

Auxiliar CTFT

En el siguiente documento se demostrarán algunas propiedades de la transformada de Fourier en tiempo continuo, relativas a la simetría tanto de la señal en el tiempo como de su transformada en frecuencia

1. Propiedad 1: *Conjugación*

La propiedad de conjugación establece que si

$$x(t) \xleftarrow{F} X(\omega)$$

Entonces

$$x^*(t) \xleftarrow{F} X^*(-\omega)$$

Esto puede probarse de manera simple desarrollando la definición de $X^*(\omega)$

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* e^{j\omega t} dt \end{aligned}$$

Y haciendo un cambio de variable $\omega' = -\omega$ se llega finalmente a la expresión

$$X^*(-\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* e^{-j\omega' t} dt$$

Con lo que se prueba así que $X^*(-\omega)$ es la transformada de Fourier de $x^*(t)$.

2. Propiedad 2: *Simetría Conjugada*

La propiedad de simetría conjugada establece que si $x(t)$ es real entonces

$$X(\omega) = X^*(-\omega)$$

Para probar esto nos bastará usar la propiedad 1 recordando que $x(t)$ es real. Es decir $x(t) = x^*(t)$. Por la propiedad 1:

$$\begin{aligned} X^*(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= X(\omega) \end{aligned}$$

El resultado se desprende de la propiedad 1, el hecho de que $x(t)$ es real y de la definición de transformada de Fourier.

3. Propiedad 3: *Transformada de una señal real y par*

Se desea probar que si $x(t)$ es real y par entonces $X(\omega)$ también lo será. Al ser $x(t)$ real sabemos que la propiedad 2 se cumplirá. Por su propiedad de ser par además $x(t) = x(-t)$. Para la demostración comenzamos escribiendo por definición $X(-\omega)$.

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* e^{j\omega t} dt$$

Usando el cambio de variables $t' = -t$

$$\begin{aligned} X(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t')^* e^{-j\omega t'} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t')^* e^{-j\omega t'} dt \\ &= X(\omega) \end{aligned}$$

El resultado $X(\omega) = X(-\omega)$ indica que la transformada es par. Además por la propiedad 2 $X(\omega) = X^*(-\omega)$. Luego $X(-\omega) = X^*(-\omega)$, lo que corresponde a la definición de función real, demostrando así esta propiedad.

4. **Propiedad 4: Transformada de una señal real e impar** Esta propiedad establece si $x(t)$ es real e impar, entonces $X(\omega)$ también será impar, pero IMAGINARIA PURA. Nuevamente, nuestra hipótesis nos indica que se cumplirá la propiedad 2 y que $x(t) = -x(-t)$. Utilizaremos la misma función y cambio de variable del caso anterior.

$$\begin{aligned} X(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t')^* e^{-j\omega t'} dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(t')^* e^{-j\omega t'} dt \\ &= -X(\omega) \end{aligned}$$

Vemos que este resultado es equivalente a la definición de función impar $-X(\omega) = X(-\omega) \implies X(\omega) = -X(-\omega)$. Si juntamos este resultado con el entregado por la propiedad 2 tendremos que $-X(-\omega) = X^*(-\omega)$, de donde se observa que la función $X(\omega)$ es imaginaria pura.