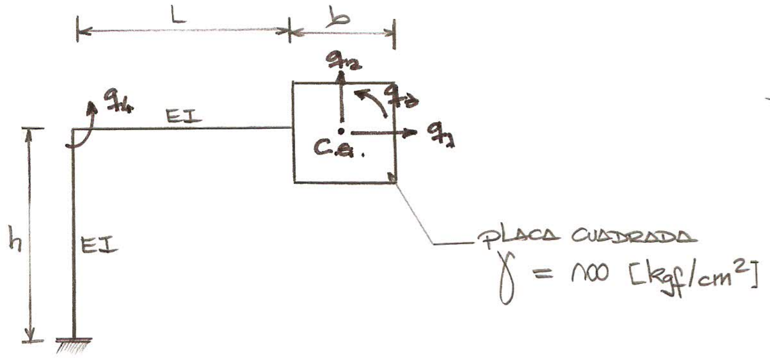


DATOS:

$EI = 10000\ [kgf\ m^2]$

$b = 1\,[m]$; $h = 5\,[m]$; $L = 2\,[m]$.

* GDL DINÁMICOS: q_1, q_2, q_3.

1. OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE MASA

E_c: ENERGÍA CINÉTICA DEL SISTEMA

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2} m \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right)}_{\text{ENERGÍA TRASLACIONAL}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{cg}\, \dot{q}_3^2}_{\text{ENERGÍA ROTACIONAL}} \qquad (1)$$

LA COMPONENTE (i,j) DE LA MATRIZ DE MASA, SE OBTIENE COMO:

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_j}$$

Y POR LO TANTO,

$$[M] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_{CG} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} m = 10{,}204\ [kgf \cdot s^2/m]; \\ I_{CG} = 1{,}701\ [kgf \cdot m \cdot s^2]; \end{array}\right\} \quad [M] = \begin{bmatrix} 10{,}204 & 0 & 0 \\ 0 & 10{,}204 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}701 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

2. OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ.

LA GENERACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ CONSTA DE DOS PASOS:

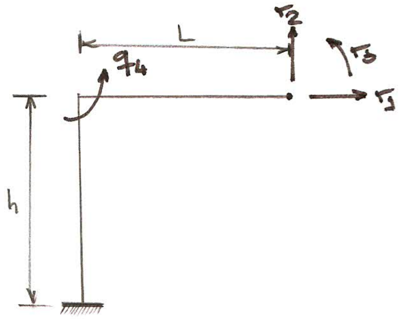
i) CONSTRUIR – POR GENERACIÓN DIRECTA – LA MATRIZ DE RIGIDEZ ASOCIADA A GDL DEFINIDOS EN LOS EXTREMOS DE LAS BARRAS $([K_1])$

ii) ESTABLECER UNA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN $([T])$ ENTRE LOS GDL DEFINIDOS EN EL EXTREMO DE LA BARRA Y AQUELLOS DEFINIDOS EN EL C.G DE LA PLACA.

FINALMENTE, LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA ES IGUAL A:

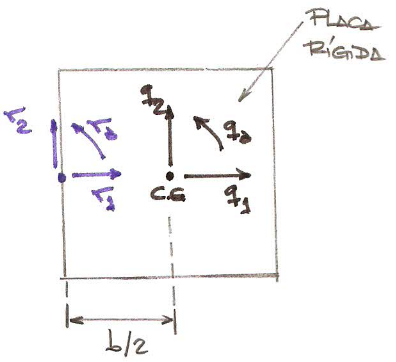
$[K] = [T]^T [K_1] [T]$. (POR DEMOSTRAR)

(i)



$$[K_1] = EI \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & r_3 & q_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12/h^3 & 0 & 0 & 6/h^2 \\ 0 & 12/L^3 & -6/L^2 & -6/L^2 \\ 0 & -6/L^2 & 4/L & 2/L \\ 6/h^2 & -6/L^2 & 2/L & 4/h + 4/L \end{bmatrix} \end{array} \qquad (4)$$

(ii)



$$\overbrace{\quad[\tilde{T}]^{-1}\quad}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} r_1=1 & r_2=1 & r_3=1 \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$[\tilde{T}]^{-1}$: Matriz de transformación entre (r_1, r_2, r_3) y (q_1, q_2, q_3)

Sigue que, $\{q\} = [T]^{-1}\{r\} \longrightarrow \{r\} = [T]\{q\}$ (6.a)

Donde:

$$[T] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (6.b) \quad ; \quad \{r\} = \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \hline q_4 \end{array}\right] \quad , \quad \{q\} = \left[\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \hline q_4 \end{array}\right]$$

$[\tilde{T}]$ ⟶

Matriz de rigidez:

En un resorte lineal y elástico, la energía elástica de deformación U está dada por la expresión $U = 1/2\, k q^2$, donde q denota la deformación. De forma análoga, para una estructura de varios GDL, la energía de deformación se obtiene a partir de la forma cuadrática siguiente:

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \qquad (7)$$

Donde $[K]$ es la matriz de rigidez de la estructura y $\{q\}$ el vector de desplazamientos nodales.

Utilizando las Ecs. (4), (6.a), (6.b) y (7) se obtiene lo siguiente:

$$U = \frac{1}{2} \{r\}^T [K_1] \{r\}$$

$$= \frac{1}{2} \{q\}^T \left([T]^T [K_1] [T] \right) \{q\} \qquad (8)$$

El término entre-paréntesis corresponde a la matriz de rigidez asociada a los GDL q_1, q_2, q_3 y q_4. Evaluando para $h = 5\,[m]$, $L = 2\,[m]$, $b = 1\,[m]$ y $EI = 10000\,[kgf \cdot m^2]$ se obtiene:

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{matrix} & K_{aa} & & K_{ap} \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 960 & 0 & 0 & 2400 \\ 0 & 15000 & -22500 & -15000 \\ 0 & -22500 & 38750 & 17500 \\ \hline 2400 & -15000 & 17500 & 28000 \end{array}\right] \\ \begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} \leftarrow q_1 \\ \leftarrow q_2 \\ \leftarrow q_3 \\ \leftarrow q_4 \\ K_{pp} \end{matrix} \qquad (9)$$

Matriz condensada:

$$[\tilde{K}] = [K_{aa}] - [K_{ap}][K_{pp}^{-1}][K_{ap}]^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 754{,}29 & 1285{,}71 & -1500 \\ 1285{,}71 & 6964{,}29 & -13125 \\ -1500 & -13125 & 27812{,}5 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix} \end{array}$$