# EL4005 Principios de Comunicaciones

## Clase No.15: Ruido Blanco y Procesos Gaussianos

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

6 de Octubre de 2010

# Contenidos de la Clase (1)

Procesos Gaussianos y Blancos

- Procesos Gaussianos
- Procesos Blancos
- Procesos Pasabanda

Resumen y Lecturas

# Preguntas que estudiaremos en la clase

- Ruido blanco.
- Procesos Gaussianos

# Procesos Gaussianos (1)

## Motivación Física

- Considere una resistencia $R$.
- El movimiento de los electrones al interior de $R$ será proporcional a la temperatura de la resistencia. Mientras mayor sea ésta, mayor será el movimiento de los electrones.
- La temperatura tiene un efecto directo en la corriente circulante.
- Cada electrón puede verse como una pequeña fuente cuyo comportamiento es independiente del resto de los electrones.
- La corriente total será la suma de las contribuciones de las corrientes generadas por todos los electrones.

# Procesos Gaussianos (2)

## Motivación Física

- Modelaremos la corriente de $j$-ésimo electrón como una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida $I_j$.
- La corriente media total será el promedio de las contribuciones de cada una ellas, esto es

$$\frac{1}{J}\sum_{j=0}^{J} I_j \overset{J\to\infty}{\to} \mathcal{N}(\mu_I, \sigma_I^2).$$

- Esto último proviene de aplicar el Teorema Central del Límite.

# Procesos Gaussianos (3)

- Un proceso aleatorio $X(t)$ será un **proceso Gaussiano** si para todo $n$ y $(t_1, \ldots, t_n)$ las variables aleatorias $\{X(t_i)\}_{i=1}^{n}$ son conjuntamente Gaussianas.
- Dos procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t)$ son **procesos conjuntamente Gaussianos** si para todo $n, m$ y $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ y $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, el vector aleatorio

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n), Y(\tau_0), \ldots, Y(\tau_m))$$

se distribuye de acuerdo a una densidad Gaussiana $n + m$-dimensional.

# Propiedades

1. Si un proceso Gaussiano $X(t)$ pasa a través de un sistema LTI, su salida $Y(t)$ es también Gaussiano, y aun más, los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son conjuntamente Gaussianos.
2. Si $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ son conjuntamente Gaussianos, entonces $X_i(t)$ es independiente de $X_j(t)$ (para $i \neq j$) si y sólo si $X_i(t)$ es no correlacionado con $X_j(t)$.

# Procesos Blancos

- Un proceso blanco es aquel en que todas las componentes de frecuencia aparecen con igual potencia, es decir, es aquel cuya densidad espectral de potencia es constante.
- Definición: Un proceso $X(t)$ es llamado proceso blanco si su densidad espectral de potencia $S_X(f)$ es constante para todo $f$.
- Notemos que un proceso blanco tiene potencia total infinita:

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 df = \infty.$$

# Proceso de Ruido Termal $n(t)$

- En la práctica, los sistemas tienen una potencia finita, por lo que un proceso blanco no tiene significado físico.
- Sin embargo, el ruido termal $n(t)$ tiene una potencia relativamente constante (entre $0$ y $10^{12}$ Hz) a temperatura ambiente.

$$S_n(f) = \frac{\hbar f}{2(\exp(\frac{\hbar f}{kT}) - 1)}.$$

- Para efectos prácticos, el ruido termal puede ser considerado un proceso blanco con espectro de potencia igual a $\frac{kT}{2}$, donde $k$ es la constante de Boltzmann y $T$ es la temperatura medida en $^\circ K$.

# Procesos Blancos

- El valor $kT$ se denota normalmente como $N_0$.
- La función de autocorrelación de un proceso blanco es

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau). \tag{1}$$

- Propiedades:
  1. El proceso de ruido termal es un proceso estacionario.
  2. Un proceso de ruido termal tiene media cero.
  3. Un proceso de ruido termal es Gaussiano.
  4. Un proceso de ruido termal es un proceso blanco con densidad espectral de potencia

$$S_n(f) = \frac{kT}{2}.$$

# Filtrado de Procesos de Ruido (1)

- El ruido puede ser filtrado por etapas intermedias de un sistema de comunicaciones o procesamiento de señales.
- Por lo tanto, es posible que el ruido se transforme en un proceso pasabandas, es decir, donde la densidad espectral de potencia está ubicada en torno a algún $f_c >> 0$.
- P: Cómo manipulamos un proceso aleatorio pasabanda?
- R: Los caminos muestrales de un proceso pasabanda también son señales pasabanda.

# Filtrado de Procesos de Ruido (2)

- Sea $X(t)$ un proceso aleatorio que es la salida de un filtro pasabanda, cuyo ancho de banda es $W$ y se encuentra centrado en torno a una frecuencia central $f_c$.
- Por ejemplo

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f - f_c| \leq W \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

- El ruido térmico es blanco y Gaussiano, por lo tanto

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}H(f)$$

# Filtrado de Procesos de Ruido (3)

- Notemos que si $H(f)$ tiene la expresión del ejemplo, entonces

$$S_X(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2} & |f - f_c| \leq W \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

# Procesos Pasabanda

- Toda señal pasabanda puede ser descrita en términos de componentes **en fase** $X_c(t)$ y **en cuadratura** $X_s(t)$.
- Esto es

$$X(t) = X_c(t)\cos(2\pi f_c t) - X_s(t)\sin(2\pi f_c t).$$

  donde $X_c(t)$ y $X_s(t)$ son procesos pasabajos.
- Otra manera de expresar $X(t)$ es en términos de un proceso envolvente $A(t)$ y un proceso de fase aleatoria $\Theta(t)$.

$$X(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta(t)).$$

  Ambos procesos $A(t)$ y $\Theta(t)$ son pasabajos.

# Propiedades de Procesos en Fase y Cuadratura (1)

Consideremos una señal de ruido blanco Gaussiano. Si $X_c(t)$ y $X_s(t)$ denotan las componentes en fase y en cuadratura de un proceso pasabanda $X(t)$, entonces

1. $X_c(t)$ y $X_s(t)$ son procesos de media cero, pasabajos, conjuntamente estacionarios, y conjuntamente Gaussianos.
2. Si la potencia del proceso $X(t)$ es $P_X$, la potencia de cada una de las componentes satisface:

$$P_X = P_{X_c} = P_{X_s} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df.$$

# Propiedades de Procesos en Fase y Cuadratura (2)

3. $X_c(t)$ y $X_s(t)$ tienen la misma densidad espectral de potencia, y es

$$S_{X_c}(f) = S_{X_s}(f) = S_X^+(f - f_c) + S_X^-(f + f_c).$$

   donde $S_X^+(f)$ es la parte positiva del espectro de $X(t)$ y $S_X^-(f)$ es la parte negativa del espectro.

4. Si $+f_c$ y $-f_c$ son ejes de simetría de las frecuencias positivas y negativas en el espectro $H(f)$, entonces $X_c(t)$ y $X_s(t)$ son independientes.

# Ancho de Banda Equivalente del Ruido (1)

- Cuando un proceso de ruido blanco Gaussiano pasa a través de un filtro, el proceso de salida sigue siendo Gaussiano, pero en general deja de ser blanco.
- El efecto del filtro altera el espectro de potencia de la salida de acuerdo a

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2.$$

- El contenido de potencia del proceso de salida es

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df.$$

# Ancho de Banda Equivalente del Ruido (2)

- Definimos el **ancho de banda equivalente** del ruido, denotado por $B_{neq}$ como

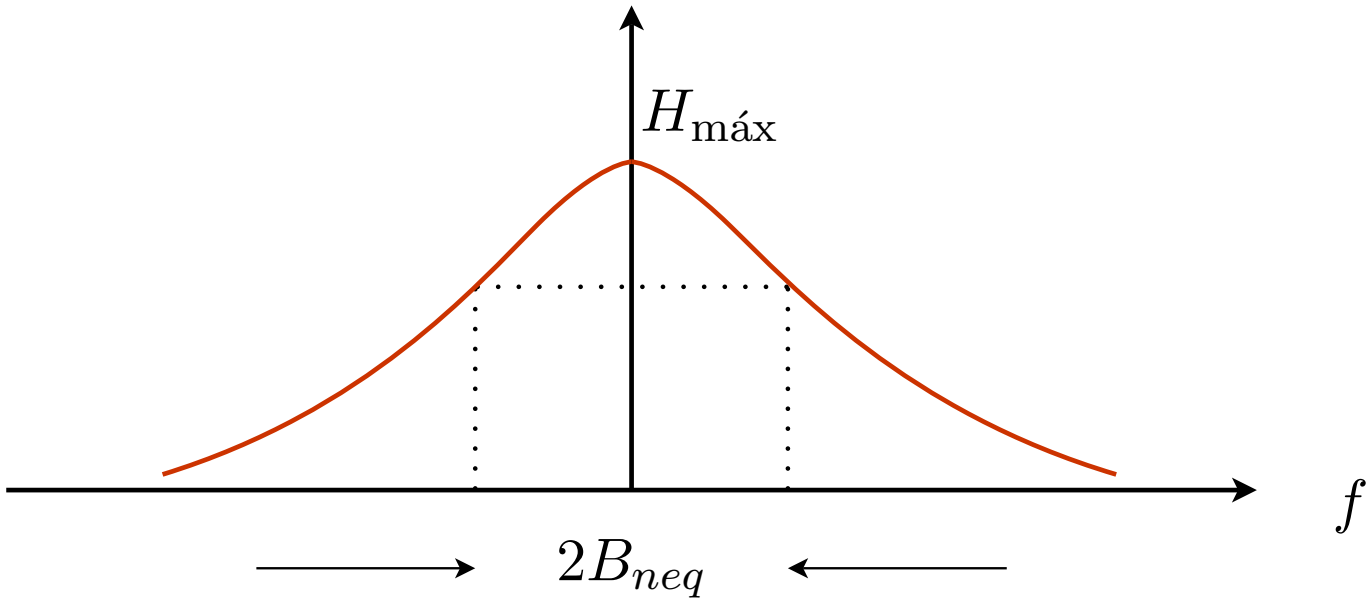
$$B_{neq} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2H_{\text{máx}}^2},$$

  donde $H_{\text{máx}}^2$ denota el máximo de $|H(f)|$.

- Por lo tanto,

$$P_Y = N_0 B_{neq} H_{\text{máx}}^2. \tag{2}$$

# Ancho de Banda Equivalente del Ruido (3)



# Resumen

Hemos revisado:

- Procesos Gaussianos y blancos.

# Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 4, sección 4.4 a 4.6