EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.19: Comunicaciones Digitales

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

20 de Octubre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Motivación

- Queremos estudiar los efectos de enviar secuencias de símbolos discretos sobre un canal analógico.
- ¿Será posible realizar una transmisión libre de errores?
- ¿Bajo qué condiciones?
- ¿Podremos derivar criterios concretos de diseño para esta problemática?

Problema General

- Problema:

  Transmisión de una secuencias digitales en un canal analógico con ruido.
- Ello implica que debemos diseñar una asignación invertible entre símbolos discretos y un alfabeto de señales continuas.
- Consideraremos primero canales de tipo pasabajos, i.e., donde su respuesta al impulso incluye la frecuencia $f = 0$.
- De esta forma, no hay necesidad de utilizar una portadora.

Plan de Estudio

- Estudiaremos el problema de la modulación digital en dos etapas:
  1. Transmisión en canales pasabajos con ruido aditivo Gaussiano.
  2. Recepción de señales moduladas digitalmente.
- Ambos problemas se pueden entender mejor si consideramos una representación geométrica de señales analógicas.

Representación Geométrica de Señales (1)

- Desarrollaremos una representación geométrica de señales como puntos en un espacio de señales.
- Ventajas:
  - Caracterización compacta.
  - Simplificación del análisis de desempeño.
  - Canales analógicos pueden modelarse como canales vectoriales.

Representación Geométrica de Señales (2)

- La idea central es la siguiente: representar símbolos digitales mediante señales analógicas. Por ejemplo, si deseamos mapear el par $\{0, 1\}$ necesitamos dos señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ de forma tal que

$$0 \mapsto s_1(t)$$
$$1 \mapsto s_2(t)$$

Este tipo de esquema recibe el nombre de **modulación binaria**.

Representación Geométrica de Señales (3)

- Si agrupamos símbolos de mayor largo, por ejemplo,

$$\mathbf{b} = (b_0, \ldots, b_{K-1}),$$

  donde $K > 2$ y $b_k \in \{0, 1\}$, entonces necesitaremos $M = 2^K$ señales para poder representar todos las secuencias posibles.
- Este tipo de esquema se denomina **modulación M-aria**.

Representación Geométrica de Señales (4)

- Si consideramos ahora el conjunto de señales

$$\{s_1(t), \ldots, s_M(t)\},$$

podemos construir un subconjunto de $N \leq M$ de formas de onda ortogonales, donde N es la dimensión del espacio en cuestión.

- La ventaja de tener este subconjunto, que denominaremos **base del espacio de señales**, es el hecho que podemos encontrar una manera más compacta de representar el espacio de señales, lo que puede simplificar las labores de modulación y demodulación.

Procedimiento de Ortonormalización de G-S (1)

- EL procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt permite construir una base de vectores ortogonales unos con otros y de norma 1, a partir de un conjunto cualquiera de vectores.
- En el caso de señales, utilizaremos la norma 2, esto es, la norma Euclidiana para señales de energía, como medida de distancia.
- Recordamos la definición:

$$||s(t)||_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}}. \tag{1}$$

Procedimiento de Ortonormalización de G-S (2)

- Consideremos un conjunto de M señales de energía $\{s_1(t), \ldots, s_M(t)\}$.
- El procedimiento es el siguiente:

1. Definir

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}}. \tag{2}$$

Esto es, $\varphi_1(t)$ es la versión normalizada (de energía 1) de $s_1(t)$.

Procedimiento de Ortonormalización de G-S (3)

2. Para calcular $\varphi_2(t)$ primero proyectamos $s_2(t)$ en $\varphi_1(t)$:

$$c_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)\varphi_1(t)dt.$$

Definimos la señal auxiliar $d_2(t) = s_2(t) - c_{21}\varphi_1(t)$. Finalmente

$$\varphi_2(t) = \frac{d_2(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_2}} \tag{3}$$

donde $\mathcal{E}_2$ es la energía de la señal auxiliar $d_2(t)$.

Procedimiento de Ortonormalización de G-S (4)

3. En general, la ortogonalización de la señal k-ésima queda definida por los siguientes pasos

$$\varphi_k(t) = \frac{d_k(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_k}} \tag{4a}$$

$$d_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki}\varphi_i(t) \tag{4b}$$

$$\mathcal{E}_k = \int_{-\infty}^{\infty} d_k^2(t)dt \tag{4c}$$

$$c_{ki} = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t)\varphi_i(t)dt, \quad i = 1, \ldots, k-1. \tag{4d}$$

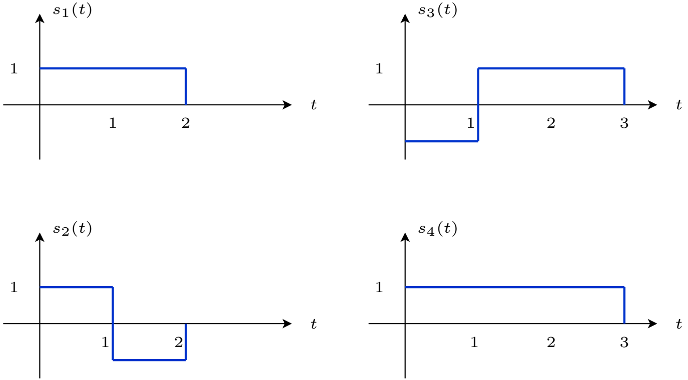
Procedimiento de Ortonormalización de G-S (5)

4. Continuar hasta que $k = M$.

- El proceso de ortogonalización puede entregarnos un conjunto de menor tamaño en caso que algún $d_k(t) = 0$.
- En este caso no se agregar una nueva dimensión.
- El conjunto de N señales $\{\varphi_k\}$ forma una base ortonormal de un espacio N-dimensional.
- En el caso que $N = M$, el conjunto de señales originales era **linealmente independiente**.

Ejemplo (1)

- Consideremos el conjunto de 4 señales mostrado en la figura



Ejemplo (2)

Solución

- Comenzaremos calculando $\varphi_1(t)$:

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |s_1(t)|^2 dt}} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{2}}.$$

Ejemplo (3)

- Calculamos ahora

$$d_2(t) = s_2(t) - c_{21}\frac{s_1(t)}{\sqrt{2}}.$$

La proyección $c_{21} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_2(t)\varphi_1(t)$, por lo tanto

$$c_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^2 s_2(t)s_1(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 dt + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 -1dt = 0.$$

Por lo tanto, $\varphi_2(t) = \dfrac{s_2(t)}{\sqrt{2}}$.

Ejemplo (4)

- Ahora calcularemos $\varphi_3(t)$:

$$d_3(t) = s_3(t) - c_{31}\varphi_1(t) - c_{32}\varphi_2(t)$$

donde

$$\begin{aligned} c_{31} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^3 s_3(t)s_1(t)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 -1dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 1dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^3 0dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo (5)

Similarmente

$$\begin{aligned} c_{32} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^3 s_3(t) s_2(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 -1 dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 -1 dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^3 0 dt \\ &= -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo (6)

Finalmente

$$d_3(t) = s_3(t) + \sqrt{2}\varphi_2(t)$$

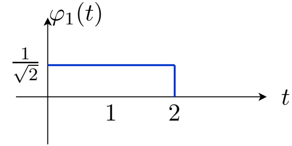
y

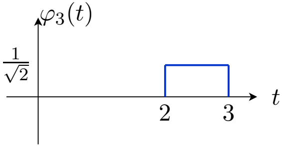
$$\varphi_3(t) = d_3(t)$$

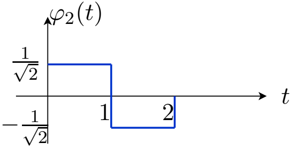
dado que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |d_3(t)|^2 dt = 1.$

Ejemplo (7)

- El último paso corresponde al cálculo de $\varphi_4(t)$. Notemos que $s_4(t)$ es una combinación lineal de $\varphi_1(t)$ y $\varphi_3(t)$, por lo tanto $N = 3$.







Representación Geométrica de Señales (1)

- Una vez que tenemos el conjunto $\{\varphi_i(t)\}$, podemos expresar el conjunto de señales $\{s_m(t)\}$ como una combinación lineal exacta de las señales de la base.
- Por lo tanto

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^{N} s_{mn}\varphi_n(t), \; m = 1, \ldots, M. \tag{5}$$

Representación Geométrica de Señales (2)

donde los coeficientes de peso s_{mn} corresponden a las proyecciones de $s_m(t)$ sobre cada $\varphi_n(t)$:

$$s_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)\varphi_n(t)dt. \tag{6}$$

- La energía de la señal la podemos calcular en términos de los coeficientes de proyección.

$$\mathcal{E}_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)dt = \sum_{n=1}^{N} s_{mn}^2. \tag{7}$$

Representación Geométrica de Señales (3)

- Notemos que ahora cada señal puede ser representada por un vector en $\mathbb{R}^N$:

$$\mathbf{s}_m = (s_{m1}, \ldots, s_{mN}).$$

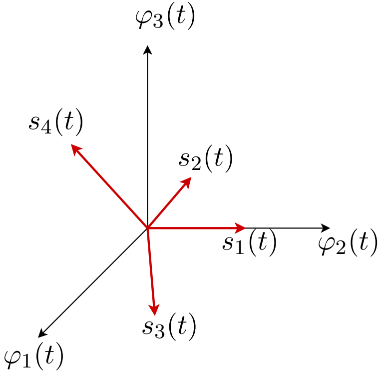
  y de esta forma, la energía de la señal es la norma Euclidiana de $\mathbf{s}_m$ en el espacio de señales.

- Además, el producto interno de señales puede ser calculado como el producto interno de sus representaciones vectoriales

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_n(t) dt = \mathbf{s}_m \bullet \mathbf{s}_n.$$

Representación Geométrica de Señales (4)

- Ahora tenemos una representación geométrica para el conjunto de señales.



Modulación en Banda Base (1)

- Un canal analógico es un canal cuyas entradas son funciones continuas del tiempo.
- Un canal banda base es un canal analógico apropiado para transmitir señales cuyo espectro está confinado a un intervalo centrado en $f = 0$.
- La función de un modulador digital es convertir el flujo de datos digitales en una representación basado en formas de onda que pueda ser aceptado por el canal.

Modulación en Banda Base (2)

- El modulador debe:
  - acomodar los datos a las características espectrales del canal,
  - obtener una alta tasa de transmisión de datos,
  - minimizar la potencia transmitida,
  - mantener la tasa de error de bits baja.
- El desempeño de un modulador no puede ser interpretado en forma separada del de su demodulador.

Modulación en Banda Base (3)

- En definitiva, la prueba final que todo diseño debe superar es la habilidad de recuperar los símbolos enviados en la entrada del canal, a partir de la señal recibida en la salida en presencia de ruido, interferencia, distorsión, o cualquier otro impedimento.

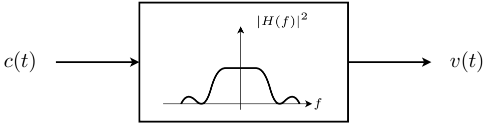
Definiciones (1)

- Un canal analógico quedará caracterizado por su entrada, una función continua del tiempo denotada por $c(t)$, y su salida, la señal continua del tiempo $v(t)$.
- El canal se dirá lineal si satisface el principio de superposición: si $c(t) \mapsto v(t)$ y $c'(t) \mapsto v'(t)$, entonces para $a, b \in \mathbb{R}$

$$ac(t) + bc'(t) \mapsto av(t) + bv'(t). \tag{8}$$

- Todo canal que sea lineal e invariante en el tiempo (LTI) puede ser descrito mediante un filtro lineal.

Definiciones (2)



- El comportamiento del filtro queda descrito mediante la respuesta al impulso $h(t)$ y su función de transferencia $H(f)$.
- La salida del canal lineal se puede determinar mediante la convolución de la entrada $c(t)$ y $h(t)$, esto es

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)c(t-s)ds.$$

Definiciones (3)

- En el dominio de la frecuencia,

$$V(f) = C(f)H(f).$$

- Un **canal de banda base** es un canal lineal $h(t)$ para el cual el soporte de $H(f)$ es un intervalo finito del eje de frecuencias que contiene el 0.
- En la práctica esta condición es relajada de forma de incluir canales cuya respuesta es grande en la vecindad de $f = 0$, y despreciable para frecuencias alejadas del origen.

Definiciones (4)

- Un **canal pasa banda** es un canal lineal donde el soporte de $H(f)$ está confinado a dos intervalos finitos centrados en las frecuencias $+f_0$ y $-f_0$., donde f_0 es grande comparado con el ancho de cada intervalo.
- Esta condición también puede ser relajada y sólo pedir que la magnitud de $H(f)$ se despreciable fuera de los intervalos centrados en $\pm f_0$.
- En lo que sigue asumiremos que $H(f) = 1$ en la banda de interés, de modo que $H(f)$ es al menos tan ancho como $C(f)$.

Resumen

Hemos revisado:

- Problema general de transmisión digital en canales analógicos.
- Representación geométrica de señales, incluyendo procedimientos de ortogonalización.
- Conceptos y definiciones para la modulación digital en banda base.

Lecturas

- A. Lapidoth, *A Foundation in Digital Communications*, capítulos 3, 4 y 10.
- (Complementaria) R. Blahut, *Modem Theory: An Introduction to Telecommunications*, capítulo 2.