# EL4005 Principios de Comunicaciones

## Clase No.8: Modulación Angular I

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

3 de Septiembre de 2010

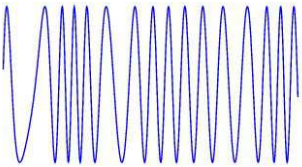
# Contenidos de la Clase (1)

# Motivación (1)

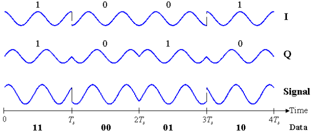
- Explorar dos grados de libertad restantes para realizar modulación analógica:
  - Modificar la frecuencia de la portadora.
  - Modificar la fase de la portadora.
- Esto da origen a dos formas de modulación angular:
  - Modulación en Frecuencia (FM).
  - Modulación de Fase (PM).

# Introducción a la Modulación Angular (1)

- Modulación Lineal: AM
- Modulación No-lineal: FM y PM.
- Son difíciles de implementar y analizar, siendo posible, en muchos casos, sólo se puede realizar un estudio aproximado.



FM




PM

# Introducción a la Modulación Angular (2)

- **Expansión en ancho de banda**: FM y PM generalmente expanden el ancho de banda efectivo de la señal modulada.
- Con una implementación más compleja y uso de un mayor ancho de banda, la pregunta natural es entonces: ¿Por qué usarlos?
- La mayor ventaja de estos esquemas de modulación resulta ser su alta inmunidad al ruido.

# Introducción a la Modulación Angular (3)

- Así, ellos sacrifican ancho de banda para lograr una alta inmunidad al ruido.
- Esta es la principal razón por la cual ellos son ampliamente usados en transmisión de música de **alta fidelidad**.
- También en sistemas de comunicación punto-a-punto, donde la potencia de los emisores está por lo general altamente limitada.

# Representación de Señales FM y PM (1)

- Una señal modulada angularmente puede ser escrita como:

$$u(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \tag{1}$$

donde $f_c$ es la frecuencia portadora y $\phi(\cdot)$ una fase de la portadora.

- La **frecuencia instantánea** de la señal, $f_i(t)$ es:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right] = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\phi(t). \tag{2}$$

## Representación de Señales FM y PM (2)

- La noción de frecuencia instantánea debe ser entendida en el mismo sentido que la velocidad instantánea en física.
- Formalmente, la función $u(t)$ deja de ser una sinusoide al modular su ángulo o frecuencia.
- Sin embargo, la señal resultante tiene un comportamiento similar a una sinusoide (excepto en que su período no es constante).

# Representación de Señales FM y PM (3)

- **Sistema PM**: la fase $\phi(\cdot)$ es proporcional al mensaje $m(\cdot)$, i.e.:

$$\phi(t) = k_p m(t) \tag{3}$$

  para $k_p$ una constante real.

- **Sistema FM**: la desviación de la frecuencia instantánea $f_i(t)$ respecto a la frecuencia portadora $f_c$ es proporcional al mensaje, i.e.:

$$f_i(t) - f_c = k_f m(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\phi(t) \tag{4}$$

  con $k_f$ una constante.

## Representación de Señales FM y PM (4)

- Las constantes $k_p$ y $k_f$ son las **constantes de desviación de fase y frecuencia**, respectivamente.
- Entonces

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t) & \text{PM}, \\ 2\pi k_f \int\limits_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau & \text{FM}. \end{cases} \tag{5}$$

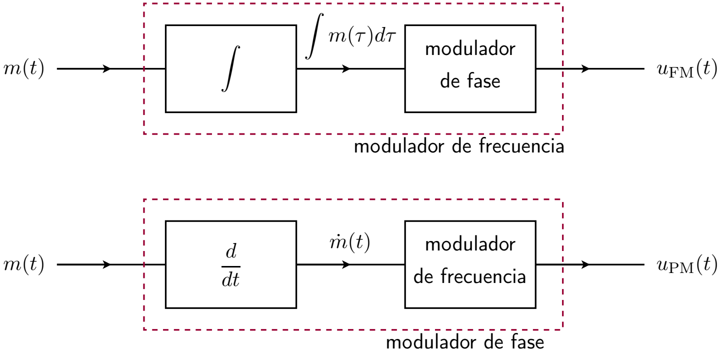
- Existe una estrecha relación entre PM y FM, lo que permite estudiar ambos esquemas de forma paralela enfatizando sólo sus principales diferencias.

# Representación de Señales FM y PM (5)

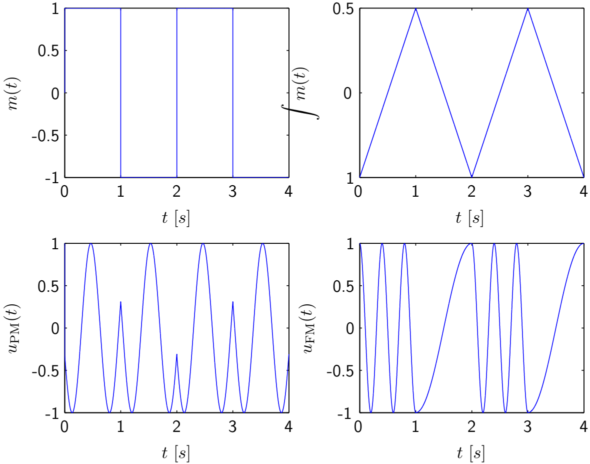
- Alternativamente, uno puede escribir

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \begin{cases} k_p \frac{d}{dt} m(t) & \text{PM}, \\ 2\pi k_f m(t) & \text{FM}, \end{cases} \tag{6}$$

# Representación de Señales FM y PM (6)



# Representación de Señales FM y PM (7)



# Demodulación de Señales FM y PM (1)

- La demodulación de una señal FM requiere encontrar la frecuencia instantánea de la señal modulada.

  `(esto ya lo hicimos con un PLL)`

- Luego, restamos el resultado a la frecuencia portadora y recuperamos así el mensaje.

- Similarmente, la demodulación de una señal PM requiere encontrar la fase de la señal modulada, a partir de la cual el mensaje puede ser recuperado.

# Demodulación de Señales FM y PM (2)

- En un sistema PM, la **máxima desviación de fase** queda dada por:

$$\Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \, \text{máx}[|m(t)|].$$

- En un sistema FM, la **máxima desviación de frecuencia** queda dada por:

$$\Delta f_{\text{máx}} = k_f \, \text{máx}[|m(t)|].$$

# FM y PM: Un Ejemplo (1)

- Consideremos la transmisión de un tono, es decir

$$m(t) = a\cos(2\pi f_m t)$$

  mediante modulación en frecuencia y fase de la portadora

$$A_c \cos(2\pi f_c t).$$

- En el caso de modulación de fase tenemos que:

$$\phi(t) = k_p m(t) = k_p a \cos(2\pi f_m t),$$

  y en FM:

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau = \frac{k_f a}{f_m} \sin(2\pi f_m t).$$

## FM y PM: Un Ejemplo (2)

- Por lo tanto, la señal modulada $u(t)$ es, en PM:

$$u(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_p a \cos(2\pi f_m t)\right)$$

y, en FM:

$$u(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \frac{k_f a}{f_m} \sin(2\pi f_m t)\right).$$

- Definimos:

$$\beta_p = k_p a$$

y

$$\beta_f = \frac{k_f a}{f_m}.$$

# FM y PM: Un Ejemplo (3)

- Tenemos entonces que, en PM:

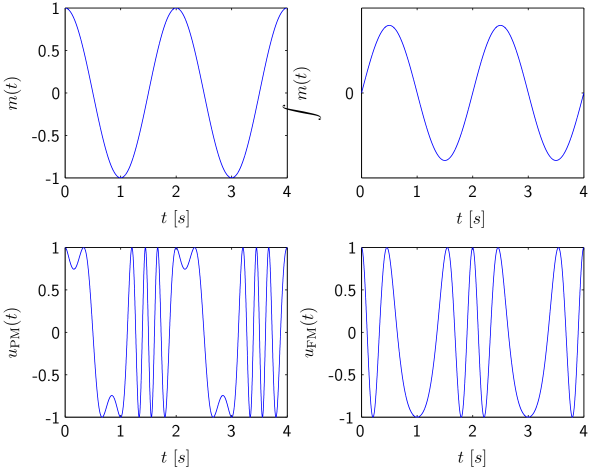
$$u(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \beta_p \cos(2\pi f_m t)\right)$$

  y, en FM:

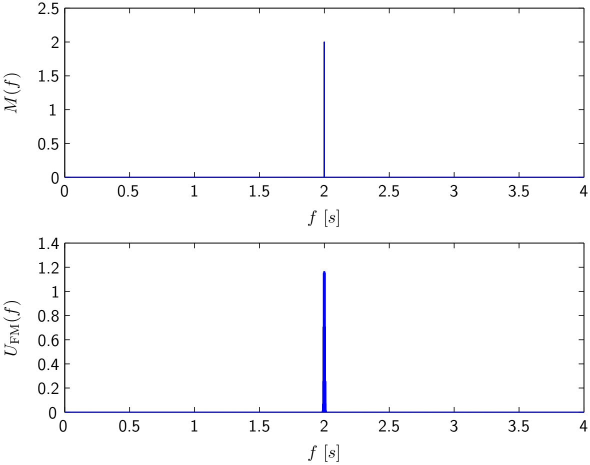
$$u(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)\right).$$

- Los parámetros $\beta_p$ y $\beta_f$ son llamados $\text{índices de modulación}$ de los esquemas PM y FM, respectivamente.

# FM y PM: Un Ejemplo (4)



# FM y PM: Un Ejemplo (5)



## FM y PM: Un Ejemplo (6)

- Las definición anterior de los índices de modulación se extiende a señales no-sinusoidales generales $m(t)$, como:

$$\beta_p = k_p \operatorname{máx}[|m(t)|] \quad y \quad \beta_f = \frac{k_f \operatorname{máx}[|m(t)|]}{W}, \tag{7}$$

  con $W$ el ancho de banda de la señal mensaje.

- En términos de las desviaciones máxima en fase y frecuencia:

$$\beta_p = \Delta\phi_{\text{máx}} \quad y \quad \beta_f = \frac{\Delta f_{\text{máx}}}{W}.$$

## Modulación Angular General (1)

- La modulación angular de frecuencia y fase son casos particulares de modulación angular.
- Modulación de fase:

$$\phi(t) = k_p m(t). \tag{8}$$

- Modulación en frecuencia:

$$\phi(t) = k_f \int_0^t m(\tau) d\tau. \tag{9}$$

# Modulación Angular General (2)

- Uno puede utilizar cualquier sistema LTI para modificar el mensaje antes de modular el ángulo de la sinusoide:

$$\phi(t) = 2\pi \int_0^t h(t-\tau)m(\tau)d\tau. \tag{10}$$

- Esta relación da origen a un esquema generalizado de modulación angular.
- En la práctica, ni PM ni FM hacen un buen uso del espectro, por lo que la solución de modulación puede determinarse sobre un rango de opciones mayor de esquemas de modulación, “indexados” por $h(t)$.

# Modulación Angular de Banda Angosta (1)

- Consideremos un sistema de modulación angular donde las constantes $k_p$ y $k_f$ y el mensaje $m(\cdot)$ son tales que:

$$\phi(t) << 1.$$

- Entonces:

$$\begin{aligned} u(t) =& A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \\ =& A_c \cos(2\pi f_c t) \cos(\phi(t)) - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin(\phi(t)) \\ \approx& A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \phi(t) \sin(2\pi f_c t), \end{aligned}$$

donde hemos usado las aproximaciones $\cos(\phi(t)) \approx 1$ y $\sin(\phi(t)) \approx \phi(t)$ para $\phi(t) << 1$.

# Modulación Angular de Banda Angosta (2)

- La señal anterior es similar a una señal AM Convencional, con ancho de banda aproximadamente el doble que el de la señal mensaje.
- Así, modulación angular de banda angosta no provee una mejor inmunidad al ruido que los sistemas AM Convencionales, y es raramente usada en la práctica para fines de comunicación.
- Sin embargo, estos sistemas pueden ser usados como etapas intermedias en la generación de señales de modulación angular de banda amplia.

# Ancho de Banda de Señales Moduladas Angularmente

- La no-linealidad de los sistemas de modulación angular $\Rightarrow$ no podemos estudiar en forma exacta las características espectrales de este tipo de sistemas.
- El estudio de dichas propiedades es llevado a cabo para señales muy simples, mediante cálculos aproximados, para luego extraer conclusiones generales de utilidad para señales más complejas.
- Consideraremos primero el caso en que las señales moduladoras son sinusoides.

# Modulación Angular por Señales Sinusoidales (1)

- Si la señal moduladora es una sinusoide: $\sin(\cdot)$ en PM, $\cos(\cdot)$ en FM.
- Entonces
$$u(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right),$$
con $\beta$ el índice de modulación respectivo, i.e., $\beta_p$ o $\beta_f$ según corresponda, y dónde el término $\sin(2\pi f_m t)$ debe ser reemplazado por $\cos(2\pi f_m t)$ en PM.
- Luego
$$u(t) = \Re\left[A_c e^{\jmath 2\pi f_c t} \exp(\jmath\beta \sin(2\pi f_m t))\right].$$

# Modulación Angular por Señales Sinusoidales (2)

- Dado que la señal $\sin(2\pi f_m t)$ es periódica de periodo $T_m = \frac{1}{f_m}$, lo mismo es cierto para la señal exponencial compleja:

$$\exp(\jmath\beta\sin(2\pi f_m t)).$$

- Podemos por tanto considerar la representación en Serie de Fourier respectiva, con coeficientes:

$$\begin{aligned} c_n =& f_m \int_0^{\frac{1}{f_m}} \exp(\jmath\beta\sin(2\pi f_m t)) \exp(-\jmath n 2\pi f_m t) dt \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\Big(\jmath\big(\beta\sin(u) - nu\big)\Big) du \end{aligned}$$

con el cambio de variables $u = 2\pi f_m t$.

# Modulación Angular por Señales Sinusoidales (3)

- Esta última expresión corresponde a una integral conocida, llamada **Función de Bessel del Primer Tipo de Orden n** y denotada por $J_n(\beta)$ (como función de $\beta$).
- Así, la expansión en Serie de Fourier para la exponencial compleja considerada queda:

$$\exp(\jmath\beta\sin(2\pi f_m t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\exp(\jmath 2\pi n f_m t).$$

# Modulación Angular por Señales Sinusoidales (4)

- Reemplazando en la expresión para $u(t)$, obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} u(t) =& \Re\left[A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\exp(\jmath 2\pi n f_m t)\exp(\jmath 2\pi f_c t)\right] \\ =& \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta)\cos\left(2\pi\left(f_c + n f_m\right)t\right). \end{aligned}$$

- La expresión anterior muestra que, incluso para este caso simple en que la señal moduladora es una sinusoide de frecuencia $f_m$, la señal modulada angularmente $u(\cdot)$ contiene todas las frecuencias de la forma:

$$f_c + n f_m, \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

# Modulación Angular por Señales Sinusoidales (5)

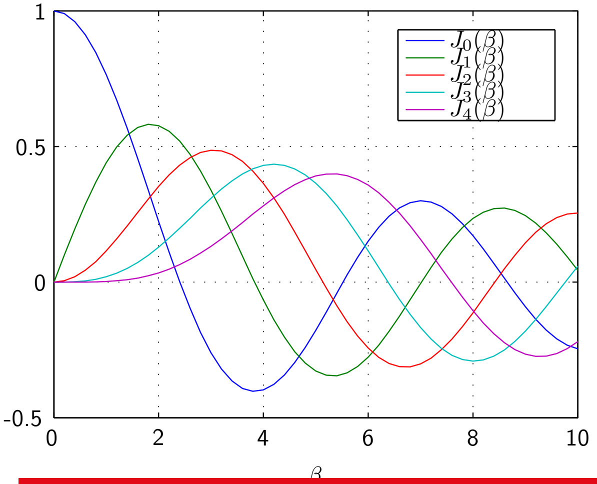
- El ancho de banda de la señal modulada $u(t)$ es infinito.
- Sin embargo, las amplitudes de las componente sinusoidales de frecuencia $f_c \pm n f_m$ son pequeñas a medida que $n$ crece.
- Por lo tanto, es conveniente introducir el **ancho de banda efectivo** de la señal modulada.
- Para $\beta$ pequeño usamos la aproximación:

$$J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n n!}.$$

# Modulación Angular por Señales Sinusoidales (6)

- Así, para un índice de modulación $\beta$ pequeño, sólo la componente correspondiente a $n = 1$ es importante.
- Además, las funciones de Bessel consideradas poseen la simetría $J_{-n}(\beta) = J_n(\beta)$ si $n$ par, $J_{-n}(\beta) = -J_n(\beta)$ si $n$ impar.

# Modulación Angular por Señales Sinusoidales (7)



# Ejemplo (1)

- Consideremos la portadora

$$c(t) = 10\cos(2\pi f_c t),$$

y el mensaje

$$m(t) = \cos(20\pi t).$$

- Asumamos que dicho mensaje es usado para modular la frecuencia de la portadora con $k_f = 50$.

# Ejemplo (2)

- Problema:

  `Queremos encontrar la expresión de la señal modulada y determinar cuántas armónicas debe contener (i.e., cuántas` $f_c + 10n$`) de tal modo de incluya el` $99\,\%$ `de la potencia.`

- Tenemos que la potencia de la portadora es:

$$P_c = \frac{A_c^2}{2} = \frac{100}{2} = 50.$$

# Ejemplo (3)

- La señal modulada queda representada por:

$$
\begin{aligned}
u(t) =& 10\cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} \cos(20\pi\tau)d\tau\right) \\
=& 10\cos\left(2\pi f_c t + \frac{50}{10}\sin(20\pi t)\right) \\
=& 10\cos\left(2\pi f_c t + 5\sin(20\pi t)\right),
\end{aligned}
$$

- El índice de modulación $\beta$ es:

$$
\beta = k_f \frac{\text{máx}[|m(t)|]}{f_m} = 5.
$$

## Ejemplo (4)

- Por lo tanto, la señal modulada $u(\cdot)$ es:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta) \cos\left(2\pi(f_c + n f_m)t\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 10 J_n(5) \cos\left(2\pi(f_c + 10n)t\right). \end{aligned}$$

- El contenido en frecuencia de la señal modulada está concentrado en frecuencias de la forma $f_c + 10n$.

# Ejemplo (5)

- Así, para asegurar que al menos el $99\,\%$ de la potencia esté contenido en dicha señal, debemos escoger $k$ suficientemente grande tal que:

$$\sum_{n=-k}^{n=k} \frac{100 J_k^2(5)}{2} \geq 0{,}99 \times 50.$$

- Considerando las propiedades de simetría de las funciones de Bessel del primer tipo, necesitamos entonces que:

$$50 \left[ J_0^2(5) + 2 \sum_{n=1}^{n=k} J_k^2(5) \right] \geq 49{,}5.$$

# Ejemplo (6)

- Las funciones de Bessel se encuentran tabuladas, por lo que podemos comprobar que el valor más pequeño de $k$ para el cual el lado derecho de la relación anterior supera al izquierdo es $6$.
- Así, tomando las frecuencias:

$$f_c \pm 10k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 6,$$

se garantiza el criterio de contenido de potencia considerado

# Ejemplo (7)

- Al pasar la señal modulada por un filtro ideal pasabajos con ancho de banda de al menos $120$ Hz, sólo el $1\,\%$ de la potencia de la señal será eliminada.
- Desde un punto de vista práctico, decimos que el *ancho de banda efectivo* de la señal modulada angularmente es, en este caso, $120$ Hz.

## Resumen

- Presentación de los rudimentos de modulación angular.
- Vimos que FM y PM son casos particulares de modulación angular, donde el mensaje es filtrado antes de modular el ángulo de la portadora.
- Presentamos el caso de la modulación angular de banda angosta.
- Determinamos, en forma aproximada, el ancho de banda de una señal modulada angularmente por un tono sinusoidal.

## Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 3, secciones 3.3.1 a 3.3.3.
- Lathi, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, Capítulo 5, secciones 5.1 y 5.2 (hasta la página 222).