Apéndice A
Convergencia de Series de Fourier*(v1.1)

EL3005 – Señales y Sistemas I

Sea el conjunto de funciones $e_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ definidas como

$$e_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{2\pi jnx} \ , \tag{1}$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

Los coeficientes de Fourier de una función $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ se definen como

$$\mathcal{F}\{f\}[n] \equiv F[n] \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(x) e_n^*(x) dx = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi jnx} dx \ . \tag{2}$$

- **Convergencia para funciones continuas**

Teorema 1. *Sea $f \in C^p([0,1])$, $1 \leqslant p < \infty$. Las sumas parciales $S_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ definidas como*

$$S_n(x) = \sum_{|k| \leqslant n} F[k] e_k(x) \tag{3}$$

convergen a f uniformemente con $n \to \infty$. De hecho se tiene que

$$\|S_n - f\|_\infty \leqslant constante \times n^{-p+\frac{1}{2}} \ . \tag{4}$$

Demostración: Si $f \in C^p[0,1]$ entonces existe $f^{(p)}$ y podemos calcular los coeficientes de su serie de Fourier. Esto es,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f^{(p)}\}[n] &= \int_0^1 f^{(p)}(x) e_n^*(x) dx && (5)\\
&= -\int_0^1 f^{(p-1)}(x) (e_n')^*(x) dx = \ldots = (-1)^p \int_0^1 f(x) (e_n^{(p)})^*(x) dx && (6)\\
&= (2\pi jn)^p \ F[n] \ , && (7)
\end{aligned}$$

donde hemos integrado por partes p veces y luego derivado p veces las funciones base e_n^*.

Luego, para $n \leqslant n' < \infty$ tenemos

$$\begin{aligned}
|S_n - S_{n'}| \leqslant \sum_{|k|>n} |F[k]| &= \sum_{|k|>n} |\mathcal{F}\{f^{(p)}\}[k]| \ |(2\pi k)^p|^{-1} && (8)\\
&\leqslant \left(\sum_{|k|>n} |\mathcal{F}\{f^{(p)}\}[k]|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|k|>n} |2\pi k|^{-2p} \right)^{1/2} && (9)\\
&\leqslant \|f^{(p)}\|_2 \times constante \times n^{-p+\frac{1}{2}} && (10)
\end{aligned}$$

*Basado en *"Fourier series and integrals"*, H. Dym y H.P. McKean, Academic Press, 1972.

La desigualdad en (8) se obtiene por desigualdad triangular y observando que la suma de valores absolutos desde $|n|$ a $|n'|$ es menor que la suma desde $|n|$ a ∞. Luego reemplazamos los coeficientes de Fourier de f para dejarlo en términos de los coeficientes de Fourier de su máxima derivada, $f^{(p)}$. Para obtener (9) usamos la desigualdad de Cauchy–Schwarz y luego usamos la desigualdad de Bessel en el primer término de (9) para hacer aparecer $\|f^{(p)}\|_2$. El segundo término en (9) lo acotamos interpretándolo como una suma de Riemann para una partición uniforme que aproxima inferiormente la integral

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} \leqslant \int_n^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx = constante \times n^{-2p+1} \ . \tag{11}$$

Esto demuestra que S_n converge uniformemente, a la velocidad indicada por el teorema, a “algo”. La pregunta ahora es: **¿a qué converge?**

Para contestar esta pregunta comenzamos reescribiendo las sumas parciales de la serie de Fourier en forma conveniente. Con este objetivo se define la función *kernel de Dirichlet* como

$$\begin{aligned}
D_n(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|k|\leqslant n} e_k(x) && (12)\\
&= \sum_{|k|\leqslant n} e^{2\pi jkx} && (13)\\
&= e^{-2\pi jnx}\, \frac{e^{2\pi j(2n+1)x}-1}{e^{2\pi jx}-1} && (14)\\
&= \frac{\sin\left(\pi(2n+1)x\right)}{\sin\left(\pi x\right)} && (15)
\end{aligned}$$

entendiendo, claro, que en esta última simplificación $D_n(0) = 2n+1$.

Aunque no lo usaremos aquí, es importante observar que el área bajo esta función en un período es 1, pues

$$\int_0^1 D_n(x)dx = \sum_{|k|\leqslant n} \int_0^1 e_k(x)dx = 1 \ . \tag{16}$$

Las sumas parciales $S_n(x)$ se pueden expresar usando el kernel de Dirichlet como

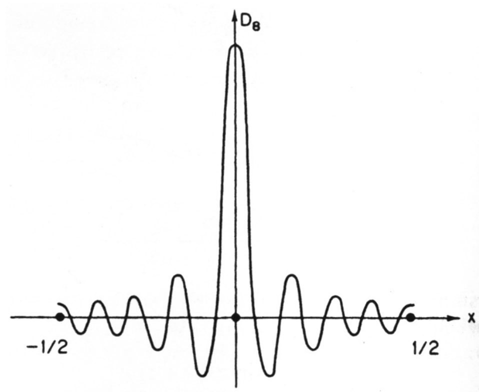
$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{|k|\leqslant n} F[k]e_k(x) && (17)\\
&= \sum_{|k|\leqslant n} e_k(x) \int_0^1 f(y)e_k^*(y)dy && (18)\\
&= \int_0^1 \sum_{|k|\leqslant n} e_k(x-y)f(y)dy && (19)\\
&= \int_0^1 D_n(x-y)f(y)dy && (20)\\
&= \left(D_n *_1 f\right)(x) && (21)
\end{aligned}$$

Y para esta demostración nos resultará más conveniente escribir las sumas parciales como

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \int_0^1 D_n(x-y)f(y)dy && (22)\\
&= \int_{-x}^{1-x} D_n(-y)f(x+y)dy && (23)\\
&= \int_{-1/2}^{1/2} D_n(y)f(x+y)dy \ . && (24)
\end{aligned}$$

Donde primero hemos hecho un cambio de variable y luego observamos que $D_n(-y) = D_n(y)$ y que la función $D_n(y)f(x+y)$ está siendo integrada sobre un intervalo de largo 1. Como $D_n(y)f(x+y)$ es periódica de período igual a 1, podemos cambiar el intervalo de integración de $-1/2$ a $1/2$.

Podemos entender mejor el hecho de si S_n es una buena aproximación de f al ver un gráfico de D_n. En la siguiente figura se muestra D_8. Observamos que al crecer n, el máximo en el origen tiende a ∞. Al mismo



tiempo, las oscilaciones a ambos lados se hacen cada vez más rápidas y, mientras no desaparezcan, esperamos que en promedio se cancelen unas con otras de manera que la contribución significativa a la integral venga de una vecindad pequeña entorno a $y = 0$. La idea entonces es tomar ventaja indirecta de este fenómeno.

Para ver si efectivamente S_n está convergiendo a f, escribimos la diferencia como

$$S_n(x) - f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(f(x+y) - f(x)\right) D_n(y)dy \tag{25}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} Q(x,y)\sin(\pi(2n+1)y)dy \tag{26}$$

con

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x+y)-f(x)}{\sin(\pi y)} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ f'(x)/\pi & \text{si} \quad y = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Si consideramos x fijo en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, como función de $-\frac{1}{2} \leqslant y < \frac{1}{2}$, Q pertenece a $L^2\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y

$$S_n(x) - f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} Q(x,y)\frac{e^{2\pi jny}e^{\pi jy} - e^{-2\pi jny}e^{-\pi jy}}{2j}dy \qquad = \frac{1}{2j}\left\{\mathcal{F}\{Q^+\}[-n] - \mathcal{F}\{Q^-\}[n]\right\} \tag{28}$$

donde $Q^{\pm}(y) = Q(x,y)e^{\pm\pi jy}$. Aplicando nuevamente la desigualdad de Bessel, tenemos que

$$\sum_{|k|\leqslant n} |\mathcal{F}\{Q^{\pm}\}[k]|^2 \leqslant \|Q\|_2^2 < \infty \tag{29}$$

lo que indica que $Q^{\pm}[n] \longrightarrow 0$. Luego, tenemos que $\lim_{n\to\infty} S_n = f$ para $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}$. Tomando $n' \to \infty$ en (8) obtenemos finalmente que $\|S_n - f\|_\infty \leqslant \mathit{constante} \times n^{-p+\frac{1}{2}}$. $\square$

- **Convergencia en $L^2[0,1]$**

  Un hecho que no demostraremos aquí es que el conjunto de funciones $f \in C^1[0,1]$ es denso en $L^2[0,1]$. Esto quiere decir que toda función $f \in L^2[0,1]$ ya sea pertenece a $C^1[0,1]$, o bien, es el límite de una sucesión en $C^1[0,1]$. Como consecuencia de esto se puede llegar a que el conjunto de funciones $e_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ definidas como

$$e_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{2\pi jnx}\ , \tag{30}$$

  con $n \in \mathbb{Z}$, forma una *base ortonormal* de $L^2[0,1]$.

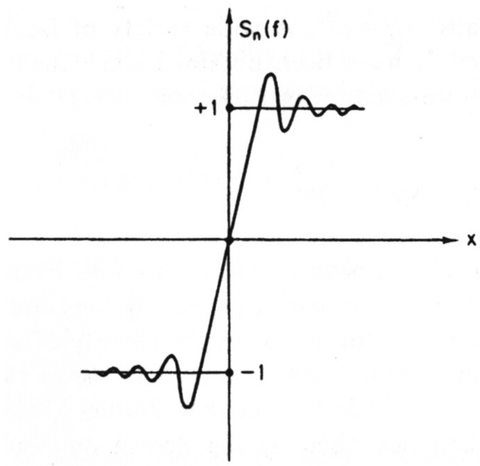
- **Convergencia para funciones discontinuas – Fenómeno de Gibbs**

Teorema 2. *Para la función*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -\frac{1}{2} \leqslant x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{31}$$

las aproximaciones parciales de su serie de Fourier, $S_n(x)$, presentan un sobresalto en la proximidad de $x = 0$ que no desaparece al crecer n (ver figura) y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \max S_n = 1.089490... \tag{32}$$



Demostración: Comenzamos escribiendo las sumas parciales S_n de forma conveniente usando el kernel de Dirichlet y luego desarrollamos. Esto es,

$$S_n(x) = D_n(x) *_1 f(x) \tag{33}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} D_n(x-y)f(y)dy = -\int_{-1/2}^{0} D_n(y-x)dy + \int_{0}^{1/2} D_n(y-x)dy \tag{34}$$

$$= -\int_{-x-1/2}^{-x} D_n(y)dy + \int_{-x}^{-x+1/2} D_n(y)dy \tag{35}$$

$$= -\int_{x}^{x+1/2} D_n(y)dy + \int_{-x}^{x} D_n(y)dy + \int_{x}^{-x+1/2} D_n(y)dy \tag{36}$$

$$= \int_{-x}^{x} D_n(y)dy - \int_{-x+1/2}^{x+1/2} D_n(y)dy \ . \tag{37}$$

Primero observamos que la segunda integral converge a 0 con $n \to \infty$. Tomemos, por ejemplo, $|x| \leqslant 1/4$. Luego, integrando por partes tenemos que

$$\int_{-x+1/2}^{x+1/2} D_n(y)dy = \int_{-x+1/2}^{x+1/2} \frac{\sin(\pi(2n+1)y)}{\sin(\pi y)} dy \tag{38}$$

$$= -\frac{1}{\pi(2n+1)} \int_{-x+1/2}^{x+1/2} \frac{d}{dy}\left(\cos(\pi(2n+1)y)\right) \frac{dy}{\sin(\pi y)} \tag{39}$$

$$= -\frac{1}{\pi(2n+1)} \left.\frac{\cos(\pi(2n+1)y)}{\sin(\pi y)}\right|_{-x+1/2}^{x+1/2} - \frac{1}{\pi(2n+1)} \int_{-x+1/2}^{x+1/2} \cos(\pi(2n+1)y) \frac{\cos(\pi y)}{\sin^2(\pi y)} dy \ . \tag{40}$$

Luego

$$\left| S_n - \int_{-x}^{x} D_n \right| = \left| \int_{-x+1/2}^{x+1/2} D_n \right| \leqslant constante \times n^{-1} \tag{41}$$

Entonces, podemos reemplazar S_n por $\int_{-x}^{x} D_n$ para estimar el sobresalto. La idea nuevamente es reemplazar esta integral por una expresión más conveniente de manejar. Observemos entonces que

$$\int_{-x}^{x} D_n(y)dy - \int_{-x}^{x} \frac{\sin(\pi(2n+1)y)}{\pi y} dy = \int_{-x}^{x} \underbrace{\left(\frac{1}{\sin(\pi y)} - \frac{1}{\pi y} \right)}_{\in C^1[-1/2,1/2)} \sin(\pi(2n+1)y)dy \ . \tag{42}$$

Al igual que en la expresión anterior, si integramos por partes nos queda que esta expresión también está acotada por un múltiplo de n^{-1}. Esto nos permite ahora reemplazar S_n por

$$\int_{-x}^{x} \frac{\sin(\pi(2n+1)y)}{\pi y} dy = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi(2n+1)y} \frac{\sin y}{y} dy \tag{43}$$

Derivando con respecto a x e igualando a 0, encontramos que esta expresión alcanza un máximo en la primera raíz de $\sin(\pi(2n+1)x) = 0$, esto es, en $x = 1/(2n+1)$. El sobresalto queda determinado por este máximo y obtenemos finalmente que

$$\text{Sobresalto} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = 1.089490\ldots \tag{44}$$

$\square$