Solución numérica de la ecuación de movimiento de un sistema de múltiples GDL

Código Matlab	Descripción

A. Ecuación de equilibrio dinámico: $[\boldsymbol{M}]\,\{\ddot{u}(t)\} + [\boldsymbol{C}]\,\{\dot{u}(t)\} + [\boldsymbol{K}]\,\{u(t)\} = \{P(t)\}$

$[\boldsymbol{M}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Matriz de masa de la estructura (n denota el número de grados de libertad dinámicos).

$[\boldsymbol{C}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Matriz de amortiguamiento clásica.

$[\boldsymbol{K}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Matriz de rigidez de la estructura.

$\{P(t)\} \in \mathbb{R}^{n}$: Vector de cargas externas.

B. Determinación de las frecuencias $\{\omega\}$, períodos $\{T\}$ y formas modales $[\boldsymbol{\Phi}]$.

b.1

```
[Phi,w2]=eig(inv(M)*K);
w=sqrt(diag(w2));
[w,Ind]=sort(w);
Phi=Phi(:,Ind);
T=(2*pi)./w;
```

Solución del problema generalizado de valores y vectores propios. El comando `sort` ordena las frecuencias modales en forma ascendente. Como cada frecuencia está asociada a una columna – forma modal – de la matriz $[\boldsymbol{\Phi}]$, al reordenar $\{\omega\}$ también se debe reordenar la matriz de formas modales (variable `Ind`).

b.2

```
Mm=Phi'*M*Phi; Mm=diag(Mm);
Phi=Phi*diag(1./sqrt(Mm));
Mm=diag(Phi'*M*Phi);
Km=diag(Phi'*K*Phi);
beta=diag(Phi'*C*Phi)./(2*Mm.*w);
```

Masas modales (matriz diagonal): $[\boldsymbol{M_m}] = [\boldsymbol{\Phi}]^T\,[\boldsymbol{M}]\,[\boldsymbol{\Phi}]$

Normalización: $\{\tilde{\phi_m}\} = \{\phi_m\}\,/\sqrt{M_m}$

Amortiguamiento modal:

$\beta_m = \{\phi_m\}^T\,[\boldsymbol{C}]\,\{\phi_m\}\,/(2\,M_m\,\omega_m)$

El comando `diag` genera un vector con los elementos ubicados en la diagonal de una matriz.

C. Fuerza modal ($\{P_m(t)\}$) y condiciones iniciales modales de desplazamiento ($\{y_0\}$) y velocidad ($\{\dot{y}_0\}$).

P: Matriz cuya componente (i,j) corresponde a la carga que actúa sobre el grado de libertad i – ésimo, evaluada en el tiempo $t_j = j\,\Delta t = j/F_s$ (F_s denota la frecuencia de muestreo).

c.1

```
Pm=Phi'*P;
```

Fuerza modal: $\{P_m(t)\} = [\boldsymbol{\Phi}]^T\,\{P(t)\}$

La componente (i,j) de la matriz `Pm` entrega la magnitud de la carga modal i – ésima evaluada en el tiempo $t_j = j\,\Delta t$.

c.2

```
yu0=Phi'*M*u0;
yv0=Phi'*M*v0;
```

Desplazamiento modal inicial:

$y_0^{(m)} = \{\phi_m\}^T\,[\boldsymbol{M}]\,\{u_0\}\,/\big(\{\phi_m\}^T\,[\boldsymbol{M}]\,\{\phi_m\}\big)$

Velocidad modal inicial:

$\dot{y}_0^{(m)} = \{\phi_m\}^T\,[\boldsymbol{M}]\,\{v_0\}\,/\big(\{\phi_m\}^T\,[\boldsymbol{M}]\,\{\phi_m\}\big)$

D. Determinación de las respuestas modales $\big(\{y_m(t)\}\big)$.

`[u,v,a]=resp1gdl(m,k,bt,P,Fs,u0,v0)` : Función que determina la respuesta dinámica de un sistema de un grado de libertad.

d.1

```
[n,m]=size(P); Yu=zeros(n,m);
Yv=zeros(n,m); Ya=zeros(n,m);
for i=1:n
 [um,vm,am]=resp1gdl(Mm(i),Km(i),beta(i),
                     Pm(i,:),Fs,yu0(i),yv0(i));
 Yu(i,:)=um; Yv(i,:)=vm; Ya(i,:)=am;
end
```

Ecuación de movimiento modal:

$\ddot{y_m}(t) + 2\beta_m\omega_m\dot{y}(t) + \omega_m^2 y(t) = \big(1/M_m\big)P_m(t)$

La ecuación de movimiento modal es una ecuación diferencial de 2^{do} orden en $y(t)$. Su solución numérica puede ser determinada a través de la función `resp1gdl`.

La componente (i,j) de la matriz `Yu` corresponde al desplazamiento modal i – ésimo evaluado en $t_j = j\,\Delta t$.

E. Vector de desplazamiento $\big(\{u(t)\}\big)$, velocidad $\big(\{v(t)\}\big)$ y aceleración $\big(\{a(t)\}\big)$.

e.1

```
u=Phi*Yu;
v=Phi*Yv;
a=Phi*Ya;
```

$\{u(t)\} = \sum_{m=1}^{n}\{\phi_m\}\,y_m(t) = [\boldsymbol{\Phi}]\,\{Y(t)\}$

Donde $\{Y(t)\} = \big[y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\big]^T$.

Las respuestas de velocidad y aceleración son determinadas por las expresiones:

$\{\dot{u}(t)\} = \sum_{m=1}^{n}\{\phi_m\}\,\dot{y}_m(t) = [\boldsymbol{\Phi}]\,\Big\{\dot{Y}(t)\Big\}$

$\{\ddot{u}(t)\} = \sum_{m=1}^{n}\{\phi_m\}\,\ddot{y}_m(t) = [\boldsymbol{\Phi}]\,\Big\{\ddot{Y}(t)\Big\}$