# EL4005 Principios de Comunicaciones

## Clase No.12: Vectores, Secuencias y Procesos Aleatorios

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

24 de Septiembre de 2010

# Contenidos de la Clase (1)

Vectores Aleatorios

- Generalización de definiciones
- Covarianza y Correlación

Secuencias Aleatorias

Procesos Aleatorios

- Procesos Estacionarios
- Independencia entre Procesos Aleatorios
- Ejemplo

# Contenidos de la Clase (2)

Resumen y Lecturas

# Motivación

- Generalizaremos las nociones de variable aleatoria al caso de vectores, secuencias y procesos aleatorios.
- Con esto tendremos herramientas suficientes para modelar sistemas de comunicaciones, fuentes de información y canales.

# Vectores Aleatorios

- En diversos casos nos interesará estudiar el comportamiento estadístico de conjuntos de variables aleatorias.
- El caso más elemental corresponde al de un par de variables aleatorias $(X, Y)$.
- Las definiciones vistas generalizan como siguen:

# Definiciones (1)

- Definimos la función distribución de probabilidad conjunta $F_{XY}(x, y)$ como sigue:

$$F_{X,Y}(x, y) = P\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \leq x; \; Y(\omega) \leq y\}.$$

o simplemente

$$= P\{X \leq x; \; Y \leq y\}.$$

- La función densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ se define como

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y).$$

# Definiciones (2)

- La función densidad marginal se calcula como

$$f_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$$

- La función densidad condicional de una variable $Y$ dado que el valor de la v.a. $X$ es igual a $x$ es

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} & f_X(x) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

# Propiedades

- Otras propiedades importantes son las siguientes:
  - $F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$
  - $F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1.$
  - $\displaystyle P((X, Y) \in A) = \iint_{(x,y) \in A} f_{X,Y}(x, y) dx dy$
- El valor esperado de la v.a. $g(X, Y)$ es

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

# Covarianza COV$(X, Y)$ (1)

- La covarianza de $(X, Y)$ es una medida del grado de relación o dependencia que existe entre dos variables aleatorias cualquiera.
- La definimos como

$$\text{COV}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]. \tag{1}$$

- Si $\text{COV}(X, Y) = 0$ entonces $E[XY] = E[X]E[Y]$ y decimos que $X$ e $Y$ no son correlacionadas.

# Covarianza COV$(X, Y)$ (2)

- Definimos el **coeficiente de correlación** $\rho_{X,Y}$ como

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathsf{COV}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

- En general, si dos v.a.'s son independientes entonces no están correlacionadas. Sin embargo, le falta de correlación no es suficiente para implicar independencia.
- El único caso donde tenemos la doble implicancia es cuando $(X, Y)$ es un par binormal.

# Correlación, Causalidad e Independencia (1)

- La correlación, o falta de ella, induce a veces a errores de interpretación del fenómeno.
- Por ejemplo, una error habitual de encontrar es confundir correlación con causalidad.
- Ejemplo: se observa que cuando incrementa la presión en un gas también aumenta su temperatura.
- Luego, aumentos en la presión de un gas generan aumentos en la presión de la temperatura.

# Correlación, Causalidad e Independencia (2)

- Esta supuesta relación de causalidad es falsa.
- De hecho, por la Ley de Gases Ideales:

$$PV = nRT \tag{2}$$

- Claramente la ley permite, a volumen constante, el aumento en la temperatura del gas también genera un aumento en su presión.

# Correlación, Causalidad e Independencia (3)

- El otro error, y que lamentablemente se comete bastante en ingeniería, es igualar la correlación nula con independencia de dos variables.
- Consideremos una v.a. de media cero, $E[X] = 0$, y definamos la variable $Y = X^2$.
- Claramente, $X$ e $Y$ no son independientes.

$$\begin{aligned} \mathsf{COV}(X, Y) &= E[X \cdot X^2] - E[X]E[X^2] \\ &= E[X^3] - 0 \cdot E[X^2]. \end{aligned}$$

# Correlación, Causalidad e Independencia (4)

- Pero $E[X^3] = 0$ porque

$$E[X^3] = \int_{\mathbb{R}} x^3 f_X(x) dx = \int x \cdot x^2 f_x(x) dx.$$

- La función $x^2$ no altera la paridad de $f_X(x)$.
- Como $f_X(x) \geq 0$, entonces, es par si $E[X] = 0$.
- Luego, $x^2 f_X(x) \geq 0$ también, y es par.

# Correlación, Causalidad e Independencia (5)

- Esto demuestra que $E[X^3] = 0$.
- Finalmente, COV$(X, Y) = 0$, i.e., no están correlacionadas.
- En el único caso en que correlación nula implica independencia es cuando $X$ $Y$ son conjuntamente gaussianas.

## Densidad Multinormal (1)

- Un caso especial lo constituyen un vector aleatorio multinormal.
- Es una generalización de la v.a. Gaussiana al caso $n$ dimensional.
- En el caso de dos variables tenemos la función densidad binormal

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Bigg\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \\
\times \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\Bigg\} \quad (3)
\end{aligned}
$$

# Densidad Multinormal (2)

- En el caso general, la densidad queda descrita por su media $\mu^T = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ y la matriz de covarianza:

$$\Sigma = E[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)^T], \tag{4}$$

donde $\mathbf{X}^T = (X_1, \ldots, X_n)$.

- La definición (4) corresponde a un producto externo de vectores (el resultado es una matriz).

# Densidad Multinormal (3)

- La densidad multinormal se expresa como

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi \det(\Sigma))^{n/2}} \exp\Big( -\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)\Big). \qquad (5)$$

# Propiedades Importantes de Vectores Aleatorios

Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias, $c_i \in \mathbb{R}$ constantes. Entonces

- $E[\sum_i c_i X_i] = \sum_i c_i E[X_i]$
- $\mathsf{VAR}[\sum_i c_i X_i] = \sum_i c_i^2 \mathsf{VAR}[X_i] + \sum_i \sum_{j \neq i} c_i c_j \mathsf{COV}(X_i, X_j)$.
- $\mathsf{VAR}[\sum_i c_i X_i] = \sum_i c_i^2 \mathsf{VAR}[X_i]$, si $X_i$ y $X_j$ no están correlacionados para $i \neq j$.

# Sumas de Variables Aleatorias (1)

- Existen varias formas de estudiar las propiedades de sumas de variables aleatorias.
- En el caso de considerar $X_1, \ldots, X_n$, independientes e igualmente distribuidas tenemos que

$$f_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(x) = (f * f \ldots * f)(x).$$

# Sumas de Variables Aleatorias (2)

- Existen dos resultados más generales que nos indican el comportamiento de sumas de grandes cantidades de variables aleatorias: ellas son la **Ley de los Grandes Números** y el **Teorema Central del Límite**.

# La Ley de los Grandes Números (Versión Débil)

- **LGN**: Sea $X_1, \ldots X_n$ una secuencia de v.a.'s con el mismo valor esperado $\mu_x$ y varianza $\sigma_x^2 < \infty$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu_X| > \epsilon) = 0 \qquad (6)$$

para cualquier $\epsilon > 0$.

- Esto quiere decir que el promedio de variables aleatorias converge en probabilidad al valor esperado $\mu_X$.

# Teorema Central del Límite

- Este resultado nos da una idea del tipo de distribución que tiene el promedio de variables aleatorias.
- Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d. (independiente e idénticamente distribuidas) con valor esperado $\mu$ y varianza $\sigma^2$. Entonces

$$\text{dist}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to \mathcal{N}(\mu, \sigma^2). \tag{7}$$

- Esto es, la suma de v.a's converge a una variable aleatoria Gaussiana con el mismo valor esperado y la misma varianza que las variables originales.

# Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (1)

- Un **proceso aleatorio** (también llamado proceso estocástico) es la generalización natural del concepto de variable aleatoria al caso de señales.
- En cualquier sistema de comunicaciones uno debe manejar señales dependientes del tiempo.
- En cursos básicos de señales y sistemas ellas son tratadas como determinísticas.

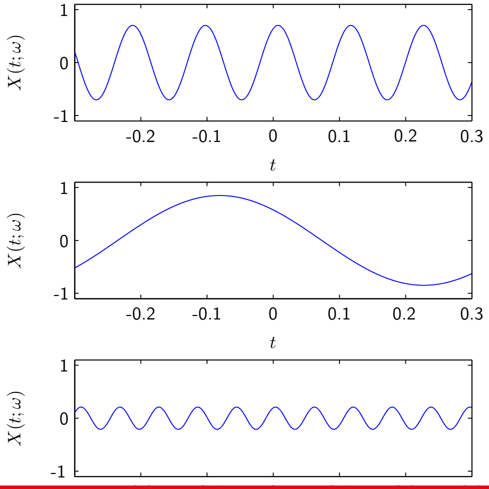
# Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (2)

- Por qué entonces cambiar al enfoque aleatorio?
  - Naturaleza física de la señal es aleatoria. Esto corresponde al ruido térmico en electrónica o al caso del comportamiento de las reflexiones en la ionósfera para el caso de radio.
  - La incerteza propia de las fuentes de información.
- Definición: Un **proceso aleatorio** o **señal aleatoria** corresponde a un mapeo entre un espacio de eventos $\Omega$ y el conjunto de realizaciones posibles de una señal. Asociado a ella encontramos un medida o ley de probabilidad similar a las que encontramos en v.a.'s.

# Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (3)

- Un proceso aleatorio es una variable aleatoria generalizada, en el sentido que toma como valores funciones en lugar de números.
- Ejemplos
  1. Sea $\Theta \in [0, 2\pi]$ es una variable aleatoria uniforme. Definimos el proceso aleatorio $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, donde $A$ y $f_0$ son constantes reales.
  2. Sea $X(t) = X$ una v.a. uniformemente distribuida en $[-1, 1]$.

# Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (4)



# Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (5)

- Vemos que para cada $\omega_i \in \Omega$ existe una señal $X(t;\omega_i)$ que es determinística. Esta función recibe el nombre de **camino muestral** o **realización** del proceso.
- Para un instante $t_0$ fijo, $X(t_0;\omega)$ es una variable aleatoria.
- Por lo tanto, en cualquier instante, el valor de una proceso aleatorio es una variable aleatoria.

# Conceptos Básicos sobre Procesos Aleatorios (6)

- Si definimos $(t_0, t_1, \ldots, t_N)$ instantes entonces, $(X(t_0;\omega), \ldots, X(t_N;\omega))$ define un vector aleatorio.
- Podemos hablar entonces de densidades, valores esperados, varianzas, etc. de procesos aleatorios.

## Promedios Estadísticos (1)

- Definición: La media o esperanza de un proceso aleatorio $X(t)$ es una función determinística denotad por $\mu_X(t)$ que en cada instante de tiempo $t$ es igual a la esperanza de $X(t)$. Esto es

$$\mu_X(t) = E[X(t)] \ \forall t.$$

- Ejemplo: Determinemos el valor esperado de $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, donde

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(\theta).$$

## Promedios Estadísticos (2)

- Entonces,

$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A\cos(2\pi f_0 t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0.$$

- Definición: La **función de autocorrelación** de un proceso aleatorio $X(t)$ y que denotaremos por $R_X(t_1, t_2)$ es una función definida como

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]. \qquad (8)$$

# Promedios Estadísticos (3)

- Si el p.a. es continuo, entonces

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

- Ejemplo: consideremos nuevamente $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, con $\Theta$ uniforme en $[0, 2\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[A\cos(2\pi f_0 t_1 + \Theta) A\cos(2\pi f_0 t_1 + \Theta)] \\ &= A^2 E[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))] + A^2 E[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2 \\ &= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)). \end{aligned}$$

## Procesos Estacionarios en Sentido Amplio (1)

- Nos interesa introducir una noción de estabilidad o equilibrio para el caso de procesos estocásticos.
- Esta idea de estabilidad debería manifestarse como la mantención de alguna propiedad en forma independiente del instante en que se haga la medición.
- Dependiendo de qué propiedad es independiente del tiempo hablaremos de distintos tipos de estacionariedad.

## Procesos Estacionarios en Sentido Amplio (2)

- Un proceso estacionario en sentido amplio (*wide-sense stationary process*) es aquel cuyo valor esperado y función de autocorrelación es independiente del instante en que se haga la medición.

# Procesos Estacionarios en Sentido Amplio (3)

## Definición

Un proceso $X(t)$ es estacionario en sentido amplio (WSS) si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\mu_X(t) = E[X(t)$ es independiente de $t$.

(ii) $R_X(t_1, t_2)$ depende sólo de la diferencia $\tau = t_1 - t_2$ y no de $t_1$ y $t_2$ en particular.

- En general, si sólo decimos que el proceso es estacionario estaremos diciendo implícitamente que el proceso es WSS.
- En este caso, $\mu_X(t) = \mu_X$ y $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$.
- El proceso $X(t)$ visto en los ejemplos anteriores es WSS.

# Procesos Aleatorios Múltiples (1)

- En general, un proceso aleatorio no es un ente aislado.
- Si consideramos un sistema lineal descrito por la respuesta al impulso $h(t)$, cabe preguntarse cuál es la dependencia que existen entre la salida del sistema $Y(t;\omega)$ y su entrada $X(t;\omega)$.
- Definición: Dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son **independientes** si para cualquier $m, n \in \mathbb{N}$, instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ y $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathbb{R}$ los vectores $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ e $(Y(\tau_1), \ldots, Y(\tau_m))$ son independientes.

# Procesos Aleatorios Múltiples (2)

- Definición: Dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son **no correlacionados** si para cualquier $m, n \in \mathbb{N}$, instantes $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ y $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathbb{R}$ los vectores $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ e $(Y(\tau_1), \ldots, Y(\tau_m))$ son no correlacionados.
- La **correlación cruzada** entre dos procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t)$ queda definida por

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = R_{Y,X}(t_2, t_1).$$

# Procesos Aleatorios Múltiples (3)

- Dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son **conjuntamente estacionarios en sentido amplio** (JWSS), o simplemente, **conjuntamente estacionarios**, si cada uno es WSS por separado y la correlación cruzada depende sólo de la diferencia entre $t_1$ y $t_2$, esto es,

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = R_{X,Y}(t_1 - t_2) = R_{X,Y}(\tau).$$

# La Autocorrelación de la Suma de dos Procesos

- Considere dos procesos conjuntamente estacionarios $X(t)$ e $Y(t)$. Determine la autocorrelación del proceso $Z(t) = X(t) + Y(t)$.
- Solución:

$$
\begin{aligned}
R_Z(t+\tau,\tau) &= E[Z(t+\tau)Z(\tau)] \\
&= E[(X(t+\tau)+Y(t+\tau))(X(\tau)Y(\tau))] \\
&= E[X(t+\tau)X(\tau)] + E[X(t+\tau)Y(\tau)] \\
&\quad + E[X(\tau)Y(t+\tau)] + E[Y(t+\tau)Y(\tau)] \\
&= R_X(\tau) + R_{X,Y}(\tau) + R_{X,Y}(-\tau) + R_Y(\tau).
\end{aligned}
$$

# Resumen

Hemos revisado:

- Vectores aleatorios: distribución multinormal.
- Secuencias aleatorias, convergencia y teoremas límites.
- Procesos aleatorios, nociones de estacionariedad.

## Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 4.