

EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.17: Desempeño Modulación Angular en Ruido Gaussiano



Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

13 de Octubre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Efectos en Sistemas de Modulación Angular

- Detección de Modulación Angular

- Razón Señal-a-Ruido en Sistemas de Modulación Angular

Preguntas que estudiaremos en la clase

- Ruido blanco.
- Aplicaciones en problemas de comunicaciones.

Efectos del Ruido en Sistemas de Modulación Angular

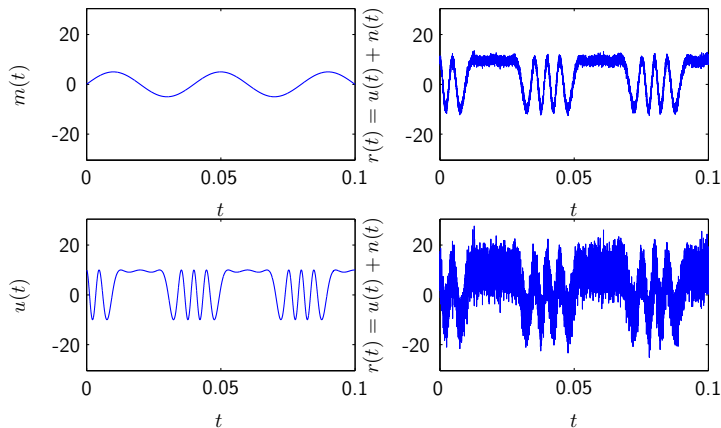
(1)

- En AM la información está contenida en la amplitud de la portadora. El efecto de ruido aditivo se manifiesta directamente en alteraciones de la amplitud de la señal recibida.
- En sistemas de modulación angular, como FM, la información está contenida en la frecuencia pero el ruido se sigue sumando a la amplitud de la portadora.

Efectos del Ruido en Sistemas de Modulación Angular (2)

- Por lo tanto, el mensaje original se verá distorsionado en la medida que el ruido logre alterar el contenido de frecuencias de la portadora.
- La frecuencia de una señal puede ser entendida como el número de **cruces por cero** que una determinada señal realiza en un cierto intervalo. A mayor frecuencia, mayor será el número de cruces que se podrán observar en la misma ventana de tiempo.

Ejemplo de Modulación en Fase con Ruido Aditivo

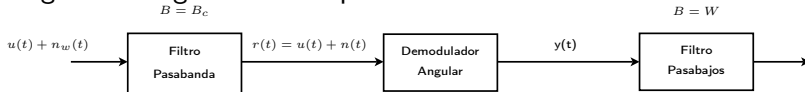


Detección de Modulación Angular (1)

- Un sistema basado en modulación angular puede resultar más robusto que un sistema AM, pero si la potencia del ruido es comparable o superior a la potencia de la portadora, el efecto es severo.
- Esto se debe a que el ruido, al tener un espectro constante, va a producir cambios rápidos en la señal portadora, alterando su contenido en frecuencias.

Detección de Modulación Angular (2)

- El receptor para un sistema modulado angularmente tiene el siguiente diagrama de bloques



- La señal modulada angular se puede escribir en general como

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \\ &= A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi \int_{-\infty}^t m(\tau) h(t - \tau) d\tau \right) \quad \text{FM} \quad (1) \end{aligned}$$

donde $h(t) = k_c \delta(t)$ en el caso de PM y $h(t) = k_f u(t)$ para FM.

Detección de Modulación Angular (3)

- La señal recibida es la suma de $u(t)$ y $n_w(t)$, una señal de ruido blanco Gaussiano.
- El resultado es filtrado para remover todo el ruido fuera de la banda de interés, con un filtro cuyo ancho de banda es igual al de la señal $m(t)$.
- Por lo tanto, el efecto del filtrado no introduce distorsión a la señal de interés.
- Sin embargo, también filtra el ruido fuera de la banda, lo que produce un proceso de ruido que no es blanco. Vamos a denotar este ruido filtrado como $n(t)$.

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (1)

- La salida del filtro es

$$\begin{aligned}r(t) &= u(t) + n(t) \\ &= u(t) + n_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_s(t) \sin(2\pi f_0 t)\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la ya sabida descomposición en fase y cuadratura.

- Vamos a realizar un análisis aproximado para el caso que $\text{SNR} \gg 1$.

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (2)

- Primero, notemos que el ruido puede ser representado en su forma original utilizando la componentes en fase y cuadratura:

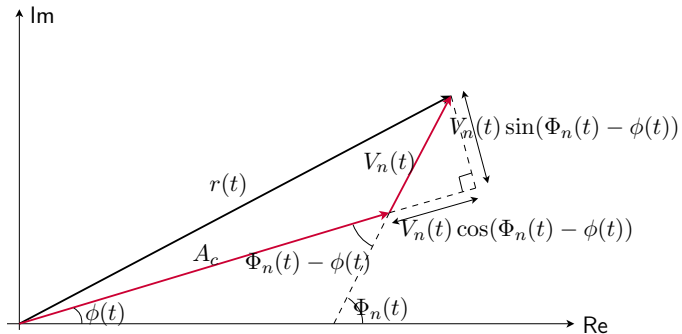
$$\begin{aligned}n(t) &= \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \cos\left(2\pi f_c t + \arctan \frac{n_s(t)}{n_c(t)}\right) \\&= V_n(t) \cos(2\pi f_c t + \Phi_n(t)).\end{aligned}$$

donde $V_n(t)$ y $\Phi_n(t)$ representan la envolvente y fase del proceso pasabanda de ruido.

- El hecho que $\text{SNR} \gg 1$ significa que

$$P(V_n(t) \ll A_c) \approx 1.$$

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (3)



Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (4)

- Del diagrama fasorial podemos deducir que

$$\begin{aligned} r(t) &\approx [A_c + V_n(t) \cos(\Phi_n(t) - \phi(t))] \times \cos \{2\pi f_c t + \phi(t) \\ &\quad + \arctan \frac{V_n(t) \sin(\Phi_n(t) - \phi(t))}{A_c + V_n(t) \cos(\Phi_n(t) - \phi(t))} \} \\ &\approx [A_c + V_n(t) \cos(\Phi_n(t) - \phi(t))] \times \cos \{2\pi f_c t + \phi(t) \\ &\quad + \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) \} \end{aligned}$$

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (5)

- El demodulador procesará esta señal y, dependiendo del tipo de demodulador (fase o frecuencia), entregará la fase o la frecuencia instantánea de la señal.
- Considerando el hecho que

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases},$$

tenemos lo siguiente:

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (6)

- La salida del modulador es

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{cases} \phi(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) & \text{PM} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\phi(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) \right) & \text{FM} \end{cases} \\ &= \begin{cases} k_p m(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) & \text{PM} \\ k_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) \right) & \text{FM} \end{cases} \\ &= \begin{cases} k_p m(t) + Y_n(t) & \text{PM} \\ k_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} Y_n(t) & \text{FM} \end{cases} \end{aligned}$$

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (7)

- Donde

$$Y_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t))$$

- Reconocemos que en ambos caso (PM y FM) el primer término corresponde a la señal enviada, y el segundo a un término de ruido aditivo.

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (8)

- Un hecho importante es que el segundo término es inversamente proporcional a la amplitud de la portadora, A_c .
- Ello ofrece una manera de controlar arbitrariamente el nivel distorsión debido al ruido que el mensaje $m(t)$ experimenta, algo que no podíamos hacer en AM.
- Nos resta determinar una expresión, aunque sea aproximada, para la razón señal a ruido de un sistema con modulación angular.

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (9)

- Notamos que

$$\begin{aligned} Y_n(t) &= \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) \\ &= \frac{1}{A_c} \left[V_n(t) \sin \Phi_n(t) \cos \phi(t) - V_n(t) \cos \Phi_n(t) \sin \phi(t) \right] \\ &= \frac{1}{A_c} [n_s(t) \cos \phi(t) - n_c(t) \sin \phi(t)]. \end{aligned}$$

- En general $m(t)$ es una señal pasabajos, o que al menos tiene una variación mucho más lenta que la señal de ruido.

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (10)

- Dado que $\phi(t)$ es proporcional a $m(t)$ o su integral, $\phi(t)$ permanecerá relativamente fijo en comparación con $n_c(t)$ y $n_s(t)$.
Asumiendo que $\phi(t) \approx \phi$, tenemos

$$Y_n(t) = \frac{1}{A_c} [n_s(t) \cos \phi - n_c(t) \sin \phi].$$

Desvío (1)

Resultado Auxiliar

Consideremos la salida $n(t)$ de un filtro pasabanda $H(f)$ definido por

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f - f_c| \leq W \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

frente a una entrada de ruido blanco. La densidad espectral de potencia del proceso $Z(t) = an_c(t) + bn_s(t)$ es

$$S_Z(f) = a^2 S_n(f) + b^2 S_n(f). \quad (2)$$

Desvío (2)

- Consideramos la simetría en torno a f_c del filtro $H(f)$ para determinar que las componentes en cuadratura y en fase del ruido pasabanda son independientes.
- Por lo tanto, al ser $n_c(t)$ y $n_s(t)$ procesos independientes de media cero, el problema se reduce al de la suma de dos variables independientes.

Desvío (3)

- La densidad espectral de potencia $S_Z(f)$ es la suma de los espectros de potencia de $n_c(t)$ y $n_s(t)$, escalados apropiadamente por a^2 y b^2 .

$$S_Z(f) = a^2 S_{n_c}(f) + b^2 S_{n_s}(f)$$

- Pero $S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = S_n(f)$, lo que nos lleva al resultado deseado.

De Regreso al Análisis Original ...

- Podemos aplicar el resultado recién enunciado con

$$a = \frac{\cos \phi}{A_c} \text{ y } b = -\frac{\sin \phi}{A_c}.$$

- Por lo tanto

$$S_{Y_n}(f) = (a^2 + b^2)S_{n_c}(f) = \frac{1}{A_c^2}S_{n_c}(f)$$

- Como el ruido filtrado tiene espectro no nulo entre $f_c - \frac{B_C}{2} \leq f \leq f_c + \frac{B_C}{2}$, entonces el espectro de la componente en fase se extiende entre $-\frac{B_C}{2} \leq f \leq \frac{B_C}{2}$. Esto significa que

$$S_{Y_n}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{A_c^2} & |f| \leq \frac{B_c}{2} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3)$$

Densidad Espectral del Ruido para el Caso FM (1)

- La expresión (3) corresponde al caso de modulación de fase.
- En el caso de modulación de frecuencia, el proceso $Y_n(t)$ es diferenciado y multiplicado por el factor $\frac{1}{2\pi}$.
- Recordamos que la densidad espectral de la derivada de un proceso satisface

$$S_Y(f) = 4\pi^2 f^2 S_X(f),$$

(esto es porque la $\mathcal{F}(\frac{d}{dt}) = j2\pi f$).

Densidad Espectral del Ruido para el Caso FM (2)

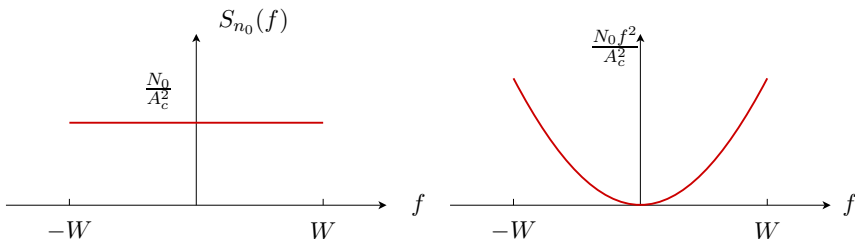
- Por lo tanto, el proceso de ruido a la salida del demodulador es

$$\frac{4\pi^2 f^2}{4\pi} S_{Y_n}(f) = \begin{cases} \frac{N_0 f^2}{A_c^2} & |f| \leq \frac{B_c}{2} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4)$$

- El ancho de banda B_c usualmente es reducido a W en las etapas de filtrado a la salida del demodulador. Por lo tanto, tenemos

$$S_{n_o}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{A_c^2} & |f| < W; \text{ PM} \\ \frac{N_0 f^2}{A_c^2} & |f| < W; \text{ FM} \\ 0 & |f| \geq W \end{cases} \quad (5)$$

Densidad Espectral del Ruido para el Caso FM (3)



Cálculo de SNR en Sistemas de Modulación Angular (1)

- Recordemos que

$$y(t) = \begin{cases} k_p m(t) + Y_n(t) & \text{PM} \\ k_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} Y_n(t) & \text{FM.} \end{cases}$$

Por lo tanto, la potencia de señal a la salida del demodulador es

$$P_{S_o} = \begin{cases} k_p^2 P_M & \text{PM} \\ k_f^2 P_M & \text{FM.} \end{cases}$$

- Si definimos la razón señal-a-ruido como el cuociente

$$\left(\frac{S}{N} \right)_o \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_{S_o}}{P_{n_o}},$$

Cálculo de SNR en Sistemas de Modulación Angular (2)

- La potencia del ruido en la banda $[-W, W]$ es

$$P_{n_o} = \int_{-W}^W S_{n_o}(f) df = \begin{cases} \int_{-W}^W \frac{N_0}{A_c^2} df & \text{PM} \\ \int_{-W}^W f^2 \frac{N_0}{A_c^2} df & \text{FM} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2WN_0}{A_c^2} & \text{PM} \\ \frac{2W^3 N_0}{3A_c^2} & \text{FM} \end{cases}$$

- Reemplazando

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} \frac{k_p^2 A_c^2}{2} \frac{P_M}{N_0 W} & \text{PM} \\ \frac{3k_p^2 A_c^2}{2W^2} \frac{P_M}{N_0 W} & \text{FM} \end{cases} \quad (6)$$

Cálculo de SNR en Sistemas de Modulación Angular (3)

- Notemos que la potencia de señal recibida $P_R = \frac{A_c^2}{2}$, y que

$$\begin{cases} \beta_p = k_p \text{máx } |m(t)| & \text{PM} \\ \beta_f = \frac{k_p \text{máx } |m(t)|}{W} & \text{FM} \end{cases},$$

- Por lo tanto

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} P_R \left(\frac{\beta_p}{\text{máx } |m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W} & \text{PM} \\ 3P_R \left(\frac{\beta_f}{\text{máx } |m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W} & \text{FM} \end{cases}. \quad (7)$$

Cálculo de SNR en Sistemas de Modulación Angular (4)

- Recordemos que la SNR de un sistema de comunicación en banda base es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_R}{N_0 W},$$

por lo que un sistema con modulación de fase tiene una ganancia de

$$2 \log(\beta_p P_{M_n}) \text{ dB} \quad (8)$$

y un sistema con modulación de frecuencia de

$$2 \log(3\beta_f P_{M_n}) \text{ dB} \quad (9)$$

Cálculo de SNR en Sistemas de Modulación Angular (5)

- En los resultados anteriores hemos utilizado el hecho que

$$\frac{P_M}{(\max |m(t)|)^2} \stackrel{\text{def}}{=} P_{M_n}$$

es el cuociente entre la potencia media y la máxima de la señal de mensaje, o lo que es lo mismo, el contenido de potencia del mensaje normalizado.

- Otra forma de expresar el mismo resultado es utilizando la regla de Carson:

$$B_c = 2(\beta + 1)W$$

Cálculo de SNR en Sistemas de Modulación Angular (6)

- Para expresar la razón señal-a-ruido en función del factor de expansión de ancho de banda, que definimos como

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{B_c}{W} = 2(\beta + 1).$$

- De esta forma obtenemos

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} P_M \left(\frac{\Omega/2 - 1}{\max |m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b & \text{PM} \\ 3P_M \left(\frac{\Omega/2 - 1}{\max |m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b & \text{FM} \end{cases} \quad (10)$$

Observaciones (1)

- Para tanto PM como FM la SNR_o es proporcional a β^2 .
- Por lo tanto, podemos controlar SNR_o mediante β , incluso en escenarios con baja potencia.
- Otra forma de incrementar SNR_o es aumentando el ancho de banda disponible.
- Esto es, existe un compromiso entre potencia transmitida y ancho de banda.

Observaciones (2)

- SNR_o crece con Ω^2 .
- De acuerdo a resultados de teoría de información, el desempeño óptimo es del orden e^Ω .
- Por lo tanto, sistemas basados en modulación angular tienen espacio para mejora.
- Notemos que $\beta \uparrow \Rightarrow B_c \uparrow$ (por la regla de Carson).

Observaciones (3)

- Si $B_c \uparrow \Rightarrow$ la potencia del ruido a la entrada del demodulador es grande, lo que nos saca del escenario

$$P(V_n(t) \ll A_c) \approx 1.$$

- Por lo tanto, no podemos incrementar el tamaño de la índice de modulación β indefinidamente sin deteriorar el desempeño del demodulador (aparece el *efecto umbral*).

Observaciones (3)

- El efecto del ruido en las frecuencias altas es más notorio para FM.
- Esto es, las componentes de alta frecuencia del mensaje serán afectadas más que las bajas (esto ocurre en algunas aplicaciones de multiplexión SSB-FDM).
- Este fenómeno puede ser mitigado levantando la señal en la parte alta del espectro utilizando filtros de **preénfasis** y **deénfasis**.

Ejemplo (1)

Considere un sistema FM con un índice de modulación $\beta = 5$ y ancho de banda $W = 15$ kHz. El sistema está sujeto a ruido blanco aditivo con una potencia $N_0 = 10^{-14}$ W/Hz. Si la potencia de la señal-mensaje normalizada es 0,1 W, ¿cuál debe ser la potencia recibida por el receptor de modo de asegurar una SNR igual a 60 dB a la salida del demodulador?

Ejemplo (2)

Solución

Utilizamos la relación

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = 3\beta^2 P_{M_n} \frac{P_R}{N_0 W}.$$
$$10^6 = 3 \times 25 \times 0,1 \times \frac{P_R}{10^{-14} \times 15 \times 10^3}.$$

Finalmente obtenemos que $P_R = 2 \times 10^5 W$, esto es, $P_R = 20 \mu W$.