# EL4005 Principios de Comunicaciones

## Clase No.24: Demodulación Binaria

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

5 de Noviembre de 2010

# Contenidos de la Clase (1)

# Motivación

- Consideraremos el problema de detección binaria, y lo aprovecharemos para introducir medidas de desempeño en un canal AWGN.
- También queremos estudiar los casos con señalización antipodal y no antipodal.
- Hablaremos en forma concreta qué significa diseñar un detector digital.

## Detección Binaria (1)

- Consideremos un modelo de probabilidad donde $H$ es una variable binaria que toma uno de dos valores posibles $\{h_0, h_1\}$,

$$\mathsf{Pr}\{H = h_0\} = p_0$$
$$\mathsf{Pr}\{H = h_1\} = p_1.$$

- En el contexto de comunicaciones es usual fijar $p_0 = p_1 = 1/2$, y en general, equiprobable si hay más de dos mensajes posibles.

# Detección Binaria (2)

- Sea $R$ una variable aleatoria cuya densidad probabilidad condicional dado $H$ es

$$0 < f_{R|H}(r|h_m) < \infty, m \in \{0, 1\}.$$

- La función $f_{R|H}(r|h_m)$ recibe el nombre de **verosimilitud** (*likelihood*) en la jerga de test de hipótesis.
- La densidad marginal de $R$ es

$$f_R(r) = f_{R|H}(r|h_0)p_0 + f_{R|H}(r|h_1)p_1 \quad (1)$$

- Esto se consigue aplicando la regla de Bayes.

## Detección Binaria (3)

- Por lo tanto, la probabilidad a posteriori de $H$ es

$$f_{H|R}(h_m|r) = \frac{p_m f_{R|H}(r|h_m)}{f_R(r)}$$

- La regla de máxima probabilidad a posteriori puede ser enunciada como sigue:

$$\text{Si } f_{H|R}(h_0|r) \geq f_{H|R}(h_1|r) \text{ decidir } h_0$$
$$\text{Si } f_{H|R}(h_0|r) < f_{H|R}(h_1|r) \text{ decidir } h_1$$

# Detección Binaria (4)

- Notemos que podemos eliminar $f_R(r)$ de ambas ecuaciones para obtener

$$\text{Si } f_{R|H}(r|h_0)p_0 \geq f_{R|H}(r|h_1)p_1 \text{ decidir } h_0$$

$$\text{Si } f_{R|H}(r|h_0)p_0 < f_{R|H}(r|h_1)p_1 \text{ decidir } h_1$$

# Detección Binaria (5)

- Definiendo la razón de verosimilitudes

$$\Lambda(r) = \frac{f_{R|H}(r|h_0)}{f_{R|H}(r|h_1)} \tag{2}$$

entonces la regla MAP se escribe como

$$\text{Si } \Lambda(r) \geq \eta \text{ decidir } h_0$$
$$\text{Si } \Lambda(r) < \eta \text{ decidir } h_1$$

donde $\eta = p_1/p_0$ es el **umbral de decisión**.

# Detección Binaria (6)

- En el caso que $p_0 = p_1 = 1/2$ la regla se se reescribe como

$$\text{Si } \Lambda(r) \geq 1 \text{ decidir } h_0$$

$$\text{Si } \Lambda(r) < 1 \text{ decidir } h_1$$

y recibe el nombre especial de **criterio** o **regla de máxima verosimilitud**.

# Desempeño del Detector Binario (1)

- La **probabilidad de error** es la medida de desempeño más utilizada para evaluar el trabajo de un detector.
- Se define como

$$p_e \equiv \Pr\{\text{Error}\} = 1 - \Pr\{h_m \text{ es correcto}\}. \tag{3}$$

- Podemos encontrar una expresión en términos de las probabilidades condicionales:

$$p_e = p_0 \Pr\{e|H = h_0\} + p_1 \Pr\{e|H = h_1\}$$

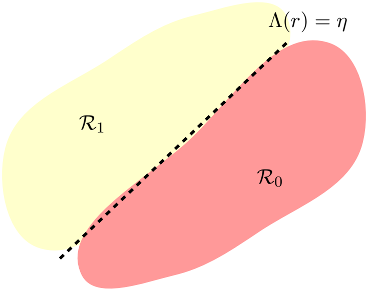
# Desempeño del Detector Binario (2)

- Ambas probabilidades condicionales reciben nombres especiales dependiendo del campo de aplicación.
- En radares,
  - $\Pr\{e|H = h_0\}$ es la **probabilidad de falsa alarma**.
  - $\Pr\{e|H = h_1\}$ es la **probabilidad de pérdida**.
- En estadística,
  - $\Pr\{e|H = h_0\}$ es la **probabilidad de error de primera especie**, mientras que
  - $\Pr\{e|H = h_1\}$ **probabilidad de error de segunda especie**.

## Desempeño del Detector Binario (3)

- La regla MAP binaria particiona el espacio de observaciones en dos regiones:

$$\mathcal{R}_0 = \{r | \Lambda(r) \geq \eta\}$$
$$\mathcal{R}_1 = \{r | \Lambda(r) \ < \eta\}$$



# Desempeño del Detector Binario (4)

- Ocurrirá un error de detección si pasa lo siguiente:

$$H = h_0 \text{ y } r \in \mathcal{R}_1$$
$$H = h_1 \text{ y } r \in \mathcal{R}_0.$$

- Por lo tanto,

$$\Pr\{e|H = h_0\} = \int_{\mathcal{R}_1} f_{R|H}(r|h_0)dr, \tag{4}$$
$$\Pr\{e|H = h_1\} = \int_{\mathcal{R}_0} f_{R|H}(r|h_1)dr. \tag{5}$$

# Detección de Señales PAM (1)

- Considere un esquema modulación PAM del tipo

$$A_l \in \{-a, a\}$$

$$C(t) = \sum_{l=\infty}^{\infty} A_l s(t - lT)$$

para algún pulso de Nyquist $s(t)$.

## Detección de Señales PAM (2)

- Suponga que la señal recibida por el receptor es

$$R(t) = C(t) + N(t) \tag{6}$$

donde $n(t)$ es un proceso de ruido blanco aditivo Gaussiano de potencia $N_0/2$.

- Luego, como $n$ es estacionario entonces

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\Big(-\frac{n^2}{N_0}\Big).$$

# Detección de Señales PAM (3)

- Consideremos que el sistema previene interferencia intersimbólica, de modo que podemos estudiar el problema como si fueran sólo variables aleatorias en lugar de procesos;
- Ello significa que podemos eliminar el tiempo de nuestro modelo y obtener una ecuación con variables aleatorias:

$$R = C + N$$

# Detección de Señales PAM (4)

- Pero $C$ puede tomar sólo dos valores: $+a$ o $-a$. Por lo tanto

$$R = +a + N$$

o bien

$$R = -a + N$$

dependiendo de si $C = a$ o $C = -a$.

# Detección de Señales PAM (5)

- Las densidades condicionales son entonces:

$$f_{R|H}(r|+a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\Big(-\frac{(r-a)^2}{N_0}\Big)$$

y

$$f_{R|H}(r|-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\Big(-\frac{(r+a)^2}{N_0}\Big)$$

# Detección de Señales PAM (6)

- La razón de verosimilitud es

$$\begin{aligned}\Lambda(r) &= \frac{f_{R|H}(r|+a)}{f_{R|H}(r|-a)} \\ &= \exp\left(\frac{-(r-a)^2+(r+a)^2}{N_0}\right) \\ &= \exp\left(\frac{4ra}{N_0}\right)\end{aligned}$$

# Detección de Señales PAM (7)

- Notemos que podemos calcular el logaritmo de $\Lambda(r)$ para obtener una regla aun más simple:

$$\log(\Lambda(r)) = \frac{4ra}{N_0}$$

por lo tanto definimos la regla MAP como sigue:

$$\text{Si } r \geq \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a} \text{ decidir } a_l = a$$
$$\text{Si } r < \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a} \text{ decidir } a_l = -a.$$

## Detección de Señales PAM (8)

- La probabilidad de error, dado que $C = -a$ corresponde a la probabilidad que

$$r \geq \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a},$$

o equivalentemente que

$$n = r - c > \frac{N_0 \log_e(\eta)}{4a} + a. \tag{7}$$

- Dado que $N$ es una variable aleatoria Gaussiana, podemos expresar esta probabilidad en términos de la función $Q(\cdot)$

# Detección de Señales PAM (9)

- Recordar que

$$Q(x) \triangleq \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{u^2}{2}\Big) du.$$

- Debemos reescalar $N(t)$ de modo que sea $\mathcal{N}(0,1)$.
- Ello se logra definiendo $N/\sqrt{N_0/2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Pr\{e|C=-a\} &= \Pr\left\{\frac{N}{\sqrt{N_0/2}} > \frac{\sqrt{N_0/2}\log_e(\eta)}{2a} + \frac{a}{\sqrt{N_0/2}}\right\}\\ &= Q\Big(\frac{\sqrt{N_0/2}\log_e(\eta)}{2a} + \frac{a}{\sqrt{N_0/2}}\Big)\end{aligned}$$

# Detección de Señales PAM (10)

- La probabilidad de error que para el caso $H = +a$ se calcula siguiendo el mismo procedimiento.
- En este debemos obtener una condición para que

$$-N \geq a - \frac{N_0 \log_e \eta}{4a}.$$

- Ello produce

$$\Pr\{e|C = +a\} = Q\Big( - \frac{\sqrt{N_0/2}\,\log_e(\eta)}{2a} + \frac{a}{\sqrt{N_0/2}}\Big)$$

# Detección de Señales PAM (11)

- Recordemos que en un esquema antipodal como PAM, la energía por bit era $\mathcal{E}_b = a^2$.
- Por lo tanto, ambas probabilidades de error pueden escribirse en términos de la energía por bit del esquema, como sigue:

$$\Pr\{e|C = -a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} + \frac{\log_e(\eta)}{2\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}}\right) \tag{8}$$

$$\Pr\{e|C = +a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} - \frac{\log_e(\eta)}{2\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}}\right) \tag{9}$$

- En el caso que $p_0 = p_1 = 1/2$, la regla MAP se transforma en la regla ML (maximum likelihood).

# Detección de Señales PAM (12)

- Por lo tanto

$$\eta = 1$$

y

$$\Pr\{e\} = \Pr\{e|C = -a\} = \Pr\{e|C = +a\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right). \quad (10)$$

# Detección Binaria de Señales No Antipodales (1)

- Vamos a considerar un problema ligeramente más complejo: en lugar de hacer la asignación antipodal típica

$$0 \longmapsto -a$$

$$1 \longmapsto +a$$

# Detección Binaria de Señales No Antipodales (2)

vamos a considerar la asignación

$$0 \longmapsto b_0$$

$$1 \longmapsto b_1$$

para números arbitrarios $b_0$ y $b_1$, con $b_0 < b_1$.

# Detección Binaria de Señales No Antipodales (3)

- Para analizar esta situación, definamos

$$\bar{b} = \frac{b_0 + b_1}{2},$$

es natural definir entonces

$$\begin{aligned} a = b_1 - \bar{b} = b_1 - \frac{b_0 + b_1}{2} &= \frac{-b_0 + b_1}{2} \\ = \bar{b} - b_0 = \frac{b_0 + b_1}{2} - b_0 &= \frac{-b_0 + b_1}{2} \end{aligned}$$

## Detección Binaria de Señales No Antipodales (4)

- Por lo tanto, condicional a la transmisión $C = b_0$, la observación es

$$R = \bar{b} + a + N$$

y condicional a la transmisión $C = b_1$, la observación es

$$R = \bar{b} - a + N$$

Es decir, el problema puede ser reducido al uno de detección antipodal desplazando el ruido en una constante $\bar{b}$.

# Detección Binaria de Señales No Antipodales (5)

- Definimos entonces

$$\bar{N} = N - \bar{b},$$

  entonces, tenemos que $\bar{N}$ es suficiente para poder determinar si la señal enviada fue $+a$ o $-a$.
- Esta cantidad recibe el nombre de **estadístico suficiente**.
- Recordemos que la probabilidad de error de un sistema antipodal puede ser expresada en términos de la la energía por bit $\mathcal{E}_b$.

# Detección Binaria de Señales No Antipodales (6)

- En el caso de la señalización no antipodal tenemos que la energía por bit (asumiendo que ambos símbolos aparecen en forma equiprobable), es

$$\mathcal{E}_b = \frac{b_0^2 + b_1^2}{2} = a^2 + \bar{b}^2. \tag{11}$$

# Detección Binaria de Señales No Antipodales (7)

- Es decir, en cada bit se utiliza una fracción

$$\gamma = \frac{a^2}{a^2 + \bar{b}^2}$$

para enviar el símbolo de la señal $\pm a$, y la fracción $1 - \gamma$ para enviar el "tono" $c$.

# Detección Binaria de Señales No Antipodales (8)

- Las probabilidades de error son, entonces,

$$\Pr\{e|C = b_1\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\gamma\mathcal{E}_b}{N_0}} + \frac{\log_e \eta}{2\sqrt{2\gamma\mathcal{E}_b/N_0}}\right) \tag{12}$$

$$\Pr\{e|C = b_0\} = Q\left(\sqrt{\frac{2\gamma\mathcal{E}_b}{N_0}} - \frac{\log_e \eta}{2\sqrt{2\gamma\mathcal{E}_b/N_0}}\right) \tag{13}$$

# Resumen

Hemos revisado:

- Ejemplos de demodulación binaria.
- Medidas de desempeño para la demodulación binaria PAM y no antipodal.
- Regla MAP y ML.