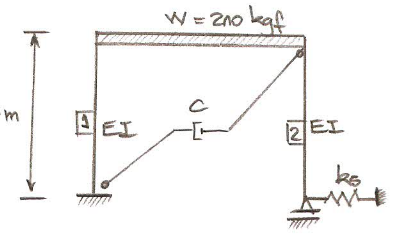
PROBLEMA 1. CONTROL I - DINÁMICA DE ESTRUCTURAS.

a)



(1) MASA DEL SISTEMA:

$$m^* = \frac{W}{g} = \frac{210}{9{,}8} = 21{,}43 \left[\frac{kgf\, s^2}{m}\right] \quad (1)$$

(2) RIGIDEZ EQUIVALENTE DE LA COLUMNA 2:

NOTAR QUE COLUMNA Y RESORTE CONFORMAN UN SISTEMA EN SERIE, POR LO TANTO:

$$\frac{1}{k_{eq}^{(2)}} = \frac{1}{(3EI/h^3)} + \frac{1}{k_s} \longrightarrow k_{eq}^{(2)} = \frac{111{,}1\, k_s}{k_s + 111{,}1} \quad (2)$$

Y POR LO TANTO,

$$k^* = \frac{12\,EI}{h^3} + k_{eq}^{(2)} = 444{,}4 + \frac{111{,}1\, k_s}{111{,}1 + k_s} \quad (3)$$

DONDE k^* ES LA RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA (O SISTEMA DINÁMICO)

AHORA, COMO $T_s = 1{,}2$ [S],

$$\omega = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{1{,}2} = 5{,}236 \left[\frac{RAD}{S}\right] \longrightarrow k^* = \omega^2 m^* = 587{,}52 \quad (4)$$

IGUALANDO (3) Y (4) SE OBTIENE:

PROBLEMA DE ENUNCIADO

$$444{,}4 + \frac{111{,}1\, k_s}{111{,}1 + k_s} = 587{,}52 \longrightarrow k_s = -497 \left[\frac{kgf}{m}\right] \quad (5)$$

b)

$$\beta = \frac{c}{2m^*\omega} = \frac{6{,}7}{2 \times 5{,}236 \times 21{,}43} = 0{,}03 \quad (6)$$

POR LO TANTO,

$$S_a = 1{,}1 \left(\frac{0{,}62}{1{,}2}\right)^{1{,}8} \left(\frac{0{,}05}{0{,}03}\right)^{0{,}4} \times 9{,}8 = 4{,}03 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\Rightarrow PS_d = \frac{S_a}{\omega^2} = \frac{4{,}03}{(5{,}236)^2} = 0{,}147 \ [m] \quad (7)$$

DENOTANDO POR Q_1 Y M_1 EL CORTE Y MOMENTO BASAL DE LA COLUMNA 1, Y POR Q_2 Y M_2 EL CORTE Y MOMENTO BASAL DE LA COLUMNA 2,

$$Q_1 = 12\frac{EI}{h^3} \times PS_d = (444{,}4)(0{,}147) = 65{,}33 \ [kgf] \quad (8.a)$$

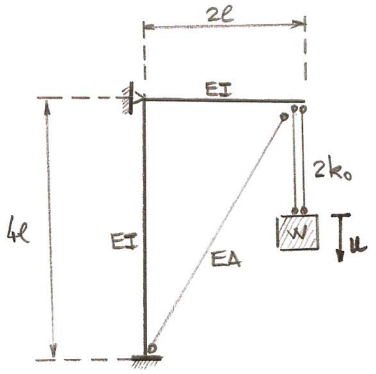
$$M_1 = 6\frac{EI}{h^2} \times PS_d = (666{,}67)(0{,}147) = 98 \ [kgf \cdot m] \quad (8.b)$$

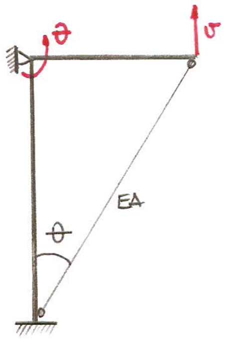
$$Q_2 = 0 \ (\text{APOYO DESLIZANTE}), \quad M_2 = 0 \ (\text{EXTREMO ROTULADO}) \quad (9)$$

c) COMO LA COLUMNA Y EL RESORTE CONFORMAN UN SISTEMA EN SERIE,

$$k_{eq}^{(2)} PS_d = k_s \Delta_s \longrightarrow \Delta_s = \frac{k_{eq}^{(2)}}{k_s} PS_d = \frac{(143{,}1)}{(-497)}(0{,}147) = -0{,}042 \ [m] \quad (10)$$

PROBLEMA 2.





DE LA FIGURA,

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

1) <u>RIGIDEZ EQUIVALENTE DE LA GRÚA</u>

$$\begin{array}{c} \\ [K] = \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} K_{aa} & K_{ap} \\ \left[\begin{array}{c|c} 3/8\ EI/\ell^3 + 2/(5\sqrt{5})\ EA/\ell & -3/4\ EI/\ell^2 \\ \hline -3/4\ EI/\ell^2 & 5/2\ EI/\ell \end{array}\right] \\ K_{pa} & K_{pp} \end{array}\begin{array}{l} \leftarrow v \\ \leftarrow \theta \end{array}$$

$$\tilde{K}_v = \frac{3}{20}\frac{EI}{\ell^3} + \frac{2EA}{5\sqrt{5}\ell} = \frac{3}{20}\frac{(9220)}{(27)} + \frac{2\ (7250)}{5\sqrt{5}\ (3)} = 483{,}5\left[\frac{Tonf}{m}\right] \quad (1.a)$$

$$\theta = -K_{pp}^{-1}K_{pa}\,v = \frac{3}{10}\frac{v}{\ell} = 0{,}1\ v \quad (1.b)$$

2) <u>ECUACIÓN DE MOVIMIENTO Y CONDICIONES INICIALES</u>

2.1) <u>CONDICIÓN INICIAL</u>

$k_{eq}^{(1)}$: RIGIDEZ EQUIVALENTE DEL SISTEMA GRÚA + CABLES.

$$\frac{1}{k_{eq}^{(1)}} = \frac{1}{483{,}5} + \frac{1}{2\,(20)} \longrightarrow k_{eq}^{(1)} = 36{,}94\left[\frac{tonf}{m}\right] \quad (2.a)$$

$$\Delta_{EST} = u_0 = \frac{W}{k_{eq}^{(1)}} = \frac{10}{36{,}94} = 0{,}27\ [m] \quad (2.b)$$

2.2) <u>ECUACIÓN DE MOVIMIENTO</u>:

$k_{eq}^{(2)}$: RIGIDEZ EQUIVALENTE DEL SISTEMA GRÚA + CABLE.

$$\frac{1}{k_{eq}^{(2)}} = \frac{1}{483{,}5} + \frac{1}{20} \longrightarrow k_{eq}^{(2)} = 19{,}21\left[\frac{tonf}{m}\right] \quad (3.a)$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{10}{9{,}8} = 1{,}02\left[\frac{tonf\cdot s^2}{m}\right]\ ; \quad w = \sqrt{\frac{k_{eq}^{(2)}}{m}} = 4{,}34\left[\frac{RAD}{s}\right] \quad (3.b)$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k_{eq}^{(2)}u = W \quad (4)$$

PLANTEANDO EL CAMBIO DE VARIABLES: $z \overset{(def)}{=} u - W/k_{eq}^{(2)}$, SE PUEDE REESCRIBIR LA Ec. (4) COMO SIGUE:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + k_{eq}^{(2)}z = 0 \quad (5.a)$$

SUJETO A:

$$u(0) = 0{,}27 \longrightarrow z(0) = 0{,}27 - 10/19{,}21 = -0{,}25\ ; \quad (5.b)$$

$$\dot{u}(0) = 0 \longrightarrow \dot{z}(0) = 0 \quad (5.c)$$

La solución de (5.a) está dada por la expresión:

$$Z(t) = e^{-\beta\varpi t}\left\{ Z(0)\cos(\varpi_d t) + \frac{Z(0)\beta\varpi}{\varpi_d}\sin(\varpi_d t)\right\}$$

$$= -\rho\, e^{-\beta\varpi t}\cos(\varpi_d t - \theta) \qquad (6.a)$$

Donde: $\rho = \sqrt{\left(\frac{|Z(0)|\beta\varpi}{\varpi_d}\right)^2 + |Z(0)|^2} = 0{,}25$ y $\varpi_d = \varpi\sqrt{1-\beta^2} = 4{,}339\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$. (6.b)

3) Determinación del momento volcante

Como $Z(t) = u(t) - \frac{W}{k_{eq}^{(2)}}$, $\quad u(t) = -0{,}25\, e^{-0{,}087t}\cos(\varpi_d t - \theta) + 0{,}52 \qquad (7)$

Como grúa y cable constituyen un sistema en serie:

$$u_{grúa}(t) = \frac{k_{eq}^{(2)}}{\bar{k}}u(t) = 0{,}0397\,u(t) \qquad (8)$$

Y de la Ec. (1.b) – reconociendo que $v(t) = -u_{grúa}(t)$ – se obtiene lo siguiente:

$$\theta = -0{,}1\,u_{grúa} = -0{,}00397\,u(t) \qquad (9)$$

Conocido el giro, el momento volcante queda definido por la expresión:

$$M_{volc}(t) = \frac{2EI}{(4\ell)}\theta(t) = -6{,}1\,u(t) = -3{,}172 + 1{,}525\,e^{-0{,}087t}\cos(\varpi_d t - \theta) \qquad (10)$$

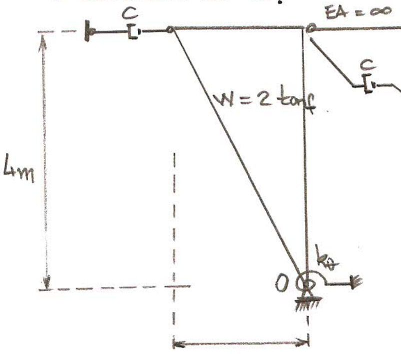
Ahora, $\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{|\dot{Z}_0|\beta\varpi}{\varpi_d|Z_0|}\right) = 1{,}146° \longrightarrow \varpi_d t_m - \theta = \pi$

$$t_m = \frac{\pi+\theta}{\varpi_d} = 0{,}728\ [s]$$

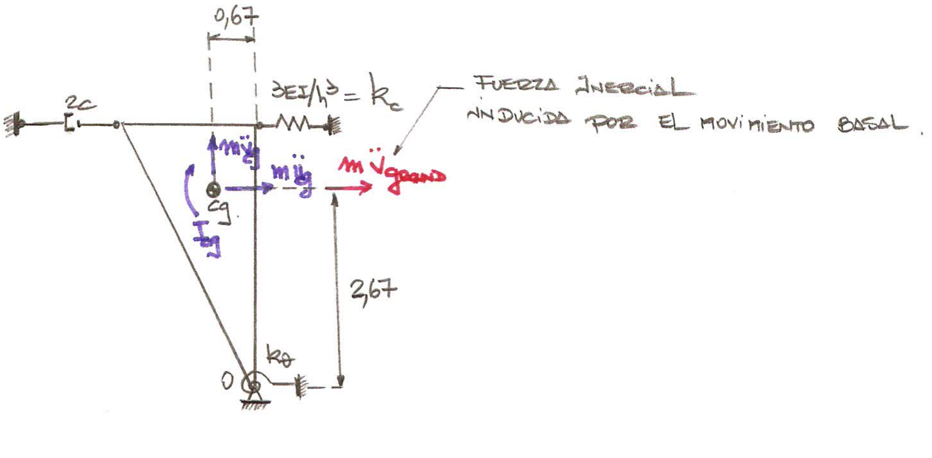
Y por lo tanto

$$M_{volc}^{(max)} = -3{,}172 - 1{,}525\,e^{-0{,}087(0{,}728)}$$
$$= -4{,}603\ [\text{tonf}\cdot\text{m}].$$

Problema 3.



Sistema original



Sistema equivalente

De la figura, $m = \dfrac{W}{g} = \dfrac{2000}{9{,}8} = 204{,}1 \left[\dfrac{kgf\cdot s^2}{m}\right]$ (1.a)

Por equilibrio de momento en torno al punto O:

$$u_{cg} = 2{,}67\,\theta \longrightarrow \ddot{u}_{cg} = 2{,}67\,\ddot{\theta} \;;\quad v_{cg} = 0{,}67\,\theta \longrightarrow \ddot{v}_{cg} = 0{,}67\,\ddot{\theta}$$

$$\sum M_o = 0 : \quad m\ddot{u}_{cg} \times 2{,}67 + m\ddot{v}_{cg} \times 0{,}67 + I_{cg}\ddot{\theta} + m\ddot{v}_g \times 2{,}67 + (8c\dot{\theta})(4) + (4\theta k_c)(4) + k_\theta\,\theta = 0$$

Sigue que:

$$\left\{(204{,}1)(2{,}67^2 + 0{,}67^2) + \frac{204{,}1}{18}(4^2 + 2^2)\right\}\ddot{\theta} + 32c\dot{\theta} + \left\{16k_c + 500\right\} = -3204{,}3\sin(\overline{\omega}t)$$

ie,
$$\underbrace{(1773{,}41)}_{m^*}\ddot{\theta} + \underbrace{(32c)}_{c^*}\dot{\theta} + \underbrace{(16k_c + 500)}_{k^*} = \underbrace{-3204{,}3}_{P_o^*}\sin(\overline{\omega}t) \qquad (1.b)$$

En régimen permanente,
$$\theta_{max} = \frac{P_o^*}{k^*}\frac{1}{((1-\gamma^2)^2 + (2\beta\gamma)^2)^{1/2}}$$

Y por lo tanto, $u_{max} = 4\,\theta_{max}$

$$= \frac{4P_o^*}{k^*}\frac{1}{((1-\gamma^2)^2 + (2\beta\gamma)^2)^{1/2}} \times \frac{m^*\overline{\omega}^2}{m^*\overline{\omega}^2}$$

$$= \left(\frac{4P_o^*}{m^*\overline{\omega}^2}\right)\frac{\gamma^2}{((1-\gamma^2)^2 + (2\beta\gamma)^2)^{1/2}} \qquad (2)$$

Imponiendo $u_{max} = 0{,}7\,[m]$; se obtiene:

$$\frac{\gamma^2}{((1-\gamma^2)^2 + (2\beta\gamma)^2)^{1/2}} = 8{,}603 \quad \begin{cases} \gamma_1 = 0{,}954 \longrightarrow \omega_1 = \overline{\omega}/\gamma_1 = 9{,}879 \longrightarrow k_1^* = 173075 & (3.a) \\ \gamma_2 = 1{,}0549 \longrightarrow \omega_2 = \overline{\omega}/\gamma_2 = 8{,}934 \longrightarrow k_2^* = 141547 & (3.b) \end{cases}$$

Sigue que: $16k_c + 500 = 141547 \longrightarrow k_c = 8815{,}4 \longrightarrow EI = 23508\ [kgf\cdot m^2]$

$\cong 23000\ [kgf\cdot m^2]\ (\gamma > \gamma_{resonancia})$

Finalmente,

$$k^* = 16(8625) + 500 = 138500 \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{138500}{1773{,}41}} = 8{,}84 \qquad (4.a)$$

Y por lo tanto,

$$c^* = 2m^*\omega\beta = 2(1773{,}41)(8{,}84)(0{,}03) = 940{,}6 \longrightarrow c = \frac{940{,}62}{32} = 29{,}4\left[\frac{kgf\cdot s}{m}\right] \qquad (4.b)$$