Control 3

EL3005 – Señales y Sistemas I

Fecha: 12 de Noviembre de 2010

1. (a) Un sistema de *sobre–muestreo* es un sistema que toma una señal de entrada $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, y entrega

$$\hat{x}_L[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-kL]\ , \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ con } L \text{ entero y positivo.}$$

Encuentre una expresión para la DTFT de la salida, $\hat{X}_L(\Omega)$, en función de la DTFT de la entrada, $X(\Omega)$. En base al resultado obtenido, indique por qué un sistema de sobre–muestreo **no** es LTI.

(b) Considere una señal en tiempo continuo $x_a(t)$, $t \in \mathbb{R}$. La señal discreta definida como

$$x[n] = x_a(nT_s)\ , \qquad n \in \mathbb{Z}\ ,$$

se obtiene muestreando la señal continua a una tasa $f_s = 1/T_s$ que se encuentra en el límite del teorema del muestreo. Como las muestras $x[n]$ contienen toda la información sobre $x_a(t)$, debe ser posible diseñar un sistema que a partir de $x[n]$ genere la señal discreta de mayor resolución

$$y_L[n] = x_a\left(\frac{nT_s}{L}\right)\ , \quad n \in \mathbb{Z}\ , \text{ con } L \text{ entero y positivo.}$$

Demuestre que $y_L[n] = \hat{x}_L[n] \circledast h[n]$ y encuentre la forma explícita de $h[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, y de su DTFT, $H(\Omega)$.

(c) Considere una señal continua $x_a(t)$ con CTFT dada por

$$X_a(\omega) = \begin{cases} 1 + T_s\,\omega/\pi & -\pi f_s \leqslant \omega \leqslant 0 \\ 1 - T_s\,\omega/\pi & 0 \leqslant \omega \leqslant \pi f_s \\ 0 & \omega \notin [-\pi f_s, \pi f_s] \end{cases} .$$

Grafique en detalle: $X(\Omega)$, $\hat{X}_L(\Omega)$ e $Y_L(\Omega)$, para $-\pi \leqslant \Omega \leqslant \pi$ y $L = 4$.

---

2. (a) Considere un sistema LTI con respuesta al impulso finita (FIR), real, de largo M impar y tal que

$$h[n] = h[M-1-n]\ , \qquad n = 0, \ldots, \tfrac{M-1}{2}\ ,$$

Demuestre que el sistema tiene una respuesta lineal en la fase (ignore efectos no–lineales en la banda de detención). Indique cuál es la magnitud del desfase entre la entrada y la salida filtrada.

(b) En el diseño de un filtro FIR se requiere cumplir las especificaciones sobre la amplitud de su DTFT:

$$\left| H\left(\frac{2\pi k}{M}\right)\right| = A[k]\ , \qquad k = 0, \ldots, M-1\ .$$

Demuestre que, para que el filtro FIR tenga coeficientes reales se debe cumplir

$$A[M-k] = A[k]\ , \qquad k = 1, \ldots, \tfrac{M-1}{2}\ .$$

(c) Encuentre los coeficientes del filtro FIR, $h[n]$, $n = 0, \ldots, M-1$, de largo M impar, coeficientes reales, y simétrico, en función de las amplitudes $A[k]$, $k = 0, \ldots, \frac{M-1}{2}$. Todos los términos en el resultado final deben ser reales.

Teorema del Muestreo

Una señal $x_a(t)$, $t \in \mathbb{R}$, que no contenga frecuencias mayores a W, queda completamente determinada por $x[n] = x_a(nT_s)$, $n \in \mathbb{Z}$, si se cumple que $f_s = \frac{1}{T_s} \geqslant 2W$. En el dominio de la frecuencia se tiene que $X(\Omega) = f_s\, X_a(f_s\, \Omega)$, en $-\pi \leqslant \Omega \leqslant \pi$. En el dominio del tiempo se tiene que

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h_{PB}(t - kT_s)\ ,$$

con

$$h_{PB}(t) = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} \qquad \xrightarrow{CTFT} \qquad H_{PB}(\omega) = \begin{cases} T_s & \omega \in [-\pi f_s, \pi f_s] \\ 0 & \omega \notin [-\pi f_s, \pi f_s] \end{cases} \ .$$

Transformada DTFT, $n \in \mathbb{Z}$

$$H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \qquad h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x[n]$	$X(\Omega)$
	$x_1[n]$	$X_1(\Omega)$
	$x_2[n]$	$X_2(\Omega)$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$
Desplazamiento Temporal	$x[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Inversión Temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Convolución	$x_1[n] \circledast x_2[n]$	$X_1(\Omega) X_2(\Omega)$
Multiplicación	$x_1[n] x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) X_2(\Omega - \lambda) d\lambda$
Modulación	$x[n]\cos(\Omega_0 n)$	$\frac{1}{2}X(\Omega + \Omega_0) + \frac{1}{2}X(\Omega - \Omega_0)$
Diferenciación Temporal	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega)$
Derivada en Frecuencia	$nx[n]$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X(\Omega)$
		$+\pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
Simetría	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$
	$x[n]$ real y par	$X(\Omega)$ real y par
	$x[n]$ real e impar	$X(\Omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1^*[n] x_2[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1^*(\Omega) X_2(\Omega) d\Omega$	

Transformada DFT, $n \in [0, \ldots, N-1]$

$$H[k] = DFT_N\{h[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad h[n] = IDFT_N\{H[k]\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$