Control No. 1

Martes 27 de Abril. [Entregar en hojas SEPARADAS]

1. **Problema 1:**
   Considere el sistema de entrada-salida de la figura

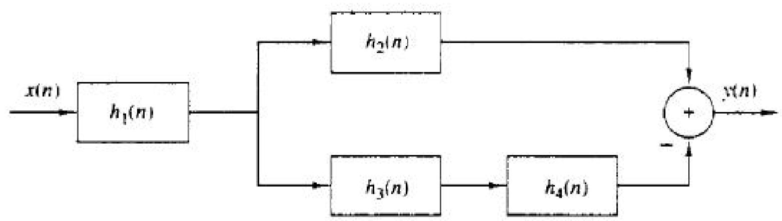

Fig 1.

   compuesto por bloques de sistemas LTI con respuesta al impulso $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$ y $h_4(n)$.

   a) Verifique que el sistema total $x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n)$ es LTI y exprese su respuesta al impulso $(h(n))$ como función de $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$ y $h_4(n)$.

   b) Considere,

$$\begin{aligned} h_1(n) = &\quad \left\{0, 0, \ldots, \overset{\downarrow}{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 0, 0, 0, \ldots\right\}, \\ h_2(n) = h_3(n) = &\quad (n+1)u(n), \\ h_4(n) = &\quad \delta(n-2), \end{aligned}$$

   determine $h(n)$ y verifique si el sistema es estable BIBO.

   c) Finalmente, determine la salida frente a,

$$x(n) = \delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-4).$$

2. **Problema 2:**
   Una señal arbitraria $(x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, se puede descomponer como combinación lineal de escalones unitarios, mas precisamente como,

$$x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} l_k \cdot u(n-k), \ \forall n.$$

   a) Verifique que la relación anterior se cumple cuando $l_k = x_k - x_{k-1}$, para todo k.

   b) Sean dos señales discretas reales $(x(n))$ e $(y(n))$. Definamos el operador de **convolución diferencial** como:

$$(x(n)) \odot (y(n)) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} [x(k) - x(k-1)]\, y(n-k)\right). \tag{1}$$

   Pruebe que el operador $\odot$ es **bi-lineal** (conmutativo y lineal en ambos argumentos).

   c) Considere un sistema a tiempo discreto $\mathcal{T}(\cdot)$ LTI y con respuesta al escalón $(s(n))$. Muestre que la respuesta a una entrada arbitraria puede escribirse como:

$$y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} [s(k) - s(k-1)] \cdot x(n-k), \forall n.$$

   y concluya que la respuesta al escalón también caracteriza de forna completa el sistema. Indicación: Utilice los puntos a) y b).

3. **Problema 3:**
Considere un sistema a tiempo discreto estable BIBO con respuesta al impulso $(h(n))$.

i) Considere la familia de exponencial complejas N-periodicas,

$$\left\{(\phi_{k,N}(n))_{n\in\mathbb{Z}} = (e^{\frac{2\pi k}{N}\cdot n})_{n\in\mathbb{Z}}, 0 \leq k \leq N-1\right\},$$

como entrada a nuestro sistema LTI.
Demuestre formalmente que $(\phi_{k,N}(n))$ es una **auto-función** del sistema, con **auto-valor** dado por

$$H(2\pi k/N) = DTFT(h(n))|_{w=2\pi k/N},$$

en otras palabras que la salida a $(\phi_{k,N}(n))$ es $H(2\pi k/N)\cdot(\phi_{k,N}(n))$.

ii) Si la entrada $(x(n))$ es N-periódica $(N > 1)$, muestre que la salida $(y(n))$ también es N-periódica.

iii) Asumiendo el escenario de la parte ii), encuentre una relación entre los coeficientes de la *Serie de Fourier* de la entrada, $\left\{c_0^x, \ldots, c_{N-1}^x\right\}$, y los de la *Serie de Fourier* de la señal de salida, $\left\{c_0^y, \ldots, c_{N-1}^y\right\}$.
Indicación: Utilice parte i).

iv) [BONUS] Considere una señal discreta $(x(n))$ con $soporte(x(n)) \subseteq \{0, .., N-1\}$, donde,

$$soporte(x(n)) = \{n \in \mathbb{Z}, x(n) \neq 0\}.$$

Considere ademas la **extensión N-periódica** de $x(n)$ como,

$$x^N(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(n - k\cdot N),\ \forall n$$

y los coeficientes de su *Serie de Fourier* $\mathcal{C}_N = \{c_0, .., c_{N-1}\}$.
Muestre que la *Transformada de Fourier* de $(x(n))$ queda completamente caracterizada por $\mathcal{C}_N$ y escriba $X(w) = DTFT(x(n))$ como función de ellos.