Pauta P2T3

a)

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at} \cdot u(t) \qquad a>0$$

Si se toma la transformada de Fourier para $n=1$ y $n=2$ se tiene que

$$n=1 \rightarrow \quad x_1(t) = e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$n=2 \rightarrow \quad x_2(t) = t \cdot e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2}.$$

Asumiendo que se cumple para $n=m$:

$$x_m(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot e^{-at} \cdot u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_m = \frac{1}{(a+j\omega)^m}$$

se demuestra para $n=m+1$

$$x_{m+1}(t) = \frac{t^m}{m!} e^{-at} u(t)$$

$$= \frac{t \cdot t^{m-1}}{m \cdot (m-1)!} \cdot e^{-at} \cdot u(t)$$

$$= \frac{t}{m} \cdot x_m(t)$$

$\mathcal{F}\{\cdot\}$

$$\rightarrow \quad X_{m+1}(j\omega) = \frac{1}{m} \cdot j \frac{dX_m(j\omega)}{d\omega}$$

$$= \frac{1}{\cancel{m}} \cdot \cancel{j} \cdot (+\cancel{m} \cdot (a+j\omega)^{-m-1} \cdot \cancel{j})$$

$$= \frac{1}{(a+j\omega)^{m+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{(a+j\omega)^n}$$

b)

Primero la transformada de $\cos(t)$

$$x(t) = \cos(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \pi\left[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\right]$$

- $h_1(t) = u(t)$

$$h_1(t) = u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Y_1(j\omega) &= X(j\omega)\,H_1(j\omega) \\ &= \pi\left[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\right]\underbrace{\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)} \\ &= \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right] \end{aligned}$$

$\omega=1 \rightarrow \frac{-1}{j}$

$\omega=-1 \rightarrow \frac{1}{j}$

- $h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t)$

$$h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_2(j\omega) = -2 + \frac{5}{2+j\omega}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Y_2(j\omega) &= X(j\omega)\,H_2(j\omega) \\ &= \pi\left[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\right]\underbrace{\left(-2 + \frac{5}{2+j\omega}\right)} \\ &= \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right] \end{aligned}$$

$\omega=1 \rightarrow \frac{-1}{j}$

$\omega=-1 \rightarrow \frac{1}{j}$

- $h_3(t) = 2 \cdot t \, e^{-t} \, u(t)$

$$h_3(t) = 2t \cdot e^{-t} \cdot u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_3(j\omega) = \frac{2}{(1+j\omega)^2}$$

Entonces,

$$Y_3(j\omega) = X(j\omega) \, H_3(j\omega)$$

$$= \pi \left[\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1) \right] \cdot \underbrace{\frac{2}{(1+j\omega)^2}}_{\substack{\omega=1 \;\rightarrow\; -\frac{1}{j} \\ \omega=-1 \;\rightarrow\; \frac{1}{j}}}$$

$$= \frac{\pi}{j} \left[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1) \right]$$

Todas las respuestas para la entrada $x(t) = \cos(t)$ son iguales.

Como se tienen las mismas respuestas para distintos sistemas, no se puede determinar el sistema LTI específico que se está usando cuando se calcula la salida usando la respuesta al impulso.