

EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.16: Ruido en Sistemas de Comunicaciones Analógicas



Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

8 de Octubre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Efectos del Ruido en Sistemas de Modulación de Amplitud

- Demodulación DBS-SC AM

- Demodulación SSB AM

- Demodulación en AM convencional

Efectos en Sistemas de Modulación Angular

- Detección de Modulación Angular

Resumen y Lecturas

Preguntas que estudiaremos en la clase

- Aplicaciones en problemas de comunicaciones analógicos: AM y FM/PM.

Efectos del Ruido en Sistemas de Modulación de Amplitud

- Nuestro objetivo es determinar la Razón Señal a Ruido (SNR), a la salida de un receptor AM para diferentes esquemas de modulación en amplitud.
- Vamos a utilizar un sistema en banda base para como patrón de comparación.
- En lo que sigue vamos a considerar que el sistema de comunicación está afecto a ruido blanco aditivo Gaussiano, de potencia N_0 , por lo que nuestro sistema tendrá la forma

$$r(t) = u(t) + n(t). \quad (1)$$

Efecto del Ruido en un Sistema en Banda Base (1)

- El caso de modulación en banda base es simple porque, al no utilizar una portadora, basta con filtrar (pasabajos) la señal recibida para producir una estimación de la señal enviada originalmente.
- Si la señal original tiene un ancho de banda $2W$, entonces, la potencia de ruido involucrada es

$$P_{n_0} = \int_{-W}^W \frac{N_0}{2} df = N_o W.$$

Efecto del Ruido en un Sistema en Banda Base (2)

- Si la potencia de la señal en el extremo del receptor es

$$P_R = \int_{-\infty}^{\infty} |r(t)|^2 dt$$

entonces la razón señal a ruido es

$$\text{SNR} = \frac{P_R}{N_0 W} \quad (2)$$

Detección en DBS-SC AM (1)

- Recordemos que en un esquema DBS-SC AM la señal transmitida se expresa como

$$u(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t). \quad (3)$$

- La señal recibida $r(t)$ es

$$\begin{aligned} r(t) &= u(t) + n(t) \\ &= A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) + n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

donde hemos descompuesto la señal de ruido $n(t)$ en sus componentes en fase y en cuadratura.

Detección en DBS-SC AM (2)

- El mensaje $m(t)$ puede ser recuperado multiplicando $r(t)$ por $\cos(2\pi f_c t + \phi)$
- Podemos eliminar las componentes centradas en $2f_c$ utilizando un filtro elimina banda. La señal resultante es

$$y(t) = \frac{A_c m(t)}{2} \cos(\phi) + \frac{n_c(t)}{2} \cos(\phi) - \frac{n_s(t)}{2} \sin(\phi) \quad (4)$$

- Utilizando detección coherente tenemos

$$y(t) = \frac{1}{2} [A_c m(t) + n_c(t)]$$

Efecto del Ruido en DSB-SC AM (1)

- Si la potencia de $m(t)$ es P_M , entonces, la potencia recibida del mensajes es

$$P_o = \frac{A_c^2}{4} P_M$$

- La potencia recibida del ruido es

$$P_{n0} = \frac{1}{4} P_{nc} = \frac{1}{4} P_n$$

donde hemos utilizado el hecho que $n(t)$ y $n_c(t)$ tienen la misma potencia.

Efecto del Ruido en DSB-SC AM (2)

- La potencia del ruido $n(t)$ que pasa a través del filtro la podemos calcular de su espectro:

$$S_n(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & |f - f_c| < W \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

- Por lo tanto

$$\begin{aligned} P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df \\ &= \frac{N_0}{2} \times 4W \\ &= 2WN_0. \end{aligned}$$

Efecto del Ruido en DSB-SC AM (3)

- La razón señal a ruido del sistema es

$$\begin{aligned}\left(\frac{S}{N}\right)_o &= \frac{P_o}{P_{n_0}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{4} 2W N_0} \\ &= \frac{A_c^2 P_M}{2W N_0}.\end{aligned}$$

- Pero $P_R = \frac{A_c^2 P_M}{2}$. Por lo tanto

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o\text{DSB}} = \frac{P_R}{N_0 W}. \quad (5)$$

- El esquema DSB-SC AM no provee de extra inmunidad al ruido con respecto a un sistema de comunicaciones en banda base.

Detección SSB AM (1)

- La señal modulada tiene la forma

$$u(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \pm A_c \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t). \quad (6)$$

- Por lo tanto, la señal recibida tiene la forma:

$$r(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \pm A_c \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t) + n(t).$$

- Si expresamos el ruido en sus componentes en fase y en cuadratura obtenemos:

$$r(t) = [A_c m(t) + n_c(t)] \cos(2\pi f_c t) + [\pm A_c \hat{m}(t) - n_s(t)] \sin(2\pi f_c t)$$

Detección SSB AM (2)

- Al igual que en el caso de DSB-SC AM, podemos recuperar $m(t)$ multiplicando la señal recibida por

$$\cos(2\pi f_c t + \phi).$$

- Si asumimos detección coherente ($\phi = 0$), y hacemos filtrado pasabajos, entonces queda

$$y(t) = \frac{1}{2}[A_c m(t) + n_c(t)]$$

Efecto del Ruido en SSB AM (1)

- El cálculo de SNR para este tipo de modulación es similar al realizado para DSB-SC. En este caso

$$P_o = \frac{A_c^2}{4} P_M$$

y la potencia del ruido es

$$P_{n_0} = \frac{1}{4} P_n = \frac{N_0}{W}.$$

Efecto del Ruido en SSB AM (2)

- La SNR es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_o}{P_{n_0}} = \frac{A_c^2 P_M}{W N_0}.$$

- Pero, $P_R = A_c^2 P_M$ para SSB AM. Por lo tanto

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o\text{SSB}} = \frac{P_R}{N_0 W}. \quad (7)$$

- La modulación con banda lateral tiene el mismo desempeño (en términos de tolerancia al ruido) que transmisiones en banda base y con DSB-SC AM.

Detección Síncrona en AM Convencional (1)

- La señal modulada con AM convencional tiene la forma

$$u(t) = A_c[1 + am(t)] \cos(2\pi f_c t) \quad (8)$$

- Por lo tanto, la señal a la entrada del demodulador es

$$r(t) = [A_c(1 + am_n(t)) + n_c(t)] \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t). \quad (9)$$

donde hemos expresado el ruido $n(t)$ en sus componentes en fase y cuadratura, a es el índice de modulación y $m_n(t)$ es la versión normalizada de la señal $m(t)$ de modo que su valor mínimo sea -1 .

Detección Síncrona en AM Convencional (2)

- Si utilizamos un demodulador coherente obtendremos

$$y_1(t) = \frac{1}{2}[A_c(1 + am_n(t)) + n_c(t)]$$

- Para poder recuperar $m(t)$ necesitamos eliminar la componente DC de $y_1(t)$, lo que podemos hacer con bloque DC. Obtenemos

$$y(t) = \frac{1}{2}[A_c am_n(t) + n_c(t)]$$

- La potencia recibida es

$$P_R = \frac{A_c^2}{2} [1 + a^2 P_{m_n}]. \quad (10)$$

Detección Síncrona en AM Convencional (3)

- La razón señal a ruido en este caso es

$$\begin{aligned}\left(\frac{S}{N}\right)_{oAM} &= \frac{\frac{1}{4}A_c^2 a^2 P_{M_n}}{\frac{1}{4}P_{nc}} \\ &= \frac{A_c^2 a^2 P_{M_n}}{2N_0 W} \\ &= \frac{a^2 P_{M_n}}{1 + a^2 P_{M_n}} \frac{[1 + a^2 P_{M_n}]}{N_0 W}\end{aligned}$$

- Finalmente

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{oAM} = \eta \frac{P_R}{N_0 W}. \quad (11)$$

18 de 42 donde η es el factor de eficiencia de la modulación.

Detección Síncrona en AM Convencional (3)

- Es directo notar que $\eta < 1$, pues

$$a^2 P_{M_n} < 1 + a^2 P_{M_n}.$$

Por lo tanto, un sistema AM convencional tiene una SNR menor que uno en banda base.

- Algunos números típicos:
 - $a \sim 0,8 - 0,9$
 - $P_M \sim 0,1$ para señales de voz
 - $\Rightarrow \eta \sim 0,075$, i.e. hay una pérdida de 11 dB con respecto de la transmisión en banda base.

Detección de Envoltente en AM Convencional (1)

- Otra implementación que permite demodular señales en AM convencional es via detector de envoltente.
- La entrada del detector de envoltente es la misma antes considerada:

$$r(t) = [A_c(1 + am_n(t)) + n_c(t)] \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t).$$

y por lo tanto, la envoltente de $r(t)$ es

$$V_r(t) = \sqrt{[A_c(1 + am_n(t)) + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} \quad (12)$$

- La alta no linealidad de la estructura del sistema dificulta el análisis del desempeño del detector.

Detección de Envoltante en AM Convencional (2)

- Si suponemos que la componente de señal en $r(t)$ es mucho más intensa que la de ruido (SNR grande), podemos decir que

$$\Pr \{n_s(t) \ll A_c(1 + am_n(t))\} \sim 1.$$

y simplificar $V_r(t)$:

$$V_r(t) \approx A_c(1 + am_n(t)) + n_c(t).$$

- Luego de remover la componente DC llegamos a una expresión similar a la del detector coherente:

$$y(t) = A_c am_n(t) + n_c(t).$$

Detección de Envolvente en AM Convencional (3)

- Por lo tanto, en un régimen de alto SNR el desempeño de ambos detectores es el mismo.
- En un régimen de bajo SNR (donde la potencia de la señal original es comparable con la del ruido), el resultado anterior deja de ser válido.

Detección de Envolvente en AM Convencional (4)

- Podemos hacer algunas manipulaciones sobre la expresión de $V_r(t)$ para estudiar este caso:

$$V_r(t) = \sqrt{[A_c(1 + am_n(t)) + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)}$$

$$\stackrel{(a)}{=} \sqrt{V_n^2(t) \left[1 + \frac{A_c^2(1 + am_n(t))^2 + 2n_c(t)A_c(1 + am_n(t))}{V_n^2(t)} \right]}$$

$$\stackrel{(b)}{\approx} V_n(t) \sqrt{\frac{1 + 2n_c(t)A_c(1 + am_n(t))}{V_n^2(t)}}$$

$$\stackrel{(c)}{\approx} V_n(t) \left[\frac{1 + n_c(t)A_c(1 + am_n(t))}{V_n^2(t)} \right]$$

Detección de Envolverte en AM Convencional (5)

$$\Rightarrow V_r(t) \approx V_n(t) + \frac{n_c(t)A_c}{V_n(t)}(1 + am_n(t)). \quad (13)$$

- El paso (a) es el reemplazo de $n_c^2(t) + n_s^2(t) = V_n^2(t)$, que es la envolvente de ruido.
- El paso (b) se puede hacer al asumir un régimen de bajo SNR. En este caso $A_c^2(1 + am_n(t))^2 \ll 1$ y por lo tanto podemos eliminarlo de la expresión.
- Paso (c) resulta de aproximar $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$, para ϵ pequeño.

Detección de Envolvente en AM Convencional (6)

- Luego de todas estas simplificaciones, llegamos a una expresión en donde el ruido multiplica a la señal original, en lugar de sólo sumar.
- Por el momento diremos que el sistema **opera debajo del umbral**, expresión que quedará más clara cuando veamos detección de modulación angular.

Efectos del Ruido en Sistemas de Modulación Angular

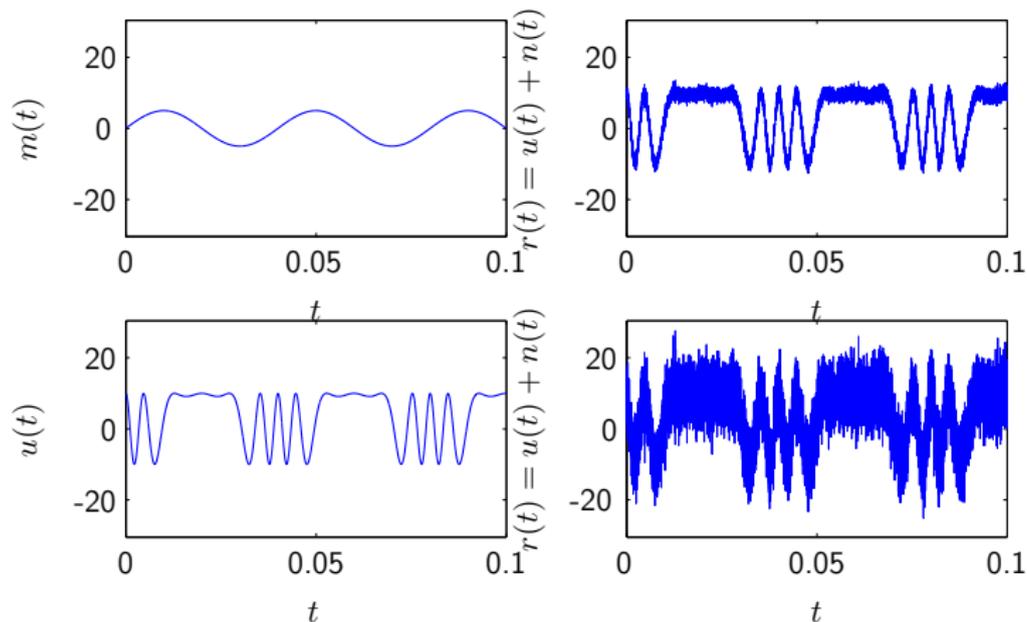
(1)

- En AM la información está contenida en la amplitud de la portadora. El efecto de ruido aditivo se manifiesta directamente en alteraciones de la amplitud de la señal recibida.
- En sistemas de modulación angular, como FM, la información está contenida en la frecuencia pero el ruido se sigue sumando a la amplitud de la portadora.

Efectos del Ruido en Sistemas de Modulación Angular (2)

- Por lo tanto, el mensaje original se verá distorsionado en la medida que el ruido logre alterar el contenido de frecuencias de la portadora.
- La frecuencia de una señal puede ser entendida como el número de **cruces por cero** que una determinada señal realiza en un cierto intervalo. A mayor frecuencia, mayor será el número de cruces que se podrán observar en la misma ventana de tiempo.

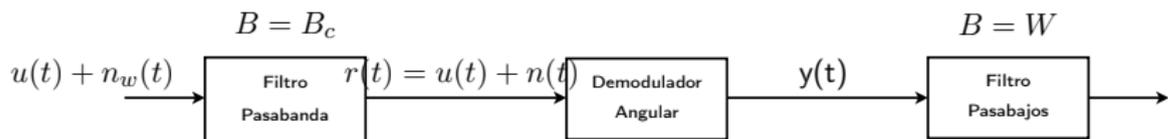
Ejemplo de Modulación en Fase con Ruido Aditivo



Detección de Modulación Angular (1)

- Un sistema basado en modulación angular puede resultar más robusto que un sistema AM, pero si la potencia del ruido es comparable o superior a la potencia de la portadora, el efecto es severo.
- Esto se debe a que el ruido, al tener un espectro constante, va a producir cambios rápidos en la señal portadora, alterando su contenido en frecuencias.
- El receptor para un sistema modulado angularmente tiene el siguiente diagrama de bloques

Detección de Modulación Angular (2)



- La señal modulada angular se puede escribir en general como

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \\ &= A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi \int_{-\infty}^t m(\tau) h(t - \tau) d\tau\right) \quad \text{FM} \quad (14) \end{aligned}$$

donde $h(t) = k_c \delta(t)$ en el caso de PM y $h(t) = k_f u(t)$ para FM.

Detección de Modulación Angular (3)

- La señal recibida es la suma de $u(t)$ y $n_w(t)$, una señal de ruido blanco Gaussiano.
- El resultado es filtrado para remover todo el ruido fuera de la banda de interés, con un filtro cuyo ancho de banda es igual al de la señal $m(t)$.
- Por lo tanto, el efecto del filtrado no introduce distorsión a la señal de interés.
- Sin embargo, también filtra el ruido fuera de la banda, lo que produce un proceso de ruido que no es blanco. Vamos a denotar este ruido filtrado como $n(t)$.

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (1)

- La salida del filtro es

$$\begin{aligned}r(t) &= u(t) + n(t) \\ &= u(t) + n_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_s(t) \sin(2\pi f_0 t)\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la ya sabida descomposición en fase y cuadratura.

- Vamos a realizar un análisis aproximado para el caso que $\text{SNR} \gg 1$.

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (2)

- Primero, notemos que el ruido puede ser representado en su forma original utilizando la componentes en fase y cuadratura:

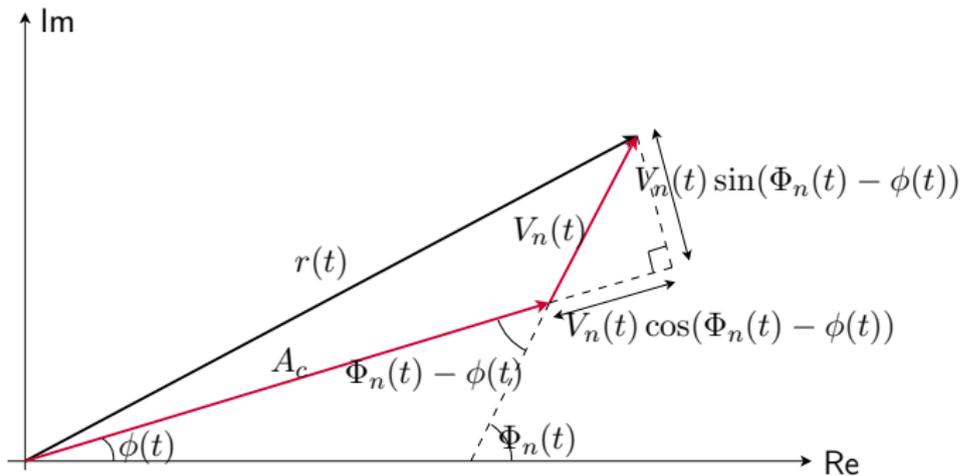
$$\begin{aligned}n(t) &= \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \cos\left(2\pi f_c t + \arctan \frac{n_s(t)}{n_c(t)}\right) \\ &= V_n(t) \cos(2\pi f_c t + \Phi_n(t)).\end{aligned}$$

donde $V_n(t)$ y $\Phi_n(t)$ representan la envolvente y fase de el proceso pasabanda de ruido.

- El hecho que $\text{SNR} \gg 1$ significa que

$$P(V_n(t) \ll A_c) \approx 1.$$

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (3)



Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (4)

- Del diagrama fasorial podemos deducir que

$$\begin{aligned} r(t) &\approx [A_c + V_n(t) \cos(\Phi_n(t) - \phi(t))] \times \cos \left\{ 2\pi f_c t + \phi(t) \right. \\ &\quad \left. + \arctan \frac{V_n(t) \sin(\Phi_n(t) - \phi(t))}{A_c + V_n(t) \cos(\Phi_n(t) - \phi(t))} \right\} \\ &\approx [A_c + V_n(t) \cos(\Phi_n(t) - \phi(t))] \times \cos \left\{ 2\pi f_c t + \phi(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) \right\} \end{aligned}$$

- El demodulador procesará esta señal y, dependiendo del tipo de demodulador (fase o frecuencia), entregará la fase o la frecuencia instantánea de la señal.

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (5)

- Considerando el hecho que

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases},$$

tenemos lo siguiente:

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) & \text{PM} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\phi(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) \right) & \text{FM} \end{cases}$$

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (6)

- La salida del modulador es

$$y(t) = \begin{cases} k_p m(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) & \text{PM} \\ k_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) \right) & \text{FM} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} k_p m(t) + Y_n(t) & \text{PM} \\ k_f m(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} Y_n(t) & \text{FM} \end{cases}$$

donde

$$Y_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t))$$

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (7)

- Reconocemos que en ambos caso (PM y FM) el primer término corresponde a la señal enviada, y el segundo a un término de ruido aditivo.
- Un hecho importante es que el segundo término es inversamente proporcional a la amplitud de la portadora, A_c , lo que nos ofrece una manera de controlar arbitrariamente el nivel distorsión debido al ruido que el mensaje $m(t)$ experimenta, algo que no podíamos hacer en AM.
- Nos resta determinar una expresión, aunque sea aproximada, para la razón señal a ruido de un sistema con modulación angular.

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (8)

- Notamos que

$$\begin{aligned} Y_n(t) &= \frac{V_n(t)}{A_c} \sin(\Phi_n(t) - \phi(t)) \\ &= \frac{1}{A_c} \left[V_n(t) \sin \Phi_n(t) \cos \phi(t) - V_n(t) \cos \Phi_n(t) \sin \phi(t) \right] \\ &= \frac{1}{A_c} [n_s(t) \cos \phi(t) - n_c(t) \sin \phi(t)]. \end{aligned}$$

- En general $m(t)$ es una señal pasabajos, o que al menos tiene una variación mucho más lenta que la señal de ruido.

Efecto del Ruido en un Régimen de Gran SNR (9)

- Dado que $\phi(t)$ es proporcional a $m(t)$ o su integral, $\phi(t)$ permanecerá relativamente fijo en comparación con $n_c(t)$ y $n_s(t)$.
- Asumiendo que $\phi(t) \approx \phi$, tenemos

$$Y_n(t) = \frac{1}{A_c} [n_s(t) \cos \phi - n_c(t) \sin \phi].$$

Resumen

Hemos revisado:

- Procesos Gaussianos y blancos.
- Efectos de ruido aditivo en sistemas de modulación analógica de amplitud.

Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 5, sección 5.1 y 5.2.