EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.13: Procesos Aleatorios y Sistemas Lineales

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

29 de Septiembre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Procesos Aleatorios

- Procesos Estacionarios
- Independencia entre Procesos Aleatorios
- Ejemplo
- Procesos Aleatorios y Sistemas Lineales
- Densidad Espectral de Potencia
- Procesos Aleatorios con Memoria

Resumen y Lecturas

Preguntas que estudiaremos en la clase

- Continuaremos con nuestro estudio de procesos aleatorios.
- ¿Qué pasa con la respuesta de un sistema lineal?

Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (1)

- Un **proceso aleatorio** (también llamado proceso estocástico) es la generalización natural del concepto de variable aleatoria al caso de señales.
- En cualquier sistema de comunicaciones uno debe manejar señales dependientes del tiempo.
- En cursos básicos de señales y sistemas ellas son tratadas como determinísticas.

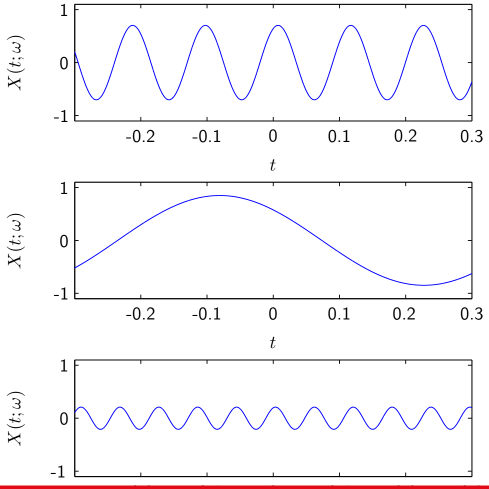
Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (2)

- Por qué entonces cambiar al enfoque aleatorio?
  - Naturaleza física de la señal es aleatoria. Esto corresponde al ruido térmico en electrónica o al caso del comportamiento de las reflexiones en la ionósfera para el caso de radio.
  - La incerteza propia de las fuentes de información.
- Definición: Un **proceso aleatorio** o **señal aleatoria** corresponde a un mapeo entre un espacio de eventos Ω y el conjunto de realizaciones posibles de una señal. Asociado a ella encontramos un medida o ley de probabilidad similar a las que encontramos en v.a.'s.

Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (3)

- Un proceso aleatorio es una variable aleatoria generalizada, en el sentido que toma como valores funciones en lugar de números.
- Ejemplos
  1. Sea $\Theta \in [0, 2\pi]$ es una variable aleatoria uniforme. Definimos el proceso aleatorio $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, donde A y f_0 son constantes reales.
  2. Sea $X(t) = X$ una v.a. uniformemente distribuida en $[-1, 1]$.

Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (4)



Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (5)

- Vemos que para cada $\omega_i \in \Omega$ existe una señal $X(t;\omega_i)$ que es determinística. Esta función recibe el nombre de **camino muestral** o **realización** del proceso.
- Para un instante t_0 fijo, $X(t_0;\omega)$ es una variable aleatoria.
- Por lo tanto, en cualquier instante, el valor de una proceso aleatorio es una variable aleatoria.

Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (6)

- Si definimos $(t_0, t_1, \ldots, t_N)$ instantes entonces, $(X(t_0;\omega), \ldots, X(t_N;\omega))$ define un vector aleatorio.
- Podemos hablar entonces de densidades, valores esperados, varianzas, etc. de procesos aleatorios.

Ejemplo: Tiempos de Espera (1)

- Considere un proceso aleatorio descrito por una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\tau[n]$, para $n \geq 1$.
- Las variables se distribuyen en forma exponencial con el parámetro λ:

$$f_\tau(t; n) = \lambda \exp(-\lambda t) u(t), \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

- Definamos la suma

$$T[n] \doteq \sum_{k=1}^{n} \tau[k] \tag{2}$$

Ejemplo: Tiempos de Espera (2)

- Esta suma corresponde al tiempo transcurrido hasta n ocurrencias o llegadas de un proceso exponencial.
- Para calcular la densidad de T lo podemos hacer por inducción en n y aplicando la fórmula de la convolución de densidades:

$$
\begin{aligned}
f_T(t;1) &= f_\tau(t;1) = \lambda \exp(-\lambda t) u(t) \\
f_T(t;2) &= f_\tau(t;1) * f_\tau(t;1) = \lambda^2 t \exp(-\lambda t) u(t) \\
f_T(t;3) &= \frac{1}{2} \lambda^3 t^2 \exp(-\lambda t) u(t)
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Tiempos de Espera (3)

- En general,

$$f_T(t;n) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda \exp(-\lambda t)u(t). \tag{3}$$

- Esta densidad recibe el nombre de distribución de Erlang.
- Es utilizada frecuentemente en telecomunicaciones para modelar tiempos de espera en redes.

Promedios Estadísticos (1)

- Definición: La media o esperanza de un proceso aleatorio $X(t)$ es una función determinística denotad por $\mu_X(t)$ que en cada instante de tiempo t es igual a la esperanza de $X(t)$. Esto es

$$\mu_X(t) = E[X(t)] \ \forall t.$$

- Ejemplo: Determinemos el valor esperado de $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, donde

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(\theta).$$

Promedios Estadísticos (2)

- Entonces,

$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A\cos(2\pi f_0 t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0.$$

- Definición: La **función de autocorrelación** de un proceso aleatorio $X(t)$ y que denotaremos por $R_X(t_1, t_2)$ es una función definida como

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]. \tag{4}$$

Promedios Estadísticos (3)

- Si el p.a. es continuo, entonces

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

- Ejemplo: consideremos nuevamente $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, con Θ uniforme en $[0, 2\pi]$. Entonces

$$R_X(t_1, t_2) = E[A\cos(2\pi f_0 t_1 + \Theta) A\cos(2\pi f_0 t_1 + \Theta)]$$
$$= A^2 E[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 (t_1 - t_2))] + A^2 E[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2) + 2\Theta)]$$
$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 (t_1 - t_2)).$$

Procesos Estacionarios en Sentido Amplio (1)

- Nos interesa introducir una noción de estabilidad o equilibrio para el caso de procesos estocásticos.
- Esta idea de estabilidad debería manifestarse como la mantención de alguna propiedad en forma independiente del instante en que se haga la medición.
- Dependiendo de qué propiedad es independiente del tiempo hablaremos de distintos tipos de estacionariedad.

Procesos Estacionarios en Sentido Amplio (2)

- Un proceso estacionario en sentido amplio (*wide-sense stationary process*) es aquel cuyo valor esperado y función de autocorrelación es independiente del instante en que se haga la medición.
- *Definición*: Un proceso $X(t)$ es estacionario en sentido amplio (WSS) si se satisfacen las siguientes condiciones:
  (i) $\mu_X(t) = E[X(t)$ es independiente de t.
  (ii) $R_X(t_1, t_2)$ depende sólo de la diferencia $\tau = t_1 - t_2$ y no de t_1 y t_2 en particular.

Procesos Estacionarios en Sentido Amplio (3)

- En general, si sólo decimos que el proceso es estacionario estaremos diciendo implícitamente que el proceso es WSS.
- En este caso, $\mu_X(t) = \mu_X$ y $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$.
- El proceso $X(t)$ visto en los ejemplos anteriores es WSS.
- También conocido como proceso estacionario de segundo orden.

Procesos Aleatorios Múltiples (1)

- En general, un proceso aleatorio no es un ente aislado.
- Si consideramos un sistema lineal descrito por la respuesta al impulso $h(t)$, cabe preguntarse cuál es la dependencia que existen entre la salida del sistema $Y(t;\omega)$ y su entrada $X(t;\omega)$.
- Definición: Dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son **independientes** si para cualquier $m, n \in \mathbb{N}$, instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ y $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathbb{R}$ los vectores $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ e $(Y(\tau_1), \ldots, Y(\tau_m))$ son independientes.

Procesos Aleatorios Múltiples (2)

- Definición: Dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son **no correlacionados** si para cualquier $m, n \in \mathbb{N}$, instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ y $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathbb{R}$ los vectores $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ e $(Y(\tau_1), \ldots, Y(\tau_m))$ son no correlacionados.
- La **correlación cruzada** entre dos procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t)$ queda definida por

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = R_{Y,X}(t_2, t_1).$$

Procesos Aleatorios Múltiples (3)

- Dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son **conjuntamente estacionarios en sentido amplio** (JWSS), o simplemente, **conjuntamente estacionarios**, si cada uno es WSS por separado y la correlación cruzada depende sólo de la diferencia entre t_1 y t_2, esto es,

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = R_{X,Y}(t_1 - t_2) = R_{X,Y}(\tau).$$

La Autocorrelación de la Suma de dos Procesos

- Considere dos procesos conjuntamente estacionarios $X(t)$ e $Y(t)$. Determine la autocorrelación del proceso $Z(t) = X(t) + Y(t)$.
- Solución:

$$
\begin{aligned}
R_Z(t+\tau,\tau) &= E[Z(t+\tau)Z(\tau)] \\
&= E[(X(t+\tau)+Y(t+\tau))(X(\tau)Y(\tau))] \\
&= E[X(t+\tau)X(\tau)] + E[X(t+\tau)Y(\tau)] \\
&\quad + E[X(\tau)Y(t+\tau)] + E[Y(t+\tau)Y(\tau)] \\
&= R_X(\tau) + R_{X,Y}(\tau) + R_{X,Y}(-\tau) + R_Y(\tau).
\end{aligned}
$$

Procesos Aleatorios y Sistemas Lineales (1)

- Queremos estudiar las propiedades del proceso aleatorio

$$Y(t) = h * X(t)$$

  en términos de las propiedades del proceso aleatorio de entrada $X(t)$ y la respuesta al impulso de un sistema LTI (Linear-time invariant) dada por $h(t)$.
- Nos interesa conocer las respuestas a las siguientes preguntas:
  - ¿Bajo qué condiciones el proceso $Y(t)$ es estacionario?

Procesos Aleatorios y Sistemas Lineales (2)

- ¿Bajo qué condiciones los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ serán conjuntamente estacionarios?
- ¿Cuál es el valor esperado y la autocorrelación de $Y(t)$ y cuál es la correlación cruzada entre $X(t)$ e $Y(t)$?

$E[Y(t)]$ (1)

- Sea $X(t)$ un proceso estacionario en el sentido amplio.
- Su media μ_X es conocida
- Sea $h(t)$ la respuesta al impulso de una sistema lineal invariante en el tiempo.
- Por definición

$$\begin{aligned}\mu_Y(t) = E[Y(t)] &= E[h * X(t)] \\ &= E[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau]\end{aligned}$$

$E[Y(t)]$ (2)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)E[X(\tau)]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\mu_X d\tau$$

$$= \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau.$$

Por lo tanto, μ_Y es independiente del tiempo.

$R_{X,Y}(t_1, t_2)$ (1)

$$
\begin{aligned}
R_{X,Y}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\
&= E[X(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)X(s)ds] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)E[X(t_1)X(s)]ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)R_X(t_1 - s)ds
\end{aligned}
$$

$R_{X,Y}(t_1, t_2)$ (2)

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(-u) R_X(t_1 - t_2 - u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(-u) R_X(\tau - u) du \\
&= h(-\tau) * R_X(\tau).
\end{aligned}
$$

$R_Y(t_1, t_2)$ (1)

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] \\
&= E[Y(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)X(s)ds] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)E[Y(t_1)X(s)]ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)R_{Y,X}(t_1 - s)ds
\end{aligned}
$$

$R_Y(t_1, t_2)$ (2)

$$R_Y(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s) R_{X,Y}(s - t_1) ds$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s) R_{X,Y}(s - t_1) ds$$

$R_Y(t_1, t_2)$

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - t_1 - u) R_{X,Y}(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - u) R_{X,Y}(u) du \\
&= R_{X,Y}(\tau) * h(\tau) \\
&= R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau).
\end{aligned}
$$

Densidad Espectral de Potencia de Procesos Estacionarios (1)

- El contenido de energía de un proceso aleatorio puede ser calculado o estimado a partir de las características espectrales de los posibles valores que puede tomar.
- Si el proceso varía en forma lenta, la mayor parte de la energía estará concentrada en las frecuencias bajas.
- Si el proceso varía en forma rápida, la mayor parte de la energía estará concentrada en las frecuencias altas.

Densidad Espectral de Potencia de Procesos Estacionarios (2)

- Una función útil para describir el contenido de potencia de un proceso estocástico es la **densidad espectral de potencia** o, simplemente, el **espectro de potencia** de un proceso aleatorio.
- Notación: El espectro de potencia de un proceso aleatorio $X(t)$ será denotado por $S_X(f)$ y será medido en Watts/Hz.

Teorema de Wiener Khinchin

Teorema

Sea $X(t)$ un proceso estacionario en el sentido amplio. La densidad espectral de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, i.e.,

$$S_X(f) = \mathfrak{F}[R_X(\tau)]. \quad (5)$$

Ejemplo (1)

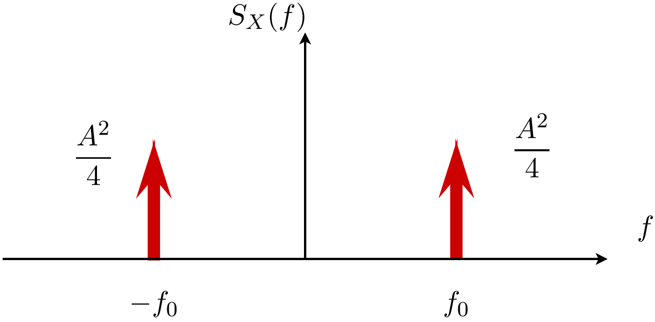
- Ejemplo: Considere el proceso $X(t) = A\cos(2\pi f_0 + \Theta)$ antes estudiado. Sabemos que es un proceso estacionario en el sentido amplio.
- Su función de autocorrelación está dada por

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau).$$

Ejemplo (2)

- Por lo tanto, su densidad espectral de potencia es

$$S_X(f) = \mathcal{F}[\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)] = \frac{A^2}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)).$$



Potencia de un Proceso Estacionario

- La potencia total de un proceso es la suma del contenido de potencia a lo largo de las distintas frecuencias.
- Si $X(t)$ es un proceso aleatorio, la potencia del proceso, que denotaremos por P_X es

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df \tag{6}$$

- Si el proceso es estacionario en sentido amplio, entonces

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{\jmath 2\pi f t} df \Rightarrow R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = P_X.$$

Espectro de Potencia en Sistemas LTI (1)

- Determinamos que en un sistema LTI μ_Y, $R_Y(\tau)$ y $R_{X,Y}(\tau)$ preservan las propiedades del proceso de entrada.
- En particular,

$$\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = \mu_X H(0).$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)$$

$$R_{X,Y}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

- Por lo tanto

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2. \tag{7}$$

Espectro de Potencia en Sistemas LTI (2)

- El espectro cruzado de potencia $S_{X,Y}(f)$ se define como

$$S_{X,Y}(f) = \mathcal{F}[R_{X,Y}(\tau)]. \tag{8}$$

- En el caso de un sistema LTI tenemos

$$S_{X,Y}(f) = S_X(f)H^*(f). \tag{9}$$

- Como $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$, entonces

$$S_{Y,X}(f) = S^*_{X,Y} = S_X(f)H(f).$$

Procesos de Markov (1)

- Un proceso de Markov corresponde a un proceso aleatorio dependiente.
- Puede ser utilizado para construir procesos “con memoria”.
- Los procesos de Markov puede ser de tiempo continuo o de tiempo discreto (cadena de Markov).
- A su vez, los valores que el proceso puede tomar puede ser continuo o discreto.

Procesos de Markov (2)

- Una cadena de Markov de valores continuous $X[n]$ satisfice que la densidad condicional a $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$ (cualquiera) depende sólo de x_n, esto es:

$$f_X(x_{n+k}|x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0) = f_X(x_{n+k}|x_n). \tag{10}$$

  para todo $k \geq 1$ entero.
- Similarmente, una cadena de Markov de valores discretos $X[n]$, satisface que la función de masa de probabilidad condicional a $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$ (cualquiera) depende sólo de x_n, esto es:

$$p_X(x_{n+k}|x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0) = p_X(x_{n+k}|x_n). \tag{11}$$

  para todo $k \geq 1$ entero.

Procesos de Markov (3)

- Esta condición nos permite calcular la densidad conjunta del proceso hasta el tiempo n:

$$\begin{aligned} f_X(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= f_X(x_0) f_X(x_1|x_0) f_X(x_2|x_1) \ldots f_X(x_n|x_{n-1}) \\ &= f_X(x_0) \prod_{k=1}^{n} f_X(x_k|x_{k-1}) \end{aligned} \tag{12}$$

- Un proceso es de **Gauss-Markov** si

$$f_X(x; 0) = \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$$

y la densidad de transición está dada por

$$f_X(x_n|x_{n-1}; n, n-1) = \mathcal{N}(\rho x_{n-1}, \sigma_W^2)$$

Procesos de Markov (4)

- ¿ Cuál es la densidad incondicional de $X[n]$?
- Podemos proceder por inducción sobre n.
- O bien, aprovecharnos de algunas propiedades de la densidad Gaussiana.
- Necesitamos calcular $E[X[n]]$ y $\text{Var}[X[n]]$.

Procesos de Markov (5)

- Cálculo de $E[X[n]]$

$$\begin{aligned} E[X[n]] &= E[E[X[n]|X[n-1]]] \\ &= E[\rho X[n-1]] \\ &= \rho \mu_X[n-1]. \end{aligned}$$

- Como en $n = 0$, $\mu_X[0] = 0$, entonces $E[X[n]] = 0$ para todo n.

Procesos de Markov (6)

- Cálculo de $\text{Var}[X[n]] = E[X^2[n]]$

$$\begin{aligned}
E[X^2[n]] &= E[E[X^2[n]|X[n-1]]] \\
&= E[\sigma_W^2 + \rho^2 X^2[n-1]] \\
&= \sigma_W^2 + \rho^2 E[X^2[n-1]] \\
&= \sigma_W^2 + \rho^2 \sigma_X^2[n-1] \\
\Rightarrow \sigma_X^2[n] &= \rho^2 \sigma_X^2[n-1] + \sigma_W^2
\end{aligned}$$

Procesos de Markov (7)

- Resolviendo la recurrencia obtenemos que:

$$\sigma_X^2[n] = \frac{1-\rho^{2(n+1)}}{1-\rho^2}\sigma_W^2 + \rho^{2(n-1)}\sigma_0^2. \tag{13}$$

- A medida que $n \to \infty$

$$\sigma_X^2[n] \to \frac{1}{1-\rho^2}\sigma_W^2. \tag{14}$$

Resumen

Hemos revisado:

- Procesos aleatorios estacionarios.
- Independencia entre procesos aleatorios.
- Procesos aleatorios y sistemas lineales.
- Cálculo de la densidad espectral de potencia de un proceso estacionario.
- Procesos de Markov y Gauss-Markov.

Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 4.
- Stark & Woods, *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing*, Capítulo 6, secciones 6.1 a 6.4.