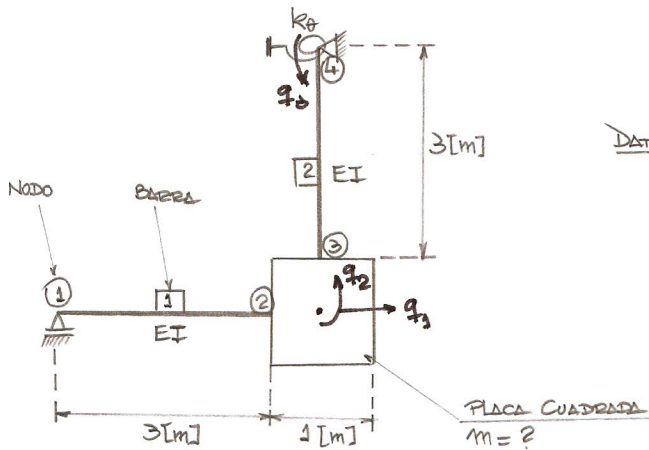


PAUTA - EJERCICIO VIII



DATOS:

$$EI = 1000 \text{ [kgf} \cdot \text{m}^2]$$

$$k_{\theta} = 3000 \text{ [kgf} \cdot \text{m/rad]}$$

$$EA = \infty$$

GDL DINÁMICOS: q_1, q_2 .

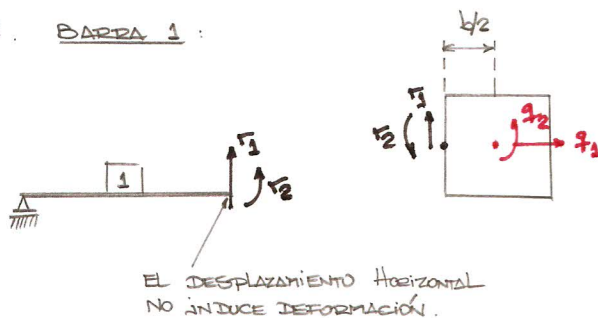
1. MATRIZ DE MASA

Como los GDL dinámicos están definidos en el CG de la placa, la matriz de masa ($[M]$) es una matriz diagonal, cuya 1era componente es la masa total de la placa y 2da componente, su inercia con respecto al CG.

$$I_{CG} = \frac{m}{12} (1^2 + 1^2) = \frac{m}{6} \rightarrow [M] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

2. MATRIZ DE RIGIDEZ

2.1. BARRA 1:



a) MATRIZ DE RIGIDEZ O/A (r_1, r_2):

$$[K_1] = EI \begin{bmatrix} \frac{r_1}{3/L^3} & \frac{r_2}{-3/L^2} \\ -\frac{3/L^2}{3/L} & \frac{3/L}{3/L} \end{bmatrix} \quad (2a)$$

b) MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} q_2 ; \quad [T_1] = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2b)$$

SE OBTIENE IMPONIENDO $q_2 = 1$.

EN SU VALOR SÓLO INCLUYE q_2 .

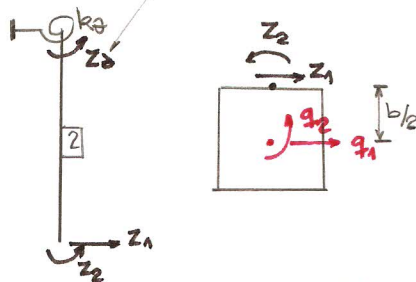
c) MATRIZ DE RIGIDEZ O/A (q_1, q_2):

$$[\bar{K}_1] = [T_1]^T [K_1] [T_1] = 1361,11 \quad (2c)$$

COMPONENTE ASOCIADA A q_2 .

EN CONSECUENCIA, LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN DE LA BARRA 1 ES IGUAL A: $U_1 = \frac{1}{2} \{q\}^T [\bar{K}_1] \{q\} = 680,56 q_2^2 \quad (2d)$

22 BARRA 2: EOL INDEPENDIENTE



a) MATRIZ DE RIGIDEZ C/R Δ (z1, z2, z3):

$$[K_2] = EI \begin{bmatrix} 12/L^3 & -6/L^2 & -6/L^2 \\ -6/L^2 & 4/L & 2/L \\ -6/L^2 & 2/L & 4/L + k_0/EI \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$\underbrace{\quad}_{z_1} \quad \underbrace{\quad}_{z_2} \quad \underbrace{\quad}_{z_3}$

b) MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

$\underbrace{\quad}_{q_1=1} \quad \underbrace{\quad}_{q_2=1} \quad \underbrace{\quad}_{q_3=1}$ [T₂]

c) MATRIZ DE RIGIDEZ C/R Δ (q1, q2, q3):

$$[K_2] = [T_2]^T [K_2] [T_2] = \begin{bmatrix} 444,4 & -888,9 & -666,7 \\ -888,9 & 3472,2 & 1000 \\ -666,7 & 1000 & 4333,3 \end{bmatrix} \quad (3c)$$

$\underbrace{\quad}_{q_1} \quad \underbrace{\quad}_{q_2} \quad \underbrace{\quad}_{q_3}$

LA MATRIZ DE RIGIDEZ ([K]) DE LA ESTRUCTURA, SE OBTIENE A PARTIR DE LA ENERGÍA ELÁSTICA DE DEFORMACIÓN $U = U_1 + U_2$ UTILIZANDO

LA EXPRESIÓN: $k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$

$U_2 = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_2] \{q\}$
DONDE: $\{q\} = (q_1, q_2, q_3)^T$

$$[K] = \begin{bmatrix} 444,4 & -888,9 & -666,7 \\ -888,9 & 3472,2 & 1000 \\ -666,7 & 1000 & 4333,3 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{q_1} \quad \underbrace{\quad}_{q_2} \quad \underbrace{\quad}_{q_3}$

Como [K] es simétrica, solo se debe construir la parte superior.

MATRIZ DE RIGIDEZ CONDENSADA:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ap} \\ K_{pa} & K_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 444,4 & -888,9 & -666,7 \\ -888,9 & 3472,2 & 1000 \\ -666,7 & 1000 & 4333,3 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{K_{aa}} \quad \underbrace{\quad}_{K_{pa}} \quad \underbrace{\quad}_{K_{pp}}$

$$\begin{aligned} \rightarrow [\tilde{K}] &= [K_{aa}] - [K_{ap}] [K_{pp}]^{-1} [K_{ap}]^T \\ &= \begin{bmatrix} 341,83 & -735,05 \\ -735,05 & 3241,43 \end{bmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

$\underbrace{\quad}_{q_1} \quad \underbrace{\quad}_{q_2}$

3. PERÍODOS, FRECUENCIAS Y FORMAS MODALES

MATRIZ DE MASA PARA $m=1$:

$$([\tilde{K}] - \omega^2 m [\tilde{M}]) \{ \phi \} = \{ 0 \} \rightarrow \det = 0 \rightarrow \omega_1^2 = 173,64 \quad \left\{ \begin{aligned} m &= \frac{\rho_s^2}{\omega_1^2} = 1,1 \text{ [kgf} \cdot \text{s}^2/\text{m}] \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{0,5} = 12,57$

VALORES PROPIOS PARA EL SISTEMA DE MASA UNITARIA.

Y POR LO TANTO,

$$\{ \omega \} = \begin{bmatrix} 12,56 \\ 133,54 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{RAD}}{\text{s}} \right]; \{ T \} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,047 \end{bmatrix} [\text{s}]; [\Phi] = \begin{bmatrix} -0,949 & 0,0837 \\ -0,217 & -2,323 \end{bmatrix} \quad (6)$$

FORMAS MODALES NORMALIZADAS POR LA MATRIZ DE MASA.

4. RAZONES DE AMORTIGUAMIENTO.

Como $[C] = \alpha [K]$ y LAS FORMAS MODALES ESTÁN NORMALIZADAS POR LA MATRIZ DE MASA, SE TIENE LO SIGUIENTE:

$$\frac{\{\phi_1\}^T [C] \{\phi_1\}}{2\beta_1 \omega_1} = \alpha \frac{\{\phi_1\}^T [K] \{\phi_1\}}{\omega_1^2} \longrightarrow \alpha = \frac{2\beta_1}{\omega_1} = \frac{2 \times 0,03}{12,56} = 0,0048$$

y POR LO TANTO,

$$\frac{\{\phi_2\}^T [C] \{\phi_2\}}{2\beta_2 \omega_2} = \alpha \frac{\{\phi_2\}^T [K] \{\phi_2\}}{\omega_2^2} \longrightarrow \beta_2 = \frac{\alpha \omega_2}{2} = 0,32 ;$$

5. RESPUESTAS MODALES.

$\{u_0\}$: VECTORES DE DESPLAZAMIENTO INICIAL; $\{u_0\} = \begin{bmatrix} 0,3038 \\ 0,0695 \end{bmatrix}$ (7.a)

Por lo tanto,

$$y_1(0) = \{\phi_1\}^T [M] \{u_0\} = -0,329 \quad (7.b)$$

$$y_2(0) = \{\phi_2\}^T [M] \{u_0\} \approx 0 \quad (7.c)$$

Como EL MOVIMIENTO DE LA ESTRUCTURA SE DEBE ÚNICAMENTE A CONDICIONES INICIALES NO NULAS (AUSENCIA DE CARGAS EXTERNAS), que $y_2(0) = 0$

implica $y_2(t) = 0, \forall t$ EN CONSECUENCIA,

$$y_1(t) = e^{-\beta_1 \omega_1 t} \left\{ y_1(0) \cos(\omega_{d1} t) + \frac{\beta_1 \omega_1}{\omega_{d1}} y_1(0) \sin(\omega_{d1} t) \right\}$$

$$= -0,329 e^{-0,377t} \cos(12,56t) \quad (8)$$

6. RESPUESTA DEL SISTEMA: DESPLAZAMIENTO.

$\{u_a\}$: DESPLAZAMIENTO EN GDL Activos; $\{u_a\} = \{\phi_1\} y_1(t) + \{\phi_2\} y_2(t)$
 (q_1, q_2) $= \{\phi_1\} y_1(t)$ (9.a)

$\{u_p\}$: DESPLAZAMIENTO EN GDL PASIVOS (q_3); $\{u_p\} = -[K_{pp}]^{-1} [K_{ap}]^T \{u_a\}$ (9.b)

Sigue que, $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{u_a\} \\ -[K_{pp}]^{-1} [K_{ap}]^T \{u_a\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_2] \\ -[K_{pp}]^{-1} [K_{ap}]^T \end{bmatrix} \{\phi_1\} y_1(t)$ (9.c)

MATRIZ IDENTIDAD DE 2x2.

EL TÉRMINO ENTRE LLAVES CORRESPONDE A LA 1ERA FORMA MODAL

EXTENDIDA (INCORPORA TODOS LOS GDL). UTILIZANDO (9) SE OBTIENE:

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,304 \\ 0,0695 \\ 0,0307 \end{bmatrix} e^{-0,377t} \cos(12,56t) \longrightarrow \begin{bmatrix} q_1^{(max)} \\ q_2^{(max)} \\ q_3^{(max)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,304 \\ 0,0695 \\ 0,0307 \end{bmatrix} \quad (10)$$

7. DIAGRAMA DE MOMENTOS

Si se conoce la matriz de rigidez de un elemento $[K_e]$ y sus desplazamientos nodales $\{r_e\}$; Cortes y momentos en sus extremos pueden ser determinados por la expresión: $\{F_e\} = [K_e]\{r_e\}$.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

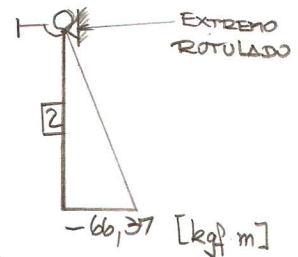
Utilizando este argumento, junto con las derivaciones de la 2da parte, se obtiene lo siguiente:

BARRA 1:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ M \end{bmatrix} = [K_1] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = [K_1][T_1] q_2^{(max)} = \begin{bmatrix} -27,03 \\ 31,08 \end{bmatrix};$$

BARRA 2 + RESORTE:

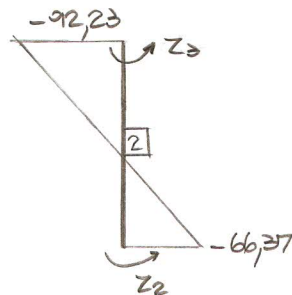
$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = [K_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = [K_2][T_2] \begin{bmatrix} q_1^{(max)} \\ q_2^{(max)} \\ q_3^{(max)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52,87 \\ -66,37 \\ 0 \end{bmatrix};$$



Para determinar los momentos nodales de la barra 2, sin incluir el resorte, se utiliza la Ec. (11) reconociendo que $v_1 = 0$, $\theta_1 = z_3$, $v_2 = z_1$; $\theta_2 = z_2$ (direcciones deben coincidir), esto es,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = [T_2] \begin{bmatrix} q_1^{(max)} \\ q_2^{(max)} \\ q_3^{(max)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,269 \\ 0,0695 \\ 0,0307 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0307 \\ 0,269 \\ 0,0695 \end{bmatrix}$$

Sigue que,



$$= \begin{bmatrix} -52,87 \\ -92,23 \\ 52,87 \\ -66,37 \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ \\ M_2 \end{matrix}$$