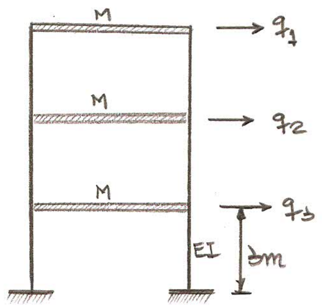
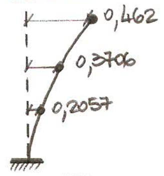
CI4203 - Dinámica de Estructuras : Ejercicio VII.



a) Identificación de los Grados de Libertad:

$$\{\phi_1\} = \begin{bmatrix} 0,462 \\ 0,3706 \\ 0,2057 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow q_1 \\ \leftarrow q_2 \\ \leftarrow q_3 \end{array} \longrightarrow$$



{Mayor desplazamiento en el techo}

1era Forma Modal

b) Matriz de masa:

De la figura,

$$[M] = 2{,}543 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

* **TI**: diag([2,543 , 2,543 , 2.543]) $\xrightarrow{\text{STO}}$ m

c) Obtención de las formas modales:

De la condición de ortogonalidad de los modos:

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j \\ 0 & , \text{ si } i \neq j \end{cases} \qquad (2.a)$$

Formas modales normalizadas por la matriz de masa.

Por lo tanto,

$$\{\phi_1\}^T [M] \{\phi_2\} \underset{\text{Por } (1)}{=} 2{,}543 \begin{bmatrix} 0,462 \\ 0,3706 \\ 0,2057 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -0,3706 \\ 0,2057 \\ \phi_{32} \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \phi_{32} = 0,462 \qquad (2.b)$$

* **TI**: El comando $(\cdot)^T$ lo obtienen como: 2nd + catalog + T.

$$\{\phi_1\}^T [M] \{\phi_3\} = 0,942\,\phi_{23} + 0,523\,\phi_{33} + 0,242 = 0 \qquad (2.c)$$

$$\{\phi_2\}^T [M] \{\phi_3\} = 0,523\,\phi_{23} + 1,175\,\phi_{33} - 0,194 = 0 \qquad (2.d)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2.c) y (2.d), se obtiene:

$$\phi_{23} = -0,462 \quad y \quad \phi_{33} = 0,37$$

Y en consecuencia,

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 0,462 & -0,3706 & 0,2057 \\ 0,3706 & 0,2057 & -0,462 \\ 0,2057 & 0,462 & 0,37 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

* **TI**: Guardar esta matriz en la variable "PHI".

d) La ecuación de movimiento de estructuras de N GDL es,

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\} \qquad (4.a)$$

Donde $\{u\}$ es el vector de desplazamiento, en nuestro caso, $\{u\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$.

Además,

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{N} \{\phi_i\} y_i(t) = [\phi]\{Y\} \qquad (4.b)$$

Donde $\{Y\} \overset{(\text{def})}{=} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$ es el vector de respuestas modales.

Observar entonces, que la solución de (4.a) queda completamente definida si se conocen las respuestas modales $y_i(t)$; $i = 1, \ldots, N$.

Reemplazando (4.b) en (4.a) y utilizando la condición de ortogonalidad de los modos:

$$[M]\left(\sum_i \{\phi_i\}\ddot{y}_i(t)\right) + [C]\left(\sum_i \{\phi_i\}\dot{y}_i(t)\right) + [K]\left(\sum_i \{\phi_i\} y_i(t)\right) = \{P(t)\} \quad / \{\phi_k\}^T \cdot$$

$$\underbrace{\{\phi_k\}^T[M]\{\phi_k\}}_{M_k = 1}\ddot{y}_k(t) + \underbrace{\{\phi_k\}^T[C]\{\phi_k\}}_{C_k = 2\beta_k \omega_k}\dot{y}_k(t) + \underbrace{\{\phi_k\}^T[K]\{\phi_k\}}_{K_k = \omega_k^2} y_k(t) = \underbrace{\{\phi_k\}^T\{P(t)\}}_{P_k(t)}$$

i.e., $$\ddot{y}_k(t) + 2\beta_k\omega_k\dot{y}_k(t) + \omega_k^2 y_k(t) = P_k(t) \quad (4.c) \quad ; \; k = 1, \ldots, N$$

En esta última ecuación, $P_k = \{\phi_k\}^T\{P\}$ denota la carga modal k-ésima. Se ha asumido además, que la matriz de amortiguamiento es <u>clásica</u>, esto es, $[C]$ cumple con la condición de ortogonalidad:

$$\{\phi_i\}^T[C]\{\phi_j\} = \begin{cases} C_i & ; \text{ si } i = j \\ 0 & ; \text{ si } i \neq j \end{cases} \qquad (4.d)$$

Volviendo al ejercicio:

Cargas modales

$$\{P(t)\} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,8 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix} \sin(\overline{\omega} t) \longrightarrow \{P_m(t)\} = [\Phi]^T\{P(t)\} = \begin{bmatrix} 14,664 \\ 8,825 \\ 2,065 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow P_1^0 \\ \leftarrow P_2^0 \\ \leftarrow P_3^0 \end{matrix} \sin(\overline{\omega} t) \qquad (5.a)$$

* **T.I: Generar el vector** $[P_1^0 ; P_2^0 ; P_3^0] \xrightarrow[\text{STO}]{} P_m$

La solución en régimen permanente para cada uno de los modos es:

De (5a), la frecuencia de la forzante es la misma para todos los modos

$$y_k(t) = \frac{P_k^0}{\omega_k^2} D_k \sin(\overline{\omega} t - \theta_k) \qquad (5.b)$$

Donde,

$$\{\gamma_k\} = \underbrace{\overline{\omega} * \{\omega\}.\wedge(-1)}_{\text{T.I}} = \begin{bmatrix} 1,803 \\ 0,644 \\ 0,445 \end{bmatrix}$$

* **T.I :** MatList$(\gamma_k) \xrightarrow[\text{STO}]{} \gamma_k$ (Vector → Lista)

$$\longrightarrow \{D_k\} = 1./\underbrace{\sqrt{\{(1-\{\gamma_k\}.\wedge 2).\wedge 2 + (2\cdot 0,05\{\gamma_k\}).\wedge 2\}}}_{\text{T.I}} = \begin{Bmatrix} 0,443 \\ 1,696 \\ 1,245 \end{Bmatrix}$$

Lista

$$\longrightarrow \{\theta_k\} = \underbrace{\operatorname{atan}\left(2\cdot 0,05\{\gamma_k\}./(1-\{\gamma_k\}.\wedge 2)\right)}_{\text{T.I.}} = \begin{Bmatrix} -0,08 \\ 0,109 \\ 0,055 \end{Bmatrix}$$

Lista.

* **T.I :** MatList$(\omega) \xrightarrow[\text{STO}]{} \omega$ y MatList$(P_m) \xrightarrow[\text{STO}]{} P_m$

Sigue que,

$$\{Y\} = \left(\{P_m\}./(\{\omega\}.\wedge 2)\right).* D_k \sin(\overline{\omega} t - \{\theta_k\}) = \begin{bmatrix} 0,094 \sin(\overline{\omega} t + 0,08) \\ 0,0275 \sin(\overline{\omega} t - 0,109) \\ 0,0023 \sin(\overline{\omega} t - 0,055) \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow y_1(t) \\ \leftarrow y_2(t) \\ \leftarrow y_3(t) \end{matrix} \qquad (5.c)$$

e) Desplazamiento en el tiempo para el 1er piso.

Como $\{u\} = \sum_{i=1}^{N} \{\phi_i\}\, y_i(t)$, se tiene lo siguiente para la 3era componente del vector $\{u\}$ (Recordar que $\{u\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$),

$$\text{1er Modo}: \quad \overset{\phi_{31}}{(0,2057)}\,\overset{y_1(t)}{(0,094)\sin(\bar{\omega}t+0,08)} = 0,0193\cos(0,08)\sin(\bar{\omega}t) + 0,0193\sin(0,08)\cos(\bar{\omega}t)$$

$$\text{2do Modo}: \quad \underset{\phi_{32}}{(0,462)}\,\underset{y_2(t)}{(0,0275)\sin(\bar{\omega}t-0,109)} = 0,0127\cos(0,109)\sin(\bar{\omega}t) - 0,0127\sin(0,109)\cos(\bar{\omega}t)$$

$$\text{3er Modo}: \quad \overset{\phi_{33}}{(0,37)}\,\overset{y_3(t)}{(0,0023)\sin(\bar{\omega}t-0,055)} = 0,00085\cos(0,055)\sin(\bar{\omega}t) - 0,00085\sin(0,055)\cos(\bar{\omega}t)$$

$$\text{Suma}: \quad u_3(t) = 0,0327\sin(\bar{\omega}t) + 0,000114\cos(\bar{\omega}t) \qquad (6.a)$$

Utilizando "Análisis de Fasores" podemos reescribir la Ec. (6.a) como sigue:

$$u_3(t) = \tilde{\rho}\cos(\bar{\omega}t - \tilde{\theta}) \qquad (6.b)$$

Donde:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{0,0327^2 + 0,000114^2} = 0,0327$$

$$\tilde{\theta} = \operatorname{atan}\left(\frac{0,0327}{0,000114}\right) = 1,57 \cong \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, $u_3(t) \cong 0,0327\sin(\bar{\omega}t) \quad (6.c)$.

f) Momento máximo en la base de las columnas del 1er Nivel:

$$M_b(t) = \frac{6EI}{h^2} \times u_3(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por (6.c)}}}{=} 21,8\sin(\bar{\omega}t) \longrightarrow M_b^{(max)} = 21,8\ [\text{tonf}\cdot\text{m}] \qquad (7)$$