

Examen

EL3005 – Señales y Sistemas I

Fecha: 6 de Diciembre de 2010

1. Sea $f_s = 1/T_s$ una constante real y positiva conocida. Considere la familia de funciones

$$\phi_n(t) = \sqrt{T_s} \frac{\sin(f_s \pi(t - nT_s))}{\pi(t - nT_s)}$$

con $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

- (a) Demuestre que el conjunto de funciones $\{\phi_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal.
- (b) Se tiene una señal $x(t)$, y su CTFT, $X(\omega)$, tal que $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > f_s \pi$. Encuentre una expresión cerrada (sin sumas ni integrales) para los coeficientes

$$c_n = \sqrt{f_s} \langle \phi_n(t), x(t) \rangle .$$

2. Sea una señal $f[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, y su DTFT dada por $F(\Omega)$.

- (a) Demuestre la siguiente identidad

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n - mL] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} F\left(\frac{2\pi k}{L}\right) e^{j\frac{2\pi k}{L}n} ,$$

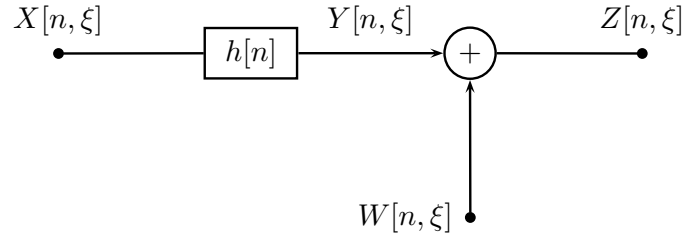
con L entero y positivo.

- (b) Utilizando la propiedad anterior calcule la DTFT de la señal *tren de pulsos*

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mL] .$$

Compare el efecto en tiempo, $g[n]$, y frecuencia, $G(\Omega)$, al aumentar L .

3. Considere el siguiente sistema:



En esta figura $X[n, \xi] \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, es un proceso estocástico para el cual se conocen

$$m_X[n] = E[X[n, \xi]] \quad \text{y} \\ C_{XX}[i, j] = E[(X[i, \xi] - m_X[i])(X[j, \xi] - m_X[j])^*] .$$

Se sabe además que $C_{XX}[i, j] = C_{XX}[j - i]$.

Sobre el sistema LTI se conoce su respuesta al impulso $h[n] \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Con respecto a $W[n, \xi] \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, se sabe que corresponde a un ruido blanco estacionario. Específicamente, cada una de las muestras de $W[n, \xi]$ sigue una distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y éstas son independientes entre sí y con todo el resto de las señales en la figura.

Obtenga expresiones simplificadas, en función de estadísticas conocidas y $h[n]$, para

- (a) $m_Y[n] = E[Y[n, \xi]]$ y $m_Z[n] = E[Z[n, \xi]]$,
- (b) $C_{XY}[n, n + l]$,
- (c) $C_{YY}[n, n + l]$, y
- (d) $C_{ZZ}[n, n + l]$.
- (e) Demuestre que los procesos estocásticos $X[n, \xi] - m_X[n]$ y $Z[n, \xi] - m_Z[n]$ son estacionarios en el sentido amplio (WSS).
- (f) Obtenga una expresión simplificada para la densidad espectral de potencia de $Z[n, \xi] - m_Z[n]$, $S_{ZZ}(\Omega)$, en función de la densidad espectral de potencia de $X[n, \xi] - m_X[n]$, $S_{XX}(\Omega)$, y $H(\Omega) = DTFT\{h[n]\}$.

Serie de Fourier, $t \in [-T/2, T/2]$

$$F[n] = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k] e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

Teorema de Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1^*(t) x_2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1^*[k] X_2[k]$$

donde $X_1[n] = \mathcal{F}\{x_1(t)\}$ y $X_2[n] = \mathcal{F}\{x_2(t)\}$.

Transformada CTFT, $t \in \mathbb{R}$

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Lineal	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
Desplazamiento Temporal	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión Temporal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
Multiplicación	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Derivada Temporal	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Derivada en Frecuencia	$t x(t)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integral	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Escalamiento	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X(\frac{\omega}{a})$
Dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Simetría	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
	$x(t)$ real y par	$X(\omega)$ real y par
	$x(t)$ real e impar	$X(\omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t) x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(\omega) X_2(\omega) d\omega$	
Principio de Incertidumbre	Si $\int_{-\infty}^{\infty} t x(t) ^2 dt = 0$ entonces	
	$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t) ^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 X(\omega) ^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2} \ x\ ^4$	
	y la igualdad se da si y solo si $x(t) = a \exp(- b t^2)$, $a \in \mathbb{R}$	

Transformada DTFT, $n \in \mathbb{Z}$

$$H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \quad h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x[n]$	$X(\Omega)$
	$x_1[n]$	$X_1(\Omega)$
	$x_2[n]$	$X_2(\Omega)$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$
Desplazamiento Temporal	$x[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Inversión Temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Convolución	$x_1[n] \otimes x_2[n]$	$X_1(\Omega)X_2(\Omega)$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\Omega - \lambda) d\lambda$
Modulación	$x[n] \cos(\Omega_0 n)$	$\frac{1}{2}X(\Omega + \Omega_0) + \frac{1}{2}X(\Omega - \Omega_0)$
Diferenciación Temporal	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
Derivada en Frecuencia	$nx[n]$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Simetría	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$
	$x[n]$ real y par	$X(\Omega)$ real y par
	$x[n]$ real e impar	$X(\Omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1^*[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1^*(\Omega)X_2(\Omega) d\Omega$	

Transformada DFT, $n \in [0, \dots, N - 1]$

$$H[k] = DFT_N\{h[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad h[n] = IDFT_N\{H[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x[n]$	$X[k]$
	$x_1[n]$	$X_1[k]$
	$x_2[n]$	$X_2[k]$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
Desplazamiento Temporal	$x[(n - l)_N]$	$X[k]e^{-j2\pi kl/N}$
Desplazamiento en Frecuencia	$x[n]e^{j2\pi ln/N}$	$X[(k - l)_N]$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*[N - 1 - k]$
Inversión Temporal	$x[N - 1 - n]$	$X[N - 1 - k]$
Convolución	$x_1[n] \otimes_N x_2[n]$	$X_1[k]X_2[k]$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} X_1[k] \otimes_N X_2[k]$
Simetría	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X[k] = X^*[N - k]$
	$x[n]$ real y par	$X[k]$ real y par
	$x[n]$ real e impar	$X[k]$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]x_2^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]X_2^*[k]$	