

EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.27: Diseño Óptimo de Receptores Digitales III



Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

17 de Noviembre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Detectores para Modulación M -aria

Resumen y Lecturas

Motivación

- Mayores velocidades de transferencia de información requieren de utilizar alfabetos más grande que el binario.
- ¿Cómo generalizan los principios de demodulación binaria óptima para el caso de alfabetos con M símbolos?

Detectores para Modulación M -aria (1)

- El objetivo de la modulación M -aria es enviar en forma simultánea grupos de símbolos, en lugar de hacerlo en forma individual.
- En la primera parte de este capítulo estudiamos varias formas de lograr este objetivo:

Detectores para Modulación M -aria (2)

(1) **PAM** M -ario.

En este caso $M = 2^k$ y se utiliza un solo pulso de forma $\varphi(t)$.

$$s_m(t) = s_m \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

donde $\varphi(t)$ es un pulso de Nyquist.

En general, la amplitud

$$s_m = (2m - 1 - M)A, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

para algún valor positivo A .

Detectores para Modulación M -aria (3)

(2) **Ortogonal M -aria**

En este caso se utiliza un conjunto de señales ortogonales $s_m(t)$ con un amplitud fija A .

$$s_m(t) = s_m \varphi_m(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

(3) **Simplex de Señales**

Corresponde a una construcción que se hace a partir de cualquier conjunto ortogonal de señales. En este caso se define

$$s'_m(t) = s_m(t) - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M s_l(t).$$

Detectores Óptimos para Señalización M -aria

en el Canal AWGN

- Vamos a asumir que el sistema de transmisión utiliza señalización ortogonal M -aria, donde $M = 2^k$, para algún k entero.
- El canal bajo estudio es un canal bajo ruido aditivo blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$, de modo que

$$r(t) = s_m(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

- Nuestra intención es diseñar un sistema que basado en la observación $r(t)$ pueda estimar la secuencia $(b_1, \dots, b_k)$ transmitida, minimizando la probabilidad de cometer un error.

Demodulador de Señal (1)

- Al igual que en el caso de demodulación binaria, vamos a separar el proceso en dos etapas: demodulación de la señal y detección.
- La función del demodulador de señal es convertir $r(t)$ en un vector N -dimensional $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$, donde N es la dimensión del espacio de señales transmitidas.
- La función del detector es decidir cual de las posibles M señales fue la transmitida, basado en la observación del vector $\mathbf{y}$.

Demodulador de Señal (2)

- En este caso, cada señal $s_m(t)$ puede ser representada por

$$s_m(t) = \sum_{k=1}^N s_{mk} \varphi_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

en términos de la base de señales ortogonales $\{\varphi_k(t)\}$ que generan el espacio completo de señales $\{s_m(t)\}$.

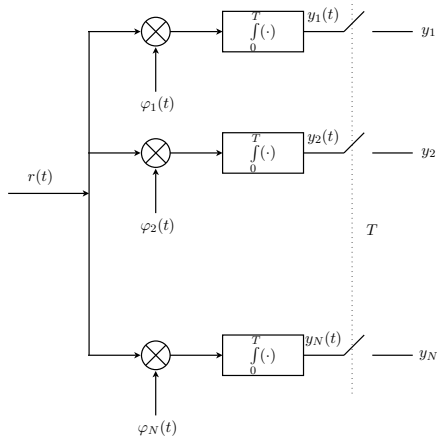
Demodulador de Señal (3)

- Utilizando el sistema de coordenadas derivado de la representación geométrica del espacio de señales:

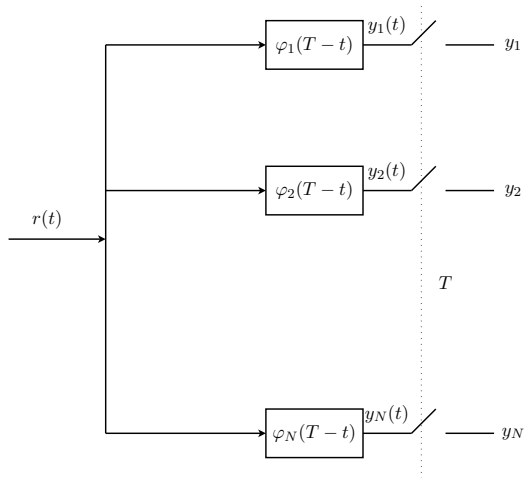
$$\mathbf{s}_m = (s_{m1}, \dots, s_{mN}), \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

- Tendremos dos tipos de demoduladores: del tipo correlador, que consiste en N correladores en paralelo, o del tipo filtro adaptado, que consiste de N filtros adaptados en paralelo.

Demodulador Tipo Correlador



Demodulador Tipo Filtro Adaptado



Análisis (1)

- Se se recibe la señal $r(t)$ tenemos (en el caso de usar un demodulador tipo correlador), en la rama k -ésima

$$\int_0^T r(t)\varphi_k(t)dt = \int_0^T [s_m(t) + n(t)]\varphi_k(t)dt$$
$$y_k = s_{mk} + n_k \quad (2)$$

Análisis (2)

donde

$$s_{mk} = \int_0^T s_m(t) \varphi_k(t) dt$$
$$n_k = \int_0^T n(t) \varphi_k(t) dt$$

- Podemos escribir la ecuación en forma vectorial:

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n} \tag{3}$$

Análisis (3)

- Notemos que en general, tenemos

$$\begin{aligned}r(t) &= \sum_{k=1}^N s_{mk} \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^N n_k \varphi_k(t) + n'(t) \\ &= \sum_{k=1}^N y_k \varphi_k(t) + n'(t)\end{aligned}$$

donde

$$n'(t) = n(t) - \sum_{k=1}^N n_k \varphi_k(t)$$

Análisis (4)

es un proceso Gaussiano de media cero que representa la diferencia entre el proceso de ruido original $n(t)$ y la parte que corresponde a la proyección $n(t)$ en la base $\{\varphi_k(t)\}$.

- Vamos a ver que $n'(t)$ no juega ningún rol en la determinación del valor de la señal transmitida, y por lo tanto, la decisión se puede basar en forma exclusiva en y_k .

Análisis (5)

- Notemos que tenemos los siguientes resultados respecto de $\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[n_k] &= \int_0^T \mathbb{E}[n(t)] \varphi_k(t) dt \\ \mathbb{E}[n_k n_m] &= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[n(t)n(\tau)] \varphi_k(t) \varphi_m(\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t - \tau) \varphi_k(t) \varphi_m(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \delta_{mk}.\end{aligned}$$

Análisis (6)

- Por lo tanto, $\mathbf{n}$ es una Gaussiana multivariada de media cero y matriz de covarianza $\frac{N_0}{2}I$, es decir

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left(- \sum_{i=1}^N \frac{n_i^2}{N_0} \right). \quad (4)$$

Análisis (7)

- Las salidas del correlador, condicional en la transmisión de la señal $s_m(t)$ son variables aleatorias Gaussianas de valor medio

$$\mathbb{E}[y_k] = \mathbb{E}[s_{mk} + n_k] = s_{mk},$$

y varianza

$$\mathbb{E}[y_k^2] = \frac{N_0}{2}.$$

Análisis (8)

- Dado que los n_k son independientes, ello implica que los y_k también lo son. Ello simplifica el cálculo de la función densidad de probabilidad conjunta $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$, condicional en $\mathbf{s}_m$:

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) = \prod_{k=1}^N f(y_k|s_{mk}), \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

donde

$$f(y_k|s_{mk}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y_k - s_{mk})^2}{N_0}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Análisis (9)

- Por lo tanto,

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left(- \sum_{i=1}^N \frac{(y_k - s_{mk})^2}{N_0} \right) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left(- \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2 / N_0 \right) \quad (6)$$

- ¿Es $\mathbf{y}$ suficiente para determinar $\mathbf{s}_m$? En otras palabras, ¿existe alguna otra información que pudiésemos extraer de $n'(t)$ para mejorar nuestra estimación de $\mathbf{s}_m$?
- Vamos a demostrar que $n'(t)$ no está correlacionadas con las salidas $\{y_k\}$.

Análisis (10)

- Primero, calculamos la correlación entre $n'(t)$ e y_k :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[n'(t)y_k] &= \mathbb{E}[n'(t)s_{mk}] + \mathbb{E}[n'(t)n_k] \\ &= \mathbb{E}[n'(t)n_k] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(n(t) - \sum_{j=1}^N n_j \varphi_j(t)\right)n_k\right] \\ &= \int_0^T \mathbb{E}[n(t)n(\tau)]\varphi_k(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[n_j n_k]\varphi_j(t) \\ &= \frac{N_0}{2}\varphi_k(t) - \frac{N_0}{2}\varphi_k(t) = 0.\end{aligned}$$

Análisis (11)

- Esto implica que $n'(t)$ y r_k no están correlacionadas, y como $n'(t)$ e y_k son Gaussianas, entonces son independientes.
- De esta forma, $n'(t)$ es estadísticamente irrelevante para la decidir qué señal fue la transmitida.
- Este resultado es válido tanto para demoduladores tipo correlador como filtro adaptado.

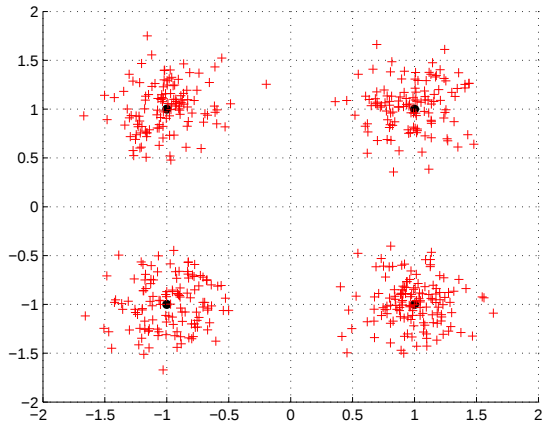
Detector Óptimo (1)

- Cuando se transmite una señal s_m en un canal AWGN, la señal demodulada es un vector $\mathbf{y}$ que contiene toda la información relevante acerca de la señal transmitida.
- El vector $\mathbf{y}$ es la suma de dos vectores: el vector de señal s_m , y un vector de ruido $\mathbf{n}$.
- El primero es un punto en una constelación de señales, mientras que $\mathbf{n}$ es un vector cuyas componentes son Gaussianas, independientes, de media 0 y varianza $N_0/2$.

Detector Óptimo (2)

- Por ello, $\mathbf{n}$ tiene simetría esférica en torno a cada punto de la constelación, que usualmente se representa como una “nube” de simetría esférica en torno a $\mathbf{s}_m$.
- El valor $N_0/2$ determina el “radio” de la esfera: si N_0 es pequeño, las nubes estarán altamente concentradas en torno a $\mathbf{s}_m$.
- Si el valor es grande, la nube estará más “esparcida” en el espacio.

Detector Óptimo (3)



Detector Óptimo (4)

- Deseamos construir un decodificador que maximice la probabilidad a posteriori del dispositivo, es decir:

$$\max_m \Pr\{\text{la señal } \mathbf{s}_m \text{ fue transmitida} | \mathbf{y}\}.$$

- Utilizando la regla de Bayes tenemos

$$P(\mathbf{s}_m | \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) P(\mathbf{s}_m)}{f(\mathbf{y})}, \quad (7)$$

donde

$$f(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^M f(\mathbf{y} | \mathbf{s}_m) P(\mathbf{s}_m).$$

Detector Óptimo (5)

- De las expresiones que vimos antes, tenemos que la función de log-verosimilitud es

$$\log_e f(\mathbf{y}|\mathbf{s}_m) = -\frac{N}{2} \log_e(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (y_k - s_{mk})^2 \quad (8)$$

$$= -\frac{N}{2} \log_e(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}_m\|^2. \quad (9)$$

- El criterio de máxima verosimilitud es equivalente a determinar la señal $\mathbf{s}_m$ que minimiza la distancia Euclidiana con $\mathbf{y}$, por lo que el criterio recibe el nombre alternativo de **detección de distancia mínima**.

Detector Óptimo (6)

- Notar que

$$||\mathbf{y} - \mathbf{s}_m||^2 = ||\mathbf{y}||^2 - 2 < \mathbf{y}, \mathbf{s}_m > + ||\mathbf{s}_m||^2, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

- Como el término $||\mathbf{y}||^2$ es común a todos los términos, el problema se simplifica a determinar m^* tal que

$$\mathbf{s}_{m^*} = \underset{m}{\operatorname{argmin}} \quad -2 < \mathbf{y}, \mathbf{s}_m > + ||\mathbf{s}_m||^2 \quad (10)$$

Detector Óptimo (7)

- Notemos finalmente que si todas las señales tienen la misma energía, esto es $\|s_m\|^2 = \mathcal{E}_M$, el criterio se simplifica a determinar la señal que maximiza la correlación entre la señal $\mathbf{y}$ y s_m .
- Por lo tanto, el demodulador tipo correlador, o equivalentemente el de filtro adaptado, son óptimos en el sentido que maximizan la probabilidad a posteriori del decodificador.

Resumen

Hemos revisado:

- Problema de detección M -aria.
- Generalización de detección óptima: MAP, ML y mínima distancia.

Lecturas

- Proakis & Salehi, *Communication System Engineering*, capítulo 7, secciones 7.5 y 7.6
- R. Blahut, *Modem Theory: An Introduction to Telecommunications*, capítulo 3.