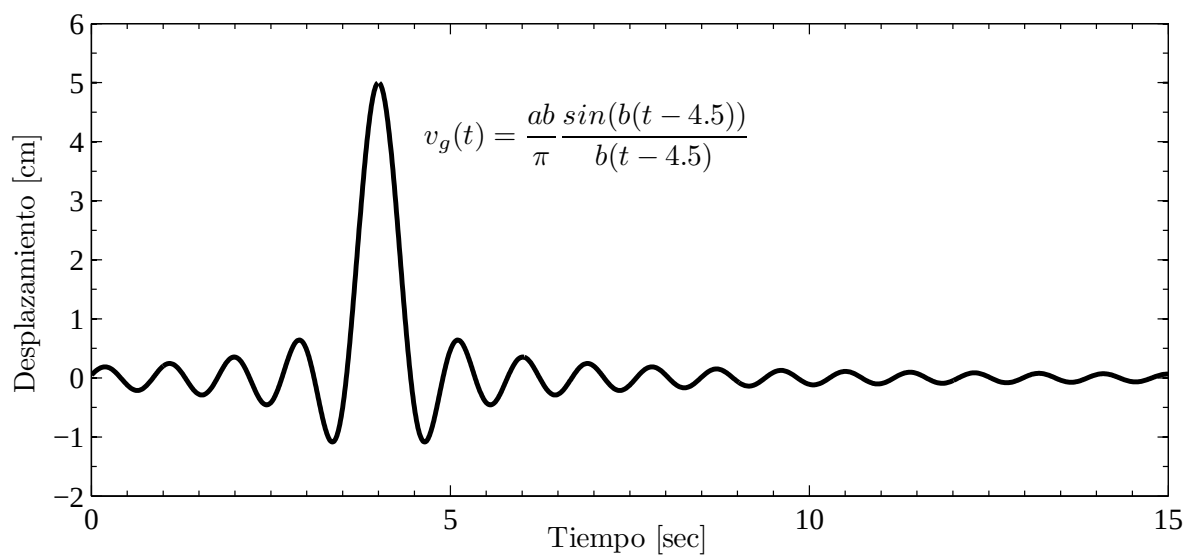


Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil.

Ejercicio V
CI4203 Dinámica de Estructuras
Prof: Rubén Boroschek Krauskopf.
Mauricio Sarrazín Arellano.

Fecha de entrega: 15 de Octubre de 2010.

Problema 1 (60 %).



DATOS:

$ab/\pi = 5 [cm] - b = 7,0 [rad/s] - m = 1 [kg_f s^2/m] - k = 630 [kg_f/m] - c = 2,52 [kg_f s/m]$.

La gráfica muestra el desplazamiento basal artificial ($v_g(t)$) utilizado en el estudio dinámico de una estructura de un grado de libertad, frente a un terremoto de tipo impulsivo.

El objetivo de este problema consiste en determinar, utilizando el dominio de las frecuencias, la ENERGÍA DE DISIPACIÓN TOTAL de una estructura de 1 GDL frente a una aceleración basal arbitraria; y posteriormente, aplicar dicha derivación en el análisis de la respuesta de la estructura ante un desplazamiento basal del tipo **sinc** (como el descrito en la figura).

a) Demuestre la RELACIÓN DE PARSEVAL:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

donde $x(t)$ denota una señal arbitraria.

Indicación I. (Transformada y Anti-Transformada de Fourier)

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \end{aligned}$$

Indicación II.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t}d\omega = 2\pi\delta(t)$$

Indicación III.

Si $f(t)$ es una función integrable arbitraria, definida sobre el dominio $-\infty < t < \infty$, y denotamos por $\delta(t)$ a la función DELTA DE DIRAC, entonces

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt$$

b) La INTEGRAL DE DUHAMEL establece una relación entre la carga que actúa sobre una estructura y su respuesta en el tiempo. El caso general considera que la excitación ($p(t)$) comienza en $t \rightarrow -\infty$ y por ende,

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^t p(\tau)h_s(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)h_s(t - \tau)H(t - \tau)d\tau \end{aligned}$$

donde $h_s(t - \tau) = \exp\{-\beta\omega_s(t - \tau)\}\sin(\omega_d(t - \tau))$, $H(t - \tau)$ la función escalón de Heavside y $u(t)$ el desplazamiento. Definiendo $\tilde{h}_s(t) = h_s(t - \tau)H(t - \tau)$, demuestre que:

$$U(\omega) = \tilde{H}_s(\omega)P(\omega)$$

c) Demuestre que: $\tilde{H}_s(\omega) = \frac{\omega_d}{\omega_d^2 + (\beta\omega_s + i\omega)^2} = \frac{\omega_d}{\omega_s^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega\omega_s}$.

Indicación.

En su derivación utilice las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t}dt &= \frac{1}{\alpha + i\omega} \end{aligned}$$

- d) Utilizando sus resultados de los puntos anteriores, demuestre que la ENERGÍA TOTAL DE DISIPACIÓN de una estructura de 1 GDL, está dada por la expresión:

$$\begin{aligned} W_d &= c \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}^2(t) dt \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |U(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Indicación.

$$\mathbf{F} \left(\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right) = (i\omega)^n X(\omega)$$

Donde $\mathbf{F}(\cdot)$ denota el operador **Transformada de Fourier**.

- e) Matemáticamente, se define la INTENSIDAD DE ARIAS por la expresión,

$$I_A = \frac{\pi}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{v}_g^2(t) dt$$

donde $\ddot{v}_g(t)$ denota el registro de aceleraciones basales. Utilizando la RELACIÓN DE PARSEVAL, determine la Intensidad de Arias de la excitación basal descrita en la figura (función **sinc**).

Indicación.

$$\mathbf{F} \left(\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right) = (i\omega)^n X(\omega)$$

- f) Determine la energía total disipada por una estructura de 1 GDL ($m = 1 [kg_f s^2/m]$ – $k = 630 [kg_f/m]$ – $c = 2,52 [kg_f s/m]$), excitada por el desplazamiento basal descrito en la figura (función **sinc**).

Indicación I.

Utilice la expresión:

$$\mathbf{F} \left(\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right) = (i\omega)^n X(\omega)$$

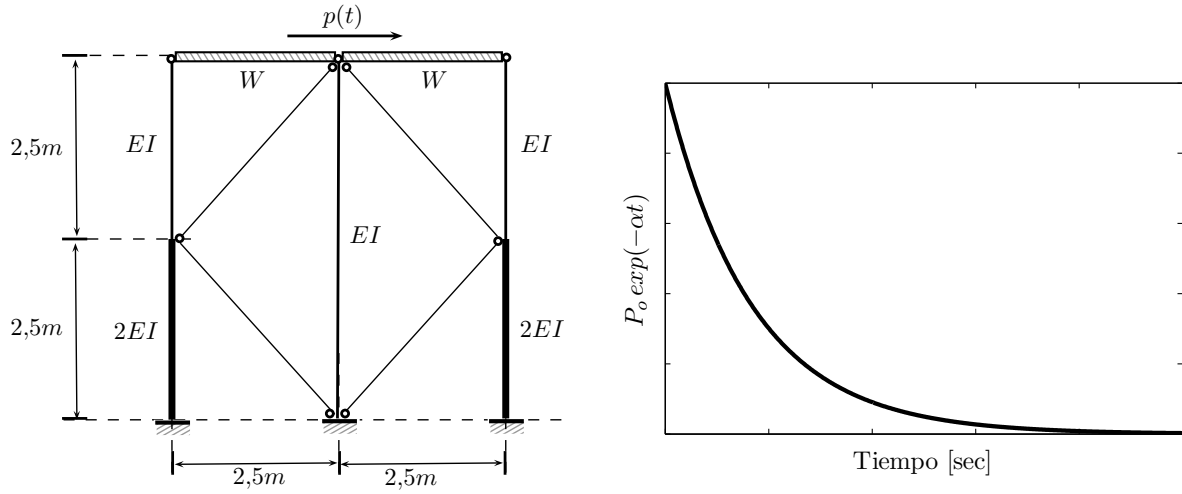
para reescribir la carga efectiva inducida por una aceleración basal como: $P_{ef}(\omega) = m\omega^2 V_g(\omega)$, siendo $V_g(\omega)$ la transformada de Fourier del desplazamiento basal.

Indicación II.

Pruebe que $v_g(t) = \mathbf{F}^{-1}\{Vg(\omega)\}$, donde:

$$V_g(\omega) = \begin{cases} a & \text{si } -b \leq \omega \leq b \\ 0 & \text{si } |\omega| > b \end{cases}$$

Problema 2 (40 %).



DATOS: $EI = 1000[kg_f m^2]$ – $EA = 200[kg_f]$ – $P_0 = 0,6[g]$.

La figura muestra una plataforma formada por dos losas de peso W , las cuales se encuentran APOYADAS sobre un sistema de tres columnas axiales indeformables (siendo dos de ellas **columnas compuestas**) y cuatro bielas de rigidez axial EA . El sistema es excitado por una carga exponencial definida por la expresión: $p(t) = P_0 e^{-\alpha t}$, donde $\alpha \leq \beta \omega_s$ (ω_s denota la frecuencia natural de la estructura).

En base a esta información, determine:

- La magnitud del peso W de modo que el período de la estructura (T_s) sea igual a $0,5 [sec]$.
- Utilizando la INTEGRAL DE DUHAMEL, demuestre que:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \int_0^t p(\tau) e^{-\beta \omega_s (t-\tau)} \sin(\omega_d (t-\tau)) d\tau \\
 &= -\frac{P_0}{\sqrt{\omega_d^2 + (\beta \omega_s - \alpha)^2}} e^{-\beta \omega_s t} \cos(\omega_d t - \theta) + \frac{P_0}{\omega_d^2 + (\beta \omega_s - \alpha)^2} \omega_d e^{-\alpha t}
 \end{aligned}$$

- Asumiendo que $\beta \ll 1$, compruebe que $0 \leq \theta < \pi/4$.
- Utilizando los resultados de los puntos (b) y (c), determine una expresión analítica para el desplazamiento máximo del sistema.