Algebra Lineal

Patricio Pérez A.

Material de Apoyo para el curso EL4005
Primavera 2010

31 de agosto de 2010

1. Espacios Vectoriales

1.1. Definición

Sea (V,+) un grupo Abeliano, es decir

- $+$ es ley de composición interna
- $+$ es conmutativa y asociativa
- Existe un neutro, $0 \in V$, tal que: $\forall x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$
- $\forall x \in V$, existe un inverso aditivo, $-x \in V$, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$

Sea además $\mathcal{K}$ un cuerpo. Se define la ley de composición **externa**:

$$\mathcal{K} \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, v) \rightarrow \lambda v \in V$$

Se dice que V es un **espacio vectorial** sobre $\mathcal{K}$ si y sólo si la ley de composición externa satisface $\forall \lambda, \beta \in \mathcal{K}, x, y, \in V$:

- $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$
- $1x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathcal{K}$

1.2. Subespacio Vectorial

1.2.1. Definición

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathcal{K}$. Se dirá que $U \neq \phi$ es un subespacio vectorial (s.e.v.) de V si y sólo si:

- $\forall u, v \in U, u + v \in U$
- $\forall \lambda \in \mathcal{K}, \forall u \in U, \lambda u \in U$.

De forma equivalente, se puede decir también:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{K}, \forall u_1, u_2 \in U, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$$

1.3. Combinaciones Lineales

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$, y una colección de vectores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, y de escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathcal{K}$. Se denominará **combinación lineal** a la suma ponderada de estos vectores:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

1.4. Dependencia e Independencia Lineal

Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, se dirá que el conjunto de estos vectores es **linealmente dependiente** $(l.d)$, si y sólo sí: existen escalares $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, no todos nulos, tales que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = 0$.

Si ocurre el caso contrario, es decir:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, ..., n$$

se dirá que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es **linealmente independiente** $(l.i)$.

2. Producto Interno y Normas

2.1. Producto Interno

2.1.1. Definición

Sean $\mathbf{x}$,$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Se define el **producto interno** $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ como el real $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$. Se define así una función:

$$
\begin{aligned}
\langle , \rangle : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R} \\
(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle
\end{aligned}
$$

llamada **producto interno**.

2.1.2. Propiedades

Algunas propiedades básicas de esta función son:

- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$(Simetría)
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n,\ \langle \mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y} \rangle \ \wedge \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \bar{\mathbf{y}} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}} \rangle$(Bi-aditividad).
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$(Bi-homogeneidad).
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \wedge \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ (Positividad).

2.2. Normas

2.2.1. Definición

Sea V un espacio vectorial. Una **norma** en V es una función que satisface las siguientes propiedades:

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup 0$$

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ con $x \in V$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$(Desigualdad triangular).

Al par ordenado $(V, \|\cdot\|)$ se le conoce como **Espacio Normado**.

2.2.2. Algunas normas típicas

En $\mathbb{R}^n$ es posible definir muchas normas. Algunos casos más conocidos:

- Norma euclideana $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

- Norma 1 $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- Norma infinito o uniforme $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, i \in \{1,2,...,n\}\}$
- Norma p $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$ para $1 < p < \infty$. *(Notar que para $p < 1$, la norma no cumple la desigualdad triangular).*

También se definen normas en el espacio de las funciones.
Ejemplo 1: Si $V = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} / f$ es continua$\} = C[a,b]$ entonces definimos

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty &: V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \|f\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Si $V = C[a,b]$ entonces

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 &: V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \|f\|_1 &= \int_a^b |f(x)|\, dx \end{aligned}$$

2.2.3. Normas equivalentes

Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en V se dicen **equivalentes**, si existen constantes c_1 y c_2 positivas tales que:

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 .$$

2.2.4. Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos x e $y \in V$, se define la **distancia** entre x e y por:

$$d(x,y) = \|x - y\| .$$

Notar que la noción de distancia entre dos puntos depende de la norma considerada.

3. Generadores de un Espacio Vectorial y Proyecciones

3.1. Bases y Representaciones

3.1.1. Definición

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Se dirá que los vectores $\{v_1,...,v_n\} \subseteq V$, **generan** V, si y sólo sí:

$$\langle\{v_1,...,v_n\}\rangle = V$$

o equivalentemente

$$\forall v \in V, \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{K} \text{ tal que } v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

3.1.2. Definición

Dado un espacio vectorial V sobre $\mathcal{K}$, se dirá que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una **base** de V si y sólo sí:

1. $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto $l.i$
2. $V = \langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle$

3.2. Método de Gram-Schmidt

El Método de Gram-Schmidt tiene por objetivo asociar de forma canónica, a una base dada de $\mathbb{R}^n$, una base ortonormal, es decir, todos los vectores pertenecientes a ella son ortogonales entre sí y de norma 1.

Recordar que una proyección de u sobre v, está definida por $w = \frac{\langle u,v \rangle}{\langle v,v \rangle} v$. Este vector v representa el vector que minimiza la distancia de u al espacio generado por v.

Una base $\{v_1, ..., v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ se dice **ortogonal** si

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ con } i \neq j$$

Si además

$$\|v_i\| = \langle v_i, v_i \rangle^{\frac{1}{2}} = 1,$$

se dirá que la base es **ortonormal**

El algortimo de G-S permite contruir una base ortonormal $\{w_1, ..., w_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, a partir de una base de $\mathbb{R}^n$ $\{v_1, ..., v_n\}$ dada. Además esta base tiene la propiedad extra de, $\forall k = 1, ..., n$ $\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle = \langle \{w_1, ..., w_n\} \rangle$. Este algortimo funciona de la siguiente manera:

1. Definir $w_1 = \frac{v_1}{\langle v_1, v_1 \rangle^{\frac{1}{2}}}$
2. Definir $\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
3. Hacer $w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}$

4. Repetir hasta obtener n vectores:

$$\tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} - \langle v_{k+1}, w_1 \rangle \, w_1 - \langle v_{k+1}, w_2 \rangle \, w_2 - \cdots - \langle v_{k+1}, w_k \rangle \, w_k$$

$$w_{k+1} = \frac{\tilde{w}_{k+1}}{\|\tilde{w}_{k+1}\|}$$