Auxiliar N 3

1. **Problema 1:**
   Sea el sistema

$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

   i) Determine si el sistema es Lineal.
   Nos definiremos dos pares de entradas y salidas

$$y_1[n] = ny_1[n-1] + x_1[n]$$

$$y_2[n] = ny_2[n-1] + x_2[n]$$

   Sea $y[n]$ la salida que se observa cuando entra al sistema la señal $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$
   Si el sistema es lineal entonces debe ocurrir que:

$$y[n] = \tau \cdot (ax_1[n] + bx_2[n]) = a \cdot \tau(x_1[n]) + b \cdot \tau(x_2[n]) = a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[2]$$

   Es decir

$$\begin{aligned} y[n] &= a(ny_1[n-1] + x_1[n]) + b(ny_2[n-1] + x_2[n]) \\ &= n(ay_1[n-1] + by_2[n-1]) + (ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= n(ay_1[n-1] + by_2[n-1]) + x[n] \\ &= ny[n-1] + x[n] \end{aligned}$$

   Luego $y[n] = a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n]$ cumple con ser la salida de $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ por lo que es sistema es lineal.
   Si lo anterior no los convence, se puede verificar al desarrollar la recursividad de $y[n]$ que

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m!)} x[n-m]$$

   Asi la entrada correspondiente a $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ dará una salida

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m!)} (ax_1[n-m] + bx_2[n-m])$$

$$y[n] = a\sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m!)} x_1[n-m] + b\sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m!)} x_2[n-m]$$

$$y[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$

   Así el sistema es lineal