CI61P/CI71L – ESCURRIMIENTOS TRANSITORIOS

Semestre Otoño 2009
Prof: Javier González

Material Complementario 5

ECUACIONES DE SAINT-VENANT

---

1. INTRODUCCIÓN

Al igual que la mayoría de los flujos en canales abiertos, el flujo en cauces naturales incluyendo el efecto de un embalse puede describirse utilizando las ecuaciones de Saint-Venant. Si bien estas ecuaciones se deducen utilizando la hipótesis de aguas poco profundas (aproximaciones tipo capa límite), numerosos estudios han demostrado que son también aplicables a flujos rápidamente variados como el rompimiento de presa o el resalto hidráulico (ej. Gharangik y Chaudry 1991; Capart et al. 2003; Zoppou y Roberts 2003).

La versión unidimensional de las ecuaciones de Saint-Venant puede obtenerse de la integración sobre la sección de escurrimiento de las ecuaciones promediadas de Reynolds, utilizando los conceptos de capa límite que surgen del análisis de las escalas características del flujo. Al utilizar la aproximación tipo capa límite, la ecuación de conservación del momentum en la dirección normal al fondo indica que la distribución de presiones en esa dirección es hidrostática. Una alternativa más simple para deducirlas corresponde al enfoque integral, en el cual la ecuación del transporte de Reynolds es aplicada a la masa y al momentum del flujo considerando un volumen de control finito de un tramo del río. Suponiendo que la curvatura de las líneas de corrientes es despreciable, puede considerarse que la distribución de presiones es la hidrostática, obteniéndose el mismo resultado que el obtenido con el enfoque anterior.

Debido al amplio conocimiento de las ecuaciones de Saint-Venant, por simplicidad, en este capítulo se realizará la deducción utilizando el enfoque integral, realizando un balance de masa y de momentum sobre un volumen de control de largo dx y sección de escurrimiento A, las secciones que limitan el volumen de control están ubicadas en las posiciones x y $x+dx$ respectivamente.. Los principales supuestos son , (Chow,1988).

- La profundidad varía sólo en la dirección longitudinal, es decir, en cada sección transversal la superficie de agua es horizontal.

- El flujo es gradualmente variado a lo largo del canal, de tal forma que las aceleraciones verticales pueden despreciarse y la ley hidrostática es válida.

- Los efectos de curvatura del eje longitudinal del canal son despreciables.
- La pendiente de fondo es pequeña y los cambios del lecho son muy lentos comparados con los del flujo (hipótesis cuasi-estática).
- Los coeficientes de resistencia para flujo uniforme y permanente son aplicables al caso impermanente no uniforme, de modo que la fórmula de Manning es utilizable para evaluar la resistencia al escurrimiento.
- El fluido es incompresible y de densidad constante a lo largo del flujo.

El esquema general, donde se definen el sistema de coordenadas y las principales variables se presenta en la Figura 1.1. En ella x es un eje longitudinal inclinado respecto a la horizontal, z es un eje normal al fondo, z_f y z_w corresponden a las coordenadas que describen al fondo y la superficie libre, h_w es la profundidad del flujo y z_B es un eje vertical positivo hacia arriba que describe la elevación del eje x con respecto a un nivel de referencia horizontal.

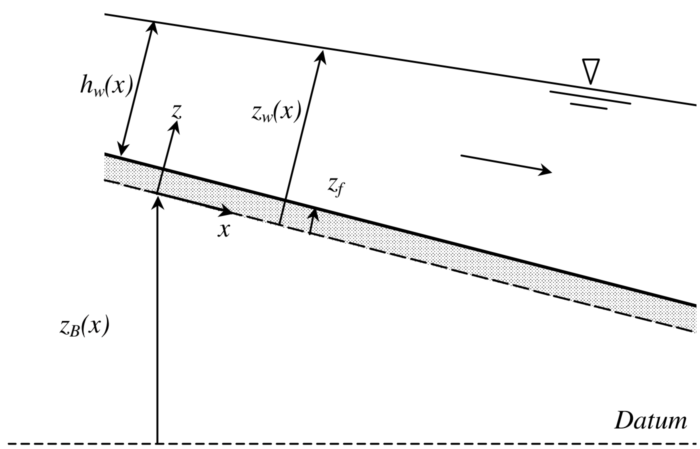

Figura 1.1 Esquema general del flujo, corte longitudinal

En la derivación de las ecuaciones se utilizará la regla de Leibniz que establece que:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_a^b f(r,s)dr = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}dr + f(b,s)\frac{\partial b}{\partial s} - f(a,s)\frac{\partial a}{\partial s} \tag{1.1}$$

2. Ecuación de Continuidad

El volumen de control utilizado para la aplicación del principio de conservación de la masa se esquematiza en la Figura 2.1. Sobre este volumen de control, $\forall$, el teorema de transporte de Reynolds indica que,

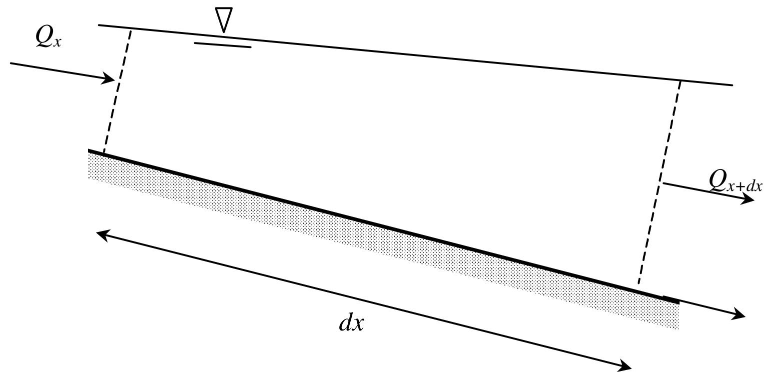

Figura 2.1 Volumen de control para el principio de continuidad

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C} \rho d\forall + \iint_{S.C} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \tag{2.1}$$

La primera integral del lado derecho corresponde a la masa de fluido dentro del volumen de control, $\rho A dx$, donde ρ es la densidad del agua y A la sección de escurrimiento, mientras que la segunda integral corresponde a los flujos másicos que atraviesan las superficies de control. Suponiendo que no existen aportes laterales de agua, entonces:

$$\rho dx \frac{\partial A}{\partial t} - \rho Q_x + \rho Q_{x+dx} = 0 \tag{2.2}$$

donde Q corresponde al caudal. Dividiendo por la densidad y aproximando Q_{x+dx} por una serie de Taylor de primer orden se tiene que,

$$\frac{\partial A}{\partial t} dx - Q_x + \left(Q_x + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) = 0 \tag{2.3}$$

y dividiendo por el largo del volumen, dx, resulta finalmente,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{2.4}$$

3. ECUACIÓN DE MOMENTUM

Según la segunda ley de Newton la derivada temporal del momentum corresponde a la sumatoria de fuerzas externas. Considerando la dirección longitudinal, en el teorema del transporte de Reynolds la propiedad intensiva del momentum corresponde a ρV, donde V es la velocidad media del flujo, con lo cual el principio de conservación se escribe,

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C}\rho V d\forall + \iint_{S.C}\rho V \cdot \vec{V} \cdot \hat{n} dA \tag{3.1}$$

Despreciando la fuerza que ejerce el viento en la superficie libre, y las fuerzas producto de contracciones o expansiones bruscas de la sección, la sumatoria de fuerzas en la dirección longitudinal se puede resumir en,

$$\sum F_x = F_g + F_f + F_p \tag{3.2}$$

donde F_g es la fuerza ejercida por la gravedad, manifestada como el peso del fluido dentro del volumen de control, F_f es la fuerza de fricción que ejerce el fondo y las paredes del volumen de control y F_p es la fuerza de presión. La fuerza del peso proyectada en la dirección longitudinal se obtiene como,

$$F_g = -\rho g A dx \frac{\partial z_B}{\partial x} \tag{3.3}$$

donde g es la aceleración de gravedad. La fuerza friccional es consecuencia de la acción del esfuerzo de corte sobre el lecho y las paredes. De este modo si τ_B es el esfuerzo de corte sobre el lecho, R_h es el radio hidráulico de la sección, ψ es el perímetro mojado y S_f la pendiente de la línea de energía entonces,

$$\tau_B = \rho g R_h S_f \tag{3.4}$$

$$R_h = \frac{A}{\psi} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} F_f &= -\tau_B \psi dx \\ F_f &= -\rho g A S_f dx \end{aligned} \tag{3.6}$$

La pendiente de la línea de energía que puede obtenerse a partir de la ecuación de resistencia de Manning:

$$S_f = \frac{n^2 Q|Q|}{A^2 R_h^{4/3}} \tag{3.7}$$

donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning. Por su parte, la fuerza de presión en la dirección longitudinal posee dos componentes según se muestra en la Figura 3.1. La primera corresponde a la suma de las presiones que ejerce el flujo en las secciones de escurrimiento que limitan al volumen de control, y la segunda corresponde a la fuerza que ejercen las paredes de éste. Expandiendo en serie de Taylor y truncando a primer orden la fuerza de presión que actúa en la sección ubicada en $x+dx$, se tiene que:

$$F_p = -\frac{\partial F_{px}}{\partial x} dx + F_{pb} \tag{3.8}$$

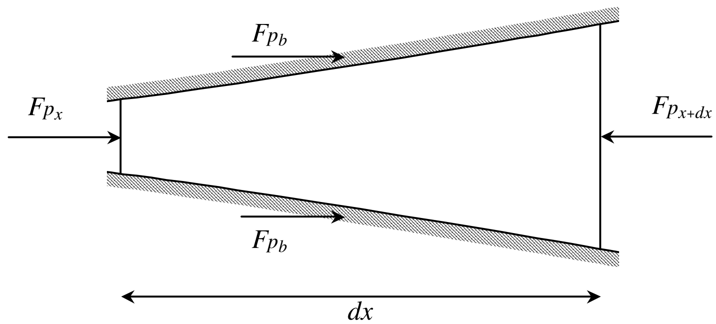

Figura 3.1 Esquema de las fuerzas de presión, vista en planta.

Considerando la geometría de la Figura 3.2, según la ley hidrostática la presión en el punto z' es:

$$p(z') = \rho g (z_w - z') \tag{3.9}$$

La fuerza de presión F_{px} será la integral de $p(z')$ sobre la sección, y derivando con respecto a x se tiene,

$$\frac{\partial F_{px}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_f}^{z_w} \rho g (z_w - z') b(z') dz' \tag{3.10}$$

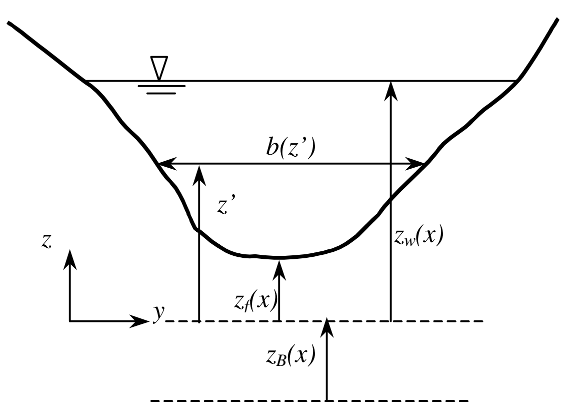

Figura 3.2 Sección transversal del flujo

Utilizando la regla de Leibniz resulta:

$$\frac{\partial F_{px}}{\partial x} = \rho g \int_{z_f}^{z_w} \frac{\partial}{\partial x}(z_w - z')b(z')dz' - \rho g (z_w - z_f) b(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} \tag{3.11}$$

La dirección longitudinal de escurrimiento está determinada por la pendiente media del fondo, cuya magnitud corresponde a la inclinación del eje x con respecto a la horizontal $-\partial z_B/\partial x$. La derivada con respecto a x de z_f describe entonces las variaciones locales del fondo en la dirección longitudinal. Si se desprecia el efecto de éstas variaciones en el balance de presión, el cual está representado por el segundo término del lado derecho en (3.11), frente a las variaciones de la superficie libre y los taludes en la dirección longitudinal, y expandiendo la derivada dentro de la integral resulta:

$$\frac{\partial F_{px}}{\partial x} = \rho g \frac{\partial z_w}{\partial x} \int_{z_f}^{z_w} b(z')dz' + \rho g \int_{z_f}^{z_w} (z_w - z') \frac{\partial b(z')}{\partial x} dz' \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial F_{px}}{\partial x} = \rho g A \frac{\partial z_w}{\partial x} + \rho g \int_{z_f}^{z_w} (z_w - z') \frac{\partial b(z')}{\partial x} dz' \tag{3.13}$$

Por otro lado, la fuerza que ejercen las paredes de la sección sobre el flujo puede obtenerse considerando el esquema de la Figura 3.2 y la Figura 3.3. A una elevación z', la presión, dada por la ecuación (3.9), actúa sobre una longitud proyectada $b(x+dx)-b(x)$. La fuerza total que ejercen las paredes será la integral en la dirección normal, del producto de ambos términos, es decir,

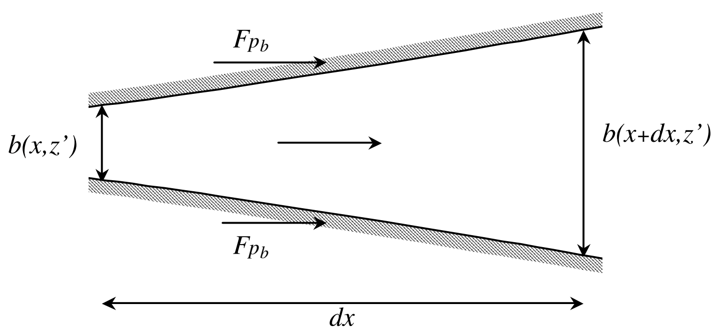

Figura 3.3 Esquema para las fuerzas de presión ejercida por las paredes a una elevación *z'*

$$F_{pb} = \int_{z_f}^{z_w} \rho g (z_w - z')[b(x+dx) - b(x)]dz' \tag{3.14}$$

Expandiendo $b(x+dx)$ en series de Taylor y truncando a primer orden se obtiene:

$$F_{pb} = \rho g \int_{z_f}^{z_w} (z_w - z') \frac{\partial b(z')}{\partial x} \cdot dx\, dz' \tag{3.15}$$

y reemplazando (3.15) y (3.13) en (3.8) se obtiene finalmente:

$$F_p = -\rho g A \frac{\partial z_w}{\partial x} dx \tag{3.16}$$

Con esto la sumatoria de fuerzas en (3.1) se obtiene utilizando (3.3), (3.6), (3.7) y (3.16).

$$\sum F_x = -\rho g A \frac{\partial z_B}{\partial x} dx - \rho g \frac{n^2 Q|Q|}{A\ R_h^{4/3}} dx - \rho g A \frac{\partial z_w}{\partial x} dx \tag{3.17}$$

Si la inclinación del fondo es pequeña se puede definir la elevación de la superficie libre con respecto al nivel de referencia horizontal como:

$$Z = z_w + z_B \tag{3.18}$$

con lo que (3.17) queda:

$$\sum F = -\rho g A \frac{\partial Z}{\partial x} dx - \rho g \frac{n^2 Q|Q|}{A\ R_h^{4/3}} dx \tag{3.19}$$

Para el almacenamiento de momentum, si u_f es la velocidad local del flujo en la dirección longitudinal se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C} \rho V d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x}^{x+dx} \rho \left(\iint u_f\, dA \right) dx = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx \tag{3.20}$$

Mientras que los flujos de momentum según x a través de las secciones de entrada y de salida del volumen de control son:

$$\iint_{S.C} \rho V \cdot \vec{V} \cdot \hat{n} dA = -\iint \rho u_f^2 dA \Big|_x + \iint \rho u_f^2 dA \Big|_{x+dxx} \tag{3.21}$$

Para relacionar las velocidades locales del flujo con el caudal de escurrimiento se utiliza el coeficiente de Boussinesq β definido como:

$$\beta = \frac{\iint u_f^2 dA}{Q^2 / A} \tag{3.22}$$

entonces la ecuación (3.21) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\iint_{S.C} \rho V \cdot \vec{V} \cdot \hat{n} dA = -\rho \beta \left. \frac{Q^2}{A} \right|_x + \rho \beta \left. \frac{Q^2}{A} \right|_{x+dxx} \tag{3.23}$$

y expandiendo en series de Taylor y truncando a primer orden, resulta finalmente:

$$\iint_{S.C} \rho V \cdot \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \rho \frac{\partial \left(\beta Q^2 / A \right)}{\partial x} dx \tag{3.24}$$

De este modo, el principio de conservación del momentum se obtiene reemplazando (3.19), (3.20) y (3.24) en (3.1), y dividiendo por ρdx. Considerando que el coeficiente de Boussinesq posee valores muy cercanos a la unidad en cauces naturales, se obtiene finalmente:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \left(Q^2 / A \right)}{\partial x} = -gA \frac{\partial Z}{\partial x} - g \frac{n^2 Q |Q|}{A \; R_h^{4/3}} \tag{3.25}$$

4. Referencias

Capart, H., Eldho T. I., Huang, S. Y., Young, D. L., and Zech, Y. (2003). "Treatment of Natural Geometry in Finite Volume River Flow Computations." Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 129, No. 5, pp. 385-396.

Chow, V. T., Maidment, D. R., and Mays, L. W. (1988). "Applied Hydrology", McGraw-Hill, New York, 570 pp.

Gharangik, A. M., and Chaudry M. H. (1991). "Numerical Simulation of Hydraulic Jump." Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 117, No. 9, pp. 1195-1211.

Zoppou, C., and Roberts, S. (2003). "Explicit Schemes for Dam-Break Simulations." Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 129, No. 5, pp. 11-34.