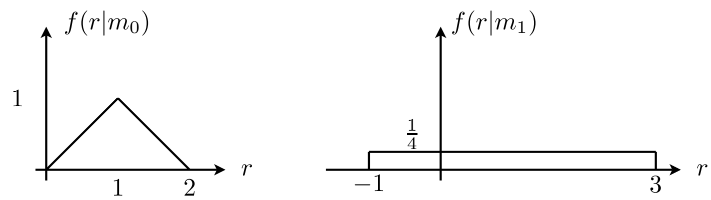
Guía de Problemas No.6

Problemas

1. Un sistema de comunicaciones es usado para transmitir uno de dos mensajes igualmente probables, m_0 y m_1. La salida del canal es una variable aleatoria continua r, y sus densidades condicionales $f(r|m_0)$ y $f(r|m_1)$ son las mostradas en la figura.



   Determine la regla de decisión óptima y calcule la probabilidad de error resultante.

2. Sea $g(t)$ el filtro adaptado para el pulso $s(t)$. Supongamos que en lugar de $g(t)$, utilizamos el filtro
$$g_\epsilon(t) = g(t) + \epsilon h(t) \tag{1}$$
   donde $h(t)$ tiene energía finita y ϵ es un número pequeño. Demuestre que la razón señal-a-ruido a la salida del filtro decrece en forma cuadrática con ϵ, esto es, la expansión en serie de S/N es
$$\frac{S}{N} = \left(\frac{S}{N}\right) - \epsilon^2 A + \ldots$$
   para una constante positiva A. Qué implicancias tiene este hecho en lo que respecta al cuidado con que se debe construir el filtro adaptado?

3. Vamos a transmitir un mensaje dentro de dos posibles mensajes, igualmente probables, m_0 y m_1, en un canal aditivo blanco y Gaussiano por medio de las señales
$$s_0(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_1 t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
$$s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi (f_1 + \Delta) t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   donde $T = 2$ ms, $f_1 = 1$ MHz, y $\Delta = 250$ Hz. El ruido tiene una densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$. Si $E_s/N_0 = 6$, calcule la probabilidad de error con dos decimales. Repita si $\Delta = 500$Hz.

4. Dos señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ dadas por
$$s_0(t) = -s_1(t) = e^{-t}u(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$
   son utilizadas con igual probabilidad sobre un canal con ruido blanco aditivo Gaussiano. El receptor basa su decisión solo en las observaciones del proceso recibido
$$r(t) = s(t) + n(t)$$

sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2$. Determine la probabilidad de error mínima alcanzable P_e en función de la función $Q(\cdot)$.

Contraste numéricamente con el desempeño al utilizar un receptor óptimo que observa $r(t)$ en todo el intervalo $-\infty < t < \infty$.

5. Demuestre las siguientes desigualdades:

$$Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}, \ \forall x > 0$$
$$Q(x) > \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2}, \ \forall x > 0$$

Indicación: considere que la integral

$$\int_x^\infty e^{-y^2/2} dy = \int_x^\infty \frac{1}{y} \left(y e^{-y^2/2} \right) dy$$

e integre por partes.

6. Un transmisor utiliza las señales $\{s_i(t)\}$ para comunicarse uno de $M > 2$ mensajes igualmente probables, utilizando un canal con ruido blanco aditivo Gaussiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$, donde

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t + \frac{2\pi i}{M}\right) & 0 \leq t < T, \ k \in \mathbb{Z}. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Dibuje los representación vectorial de las señales (la constelación) y las regiones óptimas de decisión para $M = 5$.

(b) Utilizando argumentos geométricos, demuestre que la probabilidad de error menor lograble es acotada por

$$p \leq P_e \leq 2p$$

donde

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M} \right).$$

7. Una forma de onda antipodal

$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT), \quad a_l = \begin{cases} A & x[l] = 1 \\ -A & x[l] = 0 \end{cases}$$

donde $x[l]$ es el tren de bits a la entrada del modulador, es transmitido sobre un canal con ruido blanco aditivo Gaussiano. Se utiliza un filtro adaptado para hacer la demodulación, y luego una bloque de detección donde se toma una decisión basado en tres casos:

$$x < -\frac{A}{2} \text{ declarar el bit de datos } = 0$$
$$x > +\frac{A}{2} \text{ declarar el bit de datos } = 1$$
$$\text{en otro caso} \text{declarar el bit como perdido.}$$

(a) Determine una expresión para la probabilidad de error del detector en términos de la función $Q(\cdot)$.

(b) Determine una expresión para la probabilidad de perder un símbolo en el detector en términos de la función $Q(\cdot)$.