

EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.22: Señalización Ortogonal

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

29 de Octubre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base

Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base

Resumen y Lecturas

Motivación

- Los esquemas vistos hasta el momento funcionan bien en canales de banda estrecha (i.e. poco ancho de banda disponible).
- ¿Qué alternativas tenemos si contamos con mayores recursos, por ejemplo, ancho de banda?

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base (1)

- Podemos definir un nuevo tipo de señalización binaria utilizando dos pulsos ortogonales $s_1(t)$ and $s_2(t)$.
- Recordemos que $s_1(t)$ y $s_2(t)$ son ortogonales si y sólo si

$$\langle s_1(t), s_2(t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt = 0.$$

- En señalización en banda base $s_1(t)$ y $s_2(t)$ son señales reales.

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base (2)

- Vamos a requerir también que $s_1(t)$ y $s_2(t)$ sean pulsos de Nyquist, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t - lT) dt = 0$$

para cualquier entero l .

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base (3)

- La modulación de la señal en el canal es

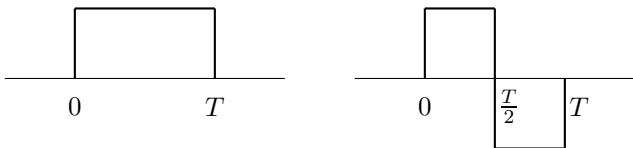
$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} [a_l s_1(t - lT) + \bar{a}_l s_2(t - lT)] \quad (1)$$

donde

$$(a_l, \bar{a}_l) = \begin{cases} (A, 0) & \text{si el } l\text{-ésimo bit de datos es 0.} \\ (0, A) & \text{si el } l\text{-ésimo bit de datos es 1.} \end{cases}$$

- Este tipo de señal se denomina **señalización binaria ortogonal**.
- Ejemplos

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base (4)

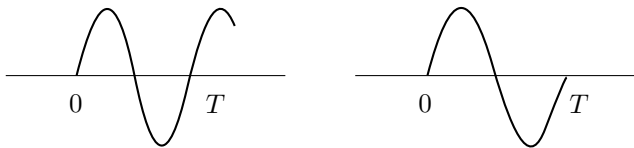


- $s_1(t) = \sin 2\pi f_1 t$; $s_1(t) = \sin 2\pi f_2 t$, con $0 \leq t \leq T$. En este caso,

$$\int_0^T \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_1 t) dt = 0$$

y

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base (5)



Nos aseguramos que las señales sean ortogonales eligiendo $f_1 = \frac{m}{2T}$ y $f_2 = \frac{m'}{2T}$, donde m y m' son enteros positivos distintos.

- Cuando f_1 y f_2 son muy grandes en comparación con $1/T$, el esquema puede ser entendido como una señal pasabanda.

Señalización Binaria Ortogonal en Banda Base (6)

- En este caso, el esquema recibe el nombre de **Codificación Binaria por Desplazamientos de Frecuencias** o *Binary Frequency-Shift Keying* (FSK).

Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base (1)

- Este esquema es apropiado para señalización en canales con potencia limitada.
- Es análogo a la modulación M -aria por amplitud de pulsos empleada en canales con ancho de banda limitada.
- Existen dos alfabetos de señales para este tipo de señalización:
 - de pulsos ortogonales.
 - simplex de pulsos.

Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base (2)

- Aunque se pueden utilizar señales no ortogonales, ellas son más difíciles de distinguir en presencia de ruido.
- **Definición**

Un alfabeto de señalización ortogonal M -ario es un conjunto de M pulsos $s_m(t)$, con $m = 0, 1, \dots, M - 1$, que tiene las propiedades de energía y ortogonalidad enunciadas a continuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)s_n(t)dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n. \end{cases} \quad (2)$$

Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base (3)

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)s_n(t-lT)dt = 0, \quad l \neq 0. \quad (3)$$

- Lo usual es elegir $s_m(t)$ con soporte en $[0, T]$, de forma que la segunda condición se cumple en forma trivial.
- Además, el mapeo se realiza entre secuencias binarias de largo k , de forma que uno fija $M = 2^k$.

Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base (4)

- En el instante $t = lT$, la modulación asigna al símbolo $a_l = m$ la señal $s_m(t - lT)$.
- Un modulador M -ario es un dispositivo que, luego de recibir $a_l = m$, produce la señal $s_m(t)$ y la envía a través de un canal analógico.
- La transmisión de secuencias de bits se hace agrupando bloques o palabras de largo k .
- La l -ésima palabra m_l es mapeada a la señal $s_{m_l}(t)$.

Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base (5)

- La señal transmitida finalmente es

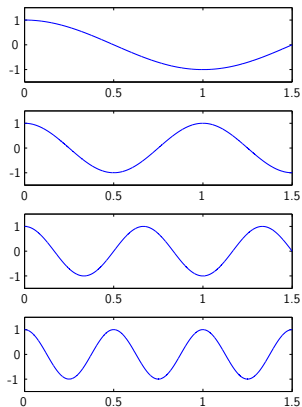
$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} s_{m_l}(t - lT).$$

- El demodulador asociado a este esquema toma una la señal recibida ($r(t) = c(t) + n(t)$) y produce la estimación $\hat{m}_l$ del número m_l .
- El sistema completo de modulador/canal/demodulador constituye un canal de tiempo discreto y de entrada finita.

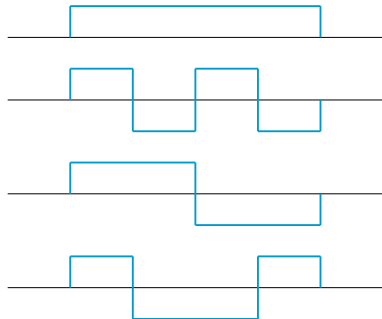
Señalización Ortogonal M -aria en Banda Base (6)

- Si $\hat{m}_l \neq m_l$ diremos que el demodulador ha cometido un error en $t = lT$.

Ejemplos (1)



FSK 4-ario.



CSK 4-ario.

Ejemplos (2)

- En la figura se presentan dos esquemas de señalización ortogonal 4-aria.
- Codificación por desplazamiento de frecuencias o FSK (Frequency Shift Keying)
- Codificación por desplazamiento de códigos o CSK (Code Shift Keying).
- Lo usual es utilizar familias de códigos con un número mayor de elementos (usualmente con M igual a 32 ó 64).

Ejemplos (3)

- Todos estos tipos de alfabetos reciben el nombre colectivo de MFSK o MCSK.

Energía por Símbolo

- Vamos a denotar por E_p la energía total transmitida en una palabra de largo

$$k = \log_2 M \text{ bits.}$$

- La energía por bit es

$$E_b = \frac{E_p}{k} = \frac{E_p}{\log_2 M}. \quad (4)$$

- Es preferible utilizar esta segunda noción porque estandariza todas las familias de alfabetos y permite estudiar su desempeño.

Alfabeto Simplex de Pulsos (1)

- El alfabeto **simplex** de pulsos es una construcción especial basada en una familia ortogonal

$$\{s_0(t), \dots, s_{M-1}(t)\},$$

donde cada pulso tiene energía E_p .

Alfabeto Simplex de Pulsos (2)

- La **familia M -aria simplex de pulsos** es cualquier conjunto de M pulsos $q_m(t)$ con la misma energía E_q que satisfacen que la correlación entre dos pulsos distintos es:

$$-\frac{E_q}{M-1}.$$

Alfabeto Simplex de Pulsos (3)

- Los pulsos $q_m(t)$ del simplex se definen como sigue:

$$q_m(t) = s_m(t) - \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} s_m(t) \quad (5)$$

donde hemos substraído la energía promedio del conjunto original a cada señal.

Alfabeto Simplex de Pulsos (4)

- La energía del simplex es

$$E_q = \int_{-\infty}^{\infty} |q_m(t)|^2 dt = \left(1 - \frac{1}{M}\right) E_p$$

- El conjunto $\{q_0(t), \dots, q_{M-1}(t)\}$ no es ortogonal.
- En lugar de ello, presenta la propiedad más fuerte de correlación negativa.

Alfabeto Simplex de Pulsos (5)

- Esto es, para $m \neq m'$ la correlación entre $q_m(t)$ y $q_{m'}(t)$ es

$$\langle q_m(t), q_{m'}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} q_m(t) q_{m'}(t) dt = -\frac{E_p}{M} = -\frac{E_q}{M-1}. \quad (6)$$

- En la última parte del curso vamos a demostrar que la familia simplex tiene el mismo desempeño de una familia de señales ortogonales, pero utiliza menos energía.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base (1)

- Hay dos situaciones que analizar.
- La primera corresponde al caso en que uno quiere enviar una secuencia determinística de datos de longitud finita.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base (2)

- En este caso, la señal modulada es

$$c(t) = \sum_{l=0}^n a_l s(t - lT)$$

tiene energía finita y, por lo tanto, transformada de Fourier.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base (3)

- Utilizando el teorema de delay para T. de F. tenemos

$$\begin{aligned}C(f) &= S(f) \sum_{l=0}^n a_l e^{-j2\pi f l T} \\ &= S(f) A(f).\end{aligned}$$

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base (4)

- El espectro $C(f)$ se puede factorizar en $S(f)$, que recibe el nombre de **factor de forma de pulso**, y $A(f)$ que se denomina el **factor de arreglo**.
- $A(f)$ depende de los datos enviados, por lo tanto, no podemos conocer el espectro sin conocer los datos.
- En general, $A(f)$ es aleatorio.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base (5)

- Por otro lado, si uno desea enviar una secuencia infinitamente larga, la señal modulada

$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT)$$

tiene energía infinita.

- En este caso no podemos calcular la transformada de Fourier.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base (6)

- Si a ello agregamos el hecho que la secuencia $\{a_l\}$ es desconocida, debemos utilizar otras herramientas de análisis.
- En particular, si n es grande y $\{a_l\}$ es aleatorio, entonces el efecto de $A(f)$ no debería ser muy relevante, y $|C(f)|$ debería tener una forma similar a $|S(f)|$.
- La descripción del contenido espectral de $c(t)$ se hará mediante su densidad espectral de potencia.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base (7)

- Lamentablemente, $c(t)$ no es un proceso estacionario en general, y por ello uno considera el proceso

$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT - \alpha) \quad (7)$$

donde α es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[0, T]$.

Densidad Espectral de Potencia de Señales en Banda Base (8)

- La incorporación de este delay aleatorio representado por α transforma el proceso $c(t)$ en estacionario.
- La densidad espectral de $c(t)$ es $\Phi_c(f)$ y su valor es

$$\Phi_c(f) = \frac{1}{T} |S(f)|^2. \quad (8)$$

- Vemos que el ancho de banda utilizado por $c(t)$ es el mismo utilizado por el pulso $s(t)$.

Resumen

Hemos revisado:

- Principios de la señalización ortogonal
- Simplex de señales
- Análisis de frecuencia de señales moduladas digitalmente.

Lecturas

- R. Blahut, *Modem Theory: An Introduction to Telecommunications*, capítulo 2.