Pauta Examen

EL3005 – Señales y Sistemas I

1. (a) Por Parseval se tiene que

$$\langle \phi_n(t), \phi_m(t) \rangle = \tfrac{1}{2\pi} \langle \Phi_n(\omega), \Phi_m(\omega) \rangle \ . \tag{1}$$

Y a partir de

$$y(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leqslant W \\ 0 & \text{si } |\omega| > W \end{cases} \tag{2}$$

tenemos que

$$\Phi_n(\omega) = \begin{cases} \sqrt{T_s} e^{-j\omega n T_s} & \text{si } |\omega| \leqslant f_s\pi \\ 0 & \text{si } |\omega| > f_s\pi \end{cases} \ . \tag{3}$$

Luego

$$\langle \phi_n(t), \phi_m(t) \rangle = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-f_s\pi}^{f_s\pi} e^{j\omega(n-m)T_s} d\omega \tag{4}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ \frac{T_s}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega(n-m)T_s}}{j(n-m)T_s} \right]_{-f_s\pi}^{f_s\pi} = \frac{1}{2\pi j(n-m)} \left((-1)^{n-m} - (-1)^{n-m} \right) = 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \tag{5}$$

y se concluye así que $\{\phi_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto ortonormal.

(b) Desarrollando el producto interno obtenemos

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \langle \phi_n(t), x(t) \rangle \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{T_s}} \langle \Phi_n(\omega), X(\omega) \rangle \quad \text{(Parseval)} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-f_s\pi}^{f_s\pi} e^{j\omega n T_s} X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega(nT_s)} d\omega \tag{8}$$

donde en el último paso podemos extender los límites de la integral debido a que $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > f_s\pi$. La última expresión corresponde a una CTFT inversa por lo que obtenemos finalmente

$$c_n = x(nT_s) \ . \tag{9}$$

---

2. (a) Desarrollando la DTFT que aparece en la expresión obtenemos

$$F\left(\frac{2\pi k}{L}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]\, e^{-j\frac{2\pi k}{L} l} \tag{10}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{L-1} f[n - mL]\ \underbrace{e^{-j\frac{2\pi k}{L}(n+mL)}}_{e^{-j\frac{2\pi k}{L} n}} = DFT_L \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n - mL] \right\} \ . \tag{11}$$

Aplicando la DFT_L inversa en ambos lados obtenemos

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n - mL] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} F\left(\frac{2\pi k}{L}\right) e^{j\frac{2\pi k}{L} n} \ .$$

(b) No podemos aplicar linealidad de la DTFT sobre la suma de infinitas funciones impulso pues la serie no converge. Luego, sabemos que la DTFT de $f[n] = \delta[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, viene dada por $F(\Omega) = 1$. A partir de esto y aplicando el resultado anterior tenemos que

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mL] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} e^{j\frac{2\pi k}{L}n} . \tag{12}$$

Ahora sí podemos aplicar la DTFT en ambos lados y usando linealidad sobre la suma (ya no es una serie) obtenemos

$$G(\Omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{L} n\right) \tag{13}$$

para $-\pi < \Omega \leqslant \pi$ y se repite periódicamente a intervalos de largo 2π.

Si comparamos la suma de funciones impulso en $g[n]$ y $G(\Omega)$ observamos que al aumentar L la distancia entre los impulsos en el tiempo **crece** y la distancia entre los impulsos en frecuencia **decrece**. Esto es consistente con el principio de incertidumbre de Heisenberg pues al crecer la dispersión de la función en el tiempo, decrece la dispersión de la función en frecuencia.

---

3. (a) Desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned} m_Y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] E\left[X[n-k,\xi]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] m_X[n-k] & (14) \\ &= h[n] \circledast m_X[n] , & (15) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m_Z[n] &= E\left[Y[n,\xi]\right] + E\left[W[n,\xi]\right] = m_Y[n] & (16) \\ &= h[n] \circledast m_X[n] . & (17) \end{aligned}$$

(b) Desarrollando y usando el resultado de la parte (a) obtenemos

$$\begin{aligned} C_{XY}[n, n+l] &= E\left[(X[n,\xi] - m_X[n])(Y[n+l,\xi] - m_Y[n+l])^*\right] & (18) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \underbrace{E\left[(X[n,\xi] - m_X[n])(X[n+l-k,\xi] - m_X[n+l-k])^*\right]}_{=C_{XX}[n,n+l-k]=C_{XX}[l-k]} . & (19) \end{aligned}$$

Vemos que $C_{XY}[n, n+l]$ depende solo de l de manera que

$$C_{XY}[l] = h[l] \circledast C_{XX}[l] . \tag{20}$$

(c) Desarrollando y usando el resultado de la parte (a) obtenemos

$$\begin{aligned} C_{YY}[n, n+l] &= E\left[(Y[n,\xi] - m_Y[n])(Y[n+l,\xi] - m_Y[n+l])^*\right] & (21) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \underbrace{E\left[(X[n-k,\xi] - m_X[n-k])(Y[n+l,\xi] - m_Y[n+l])^*\right]}_{=C_{XY}[n-k,n+l]=C_{XY}[l+k]} & (22) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[-i] C_{XY}[l-i] \quad (\text{con } i = -k) & (23) \\ &= h[-l] \circledast C_{XY}[l] . & (24) \end{aligned}$$

Observamos que $C_{YY}[n, n+l]$ es solo función de l. Usando el resultado de la parte (b) obtenemos finalmente

$$C_{YY}[l] = h[-l] \circledast h[l] \circledast C_{XX}[l] . \tag{25}$$

(d) Desarrollando y usando las propiedades del ruido blanco obtenemos

$$
\begin{aligned}
C_{ZZ}[n,n+l] =& E\left[(Y[n,\xi]-m_Y[n]+W[n,\xi])(Y[n+l,\xi]-m_Y[n+l]+W[n+l,\xi])^*\right] &(26)\\
=& \underbrace{E\left[(Y[n,\xi]-m_Y[n])(Y[n+l,\xi]-m_Y[n+l])^*\right]}_{C_{YY}[l]} + \underbrace{E\left[(Y[n,\xi]-m_Y[n])W^*[n+l,\xi]\right]}_{0}\\
&+ \underbrace{E\left[W[n,\xi](Y[n+l,\xi]-m_Y[n+l])^*\right]}_{0} + \underbrace{E\left[W[n,\xi]W^*[n+l,\xi]\right]}_{\sigma^2\delta[l]} \; . &(27)
\end{aligned}
$$

Observamos que $C_{ZZ}[n,n+l]$ es solo función de l. Usando el resultado de la parte (c) obtenemos finalmente

$$
C_{ZZ}[l] = h[-l] \circledast h[l] \circledast C_{XX}[l] + \sigma^2\delta[l] \; . \tag{28}
$$

(e) Ambos procesos, $X[n,\xi]-m_X[n]$ y $Z[n,\xi]-m_Z[n]$, tienen valor esperado igual a cero. Sus matrices de auto–correlación vienen dadas por $C_{XX}[n,n+l]$ y $C_{ZZ}[n,n+l]$, respectivamente, y en ambos casos son solo función de l. Ambos procesos cumplen con las condiciones de procesos estacionarios en el sentido amplio.

(f) Se tiene que $C_{XX}[l]$ es la matriz de auto–correlación de $X[n,\xi]-m_X[n]$. Luego, su densidad espectral de potencia viene dada por $S_{XX}(\Omega) = DTFT\left\{C_{XX}[l]\right\}$. De la misma forma $S_{ZZ}(\Omega) = DTFT\left\{C_{ZZ}[l]\right\}$. Usando el resultado de la parte (d), y observando que

$$
DTFT\left\{h[-n]\right\} = H(-\Omega) = H^*(\Omega) \; , \tag{29}
$$

pues $h[n] \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
S_{ZZ}(\Omega) &= H^*(\Omega)\, H(\Omega)\, S_{XX}(\Omega) + \sigma^2 &(30)\\
&= |H(\Omega)|^2\, S_{XX}(\Omega) + \sigma^2 \; . &(31)
\end{aligned}
$$