EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.23: Demodulación Digital

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

3 de Noviembre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Motivación

- La modulación digital transforma secuencias de símbolos de un alfabeto discreto en señales analógicas.
- En esta clase nos preocuparemos del proceso inverso.
- Veremos que los principios de detección son generales y pueden ser aplicados en una gran variedad de campos.

Algo de Léxico (1)

- La demodulación digital de señales corresponde al proceso inverso al realizado por el modulador, y por lo tanto, toma pulsos o señales analógicas, y las convierte en secuencias de símbolos.
- En la literatura, este proceso se encuentra bajo diferentes nombres:
  - detección,
  - toma de decisiones,
  - test de hipótesis,
  - decodificación.

Algo de Léxico (2)

- La palabra **detección** se utiliza para determinar la ocurrencia de un determinado fenómeno basado en un conjunto de observaciones:
  - sistema de radar,
  - sistemas de control de calidad,
  - pruebas médicas.
- En el ámbito de comunicaciones digitales, el problema de demodulación corresponde a determinar si una señal ha sido o no enviada.

Algo de Léxico (3)

- El término **toma de decisión** se reserva para cuando el dispositivo debe determinar un opción entre dos.
- El término **test de hipótesis** tiene una acepción similar a la de toma de decisión, excepto que involucra un número mayor de opciones.
- Finalmente, la palabra **decodificación** se refiere al mismo problema pero interpretando la señal recibida como una palabra de código en lugar de una señal propiamente tal.

Detección en Canales sin Ruido (1)

- Vamos a comenzar nuestro estudio considerando la demodulación de secuencias digitales en el caso de canales sin ruido.
- Estas condiciones las hemos estudiado en forma parcial cuando propusimos el criterio de Nyquist para selección de pulsos de forma.
- En general, el problema de demodulación corresponde a la recuperación de la secuencia $\{a_l\}$ a partir de la señal

$$r(t) = c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT)$$

donde $s(t)$ es un pulso de Nyquist.

Detección en Canales sin Ruido (2)

- Esto se logra "filtrando" $c(t)$ con un filtro $q(t)$ adecuado.
- Definamos la salida del filtro demodulador como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau)q(t-\tau)d\tau. \tag{1}$$

- Nuestro objetivo es determinar reglas para determinar $q(t)$ a partir de $s(t)$ de forma que

$$y(lT) = a_l \tag{2}$$

Detección en Canales sin Ruido (3)

- Reemplazando la expresión para $c(t)$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(\tau - lT) q(t-\tau) d\tau \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - lT) q(t-\tau) d\tau \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) q(t - lT - \tau) d\tau \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l g(t - lT)
\end{aligned}
$$

Detección en Canales sin Ruido (5)

- donde $g(t)$ es la respuesta del filtro.
- Por lo tanto,

$$y(l'T) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l g((l' - l)T)$$

- En el caso que no hay ruido, la selección obvia de

$$g(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0. \end{cases}$$

para así evitar interferencia intersimbólica.

Detección en Canales sin Ruido (6)

- Esto implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)q((l'-l)T-\tau)d\tau = \delta_{ll'}$$

- Si $l = l'$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)q(-\tau)d\tau = 1$$

- Como $s(t)$ tiene soporte en $[0, T]$, una forma en que esta ecuación tenga solución es elegir $q(t) = s(-t)$. En ese caso tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)s(\tau)d\tau = 1$$

Detección en Canales sin Ruido (7)

- Esta elección funciona también para $l \neq l'$, pues la señal $s(t)$ debe ser ortogonal a sus desplazamientos en el tiempo.
- Por lo tanto, una buena elección para $q(t) = s(-t)$.
- Este filtro recibe el nombre de **filtro adaptado** o **matched filter**.
- Esta solución para demodulación resulta bastante más general que lo visto hasta este momento; revisitaremos este tema una vez visto algunas técnicas de detección estadística.

Detección en Canales con Ruido (1)

- El problema que de detección que vamos a estudiar es el siguiente. Para ello utilizaremos un enfoque probabilístico.
- Vamos a considerar primero que existe un número finito posibles mensajes, y por lo tanto, un número finito de hipótesis asociadas a cada uno de ellos.
- Estos eventos son:
  - **mutuamente excluyentes**: no pueden ocurrir dos en forma simultánea,
  - **comprensivos**: abarcan todo el espacio de posibles resultados.

Detección en Canales con Ruido (2)

- Consideremos que un problema de detección queda definido por M hipótesis $h_0, h_1, \ldots, h_{M-1}$.
- Si c representa la salida del transmisor, entonces, ésta define una variable aleatoria C que, para cada m, toma el valor h_m con probabilidad $P_C(h_m)$.
- Esta es la *probabilidad a-priori* que la hipótesis h_m sea verdadera.
- Para poder tomar decisiones, uno aprovecha las observaciones realizadas por el receptor, que denotaremos por una segunda variable aleatoria R.

Detección en Canales con Ruido (3)

- Nuestra intención es utilizar las mediciones por el receptor para determinar el cuál de las M hipótesis tiene la mayor probabilidad de ser la correcta.
- Por ejemplo, consideremos el caso de detección binaria. En este caso, existen dos posibles hipótesis:

$$h_0 : a_l = -A$$

$$h_1 : a_l = +A$$

Detección en Canales con Ruido (4)

- Supongamos que

$$P(a_l = +A) = 2/3$$

 y

$$P(a_l = -A) = 1/3.$$

- Simplemente decidir en favor de h_0 sin importar la observación puede llevarnos a una detección incorrecta del símbolo.
- Podría ser que la probabilidad del símbolo $P(r_l > 0) = 0{,}9$ y que $P(r_l \leq 0) = 0{,}1$.
- Entonces las observación del símbolo puede alterar el criterio de decisión.

La regla MAP (1)

- Existen diversos criterios para tomar decisiones.
- El primero que vamos a considerar es el de **maximizar la probabilidad de hacer la elección correcta** basado en las observaciones que se hagan en el receptor.
- Ello significa que necesitamos definir una regla (o reglas) de decisión que asignen $\bar{c}(r) = h_m$ si h_m es correcta.

La regla MAP (2)

- En la práctica, la regla de decisión es el argumento que maximiza las probabilidades condicionales $P_{C|R}(h_m|r)$, esto es

$$\bar{c}(r) = \mathrm{argmax}_m P_{C|R}(h_m|r) \tag{3}$$

- Este criterio de decisión se conoce como la **regla MAP** o regla de máximo probabilidad a-posteriori.

La regla MAP (3)

- La regla MAP requiere de ciertas condiciones para poder ser aplicada:
  - Se conocen las probabilidades a priori de cada hipótesis.
  - El criterio de maximizar la probabilidad de decisión correcta es adecuado para el problema.
- Si existe un costo demasiado alto por cometer errores, entonces esta regla no entrega un criterio de decisión apropiado.
- Sin embargo, con pequeñas modificaciones se puede derivar una regla que resuelva este nuevo criterio

Detección Binaria (1)

- Consideremos un modelo de probabilidad donde H es una variable binaria que toma uno de dos valores posibles $\{h_0, h_1\}$, con probabilidades a-priori p_0 y p_1.
- En el contexto de comunicaciones es usual fijar $p_0 = p_1 = 1/2$, y en general, equiprobable si hay más de dos mensajes posibles.
- Sea R una variable aleatoria cuya densidad probabilidad condicional dado H es

$$0 < f_{R|H}(r|h_m) < \infty, m \in \{0, 1\}.$$

Detección Binaria (2)

- La función $f_{R|H}(r|h_m)$ recibe el nombre de **verosimilitud** (*likelihood*) en la jerga de test de hipótesis.
- La densidad marginal de R es

$$f_R(r) = f_{R|H}(r|h_0)p_0 + f_{R|H}(r|h_1)p_1 \tag{4}$$

- Esto se consigue aplicando la regla de Bayes.
- Por lo tanto, la probabilidad a posteriori de H es

$$f_{H|R}(h_m|r) = \frac{p_m f_{R|H}(r|h_m)}{f_R(r)}$$

Detección Binaria (3)

- La regla de maxima probabilidad a posteriori puede ser enunciada como sigue:

$$\text{Si } f_{H|R}(h_0|r) \geq f_{H|R}(h_1|r) \text{ decidir } h_0$$
$$\text{Si } f_{H|R}(h_0|r) < f_{H|R}(h_1|r) \text{ decidir } h_1$$

- Notemos que podemos eliminar $f_R(r)$ de ambas ecuaciones para obtener

$$\text{Si } f_{R|H}(r|h_0)p_0 \geq f_{R|H}(r|h_1)p_1 \text{ decidir } h_0$$
$$\text{Si } f_{R|H}(r|h_0)p_0 < f_{R|H}(r|h_1)p_1 \text{ decidir } h_1$$

Detección Binaria (4)

- Definiendo la razón de verosimilitudes

$$\Lambda(r) = \frac{f_{R|H}(r|h_0)}{f_{R|H}(r|h_1)} \tag{5}$$

entonces la regla MAP se escribe como

$$\text{Si } \Lambda(r) \geq \eta \text{ decidir } h_0$$

$$\text{Si } \Lambda(r) < \eta \text{ decidir } h_1$$

donde $\eta = p_1/p_0$ es el *umbral de decisión*.

Detección Binaria (5)

- En el caso que $p_0 = p_1 = 1/2$ la regla se se reescribe como

$$\text{Si } \Lambda(r) \geq 1 \text{ decidir } h_0$$

$$\text{Si } \Lambda(r) < 1 \text{ decidir } h_1$$

y recibe el nombre especial de criterio o **regla de máxima verosimilitud**.

Desempeño del Detector Binario (1)

- La **probabilidad de error** es la medida de desempeño más utilizada para evaluar el trabajo de un detector (independiente de si es binario o no).
- Se define como

$$p_e \equiv \Pr\{\text{Error}\} = 1 - \Pr\{h_m \text{ es correcto}\}. \tag{6}$$

- Podemos encontrar una expresión en términos de las probabilidades condicionales:

$$p_e = p_0 \Pr\{e|H = h_0\} + p_1 \Pr\{e|H = h_1\}$$

Desempeño del Detector Binario (2)

- Ambas probabilidades condicionales reciben nombres especiales dependiendo del campo de aplicación.
- En radares, el término $\Pr\{e|H = h_0\}$ se denomina probabilidad de falsa alarma, y $\Pr\{e|H = h_1\}$ probabilidad de pérdida.
- En estadística, el término $\Pr\{e|H = h_0\}$ se denomina probabilidad de error de primera especie, y $\Pr\{e|H = h_1\}$ probabilidad de error de segunda especie.

Desempeño del Detector Binario (3)

- La regla MAP binaria particiona el espacio de observaciones en dos regiones:

$$\mathcal{R}_0 = \{r | \Lambda(r) \geq \eta\}$$
$$\mathcal{R}_1 = \{r | \Lambda(r) \ < \eta\}$$

Desempeño del Detector Binario (4)

- Ocurrirá un error de detección si pasa lo siguiente:

$$H = h_0 \text{ y } r \in \mathcal{R}_1$$
$$H = h_1 \text{ y } r \in \mathcal{R}_0.$$

- Por lo tanto,

$$\Pr\{e|H = h_0\} = \int_{\mathcal{R}_1} f_{R|H}(r|h_0)dr, \tag{7}$$
$$\Pr\{e|H = h_1\} = \int_{\mathcal{R}_0} f_{R|H}(r|h_1)dr. \tag{8}$$

Detección de Señales PAM (1)

- Considere un esquema modulación PAM del tipo

$$A_l \in \{-a, a\}$$

$$C(t) = \sum_{l=\infty}^{\infty} A_l s(t - lT)$$

para algún pulso de Nyquist $s(t)$.

Detección de Señales PAM (2)

- Suponga que la señal recibida por el receptor es

$$R(t) = C(t) + N(t) \tag{9}$$

  donde $n(t)$ es un proceso de ruido blanco aditivo Gaussiano de potencia $N_0/2$.

- Ello es,

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\Big(- \frac{n^2}{N_0}\Big).$$

Detección de Señales PAM (3)

- Consideremos que el sistema previene interferencia intersimbólica, de modo que podemos estudiar el problema como si fueran sólo variables aleatorias en lugar de procesos;
- ello significa que consideramos

$$R = C + N$$

Detección de Señales PAM (4)

- Pero C puede tomar sólo dos valores: $+a$ o $-a$. Por lo tanto

$$R = +a + N$$

o bien

$$R = -a + N$$

dependiendo de si $C = a$ o $C = -a$.

Detección de Señales PAM (5)

- Las densidades condicionales son entonces:

$$f_{R|H}(r|+a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\Big(- \frac{(r-a)^2}{N_0} \Big)$$

y

$$f_{R|H}(r|-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\Big(- \frac{(r+a)^2}{N_0} \Big)$$

Detección de Señales PAM (6)

- La razón de verosimilitud es

$$\begin{aligned}\Lambda(r) &= \frac{f_R|H(r|+a)}{f_R|H(r|-a)} \\ &= \exp\left(\frac{-(r-a)^2+(r+a)^2}{N_0}\right) \\ &= \exp\left(\frac{4ra}{N_0}\right)\end{aligned}$$

Detección de Señales PAM (7)

- Notemos que podemos calcular el logaritmo de $\Lambda(r)$ para obtener una regla aun más simple:

$$\log(\Lambda(r)) = \frac{4ra}{N_0}$$

por lo tanto definimos la regla MAP como sigue:

$$\text{Si } r \geq \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a} \text{ decidir } a_l = a$$
$$\text{Si } r < \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a} \text{ decidir } a_l = -a.$$

Detección de Señales PAM (8)

- La probabilidad de error, dado que $C = -a$ corresponde a la probabilidad que

$$r \geq \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a},$$

o equivalentemente que

$$n = r - c > \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a} + a. \tag{10}$$

- Dado que N es una variable aleatoria Gaussiana, podemos expresar esta probabilidad en términos de la función $Q(\cdot)$

Detección de Señales PAM (9)

- Recordar que

$$Q(x) \triangleq \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{u^2}{2}\Big) du.$$

- Debemos reescalar $N(t)$ de modo que sea $\mathcal{N}(0,1)$.
- Ello se logra definiendo $N/\sqrt{N_0/2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Pr\{e|C=-a\} &= \Pr\left\{\frac{N}{\sqrt{N_0/2}} > \frac{\sqrt{N_0/2}\log_e(\eta)}{2a} + \frac{a}{\sqrt{N_0/2}}\right\} \\ &= Q\Big(\frac{\sqrt{N_0/2}\log_e(\eta)}{2a} + \frac{a}{\sqrt{N_0/2}}\Big)\end{aligned}$$

Detección de Señales PAM (10)

- La probabilidad de error que para el caso $H = +a$ se calcula siguiendo el mismo procedimiento. En este debemos obtener una condición para que

$$-N \geq a - \frac{N_0 \log_e \eta}{4a}.$$

- Ello produce

$$\Pr\{e|C = +a\} = Q\Big(- \frac{\sqrt{N_0/2} \log_e(\eta)}{2a} + \frac{a}{\sqrt{N_0/2}}\Big)$$

- Recordemos que en un esquema antipodal como PAM, la energía por bit era $\mathcal{E}_b = a^2$.

Detección de Señales PAM (11)

- Por lo tanto, ambas probabilidades de error pueden escribirse en términos de la energía por bit del esquema, como sigue:

$$\Pr\{e|C=-a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} + \frac{\log_e(\eta)}{2\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}}\right) \tag{11}$$

$$\Pr\{e|C=+a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} - \frac{\log_e(\eta)}{2\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}}\right) \tag{12}$$

- En el caso que $p_0 = p_1 = 1/2$, la regla MAP se transforma en la regla ML (maximum likelihood).

Detección de Señales PAM (12)

- Por lo tanto

$$\eta = 1$$

y

$$\Pr\{e\} = \Pr\{e|C = -a\} = \Pr\{e|C = +a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right). \quad (13)$$

Resumen

Hemos revisado:

- Principios de detección en canales con y sin ruido.
- Regla MAP y ML.
- Medidas de desempeño para señalización digital.
- Ejemplo: señalización PAM

Lecturas

- R. Gallager, *Principles of Digital Communication*, capítulo 6, secciones 6.1 a 6.3.
- (Complementario) R. Blahut, *Modem Theory: An Introduction to Telecommunications*, capítulo 3.