EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.10: Repaso de Probabilidades

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

10 de Septiembre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Capítulo 3:

Probabilidades y Procesos Aleatorios

Motivación

- La inherente naturaleza de un sistema de comunicaciones se debe a dos razones fundamentales:
  - La naturaleza aleatoria de las fuentes de información
  - Las alteraciones y perturbaciones introducidas por el medio de comunicación.

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad

- Concepto fundamental: **Experimiento Aleatorio**.

  Es un experimento cuyo resultado no se puede predecir con certeza.

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (1)

Espacio Muestral Ω

- **Espacio Muestral**: es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Lo denotaremos por Ω.
- Un espacio muestral puede ser
  - **discreto**: si el número de elementos en Ω es finito.
  - **infinito numerable**: si el número de elementos en Ω es infinito, pero existe una biyección entre Ω y los números naturales $\mathbb{N}$.
  - **no discreto**: el resto de los casos.

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (2)

Espacio Muestral Ω

- Ejemplos:
  1. $\Omega = \{\text{Cara}, \text{Sello}\}$: lanzamiento de una moneda.
  2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: lanzamiento de un dado.
  3. $[0, \infty[$: vida útil de una ampolleta.

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (3)

Eventos

- **Evento**: corresponde a un subconjunto del espacio muestral, es decir, a un conjunto de posibles resultados.
- Ejemplos:
  1. $E = \{\text{el resultado de tirar un dado es un número par}\}$.
  2. $E = \{\text{la vida útil de una ampolleta es mayor a 3 meses}\}$.

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (4)

σ álgebra de Eventos

- Los eventos pueden ser agrupados en una colección particular de conjuntos denominada σ **álgebra de eventos**.
- Este conjunto, que denotaremos por $\mathcal{F}$, satisface las siguientes propiedades:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.

(iii) Si $A_i \in \mathcal{F}$, para $i = 1, \ldots$, la unión de estos conjuntos también está en $\mathcal{F}$:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (5)

σ álgebra de Eventos

- Propiedades:
  (i) Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A \in \mathcal{F}$.
  (ii) Si $A_i \in \mathcal{F}$, para $i = 1, \ldots$, la intersección de estos conjuntos también está en $\mathcal{F}$:
  $$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$
- Ejemplos:
  - Si $|\Omega| < \infty$, entonces, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, el conjunto potencia que contiene todos los subconjuntos de Ω.
  - Si $\Omega = \mathbb{R}$, entonces, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, los Borelianos de $\mathbb{R}$, el conjunto formado por todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$.

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (6)

Medida de Probabilidad P

- **Probabilidad** P: es una función de $\mathcal{F}$ a $[0, +\infty[$ tal que
  (i) $0 \leq P(E) \leq 1$ para todos los eventos $E \in \mathcal{F}$.
  (ii) $P(\Omega) = 1$.
  (iii) Si $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$ son disjuntos, es decir,

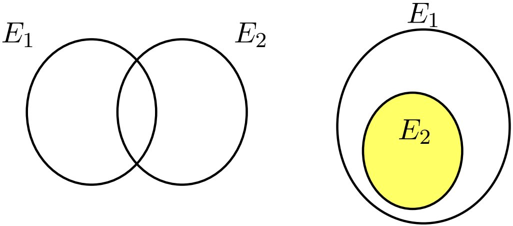
$$E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$

entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i). \tag{1}$$

Propiedades Importantes

1. $P(E^c) = 1 - P(E)$, donde E^c denota el complemento de E.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$.
4. Si $E_1 \subset E_2$ entonces $P(E_1) \leq P(E_2)$.



Espacio de Probabilidad

1. La tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ recibe el nombre de espacio de probabilidad.
2. Es fundamental para definir apropiadamente variables aleatorias, vectores y secuencias aleatorias y procesos estocásticos.
3. En lo que sigue de este curso, asumiremos que esta tripleta siempre existe.

Probabilidad Condicional (1)

- P: ¿Cómo incluimos nuestro conocimiento de un fenómeno para calcular su probabilidad de ocurrencia?
- R: Mediante el concepto de **Probabilidad Condicional**
- Si las probabilidades asociadas a dos eventos E_1 y E_2 son $P(E_1)$ y $P(E_2)$ respectivamente, y un observador sabe que E_2 ha ocurrido, cambia la probabilidad que ocurra E_1?

Probabilidad Condicional (2)

- Si hay alguna relación entre los eventos, entonces la ocurrencia de E_2 puede cambiar $P(E_1)$. Si no la hay, entonces $P(E_1)$ debe mantenerse inalterado.
- Ambas situaciones quedan resumidas en la siguiente fórmula:

$$P(E_1|E_2) = \begin{cases} \dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} & P(E_2) \neq 0. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2}$$

- Si la ocurrencia de E_2 no afecta E_1, decimos que los eventos son **independientes**.

Probabilidad Condicional (3)

Interpretación

- Una forma de entender la expresión de la probabilidad condicional es mediante la interpretación de frecuencia de ocurrencias de eventos.
- Consideremos por ejemplo los eventos:
  - A: El evento que el viento exceda los 5 m/s en el Parque Eólico Canela I (IV Región, cercano a Ovalle), en un día.
  - B: El evento que el viento esté por debajo de los 40 m/s en el mismo parque, en un día.
  - C: El evento que tanto A como B ocurran en el mismo día.
- Queremos calcular $P(C) = P(A \cap B)$.

Probabilidad Condicional (4)

Interpretación

- Asumamos que luego de 1000 días de observaciones tenemos los siguientes datos:
  - $N_A: \ 306.$
  - $N_B: \ 811.$
  - $N_C = N_{A \cap B} = 283.$
- Luego, podemos estimar las probabilidades que ocurran A, B y C a partir de las frecuencias de ocurrencias observadas empíricamente:

$$P(A) \approx \frac{N_A}{N} = \frac{306}{1000} = 0{,}306$$

$$P(B) \approx \frac{N_B}{N} = \frac{811}{1000} = 0{,}811$$

Probabilidad Condicional (5)

Interpretación

$$P(A \cap B) \approx \frac{N_{A\cap B}}{N} = \frac{283}{1000} = 0{,}283$$

- La fracción $N_{A\cap B}/N_A$ indica el número de veces que A y B han ocurrido en forma simultánea vs. el número de veces en que A ocurrido.
- En otras palabras, es el número de veces en el viento ha estado por debajo de los 40 m/s cuando ha estado por encima de los 5 m/s.

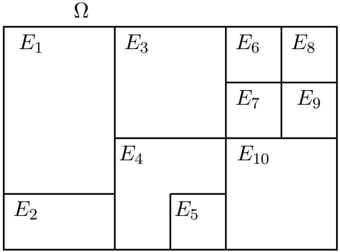
Probabilidad Condicional (6)

Interpretación

- Esto es exactamente la idea que buscamos materializar en el concepto de condicionalidad: determinar la probabilidad que un evento ocurra dado que otro evento ha ocurrido.
- Luego, $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \approx \dfrac{N_{A \cap B}/N}{N_A/N} = 0{,}92$.
- Similarmente, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \approx \dfrac{N_{A \cap B}/N}{N_B/N} = 0{,}35$.

Probabilidades Totales (1)

- **Partición**: una partición de un conjunto Ω es una conjunto de subconjuntos de Ω tal que
  (i) $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.
  (ii) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$.



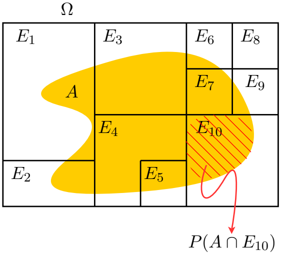
Probabilidades Totales (2)

Teorema (Probabilidades Totales): Sea $A \subset \Omega$ un evento cualquiera, y asuma las probabilidades condicionales

$$\left\{P(A|E_i)\right\}_{i=1}^{n}$$

conocidas, donde los $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ forman una partición sobre Ω. Entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A|E_i). \qquad (3)$$



Regla de Bayes

- Las fórmula de probabilidades totales puede ser utilizada para calcular

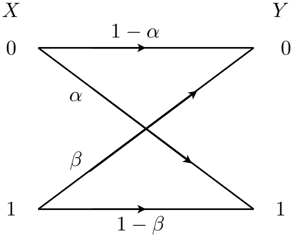
$$P(E_i|A)$$

- **Corolario (Regla de Bayes)**: Sea $A \subset \Omega$ un evento cualquiera, y asuma que las condiciones para el teorema anterior se mantienen. Entonces

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}. \tag{4}$$

Ejemplo (1)

- Consideremos un canal de comunicación binario asimétrico, como el mostrado en la figura.



- Asumamos además que la fuente de bits X emite símbolos en forma equiprobable, esto es, $P(X=0) = P(X=1) = \dfrac{1}{2}$.

Ejemplo (2)

- Podemos utilizar la regla de Bayes para determinar las probabilidades que $X = 0$ haya sido enviado dado que recibimos $Y = 0$.
- Sea $A = \{X = 0\}$ y $B = \{Y = 0\}$.
- Luego

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha)}{(1-\alpha)\frac{1}{2} + \beta\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ejemplo (3)

- Finalmente

$$P(A|B) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}.$$

- Similarmente,

$$P(A^C|B) = \frac{\beta}{1-\alpha+\beta}.$$

Aplicación: Detector de Máxima Probabilidad a Posteriori (1)

Maximum a Posteriori (MAP) Detector

- El detector de máxima probabilidad a posteriori es un dispositivo que entrega el símbolo cuya probabilidad es mayor de haber sido transmitido luego de observar el símbolo recibido.
- Notemos que por la regla de Bayes:

$$P(X=0|Y=y) = \frac{P(X=0)P(Y=y|X=0)}{P(Y=y)}$$

$$P(X=1|Y=y) = \frac{P(X=1)P(Y=y|X=1)}{P(Y=y)}$$

Aplicación: Detector de Máxima Probabilidad a Posteriori (2)

- El detector MAP entrega

$$\hat{X} = \mathrm{argmax}(P(X=0|Y=y), P(X=1|Y=y))$$

  para $y = 0, 1$.

- Este tema lo revisitaremos con detalle en la unidad de Modulación Digital.

Resumen

Hemos revisado:

- Conceptos de espacio de probabilidad: espacio muestral, σ álgebra y medida de probabilidad.
- Probabilidad condicional e interpretación basada en frecuencia relativa.
- Regla de Probabilidades Totales y Teorema de Bayes.
- Ejemplos: Detector MAP.

Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 4, sección 4.1.