

# EL4005 Principios de Comunicaciones

## Clase No.26: Diseño Óptimo de Receptores Digitales II



Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Chile

12 de Noviembre de 2010

# Contenidos de la Clase (1)

---

Propiedades del Filtro Adaptado

Detectores para Modulación  $M$ -aria

Resumen y Lecturas

# Motivación

---



## Propiedades del Filtro Adaptado (1)

---

- El filtro adaptado tiene algunas propiedades que lo hacen relevante al momento seleccionar demoduladores.
- La propiedad más interesante es la siguiente:

### Teorema

Si una señal  $s(t)$  sufre de ruido blanco aditivo Gaussiano, el filtro cuya respuesta al impulso se ajusta a  $s(t)$  maximiza la razón señal-a-ruido a la salida del detector.

## Propiedades del Filtro Adaptado (2)

---

- Para demostrar este resultado consideremos la señal recibida

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

donde  $n(t)$  es un proceso Gaussiano de media 0 y densidad espectral de potencia  $N_0/2$ .

## Propiedades del Filtro Adaptado (3)

---

- Asumamos que  $r(t)$  pasa a través de un filtro  $h(t)$ , de modo que la señal a la salida del filtro es

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t r(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_0^t s(\tau)h(t - \tau)d\tau + \int_0^t n(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= y_s(t) + y_n(t).\end{aligned}$$

## Propiedades del Filtro Adaptado (4)

---

- En el instante de muestreo  $t = T$  tenemos

$$y(T) = y_s(T) + y_n(T).$$

- Las señales  $y_s(t)$  e  $y_n(t)$  representan las componentes de señal y ruido, respectivamente, en la señal  $y(t)$ .
- La razón señal-a-ruido a la salida del filtro es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{\mathbb{E}[y_s^2(T)]}{\mathbb{E}[y_n^2(T)]} \quad (1)$$

## Propiedades del Filtro Adaptado (5)

---

- El término del numerador es constante, por lo tanto

$$\mathbb{E}[y_s^2(T)] = y_s^2(T)$$

## Propiedades del Filtro Adaptado (6)

---

- La potencia de la porción de ruido en la señal es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[y_s^2(T)] &= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)n(t)]h(T-\tau)h(T-t)dtd\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(\tau-t)h(T-\tau)h(T-t)dtd\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T-t)dt\end{aligned}$$

## Propiedades del Filtro Adaptado (7)

---

Por lo tanto, la varianza de  $y_n(T)$  depende de la densidad espectral del ruido y de la energía de la respuesta al impulso  $h(t)$ .

- Sustituyendo en la expresión original tenemos

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{\left(\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau\right)^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T-t)dt}$$

## Propiedades del Filtro Adaptado (8)

---

- La maximización de la razón señal-a-ruido se debe hacer buscando el valor máximo del numerador manteniendo el valor de la energía

$$\int_0^T h^2(T-t)dt$$

constante.

## Propiedades del Filtro Adaptado (9)

---

- Para calcular el valor máximo del numerador, utilizaremos la desigualdad de Cauchy-Schwartz, que establece que para señales de energía  $g_1(t)$  y  $g_2(t)$  se tiene

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} g_2^2(t)dt \quad (2)$$

con igualdad si  $g_1(t) = Cg_2(t)$  para alguna constante arbitraria  $C$ .

## Propiedades del Filtro Adaptado (10)

---

- Definiendo

$$g_1(t) = h(T - t)\mathbf{1}_{[0,T]}, \quad g_2(t) = s(t)\mathbf{1}_{[0,T]},$$

tenemos que

$$\left[ \int_0^T h(T - t)s(t)dt \right]^2 \leq \int_0^T h^2(T - t)dt \int_0^T s^2(t)dt \quad (3)$$

## Propiedades del Filtro Adaptado (11)

---

- Por lo tanto

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{\left(\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau\right)^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T-t)dt} \leq \int_0^T s^2(t)dt.$$

- El valor máximo se alcanza cuando  $h(t) = s(T-t)$ , es decir, el filtro adaptado alcanza la máxima razón señal-a-ruido para un pulso de energía  $\mathcal{E}_s$  dado.

## Propiedades del Filtro Adaptado (12)

---

- En este caso,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}. \quad (4)$$

## Interpretación en el Dominio de la Frecuencia (1)

---

- Consideremos el filtro adaptado  $h(t) = s(T - t)$ . Su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_0^T s(T - t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \left[ \int_0^T s(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \right] e^{-j2\pi fT} \\ &= S^*(f) e^{-j2\pi fT}. \end{aligned}$$

- Por lo tanto,  $|H(f)| = |S(f)|$ , y  $\angle H(f) = -\angle S(f) - 2\pi fT$ .

## Interpretación en el Dominio de la Frecuencia (2)

---

- En consecuencia, la señal  $y(t) = s(t) * s(-t)$  tiene un espectro

$$Y(f) = |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT}.$$

- Por lo tanto, la componente de señal  $y_s(t)$  satisface

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT} e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

## Interpretación en el Dominio de la Frecuencia (3)

---

y en el instante de muestreo

$$y_s(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_0^T s^2(t) dt = \mathcal{E}_s. \quad (5)$$

(aplicando el Teorema de Parseval).

## Interpretación en el Dominio de la Frecuencia (4)

---

- La potencia total del ruido es

$$\begin{aligned}P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f)df \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2(f)df \\&= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2(f)df \\&= \frac{\mathcal{E}_s N_0}{2}\end{aligned}$$

## Interpretación en el Dominio de la Frecuencia (5)

---

- Finalmente, la relación señal-a-ruido es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{\mathcal{E}_s^2}{\mathcal{E}_s N_0} \cdot \frac{1}{2} \quad (6)$$

que es el mismo resultado que habíamos derivado originalmente.

## Detectores para Modulación $M$ -aria (1)

---

- El objetivo de la modulación  $M$ -aria es enviar en forma simultánea grupos de símbolos, en lugar de hacerlo en forma individual.
- En la primera parte de este capítulo estudiamos varias formas de lograr este objetivo:

## Detectores para Modulación $M$ -aria (2)

---

(1) **PAM  $M$ -ario.**

En este caso  $M = 2^k$  y se utiliza un solo pulso de forma  $\varphi(t)$ .

$$s_m(t) = s_m\varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

donde  $\varphi(t)$  es un pulso de Nyquist.

En general, la amplitud

$$s_m = (2m - 1 - M)A, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

para algún valor positivo  $A$ .

## Detectores para Modulación $M$ -aria (3)

---

### (2) Ortogonal $M$ -aria

En este caso se utiliza un conjunto de señales ortogonales  $s_m(t)$  con un amplitud fija  $A$ .

$$s_m(t) = s_m \varphi_m(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

### (3) Simplex de Señales

Corresponde a una construcción que se hace a partir de cualquier conjunto ortogonal de señales. En este caso se define

$$s'_m(t) = s_m(t) - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M s_l(t).$$

# Detectores Óptimos para Señalización $M$ -aria

en el Canal AWGN

---

- Vamos a asumir que el sistema de transmisión utiliza señalización ortogonal  $M$ -aria, donde  $M = 2^k$ , para algún  $k$  entero.
- El canal bajo estudio es un canal bajo ruido aditivo blanco Gaussiano con densidad espectral de potencia  $N_0/2$ , de modo que

$$r(t) = s_m(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7)$$

- Nuestra intención es diseñar un sistema que basado en la observación  $r(t)$  pueda estimar la secuencia  $(b_1, \dots, b_k)$  transmitida, minimizando la probabilidad de cometer un error.

## Demodulador de Señal (1)

---

- Al igual que en el caso de demodulación binaria, vamos a separar el proceso en dos etapas: demodulación de la señal y detección.
- La función del demodulador de señal es convertir  $r(t)$  en un vector  $N$ -dimensional  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ , donde  $N$  es la dimensión del espacio de señales transmitidas.
- La función del detector es decidir cual de las posibles  $M$  señales fue la transmitida, basado en la observación del vector  $\mathbf{y}$ .

## Demodulador de Señal (2)

---

- En este caso, cada señal  $s_m(t)$  puede ser representada por

$$s_m(t) = \sum_{k=1}^N s_{mk} \varphi_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

en términos de la base de señales ortogonales  $\{\varphi_k(t)\}$  que generan el espacio completo de señales  $\{s_m(t)\}$ .

## Demodulador de Señal (3)

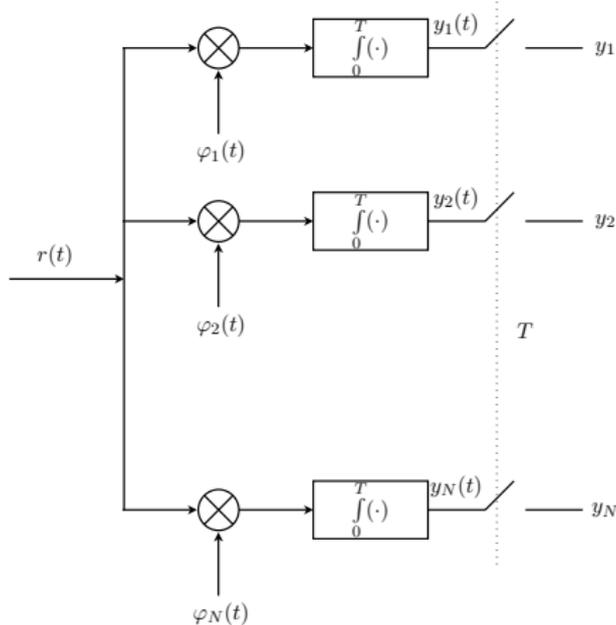
---

- Utilizando el sistema de coordenadas derivado de la representación geométrica del espacio de señales:

$$\mathbf{s}_m = (s_{m1}, \dots, s_{mN}), \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

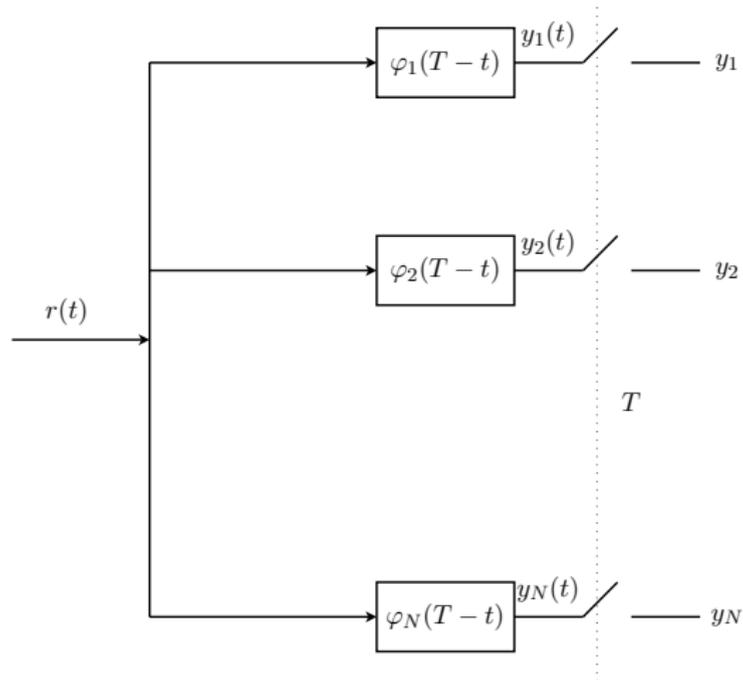
- Tendremos dos tipos de demoduladores: del tipo correlador, que consiste en  $N$  correladores en paralelo, o del tipo filtro adaptado, que consiste de  $N$  filtros adaptados en paralelo.

# Demodulador Tipo Correlador



# Demodulador Tipo Filtro Adaptado

---



# Resumen

---

Hemos revisado:

- Optimalidad del Filtro Adaptado
- Problema de detección  $M$ -aria.

## Lecturas

---

- Proakis & Salehi, *Communication System Engineering*, capítulo 7, secciones 7.5 y 7.6
- R. Blahut, *Modem Theory: An Introduction to Telecommunications*, capítulo 3.