

Universidad de Chile Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas Departamento de Ingeniería Civil

Dinámica Avanzada de Estructuras - CI62V

Identificación de las Propiedades Dinámicas de un Estanque

José Luis Caroca Gaete Semestre Otoño 2009

1. Introducción

1.1. Antecedentes generales

El objetivo de la experiencia de laboratorio, es realizar mediciones acelerográficas sobre un estanque sometido a excitaciones tipo ruido blanco y aceleraciones basales dadas por el registro de *Llolleo N10E 1985*. Adicionalmente, se analizan las propiedades dinámicas del estanque, en particular su períodos y amortiguamientos modales, para sus estados vacío y con un nivel de agua de $30,5 \, cm$ (altura de la columna de agua).

En la medición se utilizan 7 acelerómetros tipo MEMS, los cuales se instalan sobre el manto del estanque siguiendo la distribución indicada en la figura 1. Un acelerómetro adicional tipo FBA11, conectado a la mesa vibratoria, mide las aceleraciones relativas a la forzante aplicada sobre la mesa.



Figura 1: Distribución de acelerómetros sobre el estanque.

Las tablas siguientes resumen la información asociada al ensayo del estanque,

Datos		
Material del estanque	Plástico	
Módulo de elasticidad (E_e)	950 MPa	
Peso específico (γ_e)	$0,\!95T/m^3$	
Altura promedio (H_e)	95,5cm	
Diámetro promedio (D_e)	56,0cm	
Material placa base	Madera	
Espesor placa base (e_{pl})	20mm	

Información General		
Registro	Archivo	Excitación
1	API1	Ruido Blanco
2	API2	Llolleo N10E
3	API3	Ruido Blanco
4	API4	Llolleo N10E

Información Sensores			
Sensor	Ángulo	Altura	Calibración
	[deg]	[cm]	[volt/g]
0	0.00	0.00	2.500
1	0.00	95.5	1.019
2	69.50	95.5	1.028
3	127.5	95.5	1.019
4	213.5	95.5	0.995
5	266.5	95.5	0.990
6	0.00	69.0	0.986
7	0.00	39.0	1.029

1.2. Marco teórico

En el proceso de identificación en el espacio de la frecuencia, típicamente se utilizan los espectros de Fourier, de densidad de potencia (*Power Spectral Density* o PSD), de auto-correlación, de correlación cruzada, funciones de transferencia y funciones de coherencia.

La auto-correlación es la correlación de una señal consigo misma y corresponde a un indicador de la periocidad de la señal. Matemáticamente, la auto-correlación de una señal aleatoria correponde al valor esperado de la correlación entre dos valores de una serie de tiempo, separados por una diferencia de tiempo τ , esto es,

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t+\tau) \, d\tau \tag{1}$$

El espectro de potencia (PSD) se define como la transformada de Fourier de la función de auto-correlación. Su estimación discreta se conoce como *periodograma*.

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-\hat{j}\omega\tau} d\tau$$
⁽²⁾

Un punto importante que es necesario recalcar respecto al uso del periodograma, es que la estimación del valor del espectro de potencia tiene una varianza del 100% y esta varianza es independiente del número de

puntos utilizada en su evaluación. Una manera de disminuir la varianza del proceso es tomar el promedio de los distintos segmentos de una señal.

Para identificar las propiedades dinámicas de la estructura utilizando el espectro de potencia o la transformada de Fourier, es necesario identificar las frecuencias predominantes y la relación de amplitud. En tanto, el amortiguamiento viscoso equivalente (β) puede ser determinado utilizando el método del ancho de banda.

Excitación tipo ruido blanco

El ruido blanco se define como una excitación estocástica no correlacionada en el tiempo, es decir, una excitación tal que su función de auto-correlación es un delta de dirac centrado en cero.

$$R_p(\tau) = p_0 \delta(\tau) \tag{3}$$

Conforme a la definición de ruido blanco, el espectro de densidad de potencia de un ruido blanco será la transformada de Fourier de su función de auto-correlación,

$$S_p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R_p(\tau) e^{-\hat{j}\omega\tau} d\tau$$
$$= \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}}$$

Si se denota por $H_{F-D}(\hat{j}\omega)$ a la función de transferencia de un oscilador de un grado de libertad, entonces el espectro de potencia de su respuesta $(S_x(\omega))$ y el espectro de potencia de la señal de entrada $(S_p(\omega))$ se relacionan a través de la expresión,

$$S_x(\omega) = \|H_{F-D}(\hat{j}\omega)\|^2 S_p(\omega) \tag{4}$$

Considerando que la excitación corresponde a un ruido blanco, la ecuación anterior permite obtener,

$$S_x(\omega) = \frac{p_0}{m^2 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega_n\omega)^2}$$
(5)

De acuerdo a las propiedades de la transformada de Fourier, la transformada de la derivada en el tiempo de una función es igual a la transformada de la función por $\hat{j}\omega$. Esta propiedad conduce a los siguientes resultados para el espectro de potencia de la velocidad y aceleración respectivamente,

$$S_{\dot{x}(\omega)} = \omega^2 \|H_{F-D}(\hat{j}\omega)\|^2 S_p(\omega)$$
(6)

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 \|H_{F-D}(\hat{j}\omega)\|^2 S_p(\omega)$$
(7)

Mientras que las funciones de auto-correlación para la velocidad y aceleración de la respuesta de una excitación tipo ruido blanco, quedan determinadas por,

$$R_{\dot{x}(\omega)} = \frac{p_0 \omega_n^3 e^{-\beta \omega |\tau|}}{4k^2 \beta} \left(\cos(w_d \tau) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin(\omega_d \tau) \right)$$
(8)

$$R_{\ddot{x}}(\omega) = \frac{p_0 \omega_n^5 e^{-\beta \omega |\tau|}}{4k^2 \beta} \left((1 - 4\beta^2) \cos(w_d \tau) + \frac{4\beta^3 - 3\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sin(\omega_d \tau) \right)$$
(9)

Razones de amortiguamiento a partir del ancho de banda del espectro de potencia

El espectro de potencia de la respuesta de un oscilador frente a una acción del tipo ruido blanco es,

$$S_x(\omega) = \frac{p_0}{m^2 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega_n\omega)^2}$$
(10)

El máximo de la expresión anterior se obtiene derivando el denominador (derivada de la división) e igualando a cero, con lo cual,

$$\omega_{max} = \omega_n \sqrt{1 - 2\beta^2} = \omega_r \tag{11}$$

A la frecuencia que maximiza el espectro de potencia se le suele llamar como frecuencia resonante (ω_r) . Reemplazando este valor en la ecuación (10) se obtiene,

$$S_x(\omega_{max}) = \frac{p_0}{m^2 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{4\beta^2 \omega_n^4 (1-\beta^2)}$$
(12)

Se define la variable λ como,

$$\lambda = \frac{S_x(\omega_{max})}{S_x(\omega)} \tag{13}$$

$$= \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega_n\omega)^2}{4\beta^2\omega_n^4(1 - \beta^2)}$$
(14)

La ecuación anterior es cuadrática con respecto a ω^2 . Las soluciones de esta ecuación ($\omega_1^2 \ge \omega_2^2$) verifican las expresiones,

$$A = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda - 1}}$$
(15)

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{A^2 + 1}} \right)} \tag{16}$$

Con lo que es posible determinar el amortiguamiento a partir del ancho de banda del espectro de potencia del desplazamiento. Una simplificación a la expresión anterior es la propuesta por Kawasumi-Shima 1965, relación que muestra un ajuste cuasi-perfecto para valores de A menores o iguales a 0,5,

$$\beta = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{3}{8} A^2 \right) \tag{17}$$

En la práctica se suele emplear el ancho de banda en media potencia ($\lambda = 2$). En el caso del espectro de potencia de las aceleraciones, las expresiones (16) y (17) siguen siendo válidas en la estimación del amortiguamiento, más aún, y para este punto, la única diferencia entre el espectro de potencia de desplazamientos y aceleraciones, es su frecuencia resonante, que en el caso de aceleraciones queda definida por,

$$\omega_r = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\beta^2}} \tag{18}$$

Uno de los problemas asociados a la determinación del amortiguamiento (amortiguamiento aparente) a través de este método, es la distorsión por *leakage*, la cual depende del número de ciclos incluidos en la ventana utilizada. En la figura (1.2) se muestra la relación entre el amortiguamiento aparente y el amortiguamiento corregido, en función del número de ciclos considerado en la definción de una ventana tipo *Hanning* (Francisco Hernández, 2009),



Modificación de Razón de Amortiguamiento en Función del Número de Ciclos, Ventana Hanning

2. Identificación de frecuencias y amortiguamientos modales

En esta sección se determinan las frecuencias de resonancia ω_r y amortiguamientos modales β de los sistemas estanque vacío y estanque lleno (Nivel de agua: 30,5 [cm]). Para ello se analizan los espectros de potencias (PSD), generados a través del método de WELCH, de los registros de aceleraciones para una excitación tipo ruido blanco (archivos: api1.txt, api2.txt).

2.1. Análisis del estanque vacío



Figura 2: Espectro de potencia para los registros de aceleraciones del estanque vacío - Método de Welch.





En el espectro de potencia presentado en la figura (2), se observan principalmente tres peaks, ubicados en las bandas de frecuencias 20[Hz] - 23[Hz], 24[Hz] - 30[Hz] y 40[hz] - 50[hz]. Las frecuencias de resonancia, períodos y amortiguamientos (aparentes) se resumen en la tabla siguiente,

Estanque Vacío		
Período [s]	Frecuencia [Hz]	Amortiguamiento
0.0461	21.700	0.0413
0.0398	25.120	0.0320
0.0224	44.670	0.0244

2.2. Análisis del estanque lleno



Figura 3: Espectro de potencia para los registros de aceleraciones del estanque lleno - Método de Welch.







24





En el espectro de potencia presentado en la figura (3), se observan claramente seis peaks, ubicados en las bandas de frecuencias 16[Hz] - 18,5[Hz], 18,5[Hz] - 20[Hz], 20[hz] - 23[hz],44[hz] - 56[hz], 48[hz] - 55[hz] y 68[hz] - 78[hz]. Las frecuencias de resonancia, períodos y amortiguamientos (aparentes) se resumen en la tabla siguiente,

Estanque Lleno		
Período [s]	Frecuencia [Hz]	Amortiguamiento
0.0563	17.760	0.0408
0.0524	19.080	0.0485
0.0470	21.260	0.0311
0.0201	49.660	0.0298
0.0190	52.520	0.0210
0.0135	74.220	0.0232

3. Modelación del estanque: Método de elementos finitos FEM

La modelación del estanque fue realizada a través del software de elementos SAP2000 v12 ADVANCED. En su modelación se emplearon elementos finitos tipo *shell* - *thin*, de 3,9 [*mm*] de espesor. Dado que la base del estanque fue adherida a la placa base a través de un pegamento epóxico, en la modelación se considero una condición de empotramiento perfecto entre el manto del estanque y la placa base (y por consiguiente, la mesa vibradora). Se considera que los modelos están sujetos a una aceleración basal dada por el registro de Llolleo N10E 1985.

En la modelación de estanques con líquidos en su interior, es común utilizar el sistema equivalente simplificado propuesto por HOUSNER en el año 1954. Sin embargo, en la unión resorte - manto se genera una concentración de tensiones inexistente en el sistema real. Para evitar lo anterior y dada la altura del agua (30,5 [cm]), en la modelación del estanque lleno se utilizó el modelo presentado como modelo II en la figura (4). Este método involucra considerar dos materiales idénticos en sus propiedades, salvo por su densidad, ya que como se muestra en la figura, los elementos inferiores consideran la densidad del material base, en este caso el plástico, y una densidad equivalente al peso de agua contenido por el estanque.

Plástico		Plástico + Agua	
Densidad $[ton_f/m^3]$	0.98	Densidad $[ton_f/m^3]$	30
Módulo de Elasticidad [MPa]	700	Módulo de Elasticidad [MPa]	700
Módulo de Poisson []	0.4	Módulo de Poisson []	0.4
	Masa Convectiva	Material Equivalente	h
Modelo I		Modelo II	

Figura 4: Modelación dinámica del estanque lleno.

3.1. Estanque vacío: Modelación y resultados



Figura 5: Modelación por elementos finitos del estanque vacío.







En la figuras anteriores, se comparan los registros de aceleraciones de los canales 1, 6 y 7 (la orientación de toma de datos de estos sensores, coincide con la dirección de aplicación de la forzante de la mesa vibradora), con las aceleraciones absolutas determinadas a partir del análisis dinámico del modelo de elementos finitos del estanque. Se observa la coincidencia casi-perfecta entre ambas curvas, lo cual se explica por la alta rigidez del sistema. Más aún, si se comparan los tres gráficos anteriores, se puede observar que las respuestas detectadas por cada uno de los sensores es asimilable al registro de aceleraciones aplicado en la base del estanque, el cual es detectado por el canal 0, ligado a la mesa vibradora.

3.2. Estanque lleno: Modelación y resultados



Figura 6: Modelación por elementos finitos del estanque lleno.







De manera análoga a lo realizado en el caso del estanque vacío, para el estanque lleno se han comparado las respuestas de aceleración absoluta obtenidas a través del modelo de elementos finitos, con los registros de aceleraciones de los canales 1, 6 y 7. Lo primero es resaltar la perturbación inicial en la toma de datos, lo que se representa a través de una saturación de la señal para tiempos ubicados en la vecindad de los 20 [s]. Lo segundo es notar, que a diferencia de lo ocurrido con el estanque vacío, el movimiento aleatorio del agua en el interior del estanque, provoca perturbaciones entre los resultados entregados por el modelo teórico a través de elementos finitos y los registros de aceleraciones tomados en el laboratorio.

La tablas siguientes resumen los períodos y frecuencias modales obtenidas del modelo de elementos finitos. Notar que estos valores aparecen repetidos, lo cual se debe a la simetría de la sección en las direcciones X e Y,

	Estanque	Vacío
Num	Período [s]	Frecuencia [Hz]
1	0.0464	21.55
2	0.0464	21.55
3	0.0347	28.81
4	0.0347	28.81
5	0.0315	31.75
6	0.0315	31.75
7	0.0202	49.56
8	0.0202	49.56
9	0.0177	56.65
10	0.0177	56.65

Estanque Lleno		
Num	Período [s]	Frecuencia [Hz]
1	0.0607	16.48
2	0.0607	16.48
3	0.0585	17.08
4	0.0585	17.08
5	0.0572	17.48
6	0.0572	17.48
7	0.0513	19.47
8	0.0513	19.47
9	0.0468	21.36
10	0.0468	21.36