Tabla de Propiedades (v0.3)

EL3005 – Señales y Sistemas I

- Transformada Z:

$$Z\{h[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \qquad Z^{-1}\{H(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C H(z)z^{n-1}dz$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio z	ROC
Notación	$x[n]$	$X(z)$	$ROC:\ r_a < \|z\| < r_b$
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	$ROC_1:\ r_{1a} < \|z\| < r_{1b}$
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	$ROC_2:\ r_{2a} < \|z\| < r_{2b}$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	al menos $ROC_1 \cap ROC_2$
Desplazamiento Temporal	$x[n-k]$	$z^{-k}X(z)$	ROC, excepto $z = 0$ si $k > 0$ y $z = \infty$ si $k < 0$
Escalado en dominio z	$a^n x[n]$	$X(z/a)$	$\|a\|r_a < \|z\| < \|a\|r_b$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	ROC
Inversión Temporal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_b} < \|z\| < \frac{1}{r_a}$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	al menos $ROC_1 \cap ROC_2$
Derivada en dominio z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_a < \|z\| < r_b$
Parte real	$Re\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye ROC
Parte imaginaria	$Im\{x[n]\}$	$\frac{j}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye ROC
Teorema del valor inicial	Si $x[n]$ es causal entonces $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$		
Teorema del valor final	Si los polos de $(1-z^{-1})X(z)$ están dentro del círculo unitario entonces $x[\infty] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$		

- Transformada CTFT (*Continuous Time Fourier Transform*):

$$H(\omega) = \mathcal{F}\left\{h(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \qquad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{H(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Lineal	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
Desplazamiento Temporal	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión Temporal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Derivada Temporal	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Derivada en Frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integral	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Escalamiento	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{\omega}{a})$
Dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Simetría	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
	$x(t)$ real y par	$X(\omega)$ real y par
	$x(t)$ real e impar	$X(\omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(\omega)X_2(\omega)d\omega$	
Principio de Incertidumbre	Si $\int_{-\infty}^{\infty} t\|x(t)\|^2dt = 0$ entonces	
	$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\|x(t)\|^2dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\|X(\omega)\|^2d\omega \geqslant \frac{\pi}{2}\\|x\\|^4$	
	y la igualdad se da si y solo si $x(t) = a\exp\left(-\|b\|t^2\right)$, $a \in \mathbb{R}$	

- Transformada DTFT (*Discrete Time Fourier Transform*):

$$H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \qquad h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x[n]$	$X(\Omega)$
	$x_1[n]$	$X_1(\Omega)$
	$x_2[n]$	$X_2(\Omega)$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$
Desplazamiento Temporal	$x[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Inversión Temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Convolución	$x_1[n] \circledast x_2[n]$	$X_1(\Omega)X_2(\Omega)$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\Omega - \lambda)d\lambda$
Modulación	$x[n]\cos(\Omega_0 n)$	$\frac{1}{2}X(\Omega + \Omega_0) + \frac{1}{2}X(\Omega - \Omega_0)$
Diferenciación Temporal	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
Derivada en Frecuencia	$nx[n]$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)$
		$+\pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - 2\pi k)$
Simetría	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$
	$x[n]$ real y par	$X(\Omega)$ real y par
	$x[n]$ real e impar	$X(\Omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1^*[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1^*(\Omega)X_2(\Omega)d\Omega$	

- Transformada DFT (*Discrete Fourier Transform*):

$$H[k] = DFT_N\left\{h[n]\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad h[n] = IDFT_N\left\{H[k]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x[n]$	$X[k]$
	$x_1[n]$	$X_1[k]$
	$x_2[n]$	$X_2[k]$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
Desplazamiento Temporal	$x[(n-l)_N]$	$X[k]e^{-j2\pi kl/N}$
Desplazamiento en Frecuencia	$x[n]e^{j2\pi ln/N}$	$X[(k-l)_N]$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*[N-1-k]$
Inversión Temporal	$x[N-1-n]$	$X[N-1-k]$
Convolución	$x_1[n] \circledast_N x_2[n]$	$X_1[k]X_2[k]$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}X_1[k] \circledast_N X_2[k]$
Simetría	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X[k] = X^*[N-k]$
	$x[n]$ real y par	$X[k]$ real y par
	$x[n]$ real e impar	$X[k]$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]x_2^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]X_2^*[k]$	