p.u.] \frac{V_{b2}}{V_{b1}} \frac{V_{1_{ideal}}}{V_{2_{ideal}}}$$

Potencia activa y reactiva monofásica.

- La potencia instantánea consumida por una carga es:

$$
\begin{aligned}
p(t) = v(t)i(t) &= \sqrt{2}V_{rms}\cos(\omega t)\sqrt{2}I_{rms}\cos(\omega t+\varphi) \\
&= 2V_{rms}I_{rms}\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi) \\
&= \underbrace{V_{rms}I_{rms}\cos(\varphi)}_{\text{Constante...¿Conocido?}} + \underbrace{V_{rms}I_{rms}\cos(2\omega t+\varphi)}_{\text{Oscila al doble de } \omega}
\end{aligned}
$$

- Expandiendo el término oscilante:

$$p(t) = V_{rms}I_{rms}\cos(\varphi) + V_{rms}I_{rms}\cos(\varphi)\cos(2\omega t) - V_{rms}I_{rms}\sin(\varphi)\sin(2\omega t)$$

$$p(t) = P(1+\cos(2\omega t)) - Q\sin(2\omega t)$$

Potencia Activa

Potencia Reactiva

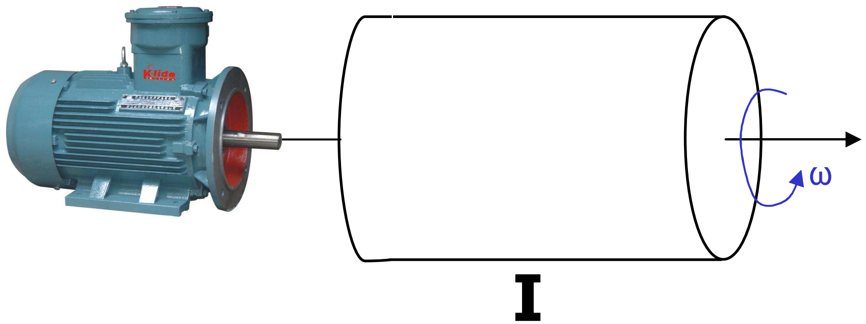
¡Bautizo!

Potencia activa y reactiva monofásica.

- **Al integrar en un periodo la potencia instantánea:**
  - **El primer término nunca es cero, pero oscila.**
  - **El segundo término es cero, por lo que no produce trabajo útil.**

- **Para probar lo anterior, analizaremos el sistema físico de la derecha. Calcularemos cuál es el trabajo que desarrolla en un ciclo cada componente de la potencia instantánea.**

$$p(t) = P\left(1+\cos\left(2\omega t\right)\right) - Q\sin\left(2\omega t\right)$$



Potencia activa y reactiva monofásica.

- **Concepto de potencia compleja:**

$$\dot{V} = F\left\{v(t)\right\} = F\left\{\sqrt{2}V_{rms}\cos(\omega t)\right\} = V_{rms}$$

$$\dot{I} = F\left\{i(t)\right\} = F\left\{\sqrt{2}I_{rms}\cos(\omega t + \varphi)\right\} = I_{rms}e^{j\varphi}$$

$$\dot{S} = \dot{V}\dot{I}^{*} = V_{rms}I_{rms}\cos\varphi + jV_{rms}I_{rms}\sin\varphi = P + jQ$$

- **La forma de la expresión anterior se debe en parte al uso de valores efectivos en la definición de fasores.**

Potencia activa y reactiva trifásica.

- **La potencia instantánea en un sistema trifásico es:**

$$p(t)_{3\phi} = v_a(t)i_a(t) + v_b(t)i_b(t) + v_c(t)i_c(t)$$

- **Si el sistema es equilibrado:**

$$p(t)_{3\phi} = 2V_{rms}I_{rms}\begin{bmatrix} \cos(\omega t)\cos(\omega t-\varphi)+\cos(\omega t-120°)\cos(\omega t-\varphi-120°)+ \\ \cos(\omega t+120°)\cos(\omega t-\varphi+120°) \end{bmatrix}$$

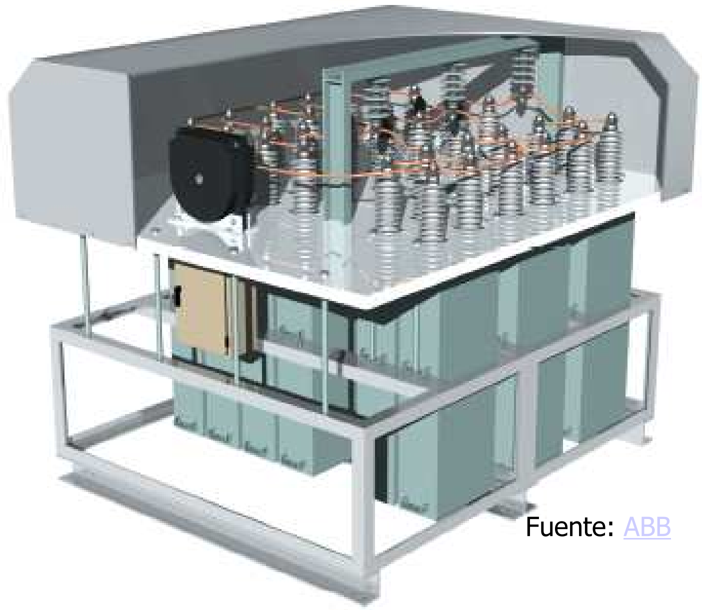
$$p(t)_{3\phi} = V_{rms}I_{rms}\left[3\cos(\varphi)+\underbrace{\cos(2\omega t+\varphi)+\cos(2\omega t+\varphi-240°)+\cos(\omega t-\varphi+240°)}_{0}\right]$$

$$\boxed{p(t)_{3\phi} = 3V_{rms}I_{rms}\cos\varphi}$$

Potencia activa y reactiva trifásica

- La potencia activa es constante y genera trabajo neto no nulo en un ciclo.
- A diferencia del caso monofásico, no tiene "componente reactiva", pero existe componente reactiva en cada una de las fases.
- Por un asunto de uniformidad, se asume que existe una potencia reactiva trifásica y $Q_{3f}=3Q_{1f}$
- ¿Qué potencia es esta si no "existe" la potencia reactiva trifásica?

A metal enclosed capacitor bank for 4.5 - 24 kV



Fuente: ABB

Technical Data SIKAP

Power	Up to 18 Mvar
Voltage	4.5 - 24 kV
Frequency	50 / 60 Hz
Connection	Y or YY
Unbalance detection (YY)	Current transformer
Protection degree	IP 44
Temperature range	-40 to +40 C (Others on request)
Installation	Indoor / Outdoor