

# EL4005 Principios de Comunicaciones

## Clase No.20: Señalización Digital en Banda Base



Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Chile

22 de Octubre de 2010

# Contenidos de la Clase (1)

---

## Modulación en Banda Base

- Canales en Banda Base y Pasa Banda

- Formas de Onda en Banda Base para Señalización Binaria

- Formas de Onda en Banda Base para Señalización Multinivel

## Resumen y Lecturas

# Motivación

---

- El problema que nos preocupa en esta clase es la asignación de secuencias de símbolos a señales analógicas.
- Veremos que las señales típicas, como pulsos cuadrados, sinusoides e incluso sinc's pueden resultar inadecuadas para nuestro objetivo.
- El criterio de Nyquist nos permitirá caracterizar en forma general “buenas señales” para modulación digital.

## Modulación en Banda Base (1)

---

- Un canal analógico es un canal cuyas entradas son funciones continuas del tiempo.
- Un canal banda base es un canal analógico apropiado para transmitir señales cuyo espectro está confinado a un intervalo centrado en  $f = 0$ .
- La función de un modulador digital es convertir el flujo de datos digitales en una representación basado en formas de onda que pueda ser aceptado por el canal.

## Modulación en Banda Base (2)

---

- El modulador debe:
  - acomodar los datos a las características espectrales del canal,
  - obtener una alta tasa de transmisión de datos,
  - minimizar la potencia transmitida,
  - mantener la tasa de error de bits baja.
- El desempeño de un modulador no puede ser interpretado en forma separada del de su demodulador.

## Modulación en Banda Base (3)

---

- En definitiva, la prueba final que todo diseño debe superar es la habilidad de recuperar los símbolos enviados en la entrada del canal, a partir de la señal recibida en la salida en presencia de ruido, interferencia, distorsión, o cualquier otro impedimento.

## Definiciones (1)

---

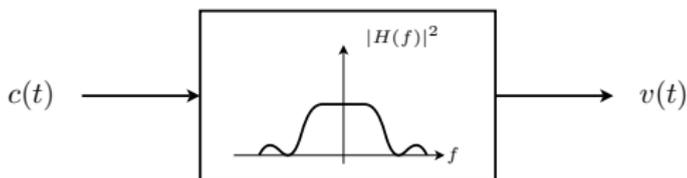
- Un canal analógico quedará caracterizado por su entrada, una función continua del tiempo denotada por  $c(t)$ , y su salida, la señal continua del tiempo  $v(t)$ .
- El canal se dirá lineal si satisface el principio de superposición: si  $c(t) \mapsto v(t)$  y  $c'(t) \mapsto v'(t)$ , entonces para  $a, b \in \mathbb{R}$

$$ac(t) + bc'(t) \mapsto av(t) + bv'(t). \quad (1)$$

- Todo canal que sea lineal e invariante en el tiempo (LTI) puede ser descrito mediante un filtro lineal.

## Definiciones (2)

---



- El comportamiento del filtro queda descrito mediante la respuesta al impulso  $h(t)$  y su función de transferencia  $H(f)$ .
- La salida del canal lineal se puede determinar mediante la convolución de la entrada  $c(t)$  y  $h(t)$ , esto es

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)c(t-s)ds.$$

## Definiciones (3)

---

- En el dominio de la frecuencia,

$$V(f) = C(f)H(f).$$

- Un **canal de banda base** es un canal lineal  $h(t)$  para el cual el soporte de  $H(f)$  es un intervalo finito del eje de frecuencias que contiene el 0.
- En la práctica esta condición es relajada de forma de incluir canales cuya respuesta es grande en la vecindad de  $f = 0$ , y despreciable para frecuencias alejadas del origen.

## Definiciones (4)

---

- Un **canal pasa banda** es un canal lineal donde el soporte de  $H(f)$  está confinado a dos intervalos finitos centrados en las frecuencias  $+f_0$  y  $-f_0$ , donde  $f_0$  es grande comparado con el ancho de cada intervalo.
- Esta condición también puede ser relajada y sólo pedir que la magnitud de  $H(f)$  se despreziable fuera de los intervalos centrados en  $\pm f_0$ .
- En lo que sigue asumiremos que  $H(f) = 1$  en la banda de interés, de modo que  $H(f)$  es al menos tan ancho como  $C(f)$ .

# Formas de Onda en Banda Base (1)

para señalización binaria

---

- Vamos a considerar un tren de datos binarios que fluyen a una tasa constante de 1 bit por cada  $T_b$  segundos.
- Un **pulso** es una función real  $s(t)$  o  $As(t)$  cuya energía

$$\mathcal{E}_p = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty \quad (2)$$

o

$$\mathcal{E}_p = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 s^2(t) dt < \infty. \quad (3)$$

## Formas de Onda en Banda Base (2)

para señalización binaria

---

- Vamos a asumir que  $s(t)$  es un pulso sin dimensión física.
- Por ello es necesario considerar en forma explícita el parámetro de dimensiones  $A$ .
- En este caso diremos que  $\mathcal{E}_p = A^2$ .
- ¿Cómo modular un tren de datos en un canal analógico?  
Mediante un mapeo entre los datos y una concatenación de pulsos.

## Formas de Onda en Banda Base (3)

para señalización binaria

---

- Recibe el nombre de **forma de onda modulada** o **señal modulada**, y puede ser expresada como

$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT) \quad (4)$$

donde  $a_l$  depende del  $l$ -ésimo bit de datos.

- La **señalización antipodal** corresponde a la forma de modulación digital más simple.

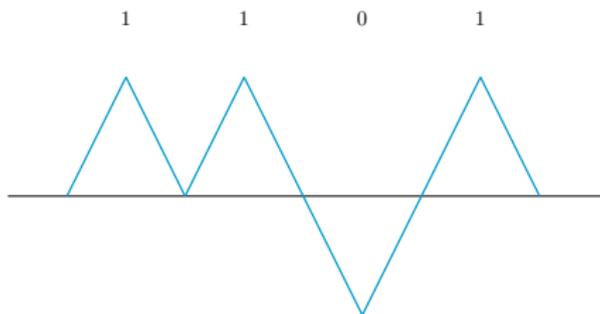
## Formas de Onda en Banda Base (4)

para señalización binaria

---

- Si  $s(t)$  está normalizada a energía unitaria, entonces definimos

$$a_l = \begin{cases} +A & \text{si el } l\text{-ésimo bit es igual a 1} \\ -A & \text{si el } l\text{-ésimo bit es igual a 0.} \end{cases}$$



## Formas de Onda en Banda Base (5)

para señalización binaria

---

- Este tipo de señalización también recibe el nombre de **desplazamiento de fase binario** o *binary phase-shift-keyed* (BPSK).
- La **energía por bit transmitido**, denotada por  $E_b$  es igual a la energía en el pulso  $As(t)$ , porque

$$E_b = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 s^2(t) dt = A^2 \times 1.$$

- La elección de la forma del pulso no es única.

## Formas de Onda en Banda Base (6)

para señalización binaria

---

- La ecuación (4) puede ser utilizada como una manera de realizar una conversión digital/analógica:

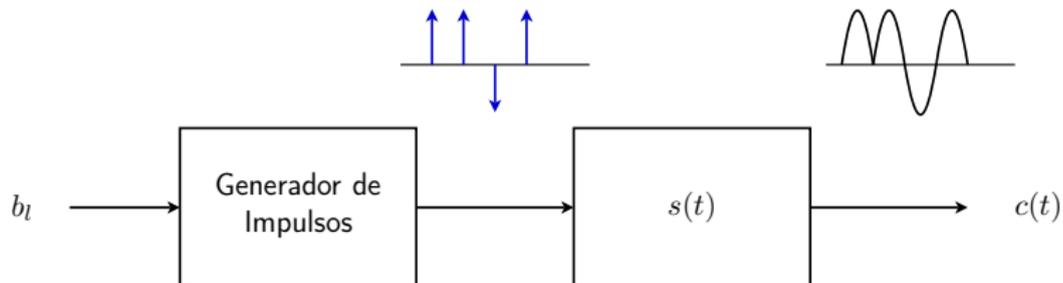
$$c(t) = \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \delta(t - lT) \right] * s(t)$$

para cualquier pulso  $s(t)$ .

# Formas de Onda en Banda Base (7)

para señalización binaria

---



## Formas de Onda en Banda Base (8)

para señalización binaria

---

- Otra forma de hacer señalización binaria es mediante la siguiente asignación:

$$a_l = \begin{cases} +A & \text{si el } l\text{-ésimo bit es igual a 1} \\ 0 & \text{si el } l\text{-ésimo bit es igual a 0.} \end{cases}$$

- Este esquema recibe el nombre de **desplazamiento on-off binario** o *binary on-off-keyed* (OOK).

## Formas de Onda en Banda Base (9)

para señalización binaria

---

- Este esquema necesita energía sólo para transmitir 1's; por lo tanto,

$$E_b = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A^2 s^2(t) dt = \frac{1}{2} A^2.$$

- En el caso que  $s(t)$  es un pulso cuadrado y se asigne un voltaje no nulo (aunque menor que  $A$ ) al símbolo 0, la codificación OOK recibe el nombre de onda sin retorno a cero (*Nonreturn-to-Zero* o NRZ).

## Formas de Onda en Banda Base (10)

para señalización binaria

---

- Una de las desventajas de NRZ es que, al ser un pulso cuadrado, su respuesta en frecuencia decae lentamente

$$\text{orden } \frac{1}{f}$$

- Utiliza un ancho de banda relativamente grande en comparación con la tasa de datos.

# Formas de Onda en Banda Base (1)

para señalización  $M$ -aria

---

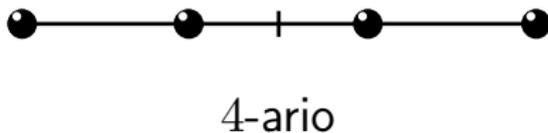
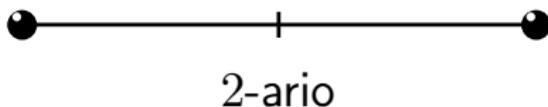
- Una manera de realizar la labor de modulación en forma más eficiente corresponde a modular un grupo de bits en cada instante de señalización.
- En este caso, vamos a hablar de señalización  $M$ -aria.
- Existen dos formas de lograr este objetivo
  - i. **Restringiendo el ancho de banda.** En este caso se utiliza una única forma de onda  $s(t)$  con diversos niveles de amplitud.
  - ii. **Utilizando una familia de  $M$  señales ortogonales.** El ancho de banda requerido crece con  $M$ .

## Formas de Onda en Banda Base (2)

para señalización  $M$ -aria

---

- En el primer caso, las **constelación** de señales “vive” en una sola dimensión, tal como apreciamos en la figura:



## Formas de Onda en Banda Base (3)

para señalización  $M$ -aria

---

- Una constelación de señales es un alfabeto de señales, y usualmente lo vamos a denotar por

$$\mathcal{S} = \{c_0, c_1, \dots, c_{M-1}\}. \quad (5)$$

- Es un conjunto finito de señales.
- Su cardinalidad es  $|\mathcal{S}| = M = 2^k$ .
- Podemos representar todas las secuencias posibles de  $k$  bits.

## Formas de Onda en Banda Base (4)

para señalización  $M$ -aria

---

- Por ejemplo,

$$\mathcal{S}_1 = \{-A, A\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{-3A, -A, A, 3A\}.$$

- La forma de onda modulada es

$$c(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l s(t - lT), \quad a_l \in \mathcal{S}. \quad (6)$$

## Formas de Onda en Banda Base (5)

para señalización  $M$ -aria

---

- Si definimos la siguiente asignación

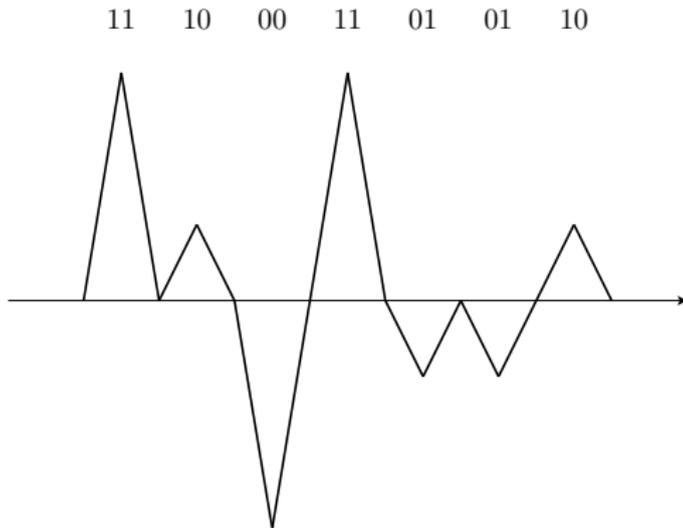
$$a_l = \begin{cases} -3A & \text{si el par de bits de datos } l\text{-ésimo es igual a } 00 \\ -A & \text{si el par de bits de datos } l\text{-ésimo es igual a } 01 \\ +A & \text{si el par de bits de datos } l\text{-ésimo es igual a } 10 \\ +3A & \text{si el par de bits de datos } l\text{-ésimo es igual a } 11. \end{cases}$$

entonces la secuencia 11|10|00|11|01|01|10 genera la siguiente forma de onda:

# Formas de Onda en Banda Base (6)

para señalización  $M$ -aria

---



## Formas de Onda en Banda Base (7)

para señalización  $M$ -aria

---

- Este tipo de codificación recibe el nombre de **modulación por amplitud de pulsos** (PAM) o modulación por variación de amplitudes (*amplitude-shift keyed* o ASK).
- Este esquema permite transmitir  $k$  bits de datos en  $T$  segundos utilizando una constelación de  $2^k$  señales reales.

## Cálculo de Energías (1)

---

- La elección de la forma del pulso puede ser cambiada a una que utilice menos potencia o menos ancho de banda.
- La energía promedio por símbolo de la constelación  $\{c_0, c_1, \dots, c_M\}$ , con  $M = 2^k$ , es

$$E_c = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} c_m^2 \quad (7)$$

donde hemos asumido que todas las señales son equiprobables, y  $c_m^2$  es la energía de la  $m$ -ésima señal.

## Cálculo de Energías (2)

---

- Considerando que hay  $k = \log_2 M$  bits en cada símbolo, la energía promedio por bit de la constelación de señales es

$$E_b = \frac{E_c}{k}.$$

## Cálculo de Energías (3)

---

- La energía esperada en un bloque de  $L$  símbolos es

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^L a_l s(t - lT) \right)^2 dt \right] &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l'=0}^L \sum_{l=0}^L \mathbb{E}[a_l a_{l'}] s(t - lT) s(t - l'T) dt \\ &= \sum_{l'=0}^L \sum_{l=0}^L \mathbb{E}[a_l a_{l'}] \int_{-\infty}^{\infty} s(t - lT) s(t - l'T) dt.\end{aligned}$$

## Cálculo de Energías (4)

---

- Si la secuencia de datos es máximamente aleatoria, esto es, todas las secuencias son equiprobables, y los símbolos son independientes, entonces

$$\mathbb{E}[a_l a_{l'}] = E_c \delta_{ll'}.$$

- Si la energía del pulso  $s(t)$  es 1, la energía promedio en un bloque de  $L$  símbolos es  $LE_c$ .
- Por ejemplo, en la constelación 4-aria antes vista,

$$E_c = \frac{1}{4}[(-3A)^2 + (-A)^2 + A^2 + (3A)^2] = 5A^2.$$

## Cálculo de Energías (5)

---

- Como se representan dos símbolos en cada señal, entonces la energía promedio por bit es  $5A^2/2$ .

# Resumen

---

Hemos revisado:

- Canales en banda base y pasa banda
- Formas de onda en banda base para señalización binaria.
- Formas de onda en banda base para señalización  $M$ -aria (multinivel)
- Pulsos de Nyquist.

## Lecturas

---

- Proakis y Salehi, *Communication Systems Engineering*, capítulo 7, secciones 7.1 a 7.4.
- (Complementaria) R. Blahut, *Modem Theory: An Introduction to Telecommunications*, capítulo 2.
- (Complementaria) A. Lapidoth, *A Foundation in Digital Communications*, capítulos 10 y 11.