

Representación de Señales y Sistemas en Frecuencia

Patricio Parada
Material de Apoyo para el curso EL4005
Universidad de Chile
Primavera 2010

12 de agosto de 2010

1. Series de Fourier

Comenzaremos nuestra presentación hablando sobre la representación en frecuencia de señales periódicas.

Teorema 1 Sea $x(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ una señal periódica de periodo T_0 satisfaciendo las siguientes condiciones (llamadas Condiciones de Dirichlet):

(I) $x(\cdot)$ es absolutamente integrable en un período, i.e.,

$$\int_0^{T_0} |x(t)| dt < \infty.$$

(II) El número de máximos y mínimos de $x(\cdot)$ es finito en $[0, T_0]$.

(III) El número de discontinuidades de $x(\cdot)$ es finito en $[0, T_0]$.

Entonces $x(\cdot)$ puede ser expandida en términos de exponenciales complejas,

$$\left\{ \exp \left(j2\pi \frac{n}{T_0} t \right) \right\}_{n=-\infty}^{+\infty},$$

como sigue:

$$x_{\pm}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot \exp \left(j2\pi \frac{n}{T_0} t \right) \quad (1)$$

donde

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \exp \left(-j2\pi \frac{n}{T_0} t \right) dt$$

para $\alpha \in \mathbf{R}$ arbitrario. Además:

$$x_{\pm}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } x(\cdot) \text{ continúa en } t \\ \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} & \text{si no.} \end{cases}$$

1.1. Observaciones

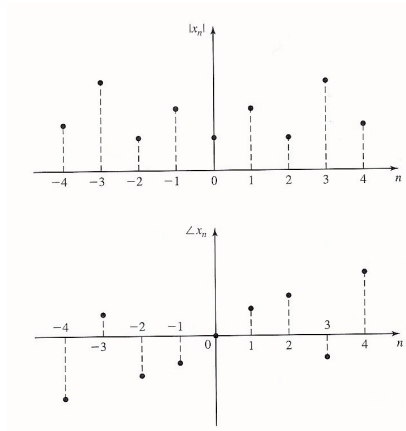
- $\{x_n\} \subset \mathbf{C}$ son llamados coeficientes de la Serie de Fourier de $x(\cdot)$.
- $\alpha \in \mathbf{R}$ es arbitrario. Usualmente $\alpha = 0$ ó $\alpha = -\frac{T_0}{2}$.
- De ahora en adelante simplemente escribimos $x(t)$ para el desarrollo en Serie de Fourier (en vez de $x_{\pm}(t)$).
- Las condiciones de Dirichlet son *suficientes*, pero NO *necesarias* para la existencia de la correspondiente expansión en Serie de Fourier.
- La frecuencia $f = \frac{1}{T_0}$ se llama *frecuencia fundamental* de $x(\cdot)$. Su n -ésimo múltiplo, $f_n = \frac{n}{T_0}$, se llama el n -ésimo *armónico*.
- Notar que el teorema establece que $x(\cdot)$ queda representada por su período T_0 (o frecuencia fundamental f_0) y un número contable de coeficientes $\{x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. En contraste, $\{x(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$ representa una colección no numerable de valores.
- La Serie de Fourier es también expresada en términos de frecuencia angular:

$$x_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega_0}} x(t) \exp \left(-jn\omega_0 t \right) dt, \quad \omega_0 = 2\pi f_0,$$

y

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp(jn\omega_0 t).$$

- En general, $x_n = |x_n| \exp(j\angle x_n)$. $|x_n|$ y $\angle x_n$ corresponden al módulo y la fase del n -ésimo armónico, respectivamente.
- Los gráficos de $|x_n|$ y $\angle x_n$ v/s n se conocen como el *espectro discreto* de $x(\cdot)$.



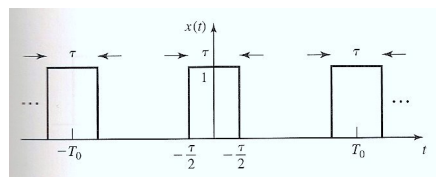
1.2. Un Ejemplo

Ejemplo 2 *Ejemplo* Considere la señal rectangular periódica de periodo T_0 dada por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_0}{\tau}\right)$$

con

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1/2, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |t| = 1/2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

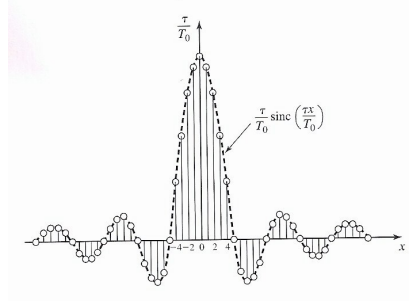


Entonces:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T_0}t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{-jn\frac{2\pi}{T_0}t} dt \\ &= \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) \\ &= \frac{\tau}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right); \quad \text{sinc}(\theta) \doteq \frac{\sin(\theta)}{\theta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T_0} \text{sinc} \left(\frac{n\tau}{T_0} \right) e^{jn \frac{2\pi}{T_0} t}.$$



1.3. Serie de Fourier de Señales Reales

Si $x(\cdot)$ en el teorema es real, i.e., $x(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} x_{-n} &= \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt \\ &= \left[\frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt \right]^* \\ &= x_n^*. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{|x_n|\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ y $\{\angle x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ son secuencias pares e impares de n , respectivamente.

Escribiendo $x_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ tenemos $x_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$, y por lo tanto para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} x_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} + x_{-n} e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} &= \frac{a_n - jb_n}{2} e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} \\ &= a_n \cos \left(2\pi \frac{n}{T_0} t \right) + b_n \sin \left(2\pi \frac{n}{T_0} t \right). \end{aligned}$$

Como $x_0 = \frac{a_0}{2} \in \mathbf{R}$, finalmente tenemos:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(2\pi \frac{n}{T_0} t \right) + b_n \sin \left(2\pi \frac{n}{T_0} t \right) \right].$$

La expansión anterior se conoce como *Serie Trigonométrica de Fourier*.

Los coeficientes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se obtienen notando que:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \left[\cos \left(2\pi \frac{n}{T_0} t \right) - j \sin \left(2\pi \frac{n}{T_0} t \right) \right] dt, \end{aligned}$$

de donde:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \cos \left(2\pi \frac{n}{T_0} t \right) dt$$

y

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \sin \left(2\pi \frac{n}{T_0} t \right) dt.$$

2. Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es una herramienta extremadamente útil para trabajar con señales continuas pero que no son periódicas. Es la extensión natural de la Serie de Fourier al caso de señales periódicas y aperiódicas. La señal es expresada en términos de exponenciales complejas, pero las frecuencias pertenecen a un continuo.

Teorema 3 Sea $x(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ una señal satisfaciendo las Condiciones de Dirichlet:

- (I) $x(\cdot)$ es absolutamente integrable en $\mathbf{R}$, i.e., $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$.
- (II) El número de máximos y mínimos de $x(\cdot)$ es finito en cualquier intervalo finito de $\mathbf{R}$.
- (III) El número de discontinuidades de $x(\cdot)$ es finito en cualquier intervalo finito de $\mathbf{R}$.

Entonces, la Transformada de Fourier de $x(\cdot)$, definida por:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \quad (2)$$

existe y, con $x_{\pm}(\cdot)$ definida como antes, tenemos:

$$x_{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (3)$$

2.1. Observaciones

- $X(f) = |X(f)| \angle X(f)$ es el espectro continuo de la señal $x(\cdot)$.
- Notación usual:

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] \text{ es la Transformada de Fourier de } x(\cdot)$$

y

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] \text{ es la Transformada Inversa de Fourier de } X(\cdot).$$

(Notar que, como antes, simplemente escribimos $x(\cdot)$ en vez de $x_{\pm}(\cdot)$.)

- En términos de frecuencia angular:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

y

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

- Notar que:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)} df \right] x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau)x(\tau) d\tau$$

con $\delta(\cdot)$ la función (generalizada) *Delta de Dirac*. Comparando:

$$\delta(t - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)} df$$

o, en general:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df.$$

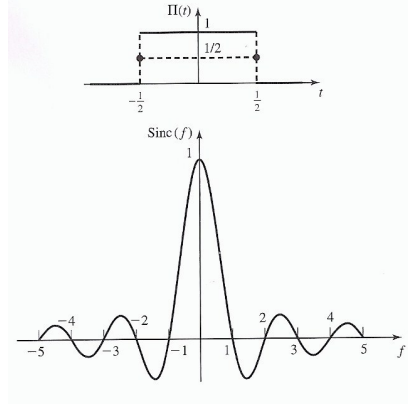
Por lo tanto, el espectro de $\delta(\cdot)$ es constante (e igual a 1) sobre todas las frecuencias.

- Notar que las manipulaciones anteriores son formales pues $\delta(\cdot)$ es una *distribución* (función generalizada). Sin embargo, transformadas de Fourier pueden ser definidas sin problemas en el contexto de *Teoría de Distribuciones*.

2.2. Ejemplo

Sea $\Pi(\cdot)$ el pulso rectangular considerado antes. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Pi(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{-1}{j2\pi f} [e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}] = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \text{sinc}(f). \end{aligned}$$



2.3. Transformada de Fourier de Señales Reales

Notar que:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt.\end{aligned}$$

Por lo tanto, como antes, si $x(\cdot)$ es real tenemos que $X(-f) = X^*(f)$. Equivalentemente, $|X(-f)| = |X(f)|$ y $\angle X(-f) = -\angle X(f)$. Si además $x(\cdot)$ es par o impar, entonces $X(f)$ es real y par o imaginaria e impar, respectivamente.

2.4. Transformada de Fourier: Propiedades Básicas

Asumiendo que todas las transformadas respectivas existen:

- Linealidad:

$$\mathcal{F}[\alpha x(t) + \beta y(t)] = \alpha \mathcal{F}[x(t)] + \beta \mathcal{F}[y(t)].$$

- Dualidad:

Si $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$, entonces

$$x(f) = \mathcal{F}[X(-t)] \text{ y } x(-f) = \mathcal{F}[X(t)].$$

- Corrimiento en el Tiempo:

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j2\pi ft_0} \mathcal{F}[x(t)].$$

- Escalamiento:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

- Convolución:

$$\mathcal{F}[x(t) * y(t)] = \mathcal{F}[x(t)]\mathcal{F}[y(t)] = X(f)Y(f).$$

- Modulación:

$$\mathcal{F}[x(t)e^{j2\pi f_0 t}] = X(f - f_0)$$

y

$$\mathcal{F}[x(t) \cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)].$$

- Relación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df.$$

- Autocorrelación:

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = |X(f)|^2$$

con

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt,$$

la *autocorrelación* de la señal $x(\cdot)$.

- Diferenciación:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = j2\pi f X(f).$$

- Integración:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f).$$

- Momentos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n x(t)dt = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f) \Big|_{f=0},$$

i.e., los momentos de $x(\cdot)$ pueden ser obtenidos a partir de $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ vía diferenciación.

2.5. Transformada de Fourier de Señales Periódicas

Consideremos $x(\cdot)$ una señal periódica (periodo T_0) que satisface las condiciones de Dirichlet, y sean $\{x_n\}$ sus coeficientes de Serie de Fourier. Entonces, su transformada de Fourier $X(f)$ puede obtenerse a partir de $\{x_n\}$ como sigue:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta \left(f - \frac{n}{T_0} \right).$$

La transformada de Fourier de una señal periódica consiste de un tren de impulsos de altura x_n .

Definimos la señal truncada

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T_0}{2} < t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Entonces,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{T_0}(t - nT_0)$$

Como $x_{T_0}(t - nT_0) = x_{T_0}(t) * \delta(t - nT_0)$, obtenemos

$$x(t) = x_{T_0} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X(f) &= X_{T_0}(f) \left[\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_0} \right) \right] \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{T_0} \left(\frac{n}{T_0} \right) \delta \left(f - \frac{n}{T_0} \right) \end{aligned}$$

Comparando con la otra expresión para $X(f)$ tenemos

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta \left(f - \frac{n}{T_0} \right)$$

y por lo tanto,

$$x_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0} \left(\frac{n}{T_0} \right). \quad (4)$$

3. Transmisión en Sistemas LTI

Un sistema lineal e invariante en el tiempo (que denotaremos por LTI por sus iniciales en inglés (*linear time invariant*)), es uno donde las propiedades del sistema se mantienen fijas en el tiempo, esto es, su respuesta al impulso no depende de cuando haya sido ella medida (esta es la parte invariante en el tiempo)

$$h(t; \tau) = h(t), \forall t.$$

La componente lineal indica que la respuesta del sistema frente a la superposición de diversas señales es la superposición de las respuestas a cada una de las entradas por separado. En forma compacta, si $\mathcal{L}[\cdot]$ indica la respuesta del sistema, entonces

$$\mathcal{L}[\sum_i \alpha_i x_i(t)] = \sum_i \alpha_i \mathcal{L}[x_i(t)].$$

El análisis de sistemas LTI en el dominio de la frecuencia se basa en el teorema de convolución; ello porque la respuesta $y(t)$ de un sistema LTI se puede escribir como la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso del sistema $h(t)$. En el dominio de la frecuencia,

$$Y(f) = X(f)H(f). \quad (5)$$

En general un sistema TI recibirá el nombre de filtro, dada su propiedad de alterar el espectro o de “filtrar” para del contenido de frecuencias de la señal $x(t)$.

3.1. Clasificación de Sistemas LTI

Clasificaremos los sistemas LTI basados en su respuesta en frecuencia.

- Un **filtro pasabajos ideal** es un sistema que elimina las frecuencias mayores a un cierto umbral $|f| > W$, y que deja pasar sin atenuar o amplificar la señal en la banda $[-W, W]$. Matemáticamente se representan como una función del tipo

$$H_{\text{lpf}}(f) = \begin{cases} 1 & -W \leq f \leq W \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

El ancho de banda del filtro es W .

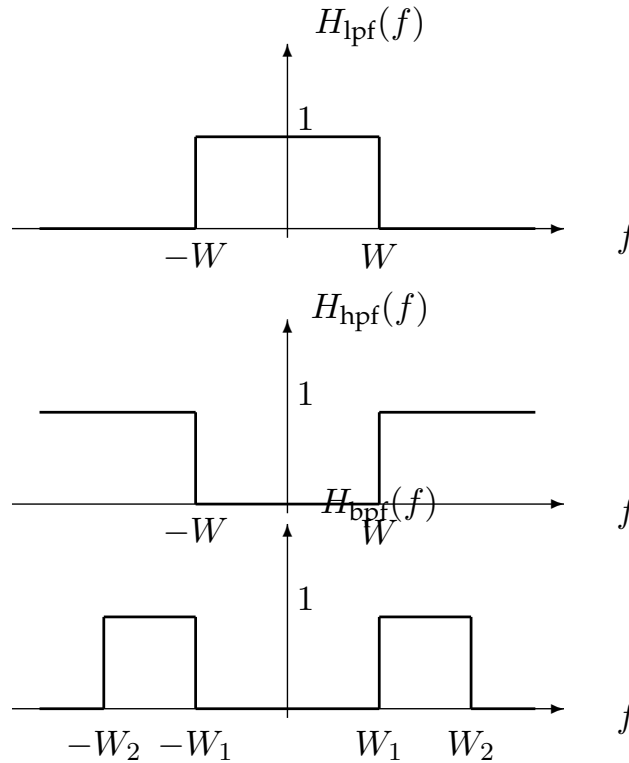
- Un **filtro pasaaltos ideal** es uno que elimina las frecuencias bajo un cierto umbral $|f| < W$, y que deja pasar el resto del contenido de frecuencias. Matemáticamente se representan como una función del tipo

$$H_{\text{hpf}}(f) = \begin{cases} 0 & -W \leq f \leq W \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

El ancho de banda del filtro es infinito.

- Un filtro pasabandas es aquel que deja pasar el contenido de frecuencia en un banda especial del tipo $W_1 \leq |f| \leq W_2$. Su ancho de banda es $W_2 - W_1$ y se expresa matemáticamente como

$$H_{\text{bpf}}(f) = \begin{cases} 0 & W_1 \leq |f| \leq W_2 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$



3.2. Potencia y Energía

La energía E_x de la señal $x(\cdot)$ es:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt.$$

La Potencia P_x de la señal $x(\cdot)$:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt.$$

Diremos que $x(\cdot)$ es *de energía* si $E_x < \infty$ y es *de potencia* si $0 < P_x < \infty$. Estas definiciones implican que una señal $x(\cdot)$ puede ser de energía, de potencia, pero no de ambas, pues si es de energía entonces $P_x = 0$ y si es de potencia entonces $E_x = \infty$. Puede darse la situación donde la señal no sea ni de energía ni de potencia.

Las señales periódicas (no idénticamente nula) son de potencia con:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt.$$

4. Tipos de Señales

4.1. Señales de Energía

Consideremos una señal de energía $x(t)$; definimos su *autocorrelación* $R_x(\cdot)$ como:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= x(\tau) * x^*(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt. \end{aligned}$$

Notar que:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = R_x(0).$$

Además,

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df.$$

La función:

$$\mathcal{G}_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = |X(f)|^2$$

es llamada la *densidad espectral de energía* de la señal $x(\cdot)$. Podemos interpretar que $\mathcal{G}_x(\cdot)$ representa la cantidad de energía por Hertz de ancho de banda presente en la señal en sus distintas componentes de frecuencia.

4.2. Señales de Potencia

Consideremos la señal de potencia $x(t)$; definimos su *autocorrelación* $R_x(\cdot)$ como:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt.$$

En este caso,

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = R_x(0).$$

Luego, definimos la *densidad espectral de potencia* de $x(\cdot)$, $\mathcal{S}_x(\cdot)$, como:

$$\mathcal{S}_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)].$$

Justificación:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_x(f) df.$$

Si la señal de potencia $x(\cdot)$ pasa a través de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(\cdot)$, entonces:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

y

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) y^*(t - \tau) dt,$$

de donde es fácil ver que:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau),$$

y por lo tanto

$$\mathcal{S}_y(f) = \mathcal{S}_x(f) |H(f)|^2,$$

con $H(f)$ la *respuesta en frecuencia* del sistema ($H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$).

4.3. Señales Periódicas

Sea $x(\cdot)$ una señal periódica (y por lo tanto de potencia) de periodo T_0 . Entonces, es fácil ver que:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) x^*(t - \tau) dt.$$

En términos de sus coeficientes de serie de Fourier:

$$R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 e^{j2\pi \frac{n}{T_0} \tau}.$$

De lo anterior se desprende que:

$$\mathcal{S}_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right),$$

y por lo tanto:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2.$$

Si la señal periódica $x(\cdot)$ pasa a través de un sistema LTI con respuesta en frecuencia $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$, entonces la densidad espectral de potencia de la salida $y(\cdot)$ queda dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_y(f) &= |H(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 |H\left(\frac{n}{T_0}\right)|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right),\end{aligned}$$

y por lo tanto el contenido de potencia a la salida es:

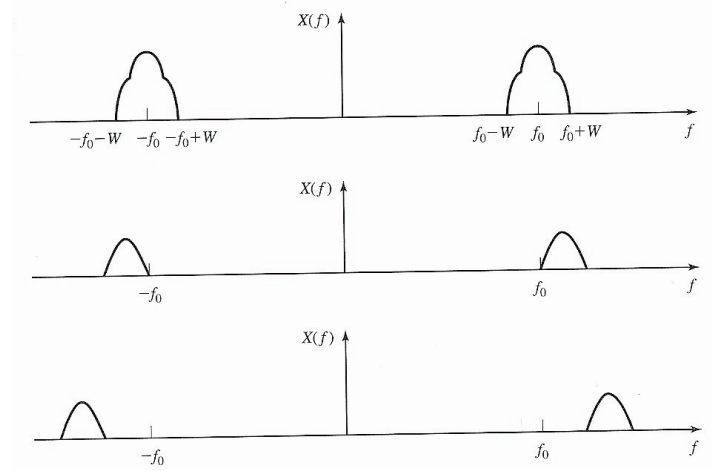
$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 |H\left(\frac{n}{T_0}\right)|^2.$$

4.4. Señales Pasabanda y Pasabajo

Definición 1 Una señal $x(\cdot)$ se dirá pasabanda si su contenido en frecuencia $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ es nulo fuera de una (pequeña) vecindad alrededor de una (alta) frecuencia f_0 , i.e., si $X(f) \equiv 0$ para $|f - f_0| \geq W$ (con $W < f_0$).

Un sistema LTI se dirá pasabanda si su respuesta al impulso $h(\cdot)$ es una señal pasabanda. Si $X(f) \equiv 0$ para $|f| \geq W$, la señal se dirá pasabajo, con la defición análoga para sistemas pasabajo.

La frecuencia f_0 es usualmente referida como la *frecuencia central*, aún cuando no necesariamente corresponde al centro del ancho de banda respectivo.



Consideremos la señal pasabanda $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$, e introduzcamos la señal compleja:

$$\begin{aligned}z(t) &= Ae^{j(2\pi f_0 t + \theta)} \\ &= A \cos(2\pi f_0 t + \theta) + jA \sin(2\pi f_0 t + \theta) \\ &\doteq x(t) + jx_q(t).\end{aligned}$$

La representación en frecuencia de $z(\cdot)$, $Z(f) = \mathcal{F}[z(t)]$, se obtiene “borrando” las frecuencias negativas de $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ y multiplicando las frecuencias positivas por 2, i.e.,

$$Z(f) = 2u_0(f)X(f)$$

con $u_0(a) = 1$ si $a \geq 0$, $u_0(a) = 0$ si no.

Podemos observar también que la señal $x_l(t) = \mathcal{F}^{-1}[Z(f + f_0)]$ entrega entonces una “representación” pasabajo de $x(\cdot)$.

Consideremos ahora una señal pasabanda real, $x(\cdot)$, con contenido en frecuencia $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$. En analogía con el caso anterior, definimos la señal $z(\cdot)$ por:

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1}[2u_0(f)X(f)].$$

La señal $z(\cdot)$ es llamada *preenvolvente compleja* de $x(\cdot)$.

Como:

$$\mathcal{F}[u_0(t)] = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f},$$

y entonces por dualidad:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{j2\pi t}\right] = u_0(f),$$

tenemos:

$$\begin{aligned} z(t) &= \left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right) * x(t) \\ &= x(t) + j\frac{1}{\pi t} * x(t) \\ &\doteq x(t) + j\hat{x}(t), \end{aligned}$$

donde $\hat{x}(\cdot)$ es llamada la *Transformada de Hilbert* de $x(\cdot)$.

La *representación pasabajo* de $x(\cdot)$, $x_l(\cdot)$, es entonces:

$$\begin{aligned} x_l(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X_l(f)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[Z(f + f_0)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[2u_0(f + f_0)X(f + f_0)] \end{aligned}$$

o, directamente en el dominio del tiempo,

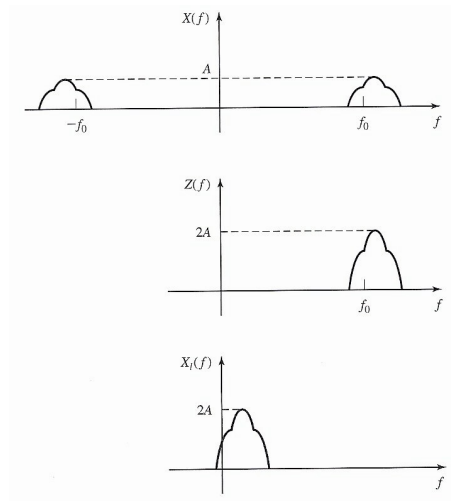
$$x_l(t) = z(t)e^{-j2\pi f_0 t},$$

esto es,

$$z(t) = x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}.$$

Observemos que

$$x(t) = \text{Re}[x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}].$$



La señal $x_l(\cdot)$ es en general compleja:

$$x_l(t) \doteq x_c(t) + jx_s(t),$$

donde las señales pasabaja $x_c(\cdot)$ y $x_s(\cdot)$ son llamadas las *componentes en fase y cuadratura* de $x(\cdot)$, respectivamente. Como:

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = x_l(t)e^{j2\pi f_0 t} = (x_c(t) + jx_s(t))e^{j2\pi f_0 t},$$

es fácil ver que:

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

y

$$\hat{x}(t) = x_c(t) \sin(2\pi f_0 t) + x_s(t) \cos(2\pi f_0 t),$$

relaciones conocidas como *transformación pasabanda a pasabaja*.

5. Tx de Señales Pasabanda en Sistemas Pasabanda

Sea $x(\cdot)$ una señal pasabanda, centrada en f_0 , y asumamos que pasa a través de un sistema LTI pasabanda, con igual frecuencia de centrado f_0 , para generar la salida $y(\cdot)$. Entonces, es fácil ver que la representación pasabaja de la salida queda dada por:

$$Y_l(f) = \frac{1}{2}X_l(f)H_l(f).$$

En el dominio temporal:

$$y_l(t) = \frac{1}{2}x_l(t) * h_l(t).$$

Finalmente:

$$y(t) = \text{Re}[y_l(t)e^{j2\pi f_0 t}].$$

6. Transformada de Hilbert

El estudio de señales pasabajos y pasabanda introduce la noción de Transformada de Hilbert, que denotamos como $\hat{x}(t)$. Esta transformada no involucra un cambio de dominio, a diferencia de las transformadas de Fourier, Laplace y Z. La transformada de Hilbert de una señal $x(t)$ es una señal $\hat{x}(t)$ cuyas componentes de frecuencia tienen un desfase de 90° con respecto a la señal original. Del punto de vista de Fourier, esto implica que debemos reemplazar

$$\begin{aligned} e^{j2\pi f_0 t} &\rightarrow e^{j2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}} = -je^{j2\pi f_0 t} \\ e^{-j2\pi f_0 t} &\rightarrow e^{-j(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2})} = +je^{-j2\pi f_0 t}. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la transformada de Hilbert realiza una labor de filtrado de la señal $x(t)$, esto es:

$$\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = -j\text{sgn}(f)X(f). \quad (6)$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}^{-1}[-j\text{sgn}(f)] = \frac{1}{\pi t}$. De esta forma podemos concluir que la transformada de Hilbert es un filtro de respuesta al impulso $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ y que

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (7)$$

6.1. Propiedades de la Transformada de Hilbert

■ **Paridad.**

- Si $x(t)$ es una función par, entonces $\hat{x}(t)$ es impar.
- Si $x(t)$ es una función impar, entonces $\hat{x}(t)$ es par.

- **Reverso de Señal.** La doble aplicación de la transformada de Hilbert a una señal recupera la señal original pero con el signo cambiado, esto es

$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t).$$

- **Energía.** El contenido de energía de la señal $x(t)$ es igual al de su transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$.
- **Ortogonalidad.** La señal $x(t)$ y su transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ son ortogonales, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = 0.$$