Control 2

EL3005 – Señales y Sistemas I

Fecha: 22 de Octubre de 2010

1. Considere el siguiente conjunto de funciones de $[-\pi, \pi]$ en $\mathbb{R}$:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\} , \quad n = 1, 2, \ldots$$

   (a) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier para las funciones en B.

   (b) Demuestre que las funciones en B son ortonormales en $L_2([-\pi, \pi])$.

   (c) Demuestre que B forma una base del espacio de funciones reales en $L_2([-\pi, \pi])$.
   Pista: Puede asumir conocida la propiedad de base asociada a la serie de Fourier.

---

2. Sea una señal $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, y su CTFT dada por $F(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

   (a) Demuestre la siguiente identidad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi k}{T}\right) e^{j\frac{2\pi k}{T}t} .$$

   (b) Utilizando la propiedad anterior calcule la CTFT de la señal *tren de pulsos*

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) .$$

   Compare el efecto en tiempo, $g(t)$, y frecuencia, $G(\omega)$, al aumentar y disminuir T.

---

3. Sea una función $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, y su CTFT dada por $\Psi(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Considere el conjunto de funciones

$$\psi^{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) ,$$

con $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}$.

   (a) Encuentre una expresión para la proyección de una señal $f(t)$ sobre este conjunto de funciones

$$\widetilde{f}(a, b) = \left\langle f, \psi^{a,b} \right\rangle$$

   en función de las CTFTs $F(\omega)$ y $\Psi(\omega)$.

   (b) Demuestre que para dos señales, $f(t)$ y $g(t)$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(a, b)\, \widetilde{g}^*(a, b)\, a^{-2} da\, db = C_\psi \langle f, g \rangle$$

   y encuentre una expresión para la constante C_ψ en función de $\Psi(\omega)$.
   Pista: Considere el lado izquierdo de esta identidad. Para comenzar, reemplace $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ usando la expresión obtenida en (3a) y reconozca dos CTFTs en que b aparezca como la frecuencia.

   (c) Demuestre que si $\psi(t)$ es tal que $C_\psi < \infty$, entonces la señal $f(t)$ se puede recuperar a partir de sus proyecciones sobre el conjunto $\psi^{a,b}$ mediante la siguiente expresión

$$f(t) = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(a, b)\, \psi^{a,b}(t)\, a^{-2} da\, db$$

   Pista: Utilice (3b) escogiendo una señal $g(t)$ apropiada para obtener el resultado.

Serie de Fourier, $t \in [-T/2, T/2]$

$$F[n] = \mathcal{F}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \qquad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F[n]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k]\, e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

Teorema de Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_1^*(t)\, x_2(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1^*[k]\, X_2[k]$$

donde $X_1[n] = \mathcal{F}\{x_1(t)\}$ y $X_2[n] = \mathcal{F}\{x_2(t)\}$.

Transformada CTFT, $t \in \mathbb{R}$

$$H(\omega) = \mathcal{F}\left\{h(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{H(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Lineal	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
Desplazamiento Temporal	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión Temporal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Derivada Temporal	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Derivada en Frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integral	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Escalamiento	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{\omega}{a})$
Dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Simetría	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
	$x(t)$ real y par	$X(\omega)$ real y par
	$x(t)$ real e impar	$X(\omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(\omega)X_2(\omega)d\omega$	
Principio de Incertidumbre	Si $\int_{-\infty}^{\infty} t\lvert x(t)\rvert^2 dt = 0$ entonces	
	$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\lvert x(t)\rvert^2 dt\ \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega \geqslant \frac{\pi}{2}\lVert x\rVert^4$	
	y la igualdad se da si y solo si $x(t) = a\exp\left(-\lvert b\rvert t^2\right)$, $a \in \mathbb{R}$	