

EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.25: Diseño Óptimo de Receptores Digitales



Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

10 de Noviembre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Diseño Óptimo de Receptores

- Correladores

- Demodulador de Filtro Adaptado

Resumen y Lecturas

Motivación

- Medidas de desempeño nos permiten saber qué límite podemos lograr.
- Ahora nos preocuparemos de determinar la estructura que debe tener un receptor que se acerque a este límite.

Receptores óptimos para señales moduladas binarias en AWGN

- Consideremos el modelo de canal donde el mensaje

$$c(t) = \pm a$$

para los instantes de muestreo ($t = lT$), y el ruido aditivo es blanco y Gaussiano, con media cero y varianza $N_0/2$.

- Estudiaremos dos tipos de demoduladores:
 - (a) correladores (basados en cálculo de correlaciones).
 - (b) filtro adaptado (matched filter).

Demodulador tipo Correlador (1)

para Señalización Antipodal

- Consideremos primero un esquema de señalización antipodal del tipo

$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT),$$

donde $s(t)$ es un pulso cuadrado de energía unitaria, y $a_l \in \{-a, +a\}$.

Demodulador tipo Correlador (2)

para Señalización Antipodal

- La señal recibida es

$$r(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT) + n(t).$$

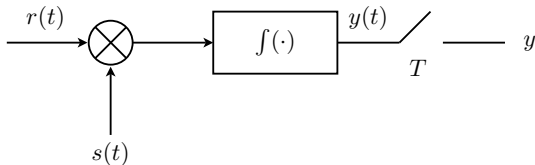
- Si sólo nos concentramos en el intervalo $0 \leq t \leq T$ tenemos

$$r(t) = \pm as(t) + n(t).$$

- En un correlador la señal recibida es multiplicada por la señal $s(t)$ e integrada en el intervalo $[0, T]$

Demodulador tipo Correlador (3)

para Señalización Antipodal



Demodulador tipo Correlador (4)

para Señalización Antipodal

- La señal a la salida del correlador

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t r(\tau)s(\tau)d\tau \\&= \int_0^t (\pm as(\tau) + n(\tau))s(\tau)d\tau \\&= \pm a \int_0^t s(t)s(\tau)d\tau + \int_0^t n(\tau)s(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Demodulador tipo Correlador (5)

para Señalización Antipodal

- Por lo tanto, en el instante $t = T$ tendremos

$$y(T) = \pm a + n$$

donde n es una variable aleatoria Gaussiana definida por

$$n = \int_0^T n(t)s(\tau)d\tau$$

Demodulador tipo Correlador (6)

para Señalización Antipodal

- El valor esperado de n es:

$$\mathbb{E}[n] = \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)]s(\tau)d\tau = 0, \quad (1)$$

Demodulador tipo Correlador (7)

para Señalización Antipodal

y la varianza de n es

$$\begin{aligned}\text{Var}[n] &= \mathbb{E}[n^2] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T n(\tau)n(\tau')s(\tau)s(\tau')d\tau d\tau'\right] \\ &= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)n(\tau')]s(\tau)s(\tau')d\tau d\tau' \\ &= \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)n(\tau)]s(\tau)s(\tau)d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(\tau)d\tau = \frac{N_0}{2}\end{aligned}$$

Demodulador tipo Correlador (8)

para Señalización Antipodal

- Por lo tanto, n es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza $N_0/2$.
- La densidad condicional en $\pm a$ es

$$f_{R|C}(r|\pm a) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r \mp a)^2 / N_0} \quad (2)$$

- La salida del correlador es entregada a un dispositivo que decide el símbolo detectado, tal como vimos en detección antipodal al comienzo de este capítulo.

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal (1)

- Consideremos ahora el caso en que utilizamos dos señales ortogonales para hacer la modulación binaria.
- Esto es, utilizamos las señales

$$\mathbf{s}_1 = (s_{11}, s_{12}) = (a, 0)$$

$$\mathbf{s}_2 = (s_{21}, s_{22}) = (0, a)$$

Entonces, en el intervalo $0 \leq t \leq T$ tenemos

$$r(t) = s_m(t) + n(t), \quad m = 1, 2.$$

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal (2)

- La señal recibida es bidimensional dado que $s_m(t)$ es un vector de dimensión 2.
- Por lo tanto, debemos proyectar la señal recibida sobre las dos señales que forman la base que representa el espacio:

$$\varphi_1(t) \text{ y } \varphi_2(t).$$

- Obtenemos

$$y_m(t) = \int_0^T r(\tau)\varphi_m(\tau)d\tau, \quad m = 1, 2. \quad (3)$$

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal (3)

- Supongamos que la señal transmitida es

$$s_1(t) = s_{11}\varphi_1(t),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}y_1 \equiv y_1(T) &= \int_0^T [s_{11}\varphi_1(\tau) + n(\tau)]\varphi_1(\tau)d\tau \\&= s_{11} + n_1 \\&= a + n_1\end{aligned}$$

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal (4)

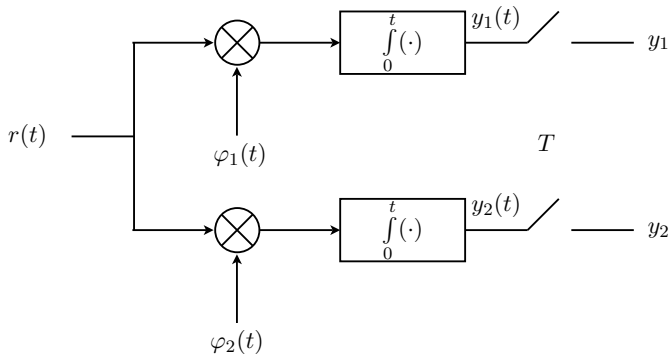
donde

$$n_1 = \int_0^T n(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau$$

es una variable aleatoria Gaussiana (la deducción es la misma vista en la sección anterior).

- Por lo tanto, podemos utilizar la siguiente estructura de correlador:

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal (5)



Correlador para Señalización Binaria Ortogonal (6)

- La salida del segundo correlador es

$$\begin{aligned}y_2 \equiv y_2(T) &= \int_0^T [s_{11}\varphi_1(\tau) + n(\tau)]\varphi_2(\tau)d\tau \\&= s_{11} \underbrace{\int_0^T \varphi_1(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau}_0 + \int_0^T \varphi_2(\tau)n(\tau)d\tau \\&= n_2\end{aligned}$$

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal (7)

- La salida del correlador es

$$\mathbf{y} = (a + n_1, n_2). \quad (4)$$

- Similarmente, si

$$s_2(t) = s_{22}\varphi_2(t),$$

tenemos que

$$\mathbf{y} = (n_1, a + n_2). \quad (5)$$

- La salida del correlador es la entrada de un detector binario con entrada vectorial.

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal (8)

- Notemos que (n_1, n_2) define un vector Gaussiano multivariado con media

$$\mathbb{E}[(n_1, n_2)] = (0, 0)$$

y matriz de covarianzas

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[n_1 n_1] & \mathbb{E}[n_1 n_2] \\ \mathbb{E}[n_2 n_1] & \mathbb{E}[n_2 n_2] \end{bmatrix} = \frac{N_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Como n_1 y n_2 no están correlacionadas, y (n_1, n_2) es Gaussiano, entonces n_1 y n_2 son independientes.

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal (9)

- Por lo tanto, la densidad conjunta entre (y_1, y_2) condicional a la transmisión de s_1 es

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}}(y_1, y_2|\mathbf{s}_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^2 e^{-(y_1-a)^2/N_0} e^{-y_2^2/N_0}. \quad (6)$$

- Similarmente, la densidad conjunta entre (y_1, y_2) condicional a la transmisión de s_2 es

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}}(y_1, y_2|\mathbf{s}_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^2 e^{-y_1^2/N_0} e^{-(y_2-a)^2/N_0}. \quad (7)$$

Correlador para Señalización Binaria Ortogonal (10)

- Podemos observar que una consecuencia que n_1 y n_2 sean independientes es el hecho que

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{s}}(y_1, y_2|\mathbf{s}_m) = f_{y_1|\mathbf{s}}(y_1|\mathbf{s}_m)f_{y_2|\mathbf{s}}(y_2|\mathbf{s}_m) \quad (8)$$

Demodulación via Filtro Adaptado (1)

en Señalización Antipodal

- Vamos a utilizar un filtro diferente para hacer la detección.
- Utilizaremos los principios de demodulación y detección considerando el caso binario antipodal y con señalización ortogonal.
- La señal recibida por el receptor es

$$r(t) = s_m \varphi(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad m = 1, 2. \quad (9)$$

donde $s_1 = +a$, y $s_2 = -a$.

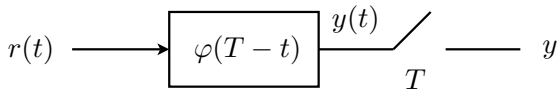
Demodulación via Filtro Adaptado (2)

en Señalización Antipodal

- Consideremos un filtro lineal cuya respuesta al impulso es

$$h(t) = \varphi(T - t) \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

es decir, igual a una versión en reversa de la señal $\varphi(t)$.



Demodulación via Filtro Adaptado (3)

en Señalización Antipodal

- La salida del filtro lineal es

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t r(\tau)\varphi(T-t+\tau)d\tau\end{aligned}$$

Demodulación via Filtro Adaptado (4)

en Señalización Antipodal

- Por lo tanto, en $t = T$

$$\begin{aligned}y &\equiv y(T) = \int_0^T r(\tau)\varphi(\tau)d\tau \\&= \int_0^T [s_m\varphi(\tau) + n(\tau)]\varphi(\tau)d\tau \\&= s_m \int_0^T \varphi(\tau)\varphi(\tau)d\tau + \int_0^T n(\tau)\varphi(\tau)d\tau \\&= s_m + n\end{aligned}$$

Demodulación via Filtro Adaptado (5)

en Señalización Antipodal

- Es decir, la salida del filtro ajustado es la misma que un correlador.
- Consideremos por ejemplo la señal

$$\varphi(t) = A\frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

entonces,

$$h(t) = \varphi(T - t) = A\left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

y

$$s(t) = \int_0^t \varphi(\tau) \varphi(T - t + \tau) d\tau$$

Demodulación via Filtro Adaptado (6)

en Señalización Antipodal

•

$$s(t) = \int_0^t \frac{A}{T} \tau \frac{A}{T} (T - t + \tau) \mathbf{1}_{[0,T]}(\tau) \mathbf{1}_{[t-T,t]}(\tau) d\tau$$

donde la función

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

recibe el nombre de función indicatriz o función característica del conjunto $[a, b]$.

Demodulación via Filtro Adaptado (7)

en Señalización Antipodal

- La multiplicación de dos funciones características se puede escribir en términos de una sola, de la siguiente forma

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(t)\mathbf{1}_{[c,d]}(t) = \mathbf{1}_{[a,b]\cap[c,d]}(t)$$

obviamente, si $b < c$, $\mathbf{1}_{[a,b]}(t)\mathbf{1}_{[c,d]}(t) = 0$.

- En general,

$$\mathbf{1}_{[a,b]\cap[c,d]}(t) = \mathbf{1}_{[\max(a,c),\min(b,d)]}(t).$$

con la suposición tácita que $\max(a, c) \leq \min(b, d)$.

Demodulación via Filtro Adaptado (8)

en Señalización Antipodal

- Volviendo al problema original, tenemos que considerar 4 subcasos:
- Si $t < 0$, la función $\mathbf{1}_{[0,T]}(\tau) = 0$ en todo el intervalo de integración, y por lo tanto,

$$s(t) = 0.$$

si $t < 0$.

Demodulación via Filtro Adaptado (9)

en Señalización Antipodal

- Si $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}s(t) &= \frac{A^2}{T^2} \int_0^t \tau \times (T - t + \tau) \mathbf{1}_{[0,T]}(\tau) \mathbf{1}_{[t-T,t]}(\tau) d\tau \\&= \frac{A^2}{T^2} \int_0^t \tau \times (T - t + \tau) \mathbf{1}_{[0,t]}(\tau) d\tau \\&= \frac{A^2}{T^2} \int_0^t [\tau(T - t) + \tau^2] d\tau = \frac{A^2}{T^2} \left[\frac{t^2}{2}(T - t) + \frac{t^3}{3} \right].\end{aligned}$$

Entonces, $s(T) = TA^2/3$.

Demodulación via Filtro Adaptado (10)

en Señalización Antipodal

- Si $T \leq t \leq 2T$

$$\begin{aligned}s(t) &= \frac{A^2}{T^2} \int_0^t \tau \times (T - t + \tau) \mathbf{1}_{[0,T]}(\tau) \mathbf{1}_{[t-T,t]}(\tau) d\tau \\&= \frac{A^2}{T^2} \int_0^t \tau \times (T - t + \tau) \mathbf{1}_{[t-T,T]}(\tau) d\tau \\&= \frac{A^2}{T^2} \int_{t-T}^T [\tau(T - t) + \tau^2] d\tau\end{aligned}$$

Demodulación via Filtro Adaptado (11)

en Señalización Antipodal

- Es decir,

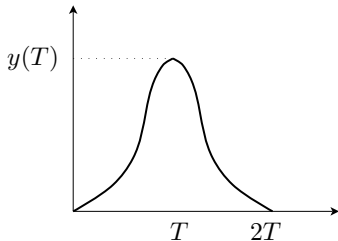
$$s(t) = \frac{A^2}{T^2} \left[\frac{T^2}{2}(T-t) - \frac{(t-T)^2}{2}(T-t) + \frac{T^3 - (t-T)^3}{3} \right].$$

y por lo tanto, $s(T) = TA^2/3$.

- Además, si $t = 2T$, $s(2T) = 0$.
- Para $t > 2T$ se tiene que $s(t) = 0$ pues la función $[t-T, t] \cap [0, T] = \emptyset$.

Demodulación via Filtro Adaptado (12)

en Señalización Antipodal



- El valor máximo de la señal $y(t)$ se alcanza en $y(T)$ y corresponde a la energía de la señal $\varphi(t)$.

Señalización Binaria Ortogonal (1)

- En la sección de uso de correladores con señalización binaria ortogonal vimos que la demodulación de una señal modulada de esta forma requería del uso de dos correladores.
- En el caso del filtro adaptado, esto también es necesario.
- Consideremos los filtros con respuestas al impulso dados por

$$h_1(t) = \varphi_1(T - t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$h_2(t) = \varphi_2(T - t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Señalización Binaria Ortogonal (2)

- Definimos las salidas de cada filtro como

$$y_m(t) = \int_0^t r(\tau)h_m(t - \tau)d\tau, \quad m = 1, 2. \quad (11)$$

- Las muestras en $t = T$ son

$$\begin{aligned} y_m &= \int_0^T r(\tau)h_m(T - \tau)d\tau, \\ &= \int_0^T r(\tau)\varphi_m(\tau)d\tau, \quad m = 1, 2. \end{aligned}$$

Señalización Binaria Ortogonal (3)

- Las salidas de ambos filtros son idénticas a las del banco de correladores.

Resumen

Hemos revisado:

- Demodulador tipo correlador (para señalización antipodal y ortogonal)
- Demodulador tipo filtro adaptado (para señalización antipodal y ortogonal)