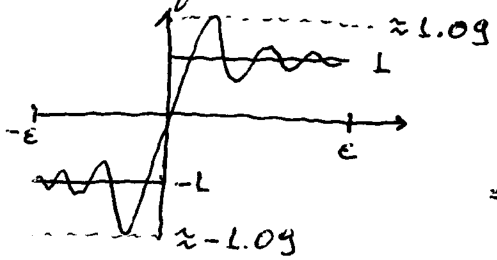
PAUTA CONTROL 2 EL41C/Primavera/2009

P1

a) El fenómeno de Gibbs para esta función señala que las sumas parciales de la serie de Fourier

$$S_n(t) = \sum_{|k|\leq n} F[k]\, e^{2\pi j k t}$$

oscila fuertemente cerca de la discontinuidad y



$$\lim_{n\to\infty} \max S_n(t) \approx 1.09$$

$\Rightarrow$ sobresalto no decae pero se concentra cerca de la discontinuidad

b) Una función es "más suave" mientras más derivadas continuas tenga; i.e. para mayor $p \in \mathbb{N}$ si $S \in C^p[0,1)$. Si la función es más suave entonces $S_n(t)$ converge en forma más rápida a $S(t)$. Específicamente, si $S \in C^p[0,1)$ entonces $\| S_n - S \|_\infty \leq \text{constante} \times n^{-p+1/2}$

c) $X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(-\tau)}_{-x(\tau)}\, e^{-j\omega \tau} d\tau = -X(\omega)$

$\Rightarrow$ $X(\omega)$ es impar

$\Rightarrow$ $X(-\omega) = X^*(\omega) = -X(\omega)$ $\Rightarrow$ $X(\omega)$ es imaginario puro

d) $\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$

$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(\omega)$

$\delta(t)$ se concentra completamente en $t=0$, luego debe estar completamente dispersa en frecuencia, lo que se refleja en $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$.

$x(t) = 1$ está completamente disperso en el tiempo, luego debe concentrarse en el tiempo, lo que se refleja en $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\,\delta(\omega)$.

e) • $Y(\omega) = \underbrace{\dfrac{2\omega^2 X(\omega)}{H(\omega)}}\, X(\omega) = H(\omega)\, X(\omega)$ pero el sistema debe ser independiente a la señal de entrada.

$\Rightarrow$ NO es LTI

- $Y(\omega) = e^{j\omega t_0} X(\omega) + X(0)\delta(\omega) = \underbrace{(e^{j\omega t_0} + \delta(\omega))}_{\delta(\omega)=0 \text{ si } \omega \neq 0} X(\omega)$

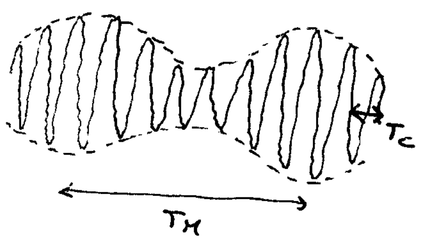
$\Rightarrow$ Es LTI

- $Y(\omega) = X(\omega/4)$ ← no se puede escribir como $H(\omega)X(\omega)$ para una entrada general

$\Rightarrow$ NO es LTI

f) • $x(t) > 0 \ \forall t$ para que $x(t)$ aparezca como envolvente de la señal modulada, de manera que las envolventes superiores e inferiores no se confundan.

- $x(t)$ debe variar lentamente con respecto a ω_c. De otra forma $x(t)$ no aparece como envolvente de la señal modulada.



$\Rightarrow T_M \gg T_c \Rightarrow \omega_M \ll \omega_c$

P2.1

a) Se debe calcular

$$\langle \phi_n(t), \phi_m(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \Phi_n(\omega), \Phi_m(\omega) \rangle \quad \text{(Parseval)}$$

$$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < W \\ 0 & \text{si } |\omega| > W \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi_n(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega n} & |\omega| < \pi \\ 0 & |\omega| > \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle \phi_n(t), \phi_m(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega(n-m)}}{j(n-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi j(n-m)} \left((-1)^{n-m} - (-1)^{n-m} \right) = 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

$\Rightarrow \{\phi_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$ son ortonormales.

b) $C_n = \langle \phi_n(t), x(t) \rangle$ $\Big\}$ Parseval

$= \frac{1}{2\pi} \langle \Phi_n(\omega), X(\omega) \rangle$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} X(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega$

$X(\omega) = 0$ para $|\omega| > \pi$

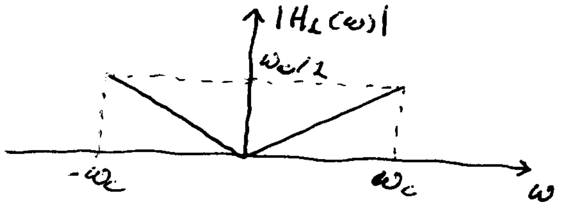
$= x(n)$ ||

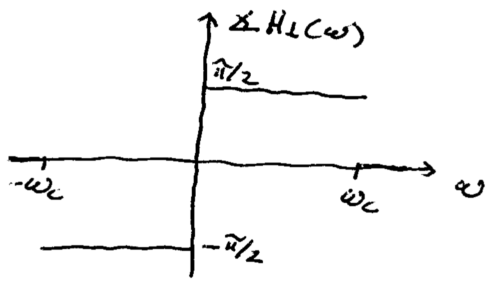
P3

a) $\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$

$\frac{dx}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(\omega)$

$\Rightarrow H_1(\omega) = \begin{cases} \frac{j\omega}{2} & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$





b) $H_3(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 2\omega_c \\ 0 & |\omega| > 2\omega_c \end{cases}$

$y(t) = h_4(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau)\, d\tau$

$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

$\Rightarrow H_4(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

$\Rightarrow H(\omega) = \begin{cases} \frac{j\omega}{2}\left(-e^{-j2\pi\omega/\omega_c} + 1\right)\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$

$= \begin{cases} j e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_c}} \sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_c}\right) & \text{si } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$ ||

OBS: $\omega\delta(\omega) = 0$ si $\omega \neq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \omega\delta(\omega)\, d\omega = 0$

$\Rightarrow \omega\delta(\omega) = 0 \quad \forall\omega$

c) $Y(\omega) = \frac{1}{2} H\left(-\frac{\omega_c}{2}\right)\delta\left(\omega + \frac{\omega_c}{2}\right) + \frac{1}{2} H\left(\frac{\omega_c}{2}\right)\delta\left(\omega - \frac{\omega_c}{2}\right)$

$H\left(\pm\frac{\omega_c}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow y(t) = \cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$ ||