

EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.21: Pulsos de Nyquist



Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

27 de Octubre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Pulsos de Nyquist

Modulación Diferencial

Resumen y Lecturas

Motivación

- El problema que nos preocupa esta clase es el diseño de “buenas señales” para modulación digital.
- El criterio de Nyquist nos permitirá caracterizar en forma general este tipo de condición.

Pulsos de Nyquist (1)

- Hasta el momento hemos visto varios ejemplos de señalización que permite modular una secuencia binaria en formas de onda analógica.
- En general, la operación de conversión digital/análogo se puede interpretar como la convolución de un tren de impulsos de altura a_l y una señal $s(t)$, ello es

$$c(t) = \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \delta(t - lT) \right] * s(t).$$

Pulsos de Nyquist (2)

- También hemos mencionado que la elección de la forma de onda $s(t)$ obedece a ciertas restricciones de ancho de banda o potencia disponible.
- En esta sección vamos a derivar un criterio general para la selección del pulso básico $s(t)$.
- El objetivo final de todo esquema de modulación/demodulación es la recuperación de los símbolos a_l de la señal $c(t)$.

Pulsos de Nyquist (3)

- Si $l = lT$ tenemos

$$\begin{aligned}c(lT) &= \sum_{l'=-\infty}^{\infty} a_{l'} s(lT - l'T) \\ &= \sum_{l'=-\infty}^{\infty} a_{l'} s((l - l')T).\end{aligned}$$

- Notemos que si $s((l - l')T) = \delta_{ll'}$, entonces $c(lT) = a_l$.

Pulsos de Nyquist (4)

- Por lo tanto, si

$$s((l - l')T) \neq 0 \text{ para algún } l \neq l',$$

el símbolo recibido mostrará la superposición de dos símbolos.

- En este caso decimos que existe **interferencia intersimbólica**, él que en la práctica es un efecto que resulta indeseable.

Pulsos de Nyquist (5)

Definición

Un **pulso de Nyquist** para un intervalo de señalización T , es un pulso $s(t)$ que satisface

$$s(lT) = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 0 & l \neq 0. \end{cases}$$

Pulsos de Nyquist (6)

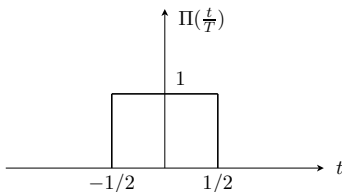
Ejemplo: El pulso

$$s(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad (1)$$

es un pulso de Nyquist porque

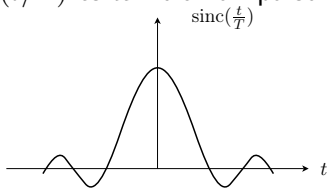
$$s(lT) = \Pi\left(\frac{lT}{T}\right) = 0, \quad (2)$$

para $l \neq 0$.



Pulsos de Nyquist (7)

- El pulso rectangular $\Pi(t/T)$ utiliza un ancho de banda bastante grande en comparación con la tasa de datos.
- No se utiliza cuando el ancho de banda es un recurso escaso.
- El pulso $s(t) = \text{sinc}(t/T)$ es también un pulso de Nyquist.



Pulsos de Nyquist (8)

- Notemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sinc}(lT) &= \frac{\sin(\pi lT/T)}{\pi lT/T} \\ &= \frac{\sin(\pi l)}{\pi l} = 0\end{aligned}$$

si $l \neq 0$, y

$$s(0) = 1.$$

Pulsos de Nyquist (9)

- Este pulso tiene varios inconvenientes que la hacen inadecuada para aplicaciones prácticas:
 - (i) Duración infinita.
 - (ii) Decaimiento lento comparado con $c(t)$.
 - (iii) Lóbulos laterales pueden reforzarse para producir una amplitud momentánea de $c(t)$ muy grande en instantes que no son múltiplos de T .
 - (iv) El efecto anterior puede hacer que los cruces por cero sean demasiado pronunciados, por lo que el sistema podría salir de sincronía.

En la Búsqueda de Buenos Pulsos

- Los pulsos $\Pi(t/T)$ y $\text{sinc}(t/T)$ se encuentran en dos extremos:
 - $\Pi(t/T)$ utiliza una gran porción del espectro de frecuencias
 - $\text{sinc}(t/T)$ utiliza una gran porción del eje temporal.
- El diseño de buenos pulsos evita ambos extremos.
- Un buen pulso tiene utiliza un porción reducida del espectro de frecuencia y, a la vez, tienen lóbulos laterales que decaen rápidamente en el eje del tiempo.

En la Búsqueda de Buenos Pulsos

- El siguiente teorema, denominado **Criterio de Nyquist**, proporciona un criterio de diseño de pulsos en el dominio de la frecuencia, y que previene la aparición de interferencia intersimbólica.

Criterio de Nyquist (1)

Teorema

El pulso $s(t)$ es un pulso de Nyquist si y sólo si su transformada de Fourier $S(f)$ satisface

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(f + \frac{k}{T}\right) = 1 \quad |f| \leq \frac{1}{2T}. \quad (3)$$

Criterio de Nyquist (2)

- La idea central de este teorema es que un pulso de Nyquist es una señal que puede tener un espectro con “colas”, pero que al superponerse con la siguiente banda, el efecto total se anula.
- La demostración de este resultado se puede realizar en dos pasos.

Demostración del Inverso (1)

- Primero demostraremos que si una señal $s(t)$ satisface (3), entonces es un pulso de Nyquist. Esto quiere decir que debemos comprobar que

$$s(lT) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0. \end{cases}$$

Demostración del Inverso (2)

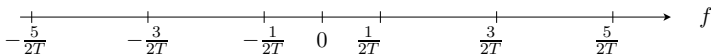
- Notemos que si por la fórmula de la transformada inversa de Fourier tenemos

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$
$$\Rightarrow s(lT) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi flT} df$$

Demostración del Inverso (3)

- Si particionamos el intervalo de frecuencias en segmentos de largo $1/T$ entonces tenemos que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2n-1}{2T}, \frac{2n+1}{2T} \right]$$



Demostración del Inverso (4)

y por lo tanto, podemos reescribir la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2n-1}{2T}}^{\frac{2n+1}{2T}}$$

esto es

$$s(lT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2n-1}{2T}}^{\frac{2n+1}{2T}} S(f) e^{j2\pi f lT} df.$$

Demostración del Inverso (5)

- Hacemos el cambio de variables $f \mapsto \nu + \frac{n}{T}$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{2n-1}{2T} &\mapsto \nu_a = \frac{2n-1}{2T} - \frac{n}{T} = -\frac{1}{2T} \\ \frac{2n+1}{2T} &\mapsto \nu_b = \frac{2n+1}{2T} - \frac{n}{T} = +\frac{1}{2T} \\ df &= d\nu\end{aligned}$$

Demostración del Inverso (6)

- Por lo tanto,

$$\begin{aligned} s(lT) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S\left(\nu + \frac{n}{T}\right) e^{j2\pi\left(\nu + \frac{n}{T}\right)lT} d\nu \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\nu + \frac{n}{T}\right) \underbrace{e^{j2\pi n l}}_1 \right] e^{j2\pi \nu l T} d\nu \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} T e^{j2\pi \nu l T} d\nu \end{aligned}$$

Demostración del Inverso (7)

- La ecuación (a) viene del intercambio de la integral con sumatoria, y (b) de la aplicación de (3).
- Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} s(lT) &= T \left\{ \frac{e^{j2\pi\nu lT}}{j2\pi lT} \Big|_{+\frac{1}{2T}} - \frac{e^{j2\pi\nu lT}}{j2\pi lT} \Big|_{-\frac{1}{2T}} \right\} \\ &= \frac{e^{j\pi T} - e^{-j\pi T}}{j2} \frac{1}{\pi l} \\ &= \text{sinc}(\pi l) = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 0 & l \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

es decir, la señal $s(t)$ es un pulso de Nyquist.

Implicancia Directa (1)

- La implicancia directa corresponde a demostrar que si la señal $s(t)$ es un pulso de Nyquist, entonces se cumple (3).
- El procedimiento es similar lo hecho para la implicancia en la dirección inversa. Sabemos que

$$s(lT) = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\nu + \frac{n}{T}\right) \underbrace{e^{j2\pi n l}}_1 \right] e^{j2\pi \nu l T} d\nu$$

Implicancia Directa (2)

- Luego,

$$s(lT) = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S'(\nu) e^{j2\pi\nu lT} d\nu$$

- Notemos que esto nos dice que existe una función

$$S'(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\nu + \frac{n}{T})$$

que es periódica en ν y cuyo desarrollo en serie de Fourier tiene un solo elemento no nulo ($s'(0) = 1/T$).

Implicancia Directa (3)

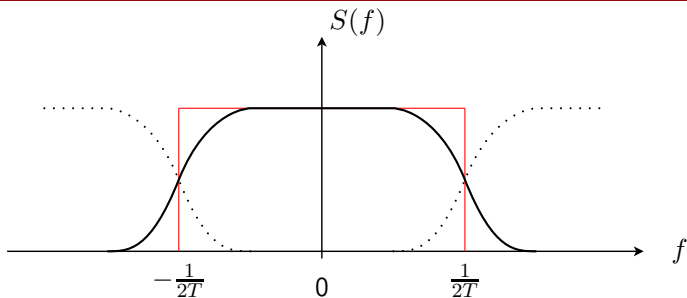
- Por lo tanto,

$$\frac{S'(\nu)}{T} = s(0) = 1$$

es decir,

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f + \frac{n}{T}) = 1.$$

Implicancia Directa (4)



Observaciones sobre el Criterio de Nyquist

- Si la señal $s(t)$ tiene un ancho de banda W , esto es, si $S(f) = 0$ para $|f| > W$, la suma infinita sobre $S(f + \frac{n}{T})$ puede ser reemplazada por una suma finita, esto es

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N S\left(f + \frac{n}{T}\right) = 1 \quad \text{para } |f| \leq \frac{1}{2T} \quad (4)$$

donde $N = \lfloor 2TW \rfloor$.

- Si $\frac{W}{2} < \frac{1}{2T} < W$, $N = 1$.

La Familia de Pulsos de Coseno Alzado (1)

- La familia de **pulsos de coseno-alzado** (*raised-cosine pulse*) corresponde a una familia paramétrica de pulsos de Nyquist, cuyo espectro es una función definida como

$$S(f) = \begin{cases} T & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 - \sin \frac{\pi T(|f| - 1/2T)}{\alpha} \right] & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & |f| \geq \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \quad (5)$$

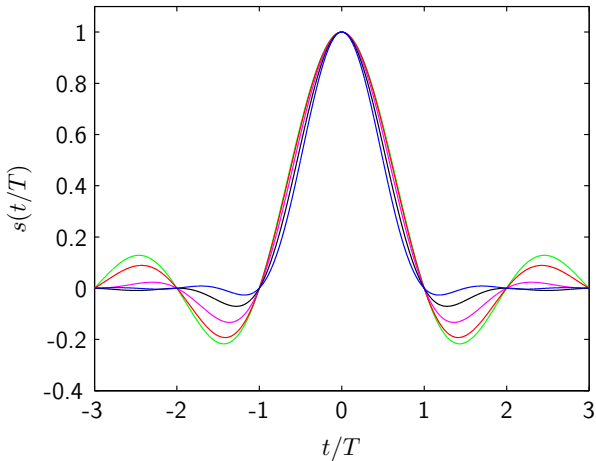
La Familia de Pulsos de Coseno Alzado (2)

donde el parámetro α varía entre 0 y 1.

- El correspondiente pulso tiene la forma

$$s(t) = \text{sinc}(t/T) \frac{\cos \alpha \pi t/T}{1 - 4\alpha^2 t^2/T^2}. \quad (6)$$

La Familia de Pulsos de Coseno Alzado (3)



Modulación Diferencial (1)

- Existe una convención alternativa para pasar de bits a formas de onda analógica.
- La idea es mandar un “1” sólo cuando la secuencia original de datos $\{b_l\}$ cambie de valor de “0” a “1” o viceversa.
- Matemáticamente esta idea puede ser expresada como sigue:

$$a_l = 0 \text{ si } b_l = b_{l-1}$$

$$a_l = A \text{ en otro caso.}$$

Modulación Diferencial (2)

- Esta forma se denomina NRZI (I: inverse) y la señal modulada es

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n s(t - nT).$$

- Este esquema requiere un bit de referencia inicial.
- Este tipo de proceso nos recuerda de un proceso de diferenciación de la entrada, y se da en forma natural en medios magnéticos.

Modulación Diferencial (3)

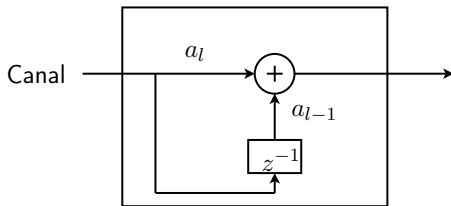
- Si este proceso es inherente al medio, debemos utilizar un esquema de modulación apropiado.
- Notemos que si el modulador envía a_l , el demodulador lo interpretará como una secuencia NRZ en lugar de NRZI.
- La situación complementaria ocurre si el modulador envía los datos como NRZ pero son recuperados como NRZI.

Modulación Diferencial (4)

- En cualquier caso necesitamos un dispositivo extra para poder compensar por el efecto “diferencial”, de manera de transformar los datos a su forma original.
- La transformación de NRZ a NRZI se puede realizar en el modulador utilizando un **pre-codificador**, que de manera preemptiva modifica la secuencia NRZ para ser transformada de vuelta por el canal.

Modulación Diferencial (5)

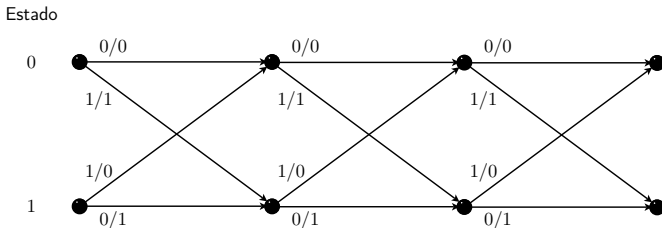
- La otra alternativa es utilizar un **codificador posterior** o **post-coder** a continuación del demodulador.



Postcoder NRZI

Representación Via Retículas

- Canales con memoria son usualmente representados en forma gráfica utilizando una **retícula** o *trellis*.
- La retícula es un grafo formado por
 - **nodos**: que representan los posibles estados de la señal en el instante anterior.
 - **arcos**: que indican las posibles transiciones de un instante al siguiente.



Resumen

Hemos revisado:

- Pulsos de Nyquist
- Criterio de Nyquist
- Familia de señales de coseno alzado.
- Modulación diferencial y de enmallado.

Lecturas

- R. Blahut, *Modem Theory: An Introduction to Telecommunications*, capítulo 2.