Control 1

EL3005 – Señales y Sistemas I

Fecha: 24 de Septiembre de 2010

1. Determine la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones concercientes a sistemas LTI. Fundamente todas sus respuestas:

   (a) Si $h(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema LTI y $h(t)$ es periódica y diferente de cero, el sistema es inestable.

   (b) El inverso de un sistema LTI causal es siempre causal.

   (c) Si $|h[n]| \leq K$ para cada n, donde K es un número dado, entonces el sistema LTI cuya respuesta al impulso sea $h[n]$ será estable.

   (d) Si un sistema LTI discreto tiene una respuesta al impulso $h[n]$ acotada y de duración finita, el sistema es estable.

   (e) Si un sistema LTI es causal, es estable.

   (f) La conexión en cascada de un sistema LTI no causal con uno causal es necesariamente no causal.

   (g) Un sistema LTI continuo es estable si y sólo si su respuesta al escalón $s(t)$ es absolutamente integrable; esto es, si y sólo si

   $$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

   (h) Un sistema LTI discreto es causal si y sólo si su respuesta al escalón $s[n]$ es cero para $n < 0$.

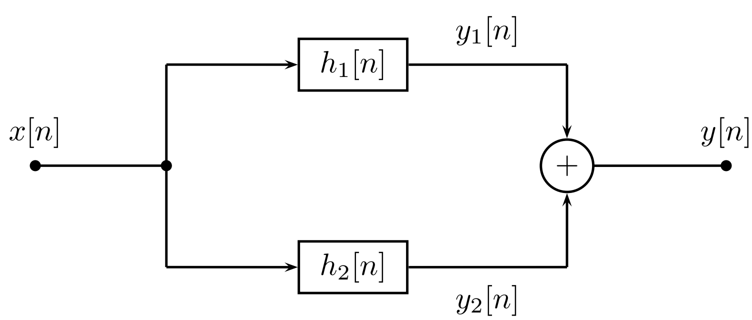
2. Considere un sistema LTI <u>causal</u> descrito por la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[n] = 0.25j\ y[n-2] + x[n] - j\ x[n-2]$$

(a) Encuentre la función de transferencia del sistema, $H(z)$, y dibuje su correspondiente gráfico de polos y ceros. **(1/7 pts.)**

(b) Grafique la magnitud de la DTFT de la respuesta al impulso de este sistema, $|H(\Omega)|$, en el rango $-\pi < \Omega < \pi$. Señale en particular las frecuencias en que $|H(\Omega)|$ alcanza sus valores mínimos y máximos, e indique sus valores en frecuencia y magnitud. **(1/7 pts.)**

(c) Considere ahora implementar la ecuación de diferencias de segundo orden con dos sistemas de primer orden (con sólo un polo cada uno) conectados en paralelo como se muestra en la siguiente figura



Las respuestas al impulso de cada sistema de primer orden, $h_1[n]$ y $h_2[n]$, se describen por las siguientes ecuaciones de diferencias

$$h_1 : \quad y_1[n] = a_{11}\ y_1[n-1] + \tfrac{1}{2}x[n] + b_{11}\ x[n-1]$$
$$h_2 : \quad y_2[n] = a_{12}\ y_2[n-1] + b_{02}\ x[n] + b_{12}\ x[n-1]$$

Determine el valor numérico de cada constante a_{1i}, b_{02} y b_{1i}. **(2/7 pts.)**

(d) Para <u>cada uno</u> de los dos sistemas de primer orden:

i. Grafique el diagrama de polos y ceros. **(1/7 pts.)**

ii. Determine y dibuje la región de convergencia de $H_i(z)$. **(1/7 pts.)**

iii. Bosqueje la magnitud de la DTFT de $h_i[n]$ en el intervalo $-\pi < \Omega < \pi$.
Incluya el mayor nivel de detalle posible. **(1/7 pts.)**

3. Considere un sistema LTI causal descrito por la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[n] = -\sqrt{2}\, y[n-1] - y[n-2] + x[n] - \sqrt{2}\, x[n-1] + x[n-2]$$

(a) Encuentre la función de transferencia del sistema $H(z)$ y dibuje el diagrama de polos y ceros. correspondiente.

(b) ¿Es el sistema BIBO estable? Justifique matemáticamente su respuesta.

(c) Encuentre una entrada acotada $x[n]$ que produzca una salida no acotada en este sistema.

(d) Encuentre la respuesta del sistema a la señal de entrada $x[n] = \delta[n-3]$.
Simplifique su respuesta y note en particular que esta debe ser real.

(e) Bosqueje la magnitud de la DTFT de $h[n]$, $|H(\Omega)|$, en el intervalo $-\pi < \Omega < \pi$.
Señale en particular las frecuencias en que $|H(\Omega)|$ alcanza sus valores mínimos y máximos, e indique sus valores en frecuencia y magnitud.

(f) Considere la entrada

$$x[n] = 1 + 2 \cdot (-j)^n - 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} (1+j)^n + 4 \cdot (-1)^n$$

Determine una expresión cerrada, sin sumatorias, para la salida correspondiente $y[n]$.

Propiedades de la transformada Z:

$$Z\left\{h[n]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \qquad Z^{-1}\left\{H(z)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C H(z)z^{n-1}dz$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio z	ROC
Notación	$x[n]$	$X(z)$	$ROC:\ r_a < \|z\| < r_b$
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	$ROC_1:\ r_{1a} < \|z\| < r_{1b}$
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	$ROC_2:\ r_{2a} < \|z\| < r_{2b}$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	al menos $ROC_1 \cap ROC_2$
Desplazamiento Temporal	$x[n-k]$	$z^{-k}X(z)$	ROC, excepto $z = 0$ si $k > 0$ y $z = \infty$ si $k < 0$
Escalado en dominio z	$a^n x[n]$	$X(z/a)$	$\|a\|r_a < \|z\| < \|a\|r_b$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	ROC
Inversión Temporal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_b} < \|z\| < \frac{1}{r_a}$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	al menos $ROC_1 \cap ROC_2$
Derivada en dominio z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_a < \|z\| < r_b$
Parte real	$Re\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}\left[X(z) + X^*(z^*)\right]$	Incluye ROC
Parte imaginaria	$Im\{x[n]\}$	$\frac{j}{2}\left[X(z) - X^*(z^*)\right]$	Incluye ROC
Teorema del valor inicial	Si $x[n]$ es causal entonces $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$		
Teorema del valor final	Si los polos de $(1-z^{-1})X(z)$ están dentro del círculo unitario entonces $x[\infty] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$		